

## OPTYMALNA NIEJEDNORODNOŚĆ PLASTYCZNA SKRĘCANEGO PRĘTA JAKO ZAGADNIENIE NUMERYCZNE

ANDRZEJ MIODUCHOWSKI (WARSZAWA)

### 1. PROBLEM

W praktyce inżynierskiej spotykamy się ze skręcanymi prętami przyzmatycznymi niejednorodnymi. Niejednorodność ta może być spowodowana np. złożeniem pręta z kilku przyzmatycznych części o różnych granicach plastyczności [1], co powoduje jej skokowe zmiany w polu przekroju poprzecznego, lub też może się zmieniać w sposób ciągły na skutek zabiegów technologicznych. Z punktu widzenia zastosowań praktycznych interesujący jest problem optymalnego rozkładu granicy plastyczności w danym przekroju poprzecznym, tzn. takiego jej rozkładu, który zapewni maksymalną nośność graniczną tego pręta.

Otrzymane wyniki są już bezpośrednimi wskazówkami dla inżyniera. Oczywiście, nie zawsze możemy (z innych względów technologicznych, użytkowych itp.) zrealizować taki idealny rozkład, wiemy jednak w jakim kierunku powinny iść zmiany i ulepszenia. Zagadnienia związane z tym problemem dla przypadku skokowych zmian granicy plastyczności omówione są w pracy [2], a dla przypadku zmiany ciągłej pewne rozwiązania przedstawiono w [3]. Niniejsza praca poświęcona jest również problemowi optymalnego rozkładu zmieniającej się w sposób ciągły niejednorodności w polu przekroju poprzecznego i jest niejako kontynuacją poprzedniej publikacji. Konieczność rozwiązania tego zagadnienia na drodze numerycznej wynika z następujących powodów:

1. Rozwiązanie przedstawionego problemu ekstremalnego na drodze analitycznej jest bardzo trudne. Uzyskane wyniki otrzymano tylko na podstawie warunków koniecznych istnienia ekstremum, jakie dla tego typu zadań wariacyjnych przedstawiono w pracach [4, 5 i 6]. Ponadto nie udało się wyjaśnić, dla jakich parametrów uzyskane rozwiązania są poprawne, co miałoby decydujący wpływ na zakres stosowalności zaproponowanej analityczno-graficznej metody [3].

2. Rozwiązanie tego problemu jako zagadnienia numerycznego pozwala uzyskać wyniki dla całego zakresu zmiany parametrów dla ich konkretnych z góry danych wartości.

3. Problematyka optymalnego projektowania elementów konstrukcji z punktu widzenia własności stosowanych materiałów jest zagadnieniem bardzo ważnym i dlatego wymaga nowych rozwiązań (na dowolnej drodze) obejmujących coraz to szerszą klasę rozpatrywanych przypadków.

Problem wariacyjny, opisujący ten typ zadania, przedstawimy tak jak poprzednio w pracy [3]. Wprowadźmy prostokątny, kartezjański układ współrzędnych  $x, y, z$  tak, że oś  $z$  skierujemy równoległe do tworzącej powierzchni bocznej pręta (rys. 1). Problem ekstremalny przedstawia się następująco.

W obszarze  $D$  poszukujemy takiej ciągłej funkcji naprężeń  $u(x, y)$  i takiego rozkładu granicy plastyczności  $k(x, y)$ , dla których przy spełnieniu warunków

$$(1.1) \quad \begin{aligned} |\text{grad } u(x, y)| &= k(x, y), & [u(x, y)]_c &= 0, \\ k_1 &\leq k(x, y) \leq k_2, & \frac{1}{S(D)} \int_D k(x, y) dx dy &= A \end{aligned}$$

osiąga maksimum funkcjonał

$$(1.2) \quad I(u, k) = \int_D u(x, y) dx dy,$$

gdzie  $D$  oznacza przekrój poprzeczny rozpatrywanego pręta,  $C$  brzeg obszaru  $D$ ,  $k_1$  i  $k_2$  odpowiednio dolną i górną dopuszczalną wartość granicy plastyczności oraz  $A$  pewną stałą. Przyjmijmy poza tym, że wprowadzone w (1.1) i (1.2) wielkości są wielkościami bezwymiarowymi (są odniesione do odpowiednich parametrów, np. górną granicę plastyczności  $k_2$  przyjmować będziemy stałe za równą jedności, a dolną  $k_1$  odpowiednio równą 0,75; 0,50 itp.). Stała  $A$  ma sens średniej granicy plastyczności, przy czym

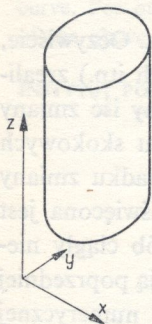
$$(1.3) \quad k_1 \leq A \leq k_2.$$

Ten sposób zapisu zwiększy jego przejrzystość i pozwoli na prostszą interpretację danych wyjściowych i otrzymanych wyników.

## 2. METODA ROZWIĄZANIA

Obliczenia numeryczne przeprowadzimy dwoma etapami.

*Etap 1.* Jak widać z (1.1) i (1.2) w wariacyjnym problemie, który należy rozwiązać, występują nieliniowe ograniczenia na poszukiwaną funkcję celu  $u(x, y)$  i funkcję  $k(x, y)$ . Ponieważ jednak ograniczenia te zależą od otrzymywanego rozwiązania, to nie możemy bezpośrednio zastosować metody gradientowej: bardzo szybko otrzymalibyśmy rozwiązanie poza dopuszczalnym obszarem parametrów. Dlatego dla uzyskania rozwiązania posłużymy się «niepełną metodą gradientową». Zakładając znajomość metody gradientowej (por. np. [7]) przez czytelnika, ograniczymy się tu tylko do podania idei użytej modyfikacji. Mianowicie po znalezieniu najkorzystniejszego dopuszczalnego kierunku zmian parametrów zadania o daną wielkość  $h$  posuwamy się w tym kierunku tylko o tę wielkość itd. Krok ten powtarzamy tak długo, aż funkcjonał (1.2) przestanie ulegać istotnym zmianom. Zmniejszamy wtedy wielkość  $h$  (np. o połowę) i poszukujemy coraz to lepszego rozwiązania tak jak poprzednio. Postępowanie to kontynuujemy aż do momentu, w którym zmniejszanie wartości  $h$  nie



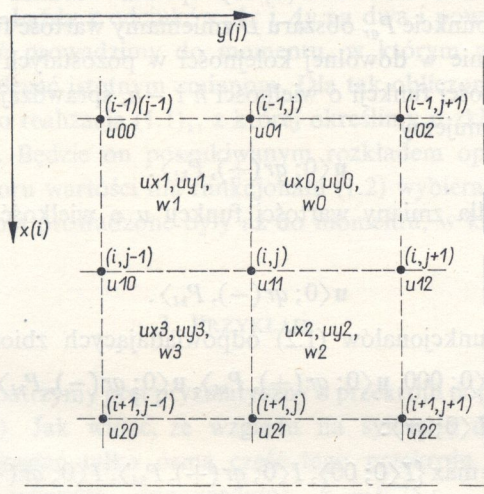
Rys. 1

będzie powodowało zmian funkcjonału (1.2). Należy tu zwrócić uwagę na następujące fakty:

1. Zastosowanie metody gradientowej pozwala na zbudowanie dopuszczalnego rozwiązania zerowego (wyjściowego) w sposób trywialny (wrócimy jeszcze do tego zagadnienia w następnym punkcie przy omawianiu konkretnego przykładu).

2. Ponieważ stosujemy wyżej opisaną niepełną metodę gradientową, przeto uzyskane rozwiązanie znajduje się cały czas w klasie rozwiązań dopuszczalnych, określonych wyjściowymi warunkami i ograniczeniami.

3. Uzyskane rozwiązanie należy traktować jako rozwiązanie przybliżone. Wynika to z następującego faktu: w obszarze przekroju poprzecznego pręta  $D$  operujemy funkcją naprężeń  $u(x, y)$ , rozpiętą nad tym obszarem. Zwiększanie dokładności (ilości punktów określających tę funkcję) zwiększa bardzo szybko liczbę parametrów zadania, a ograniczeni jesteśmy pamięcią maszyny cyfrowej (wyraźniej zostanie to uwypuklone przy omawianiu konkretnego przykładu).



Rys. 2

*Etap 2.* Jako drugi etap obliczeń numerycznych, opierających się na poprzednim etapie, a prowadzący do dokładniejszych wyników, stosujemy znaną metodę lokalnych wariacji [8] odpowiednio zmodyfikowaną [9].

Zanim przystąpimy do opisu algorytmu opartego na zmodyfikowanej metodzie lokalnych wariacji, wprowadzimy następujące pojęcia i oznaczenia: symbole  $(i, j)$  lub  $(x_i, y_j)$  oznaczają węzeł siatki zastępującej obszar  $D$  określoności funkcji  $u(x, y)$  (rys. 2). Oczywiście zmiana funkcji  $u(x, y)$  w punkcie  $(i, j)$  powoduje zmianę jej średnich wartości i zmianę pochodnych, odniesionych do środków czterech sąsiednich węzłów siatki (wzory opisujące te zmiany są podane na 13 poziomie oznaczeń programu obliczeń numerycznych [14]);  $h$  — wartość skoku zmieniającego wartość funkcji  $u$  w punkcie  $(x_i, y_j)$ ,  $w$  — numer przybliżonego rozwiązania, jakie otrzymujemy po przeprowadzeniu wariacji wartości funkcji  $u$  o wielkość  $h$  dla wszystkich punktów

$(x_i, y_j)$  obszaru  $D$  w dowolnej, ustalonej kolejności (pojęcie wariacji wartości funkcji  $u$  w punkcie  $(x_i, y_j)$  zostanie wyjaśnione dalej);  $\mathbf{u}\langle w; ij(+), P_{kl} \rangle$  zbiór wartości funkcji  $u$  dla wszystkich punktów obszaru  $D$  po zakończeniu przybliżenia o numerze  $w$  oraz po zmianie wartości funkcji  $u$  w punkcie  $(x_i, y_j)$  o wartości  $+h$  przy jednoczesnej zmianie wartości funkcji  $u$  we wszystkich pozostałych punktach  $P_{ij}$  obszaru  $D$  o wartości  $h$  i  $-h$  ( $i \neq k, j \neq l$ );  $\mathbf{u}\langle w; ij(-), P_{kl} \rangle$  podobnie jak wyżej tylko ze zmianą wartości funkcji  $u$  w punkcie  $(x_i, y_j)$  o wartości  $-h$ ;  $\mathbf{u}\langle w; 00 \rangle$  rozwiązanie funkcji  $u$  dla wszystkich punktów obszaru  $D$  dla przybliżenia o numerze  $w$ ;  $\mathbf{u}\langle 0; 00 \rangle$  rozwiązanie funkcji  $u$  dla wszystkich punktów obszaru  $D$  dla przybliżenia zerowego;  $I\langle w; ij(+), P_{kl} \rangle$  oraz  $I\langle w; ij(-), P_{kl} \rangle$  zbiory wartości funkcjonalu (1.2) odpowiadające zbiorom funkcji  $\mathbf{u}\langle w; ij(+), P_{kl} \rangle$  i  $\mathbf{u}\langle w; ij(-), P_{kl} \rangle$ ;  $I\langle w; 00 \rangle$  oraz  $I\langle 0; 00 \rangle$  zbiory wartości funkcjonalu (1.2) odpowiadające rozwiązaniom  $\mathbf{u}\langle w; 00 \rangle$  i  $\mathbf{u}\langle 0; 00 \rangle$ .

#### Opis algorytmu

1. Niech rozwiązanie zerowe  $\mathbf{u}\langle 0; 00 \rangle$  spełnia warunki (1.1).
2. W dowolnym punkcie  $P_{qr}$  obszaru  $D$  zmieniamy wartość funkcji  $u$  o wartość  $h$ , zmieniając jednocześnie w dowolnej kolejności w pozostałych punktach  $P_{ij}$  ( $i \neq q, j \neq r$ ) obszaru  $D$  wartości funkcji o wielkości  $h$  i  $-h$ , sprawdzając za każdym razem warunki (1.1), otrzymujemy

$$\mathbf{u}\langle 0; qr(+), P_{kl} \rangle.$$

3. Analogicznie dla zmiany wartości funkcji  $u$  o wielkość  $-h$  w punkcie  $P_{qr}$  otrzymamy

$$\mathbf{u}\langle 0; qr(-), P_{kl} \rangle.$$

4. Ze zbiorów funkcjonalów (1.2) odpowiadających zbiorowi:

$$\{\mathbf{u}\langle 0; 000, \mathbf{u}\langle 0; qr(+), P_{kl} \rangle, \mathbf{u}\langle 0; qr(-), P_{kl} \rangle\},$$

wybieramy wartość  $I\langle 0; qr \rangle$ :

$$I\langle 0; qr \rangle \equiv \max \{I\langle 0; 000 \rangle, I\langle 0; qr(+), P_{kl} \rangle, I\langle 0; qr(-), P_{kl} \rangle\},$$

a w pamięci maszyny pozostawiamy odpowiadającą mu wartość funkcji  $\mathbf{u}\langle 0; qr \rangle$  w punktach obszaru  $D$ .

Proceder 2-4 nazwiemy *wariacją wartości funkcji w punkcie  $(x_q, y_r)$* . Powtarzamy go dla innego, dowolnego punktu  $P_{st}$  obszaru  $D$ . W wyniku otrzymujemy nowy zbiór:

$$\{\mathbf{u}\langle 0; qr \rangle; \mathbf{u}\langle 0, st(+), P_{kl} \rangle; \mathbf{u}\langle 0; st(-), P_{kl} \rangle\},$$

a z odpowiadającego mu zbioru wartości funkcjonalów (1.2) wybieramy wartość  $I\langle 0; st \rangle$  podobnie jak poprzednio:

$$I\langle 0; st \rangle \equiv \max \{I\langle 0; qr \rangle; I\langle 0; st(+), P_{kl} \rangle; I\langle 0; st(-), P_{kl} \rangle\}.$$

5. Proceder ten powtarzamy przy dowolnej kolejności wyboru pozostałych punktów obszaru  $D$ . W wyniku otrzymujemy funkcję  $\mathbf{u}\langle 1; 00 \rangle$  i odpowiadający jej funkcjonal  $I\langle 1; 00 \rangle$ , dla którego mamy

$$I\langle 0; 00 \rangle \leq I\langle 0; qr \rangle \leq I\langle 0; st \rangle \leq, \dots, \leq I\langle 0; kl \rangle \leq, \dots, \leq I\langle 1; 00 \rangle.$$

Z tą chwilą dowolna poprzednio kolejność wyboru punktów  $(x_i, y_j)$  wariacji zostaje ustalona i następne przybliżenia do momentu uzyskania rozwiązania proponuje się liczyć w takiej kolejności wyboru punktów  $P_{ij}$  obszaru  $D$  jak poprzednio.

6. Powtarzając proceder 2 – 4 wariacji funkcji  $u$  w ustalonym już teraz porządku otrzymujemy kolejne przybliżone wartości  $u$ ,  $u \langle w; 00 \rangle$  oraz odpowiadający im ciąg funkcjonałów (1.2), dla których zachodzi:

$$I \langle 0; 00 \rangle \leq I \langle 1; 00 \rangle \leq I \langle 2; 00 \rangle \leq \dots \leq I \langle w; 00 \rangle.$$

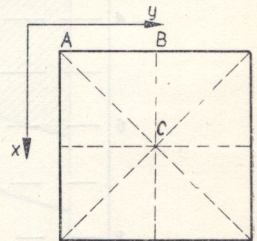
Obliczanie kolejnych przybliżeń wartości funkcji  $u \langle w; 00 \rangle$  prowadzimy aż do momentu, gdy odpowiadające im wartości funkcjonałów  $I \langle w; 00 \rangle$  przestaną ulegać zmianom.

7. Zmniejszamy wartość skoku  $h$  (np. dwukrotnie) i powtarzamy obliczenia wymienione w punktach 2 – 6. Ponownie zmniejszamy wartość  $h$  itd. aż do momentu, gdy zmniejszanie nie będzie wpływało na wartość funkcjonału  $I \langle w; 00 \rangle$ .

W celu osiągnięcia dokładniejszego wyniku można dokonać nowego podziału obszaru  $D$  dzieląc np. każdy z odcinków  $\Delta x$  i  $\Delta y$  na dwa i powtórzyć tok obliczeń. Zmniejszanie kroku  $h$  prowadzimy do momentu, w którym wartość funkcjonału  $I \langle w; 00 \rangle$  przestanie ulegać istotnym zmianom. Dla tak obliczonej funkcji  $u \langle w; 00 \rangle$  pozostaje jeszcze tylko realizacja (1.1)<sub>1</sub>, z której określimy rozkład wartości granicy plastyczności  $k(x, y)$ . Będzie on poszukiwanym rozkładem optymalnym, gdyż za każdym razem ze zbioru wartości dla funkcjonału (1.2) wybieraliśmy tę, która była największa, a obliczenia prowadzone były aż do momentu, w którym przestały one ulegać zmianom.

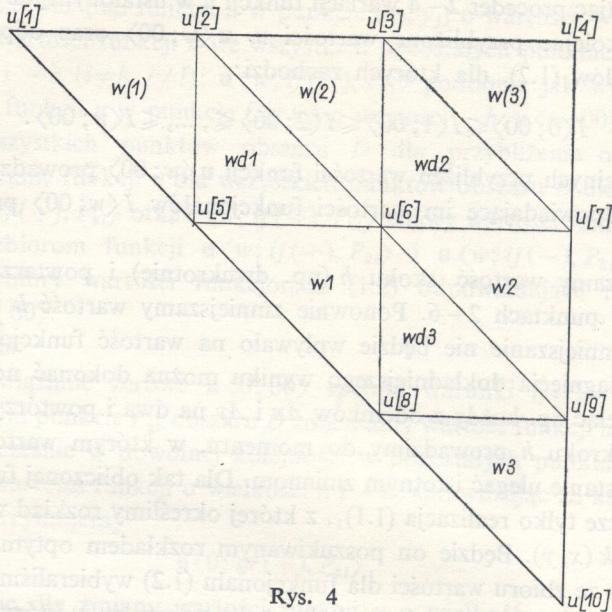
### 3. PRZYKŁAD

Jako przykład rozpatrzmy pręt pryzmatyczny o przekroju poprzecznym w kształcie kwadratu (rys. 3). Jak widać, ze względu na symetrię dla przeprowadzenia obliczeń wystarczy zbadać tylko ósmą część tego przekroju. Niech dane z góry parametry zadania wynoszą odpowiednio:  $k_1 = 0,75$ ;  $k_2 = 1,00$ ;  $A = 0,85$ . Oczywiście wielkość  $A$ , która jest tzw. funkcją kosztu, spełnia warunek (1.3):  $0,75 \leq A \leq 1,00$ , tzn. jest zawarta pomiędzy wartościami, które odpowiadają przypadkom występowania w polu przekroju poprzecznego tylko materiału jednorodnego o granicy plastyczności  $k_1$  lub  $k_2$ . Jako rozwiązanie wyjściowe (zerowe) możemy teraz przyjąć funkcję  $u(x, y)$ , której wykres ma postać płaszczyzny przechodzącej przez kontur przekroju poprzecznego i nachylonej do tego przekroju pod kątem  $\alpha$ , gdzie  $\text{tg } \alpha = 0,85$ . Jak widać, proste to rozwiązanie spełnia wszystkie ograniczenia (1.1). Dla przeprowadzenia obliczeń numerycznych wg niepełnej metody gradientowej możemy przyjąć podział rozpatrywanego obszaru przedstawiony na rys. 4. Możemy teraz z łatwością podać rzędne funkcji  $u(x, y)$  we wszystkich 10 punktach. Są one oczywiście odpowiednio równe dla  $u(1)$  do  $u(10)$ : 0; 0; 0; 0; 0; 0,85; 0,85; 0,85; 1,70; 1,70;

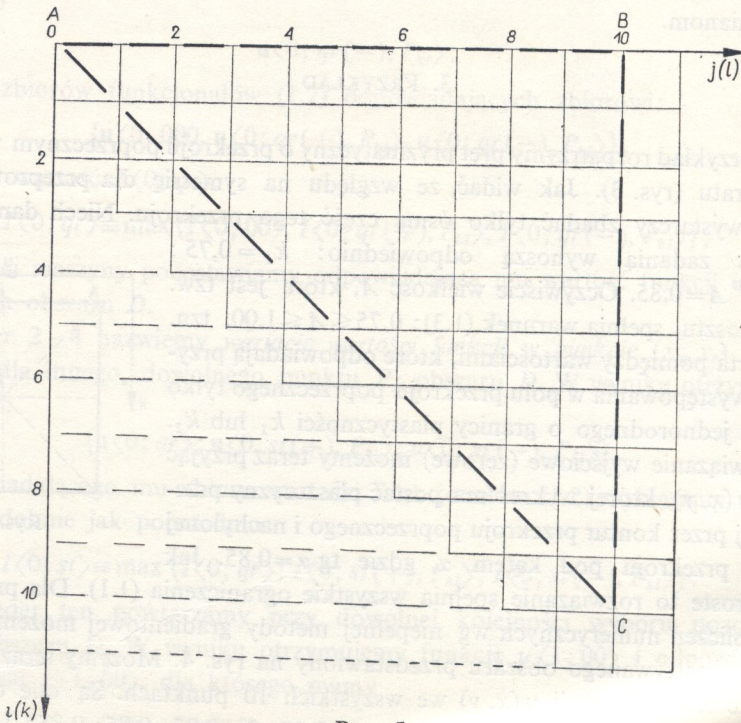


Rys. 3

2,55 i w takiej kolejności są danymi wejściowymi dla obliczeń numerycznych przeprowadzonych wg programu [13]. Poszukiwanie właściwego rozwiązania sprowadza się zatem do badania różnych, dopuszczalnych kombinacji zmian



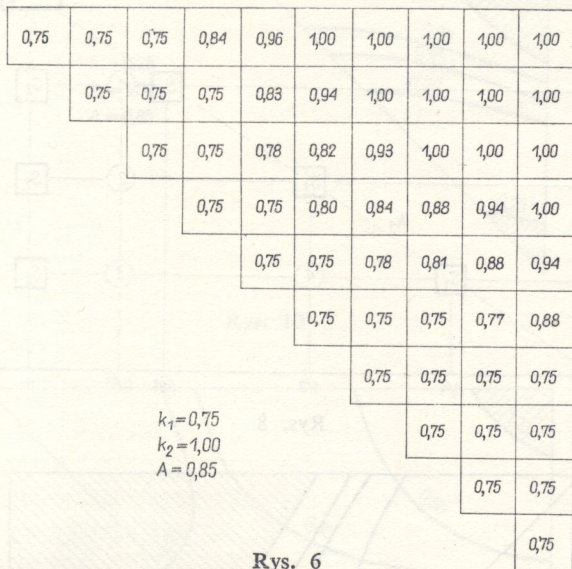
Rys. 4



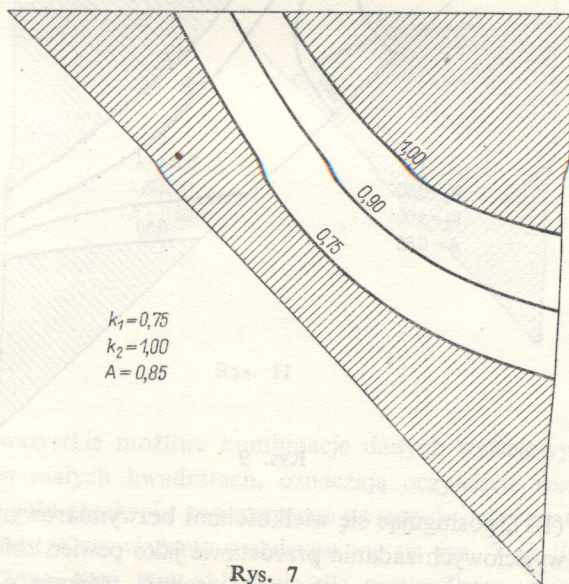
Rys. 5

rzędnych funkcji w punktach od  $u(5)$  do  $u(10)$  o wielkość  $h$ : Kombinacji tych jest 729. Zwiększenie ilości punktów określających funkcję  $u(x, y)$  spowodowałoby przekroczenie pamięci operacyjnej maszyny.

W efekcie przeprowadzonych obliczeń otrzymujemy rozwiązanie przybliżone, które jest rozwiązaniem wyjściowym dla drugiego etapu wg zmodyfikowanej metody lokalnych wariacji. Pozwala ona na bardziej precyzyjny podział rozpatrywanego obszaru (wymagana mniejsza pamięć), każdy z równych boków dzielimy na dziesięć części otrzymując w efekcie nową, bardziej dokładną siatkę (rys. 5), na której

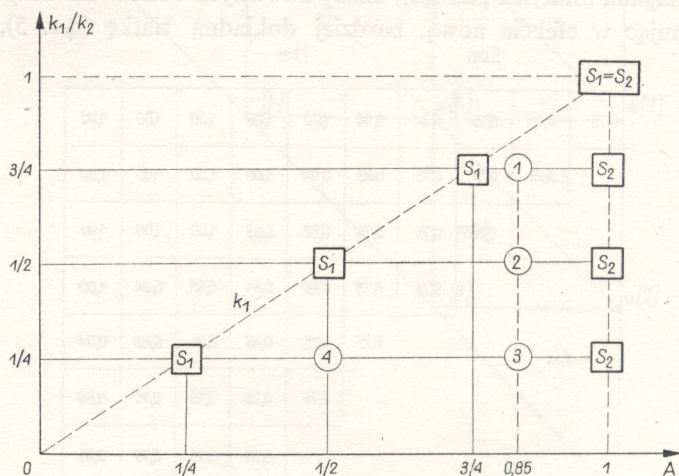


Rys. 6

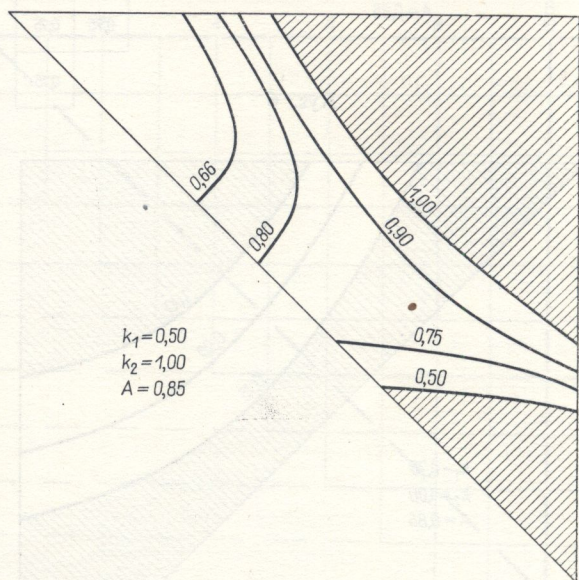


Rys. 7

przeprowadzamy teraz obliczenia wg programu. Jako wynik przeprowadzonych obliczeń otrzymujemy poszukiwane wielkości rzędnych funkcji naprężenia  $u(x, y)$  i wartości funkcji granicy plastyczności  $k(x, y)$  odniesione do środków oczek siatki. Rezultaty te przedstawione są dla naszego przykładu na rys. 6 lub w sposób bardziej przejrzysty na rys. 7, gdzie liniami ciągłymi zaznaczono poziomice modułu gradientu funkcji  $u(x, y)$ , tzn. poziomice funkcji  $k(x, y)$ .



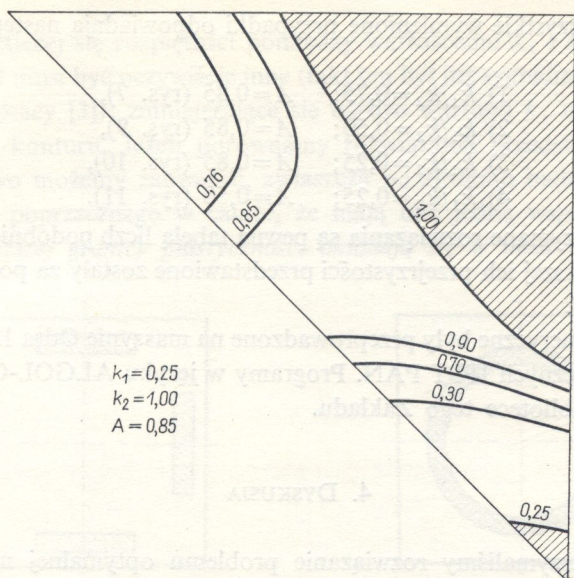
Rys. 8



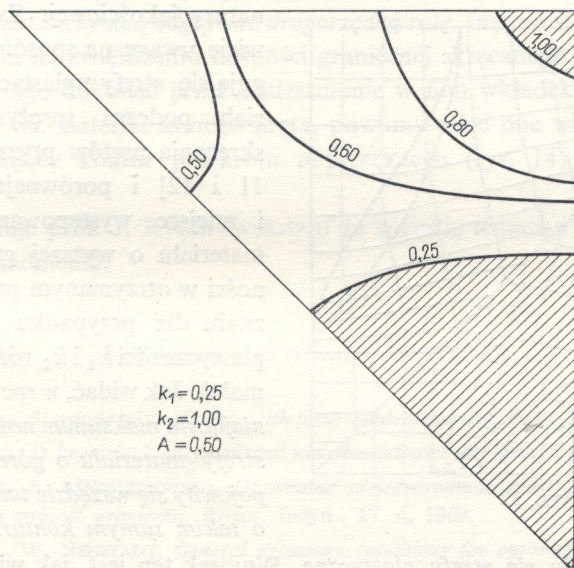
Rys. 9

Jak widać z (1.1), posługując się wielkościami bezwymiarowymi, możemy rodzinę parametrów wyjściowych zadania przedstawić jako pewien zbiór dwuwymiarowy  $\{k_1/k_2 \text{ i } A\}$  przedstawiony na rys. 8: powierzchnia trójkąta o wierzchołkach 0,





Rys. 10



Rys. 11

$S_1 = S_2$ , 1 zawiera wszystkie możliwe kombinacje danych wyjściowych. Litery  $S_1$  i  $S_2$ , umieszczone w małych kwadratach, oznaczają oczywiście rozwiązania trywialne, gdy w całym polu przekroju poprzecznego występuje jeden materiał. Cyfrą 1 oznaczono w tym zbiorze rozwiązanie przedstawione na rys. 7 ( $k_1/k_2 = 0,75$ ,  $A = 0,85$ ). Przeprowadzono poza tym obliczenia dla przypadków oznaczonych liczbami

bami 2, 3 i 4. Wszystkie wymienione przypadki odpowiadają następującym danym wyjściowym:

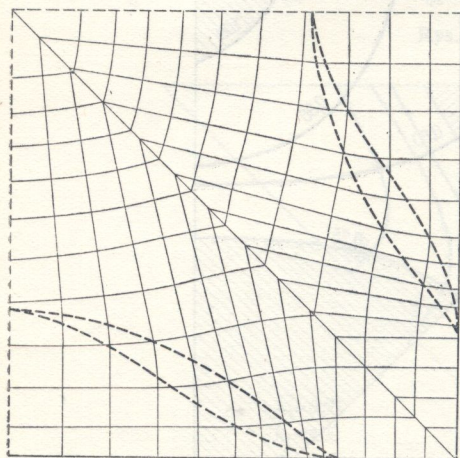
- 1)  $k_1/k_2=0,75$ ;  $A=0,85$  (rys. 7),
- 2)  $k_1/k_2=0,50$ ;  $A=0,85$  (rys. 9),
- 3)  $k_1/k_2=0,25$ ;  $A=0,85$  (rys. 10),
- 4)  $k_1/k_2=0,25$ ;  $A=0,50$  (rys. 11).

Oczywiście otrzymane rozwiązania są pewną tabelą liczb podobnie, jak na rys. 6, tu jednak dla większej ich przejrzystości przedstawione zostały za pomocą poziomic, tak jak na rys. 7.

Obliczenia numeryczne były przeprowadzone na maszynie Odra 1204 w Zakładzie Obliczeń Numerycznych IPPT PAN. Programy w języku ALGOL-ODRA [13 i 14] znajdują się w bibliotece tego Zakładu.

#### 4. DYSKUSJA

Jak widać, otrzymaliśmy rozwiązanie problemu optymalnej niejednorodności plastycznej dla różnych z góry danych parametrów. Wyniki te z jednej strony wykazują, jak dla konkretnych danych należy zbudować rozwiązanie tak, aby nośność była maksymalna, z drugiej strony pozwalają na wyciągnięcie ważnych wniosków



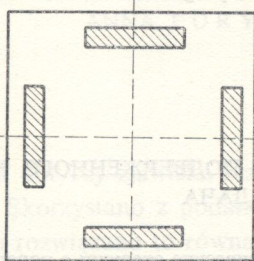
Rys. 12

natury jakościowej. Zwróćmy mianowicie uwagę na sposób, w jaki propagują się strefy uplastycznionego materiału podczas sprężysto-plastycznego skręcania prętów przyrównanych [10, 11 i 12] i porównajmy ich kształt i miejsce występowania ze strefami materiału o wyższej granicy plastyczności w otrzymanym przez nas rozwiązaniu dla przypadku 1 (gdy granice plastyczności  $k_1$  i  $k_2$  różnią się od siebie mało). Jak widać, w rozwiązaniu zapewniającym maksimum nośności granicznej strefy materiału o górnej plastyczności pojawiły się wszędzie tam, gdzie w przecie o takim samym konturze przekroju po-

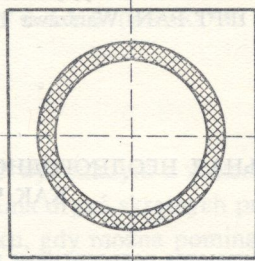
przecznego pojawiły się strefy plastyczne. Wniosek ten jest, jak widać, identyczny z tym, jaki otrzymaliśmy rozwiązując powyższy problem optymalizacji na drodze analitycznej [3]. Wynika to z faktu zbieżności rozwiązań otrzymanych na dwa różne sposoby [analityczny i numeryczny (por. rys. 7 i 12)].

Innymi słowy tam gdzie zależy nam na zwiększeniu nośności granicznej skręcanego pręta przyrównanego, a mamy tego dokonać przez umieszczenie w nim wkładki z materiału niewiele «mocniejszego» niż materiał pręta, powinny być one ułożone tak, jak na rys. 13.

Dla zwiększającej się rozpiętości pomiędzy wartościami  $k_1$  i  $k_2$  wzajemne ustalenie tych stref musi być oczywiście inne (fakt ten był już sygnalizowany na prostym przykładzie w pracy [3]): zmniejszające się bardzo wartości  $k_1$  nie mogą występować w pobliżu konturu. Jeżeli porównamy rozwiązania przedstawione na rys. 9, 10 i 11, to łatwo możemy zauważyć, zwłaszcza po złożeniu badanych fragmentów pola przekroju poprzecznego w całość, że mają one jedną wspólną cechę: *strefy materiału o wyższej granicy plastyczności układają się w owal wewnątrz konturu;*



Rys. 13



Rys. 14

*strefy materiału o niższej granicy znajdują się w środku i stanowią niejako jądro tego przekroju a naroża zaczynają odgrywać drugorzędą rolę.* Innymi słowy wszędzie tam, gdzie zależy nam na zwiększeniu nośności granicznej skręcanego pręta pryzmatycznego, a mamy tego dokonać przez umieszczenie w nim wkładek z materiału dużo «mocniejszego» niż materiał samego pręta, powinny mieć one właśnie taki owalny kształt wypełniający kontur przekroju poprzecznego (rys. 14).

Autor dziękuje prof. J. RYCHLEWSKIEMU za sugestię tematu i pomoc w opracowaniu tego zagadnienia.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of a bar with jump nonhomogeneity*, Acta Mechanica, **1**, 1, 1965.
2. J. RYCHLEWSKI, *O kryteriach optymalizacji niejednorodności sprężystej i plastycznej* [w druku].
3. J. MAJERCZYK, A. MIODUCHOWSKI, *Optymalna niejednorodność plastyczna skręcanego pręta ze względu na nośność graniczną*, Rozpr. Inżyn., **17**, 4, 1969.
4. H. HALKIN, L. W. NEUSTADT, *General necessary conditions for optimization problem*, Proc. Nat. Acad. Sci., **4**, 1966.
5. L. W. NEUSTADT, *An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems. I. General theory*, SIAM, J. Control, **1**, 1967.
6. L. W. NEUSTADT, *An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems. II. Applications*, SIAM, J. Control, **1**, 1967.
7. H. P. KUNZI, H. G. TZSCHACH, C. A. ZEHNDER, *Numerische Methoden der mathematischen Optimierung*, Stuttgart 1966.
8. Н. В. Баничук, В. М. Петров, Ф. Л. Черноусько, *Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций*, Ж. выч. мат. и мат. физ., **6**, 6, 1966.

9. A. MIODUCHOWSKI, *Zagadnienia równowagi granicznej skręcanych prętów niejednorodnych*, Praca doktorska, Warszawa 1969.
10. A. DĘBSKA, A. MIODUCHOWSKI, *Sprężysto-plastyczne skręcanie prętów skokowo niejednorodnych*, MTT, Moskwa 1969.
11. P. G. HODGE Jr, *Elastic-plastic torsion as a problem in nonlinear programming*, Int. J. Sol. Struc., 3, 989 – 999, 1967.
12. Н. В. Баничук, *Упруго-пластическое кручение стержней*, МТТ, 1, 1967.
13. Program obliczeń nr 1 w języku Algol-Odra, Biblioteka programów Zakładu Obliczeń Numerycznych IPPT PAN, Warszawa 1970.
14. Program obliczeń nr 2 w języku Algol-Odra, Biblioteka programów Zakładu Obliczeń Numerycznych IPPT PAN, Warszawa 1970.

## Резюме

### ОПТИМАЛЬНАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ СТЕРЖНЯ ПОДВЕРЖЕННОГО КРУЧЕНИЮ КАК ЧИСЛЕННАЯ ЗАДАЧА

Рассматриваются подверженные кручению призматические стержни с поперечной непрерывной пластической неоднородности. На основе метода неполного градиента и модифицированного метода локальных вариаций, определяется, численным путем, оптимальное распределение этой неоднородности т. е. распределение дающее максимальную несущую способность. В качестве примера рассматривается призматический стержень квадратного сечения, для нескольких случаев разных ограничений наложенных на функцию пластической неоднородности. Даются практические инженерные заключения, для этого типа конструктивных элементов.

## SUMMARY

### OPTIMAL PLASTIC INHOMOGENEITY OF A TWISTED ROD AS A NUMERICAL PROBLEM

Twisted prismatic rods of a diagonal continuous plastic inhomogeneity are considered. On the basis of an incomplete gradient method and a method of modified local variations, an attempt is made to find, by numerical means, an optimal dissipation of that inhomogeneity — that is, such a dissipation as gives a maximal boundary bearing.

The example considered was a prismatic rod of square diameter, for several cases of different limitations imposed on the plastic inhomogeneity function.

Practical engineering results are given for constructional elements of this type.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1971 r.