

WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ W KONSTRUKCJACH Z TECHNOLOGICZNĄ WARSTWĄ WIERZCHNIĄ METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

ZOFIA H A N D Z E L - P O W I E R Ż A

i STANISŁAW K U C H A R S K I (WARSZAWA)

W pracy zaproponowano sposób wykorzystania metody elementów skończonych do wyznaczania naprężeń w elementach maszyn na których została ukonstytuowana cienka technologiczna warstwa wierzchnia. Dokonano weryfikacji zaproponowanego sposobu modelowania warstwy w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym.

1. WSTĘP

W procesie wytwarzania części maszyn stosowana jest coraz częściej powierzchniowa obróbka technologiczna. Każdy element powstaje w wyniku oddziaływania na niego pola sił, pola temperatur i środowiska w którym zachodzi proces produkcji. W ten sposób na wytwarzanym elemencie zostaje ukonstytuowana technologiczna warstwa wierzchnia (TWW), o odmiennych niż rdzeń własnościach fizykochemicznych. Warstwa ta ma grubość rzędu mikrometrów lub milimetrów. Własności warstwy zależą od parametrów konkretnej obróbki wykańczającej (technologicznej). Wpływ warstwy na całkowitą nośność danego elementu jest na ogół niewielki. Natomiast liczne badania fenomenologiczne odporności na kruche pękanie i wytrzymałości zmęczeniowej wykazały, że jest ona miejscem inicjacji procesów prowadzących do zniszczenia. Dlatego istotne jest w ramach obliczeń wytrzymałościowych wyznaczenie pola naprężeń nie tylko w obszarze rozpatrywanego elementu, ale rów-

niez w jego warstwie wierzchniej. Konieczne jest również uwzględnienie sprężysto-plastycznego zachowania się materiału warstwy.

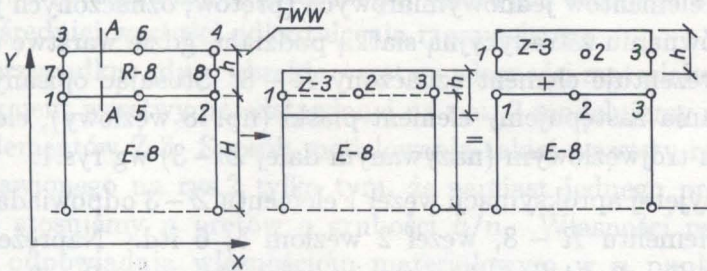
Najbardziej obecnie rozpowszechnioną metodą wyznaczania naprężeń w konstrukcjach inżynierskich jest metoda elementów skończonych. Zastosowanie dostępnych programów MES do wyznaczania naprężeń przy powierzchni konstrukcji wiąże się z pewnymi trudnościami. W metodzie tej dokładne wartości naprężeń otrzymujemy w punktach Gaussa, które przy stosowanych zwykle siatkach podziału na elementy znajdują się w pewnej odległości od powierzchni. Mogą się one znajdować dostatecznie blisko powierzchni jedynie w przypadku bardzo gęstej siatki podziału. Ponadto element z TWW jest przykładem konstrukcji niejednorodnej materiałowo. Dla tego typu konstrukcji opracowano w ramach MES m.in. całą klasę elementów służących do wyznaczania naprężeń w kompozytach. Jednakże materiał na którym została ukonstytuowana TWW różni się od kompozytu przede wszystkim tym, że zmiana własności materiałowych występuje tu jedynie blisko powierzchni. Zatem zagadnienia związane z TWW wymagają nieco innego podejścia niż to, które stosujemy w kompozytach lub konstrukcjach warstwowych.

2. MODELOWANIE ELEMENTÓW Z TWW

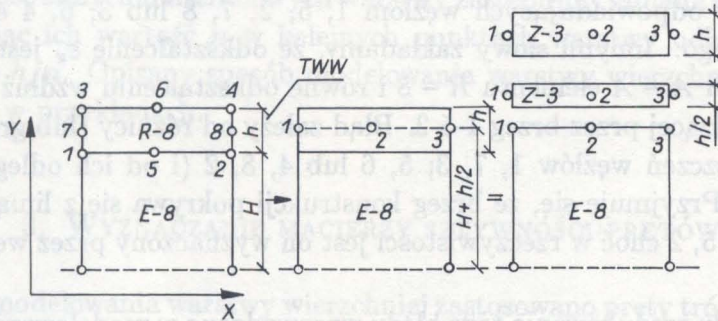
Zaproponowany sposób modelowania odnosi się jedynie do konstrukcji znajdujących się w płaskim stanie naprężenia. W istniejących tradycyjnych programach MES dla takich zagadnień, podział na elementy skończone konstrukcji niejednorodnych materiałowo dokonywany jest w taki sposób, że w obszarze jednego elementu może znajdować się tylko jeden rodzaj materiału. Poza tym siatka podziału powinna być taka, by proporcje wymiarów poszczególnych elementów były właściwe dla danego ich typu.

W przypadku elementów płaskich, dwuwymiarowych obydwaj wymiary elementów nie mogą się zbyt różnić od siebie, gdyż wpływa to niekorzystnie na dokładność obliczeń. Specyficzną cechą TWW jest to, że jeden jej wymiar jest znacznie mniejszy od pozostałych. Modelowanie konstrukcji z TWW wymagałoby więc bardzo gęstego podziału na elementy. Otrzymuje się wówczas układy równań o dużej liczbie niewiadomych, których rozwiązywanie jest bardzo pracochłonne. Mając

do dyspozycji komputer klasy PC i stosując siatkę złożoną z elementów płaskich można w zasadzie analizować tylko fragment konstrukcji z TWW o wymiarach rzędu μm [6]. Zastosowanie takiej siatki podziału do analizy rzeczywiście istniejących elementów (o złożonym kształcie) z cienką TWW prowadziłoby do układu ok. kilkudziesięciu tys. równań, których rozwiązanie przy użyciu powszechnie dostępnych komputerów nie byłoby w ogóle możliwe. W związku z tym wprowadzono elementy skończone, których kształt w sposób naturalny odpowiadałby TWW. Dla konstrukcji znajdujących się w płaskim stanie naprężenia takimi elementami są pręty. Funkcje kształtu prętów muszą być takie same jak elementów płaskich, z którymi są łączone. W przyjętym modelu funkcje kształtu wszystkich elementów są kwadratowe.



Rys. 1. Model TWW



Rys. 2. Zmodyfikowany model TWW

Zatem w zagadnieniach płaskich, pomimo że w rzeczywistości warstwa wierzchnia jest obszarem dwuwymiarowym, ze względu na to, że jej grubość jest bardzo mała, przyjęto jako model warstwy element jednowymiarowy tj. pręt. Ze względu na bardzo małą grubość warstwy

wierzchniej, pominięto sztywność na zginanie prętów modelujących, a więc odkształcenia i naprężenia wynikające ze zginania warstwy. Przyjmujemy więc, że w warstwie występują wyłącznie naprężenia normalne, prostopadłe do przekroju poprzecznego i stałe w całym przekroju, oraz odpowiadające im odkształcenia. Jest to równoznaczne z założeniem, że różnice naprężeń w przekroju $A - A$ (rys.1) warstwy mogą wynikać z różnicy własności materiałowych w tym przekroju, a nie z różnicy odkształceń.

Proponowany sposób modelowania zalecany jest w [1] i [2] w zastosowaniu do konstrukcji, w których występują cienkie warstwy (niekoniecznie powierzchniowe).

Na rys.1 przedstawiona została siatka podziału uwzględniająca wprowadzenie elementów jednowymiarowych (prętów, oznaczonych jako $Z - 3$) w porównaniu z tradycyjną siatką podziału, gdzie warstwę o grubości h reprezentuje element oznaczony $R - 8$. Stosując opisany sposób modelowania zastępujemy element płaski (np. 8 węzłowy), elementem prętowym trójwęzłowym (nazywanym dalej $Z - 3$) wg rys.1.

W przyjętej aproksymacji węzeł 1 elementu $Z - 3$ odpowiada węzłom 1, 7, 3 elementu $R - 8$, węzeł 2 węzłom 5, 6 itd. Naprężenie σ w elemencie $Z - 3$ odpowiada naprężeniu σ_x elementu $R - 8$ w danym układzie współrzędnych. Błąd popełniony w tej aproksymacji wynika z nieuwzględnienia w zastępczym elemencie $Z - 3$ różnicy przemieszczeń punktów odpowiadających węzłom 1, 5, 2; 7, 8 lub 3, 6, 4 elementu dokładnego. Innymi słowy zakładamy, że odkształcenie ε_x jest stałe w przekroju $A - A$ elementu $R - 8$ i równe odkształceniu wzdłuż krzywej przechodzącej przez brzeg 1-5-2. Błąd zależy od różnicy (lub gradientu) przemieszczeń węzłów 1, 7, 3; 5, 6 lub 4, 8, 2 (i od ich odległości od siebie). Przyjmuje się, że brzeg konstrukcji pokrywa się z linią łączącą węzły 1, 5, 2 choć w rzeczywistości jest on wyznaczony przez węzły 3, 6, 4.

W celu zredukowania tego błędu wprowadzono w modelowaniu TWW następującą modyfikację. Element $R - 8$ zastępujemy nie jednym elementem $Z - 3$, lecz dwoma, o grubościach $h/2$ i h , (gdzie h -grubość warstwy) zwiększając przy tym wymiar sąsiedniego elementu płaskiego $E - 8$ o $h/2$ wg rys. 2.

Element $Z - 3$ o grubości $h/2$ charakteryzuje się takimi samymi wartościami stałych materiałowych jak sąsiedni element płaski, ale z

przeciwnym znakiem. W rezultacie element $E - 8$ z modelu na rys. 1 zastępowany jest elementem tego samego typu o zwiększonym jednym wymiarze (prostopadłym do brzegu), ale zmniejszonej sztywności w kierunku stycznym do brzegu (przez dodanie elementu o ujemnej sztywności).

Dzięki opisanej modyfikacji wartość bezwzględna popełnionego błędu jest ok. dwukrotnie mniejsza. Część materiału elementu płaskiego $E - 8$, która ze względu na zwiększenie wymiaru znajduje się w obszarze warstwy wierzchniej, jest jakby zastępowana materiałem warstwy i w ten sposób modyfikuje się macierz sztywności tego elementu, w odróżnieniu od sytuacji przedstawionej na rys.1. Zakładamy, że odkształcenie ε_x przyjęte jako stałe w przekroju elementu $R - 8$ jest równe odkształceniu na linii 7-8 (przechodzącej przez środki boków), a więc jego wartość jest bliższa średniej wartości odkształcenia rzeczywistego.

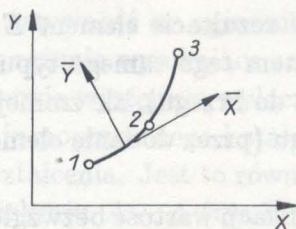
W przypadku, gdy w obrębie warstwy własności materiału zmieniają się, fragment warstwy przedstawionej na rys. 2 modelujemy za pomocą wielu elementów Z-3. Sposób modelowania takiej warstwy różni się od przedstawionego na rys.2 tylko tym, że zamiast jednego pręta o grubości h stosujemy n prętów o grubości h/n . Własności materiałowe prętów odpowiadają własnościom materiałowym w n punktach warstwy wierzchniej odległych od siebie o h/n . Liczba n zależy od tego, z jaką dokładnością chcemy aproksymować stałe materiałowe. Ciągłą zmienność stałych materiałowych warstwy zastępujemy zmianą dyskretną obliczając ich wartość n w kolejnych punktach warstwy odległych od siebie o h/n . Opisany sposób modelowania warstwy wierzchniej zastosowano w przykładach.

3. WYZNACZANIE MACIERZY SZTYWNOŚCI PRĘTÓW

Do modelowania warstwy wierzchniej zastosowano pręty trójwęzłowe, izoparametryczne (rys.3) o kwadratowych, serendipowskich funkcjach kształtu. Dzięki temu uzyskano zgodność przemieszczeń na połączeniu warstwy wierzchniej i rdzenia, gdyż w elementach modelujących rdzeń mamy takie same funkcje kształtu.

Współrzędne lokalne pręta wyrażają się następującymi wzorami:

$$X(\xi) = X_1 F_1(\xi) + X_2 F_2(\xi) + X_3 F_3(\xi),$$



Rys. 3. Pręty o kwadratowych funkcjach kształtu

(3.1)

$$Y(\xi) = Y_1 F_1(\xi) + Y_2 F_2(\xi) + Y_3 F_3(\xi),$$

gdzie F_1, F_2, F_3 – funkcje kształtu ($\xi \in \langle -1, 1 \rangle$).

Zakładamy, że w pręcie występują tylko naprężenia normalne do przekroju (równoległe do osi) i odpowiadające im odkształcenia. W danym punkcie zakrzywionego pręta odkształcenie to jest równe odkształceniu $\varepsilon_{\bar{x}}$ w obróconym układzie współrzędnych, którego oś \bar{x} jest styczna do pręta w tym punkcie. Odkształcenie $\varepsilon_{\bar{x}}$ możemy obliczyć dokonując transformacji odkształceń obliczonych w układzie x, y do układu \bar{x}, \bar{y} . Aby dokonać transformacji tensora odkształcenia musimy znać cosinusy kierunkowe osi układu \bar{x}, \bar{y} , które oznaczamy jako $a_{\bar{x}x}, a_{x\bar{y}}$. W naszym przypadku

(3.2)

$$a_{\bar{x}x} = \cos(\varphi), \quad a_{x\bar{y}} = \sin(\varphi)$$

(φ kąt utworzony przez osie x i \bar{x}).

Kąt φ możemy wyznaczyć z następujących wzorów:

(3.3)

$$\cos(\varphi) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{1}{R}, \quad \sin(\varphi) = \frac{\partial y}{\partial \xi} \times \frac{1}{R},$$

gdzie

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}.$$

W układzie x, y składowe tensora odkształcenia wyrażają się wzorami:

(3.4)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Zakładamy, że ze względu na małą grubość pręta nie występują w nim odkształcenia postaciowe. Korzystamy następnie z zależności

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi}}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial \xi}}. \end{aligned}$$

Przemieszczenia u, v elementu wyrażają się takimi samymi funkcjami kształtu jak współrzędne, tj.

$$(3.6) \quad \begin{aligned} u &= F_1 u_1 + F_2 u_2 + F_3 u_3, \\ v &= F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3. \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenia (3.4), (3.5) do wzoru transformacyjnego otrzymujemy:

$$(3.7) \quad \varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi}} \cos^2 \varphi + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial \xi}} \sin^2 \varphi.$$

Uwzględniając (3.3) i (3.7) otrzymujemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\bar{x}} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{1}{R^2} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{1}{R^2} = \\ &= (F'_1 u_1 + F'_2 u_2 + F'_3 u_3) \frac{1}{R^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} + (F'_1 v_1 + F'_2 v_2 + F'_3 v_3) \frac{1}{R^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} = Bv, \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \left[F'_1 \frac{\partial x}{\partial \xi}, F'_1 \frac{\partial y}{\partial \xi}, F'_2 \frac{\partial x}{\partial \xi}, F'_2 \frac{\partial y}{\partial \xi}, F'_3 \frac{\partial x}{\partial \xi}, F'_3 \frac{\partial y}{\partial \xi} \right],$$

$$\mathbf{v} = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3].$$

Macierz sztywności \mathbf{K} pręta otrzymujemy całkując

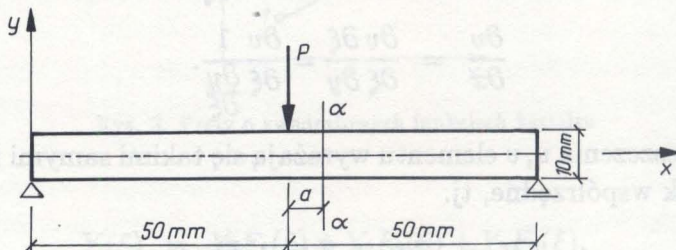
$$(3.9) \quad \mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dl = \int \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} R d\xi,$$

gdzie E oznacza moduł Younga.

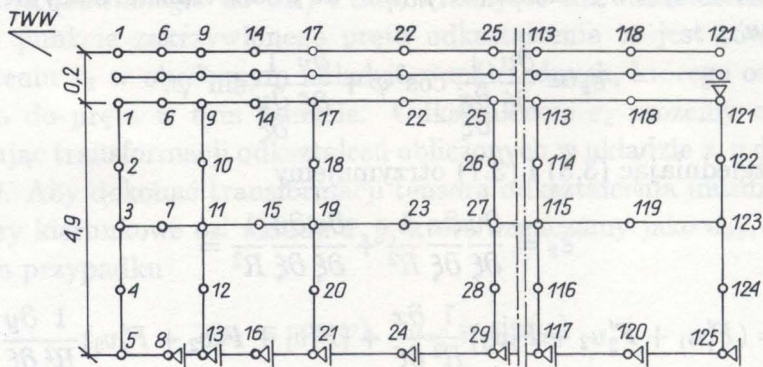
4. WERYFIKACJA MODELU

Weryfikacji przyjętego sposobu modelowania TWW dokonano dla przypadku odkształceń sprężystych i sprężysto-plastycznych na przykładzie

belki trójpunktowo zginanej. Na powierzchni belki została ukonstytuowana technologiczna warstwa wierzchnia. Sposób obciążenia i wymiary belki zostały pokazane na rys.4.

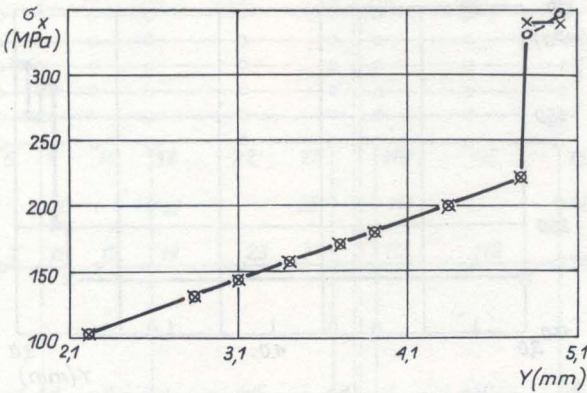


Rys. 4. Belka z TWW

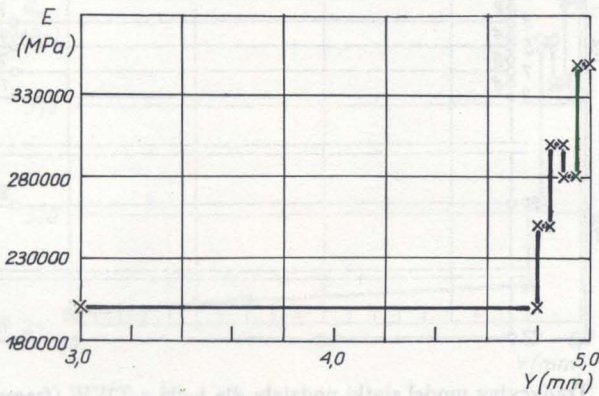


Rys. 5. Model belki z TWW

Grubość warstwy wynosi 0,2 mm. W warstwie została zwiększona wartość modułu Younga ($E_w = 300000\text{MPa}$), w stosunku do wartości występującej w rdzeniu ($E_r = 200000\text{MPa}$). Przyjęto, że zmiana ta następuje w sposób skokowy. Zgodnie z opisem zamieszczonym w p. 3. do zbudowania modelu takiej belki zastosowano obok elementów płaskich dwa rodzaje elementów prętowych - jeden o grubości $h = 0,2\text{mm}$ (grubość warstwy) i $E = 300000\text{MPa}$, a drugi o grubości $h/2$ i $E = -200000\text{MPa}$. Jednocześnie zwiększono o $h/2$ wymiar elementów płaskich modelujących rdzeń (rys. 5). Obliczone wartości naprężeń porównano na wykresie (rys.6) z wartościami wyznaczonymi w/g teorii belek.



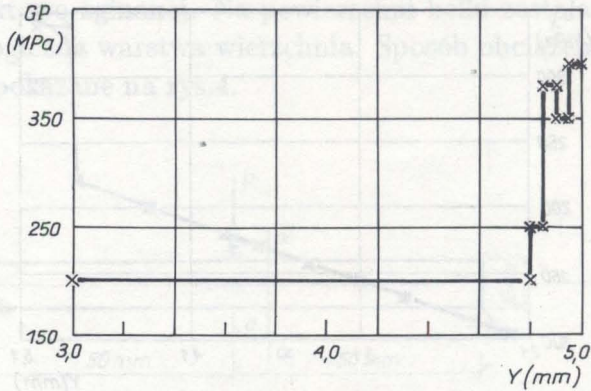
Rys. 6. Wartości naprężeń σ_x w przekroju centralnym ($\alpha - \alpha$), o - w/g teorii belek, x - w/g przedstawionego modelu MES



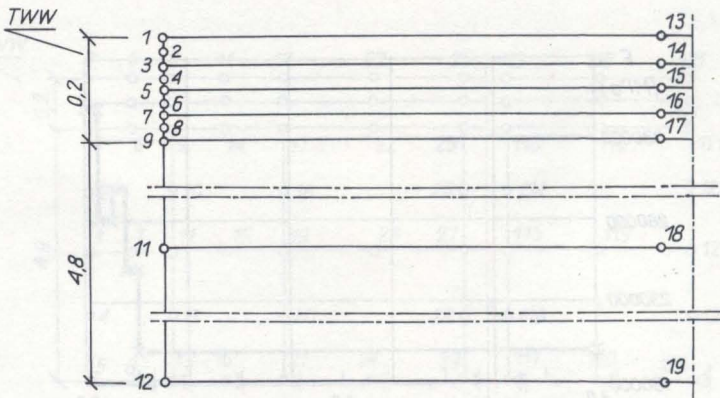
Rys. 7. Wykres zmian modułu Younga

Widzimy, że popełniony błąd jest nieznaczny. Z dokładnego porównania wynika, że nie jest on większy niż $\pm 2\%$, jest więc zgodny z teoretycznym przewidywaniem.

Dokonano też weryfikacji programu w zakresie działania sprężysto-plastycznym. Analizowano belkę jak na rys. 4 z warstwą o grubości $h = 0,2$ mm, która nie jest jednorodna. Przyjęto, że w obszarze warstwy własności materiału zmieniają się - moduł Younga, granica plastyczności, moduł umocnienia przyjmują cztery różne wartości w/g rys.7 i 8. (Na rysunkach przedstawiono wykresy własności materiału w strefie odległej o 3-5 mm od osi poziomej belki).



Rys. 8. Wykres zmian granicy plastyczności

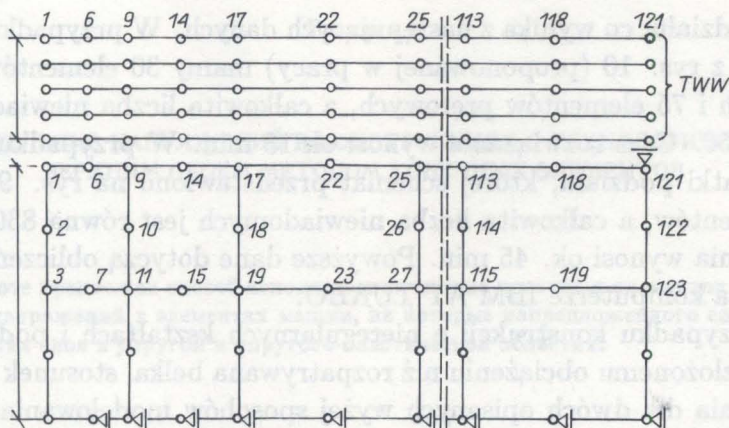


Rys. 9. Tradycyjny model siatki podziału dla belki z TWW (fragment)

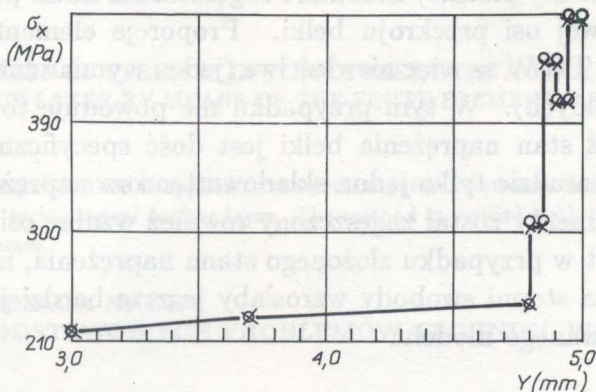
Założono, że moduł umocnienia w każdym punkcie jest dziesięciokrotnie mniejszy niż moduł Younga. Zmiana tych wartości następuje w sposób skokowy. Nie są one związane z żadną konkretną obróbką technologiczną, lecz zostały dobrane tak, by uniknąć przypadkowej zbieżności wyników. Obliczenia wykonano za pomocą metody elementów skończonych, stosując dwa różne sposoby modelowania:

Pierwszy polegał na zastosowaniu tradycyjnej siatki podziału, tzn. warstwa i rdzeń zostały podzielone na elementy płaskie ośmiowęzłowe w/g rys.9.

W drugim skorzystano z zaproponowanego modelowania warstwy za pomocą prętów. W modelu zastosowano w przekroju warstwy jeden



Rys. 10. Proponowany model siatki podziału dla belki z TWW

Rys. 11. Porównanie wartości naprężeń σ_x , o - model tradycyjny, x - model proponowany

pręt o grubości $h/2$, któremu przypisano własności rdzenia oraz 4 pręty o grubości $h/4$, których stałe materiałowe określono zgodnie z wykresami na rys. 7, 8. Model ten przedstawiono na rys. 10.

Wykresy naprężeń σ_x dla obydwu przypadków pokazano na rys. 11.

Z wykresów wynika, że zaproponowany model TWW jest wystarczająco dokładny dla celów inżynierskich. Stosując model z rys. 9 nie popełniamy nieścisłości polegającej na pomijaniu wpływu gradientu odkształceń w przekroju poprzecznym warstwy na wartości naprężeń. Jednak ze względu na małą grubość warstwy różnica wyników w obydwu przypadkach jest niewielka. Natomiast nakład pracy konieczny do rozwiązania tego zadania jest znacznie większy jeśli stosujemy tradycyjną

siatkę podziału, co wynika z następujących danych. W przypadku siatki podziału z rys. 10 (proponowanej w pracy) mamy 30 elementów prostokątnych i 75 elementów prętowych, a całkowita liczba niewiadomych wynosi 250. Czas rozwiązania wynosi ok 13 min. W przypadku tradycyjnej siatki podziału, której schemat przedstawiono na rys. 9 mamy 116 elementów, a całkowita liczba niewiadomych jest równa 830. Czas rozwiązania wynosi ok. 45 min. Powyższe dane dotyczą obliczeń wykonanych na komputerze IBM AT TURBO.

W przypadku konstrukcji o nieregularnych kształtach i poddanych bardziej złożonemu obciążeniu niż rozpatrywana belka, stosunek czasów rozwiązania dla dwóch opisanych wyżej sposobów modelowania TWW wypadłby jeszcze bardziej na korzyść przyjętego modelu. Wynika to z faktu, że w modelu belki nazwanym tu tradycyjnym (tj. zawierającym wyłącznie elementy płaskie) dokonano zagęszczenia siatki podziału tylko wzdłuż pionowej osi przekroju belki. Proporcje elementów płaskich modelujących TWW są więc niewłaściwe (jeden wymiar znacznie mniejszy od pozostałych). W tym przypadku nie powoduje to utraty dokładności, gdyż stan naprężenia belki jest dość specyficzny; w TWW występuje w zasadzie tylko jedna składowa tensora naprężenia. Gdyby podział na elementy został zagęszczony również wzdłuż osi X belki (co wymagane jest w przypadku złożonego stanu naprężenia, np. w karbie) wówczas liczba stopni swobody wzrosłaby jeszcze bardziej w stosunku do zaproponowanego modelu.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. O.C.ZIENKIEWICZ, *The finite element in engineering science*, Mc Graw Hill Book Company, London 1979.
2. K.J.BATHE, *Finite element procedurs in engineering analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 1982.
3. D.R.J.OWEN, E.HINTON, *Finite elements in plasticity: Theory and Practice*, Pine-ridge Press Ltd, London 1980.
4. J.SKRYPEK, *Plastyczność i pełzanie, teoria, zastosowania, zadania*, PWN, Warszawa 1986.
5. J.KAPKOWSKI, *Propagacja obszarów plastycznych w warunkach płaskiego stanu naprężenia*, Prace Nauk. Polit. Warszawskiej, z.50, 1978.
6. K.KOMVOPOULOS, *Finite element analysis of a layered elastic solid in normal contact with a rigid surface*, ASME J. Tribology, 110, p.477-485, 1988.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНСТРУКЦИЯХ С ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ
ВЕРХНИМ СЛОЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе предложен способ использования метода конечных элементов для определения напряжений в элементах машин, на которые напредложенного способа моделирования слоя в упругой и упруго-пластической областях.

SUMMARY

DETERMINATION OF STRESSES IN STRUCTURES WITH A TECHNOLOGICAL
SURFACE LAYER BY MEANS OF THE FINITE ELEMENT METHOD

The finite element method is applied to the determination of stresses in machine elements covered by a thin technological surface layer. The method is verified both in the elastic and elastic-plastic regimes.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI, WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 marca 1990 r.