

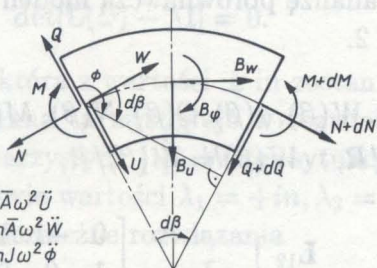
PLASKIE DRGANIA SWOBODNE NIEPODPARTYCH PIERŚCIENI KOŁOWYCH CZĘŚĆ II. FORMY DRGAŃ WŁASNYCH

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW)

W pracy omówiono analizę porównawczą płaskich form drgań własnych różnych typów modeli uściślonych, przestrzennie swobodnych pierścieni kołowych. Analiza ta stanowi dalsze rozwinięcie tematu prezentowanego w publikacji [1] tylko w aspekcie porównań częstości drgań własnych.

1. WSTĘP

Za podstawę analizy porównawczej przyjmujemy układ jednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych o postaci normalnej



Rys. 1. Elementary wycinek pierścienia kołowego

$$(1.1) \quad \mathbf{X}'(\beta) = \mathbf{L}(\omega)\mathbf{X}(\beta),$$

opisujących ustalone drgania harmoniczne uściślonego modelu pierścienia [1], odbywające się z częstością kołową ω . W zapisie równań (1.1)

Tablica 1.

Wersja	ν_1	ν_2	ν_3	p^2	Q	N	M
I ($EI \neq \infty$)	1	$\frac{EI}{R^2 EA}$	$\frac{EI}{R^2 kGA}$	$\frac{m \bar{A} R^4}{EI} \omega^2$	$\frac{\hat{Q} R^2}{EI}$	$\frac{\hat{N} R^2}{EI}$	$\frac{\hat{M} R}{EI}$
II ($EA \neq \infty$)	$\frac{R^2 EA}{EI}$	1	$\frac{EA}{kGA}$	$\frac{m \bar{A} R^2}{EA} \omega^2$	$\frac{\hat{Q}}{EA}$	$\frac{\hat{N}}{EA}$	$\frac{\hat{M}}{REA}$
III ($kGA \neq \infty$)	$\frac{R^2 kGA}{EI}$	$\frac{kGA}{EA}$	1	$\frac{m \bar{A} R^2}{kGA} \omega^2$	$\frac{\hat{Q}}{kGA}$	$\frac{\hat{N}}{kGA}$	$\frac{\hat{M}}{RkGA}$

Tablica 2.

	WERSJA I ($EI \neq \infty$)				WERSJA II ($EA \neq \infty$)				WERSJA III ($kGA \neq \infty$)			
Typ	1	4	5	7	2	4	6	7	3	5	6	7
ν_1	1	1	1	1	0	1/e	0	1/e	0	1/s	0	1/s
ν_2	0	e	0	e	1	1	1	1	0	0	e/s	e/s
ν_3	0	0	s	s	0	0	s/e	s/e	1	1	1	1

$e = EI / (R^2 EA)$
 $s = EI / (R^2 kGA)$

$r = J / (R^2 \bar{A})$

wariant A gdy $r = 0$
 wariant B gdy $r \neq 0$

posłużymy się wielkościami bezwymiarowymi pokazanymi na rys.1, a zdefiniowanymi w tablicy 1 oraz za pomocą wzorów (1.2), przy czym wielkości wymiarowe wymagające odróżnienia zostały nadkreślone "daskiem". Zróznicowanie definicji podanych w tablicy 1 uwzględnia trzy możliwe wersje obliczeniowe i jest zabiegiem koniecznym, umożliwiającym równoległą analizę porównawczą modeli wszystkich typów zestawionych w tablicy 2.

$$\mathbf{X}(\beta) = [U(\beta), W(\beta), \phi(\beta), Q(\beta), N(\beta), M(\beta)]^T,$$

$$U(\beta) = \hat{U}(\beta)/R, \quad W(\beta) = \hat{W}(\beta)/R,$$

(1.2)

$$\mathbf{L}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21}(\omega) & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{12} = \text{diag}(\nu_3, \nu_2, -\nu_1), \quad \mathbf{L}_{21}(\omega) = p^2 \text{diag}(-1, -1, r),$$

$$r = J / (\bar{A} R^2).$$

Poszukiwanie bazy własnej w przestrzeni rozwiązań równania (1.1)

złożonej z funkcji

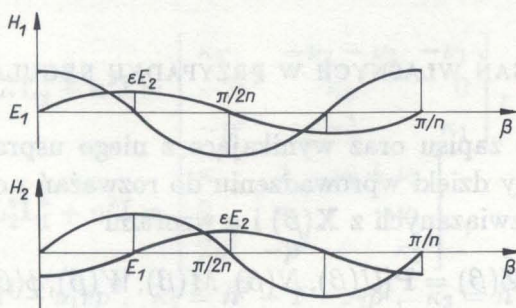
$$(1.3) \quad \mathbf{X}(\beta) = \mathbf{a}e^{\lambda\beta}$$

spełniających warunek okresowości rozwiązań po obwodzie pierścienia

$$(1.4) \quad \lambda = \pm in, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

w którym n jest liczbą falową, prowadzi do zespolonego równania algebraicznego

$$(1.5) \quad [\mathbf{L}(\omega) - \lambda\mathbf{I}]\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$



Rys. 2. Funkcje bazowe $H_1(\beta), H_2(\beta)$

Równanie to ma nietrywialne rozwiązania a tylko wtedy, gdy para liczb (ω, n) spełnia równanie

$$(1.6) \quad \det[\mathbf{L}(\omega) - \lambda\mathbf{I}] = 0.$$

Jest przy tym obojętne, która z wartości $\pm in$ zostanie podstawiona za zmienną λ , bowiem zmienna ta występuje w rozwinięciu wyznacznika (1.6) tylko w potęgach parzystych [1]. W tej sytuacji każdej częstości własnej ω odpowiadają dwie wartości $\lambda_1 = +in, \lambda_2 = -in$, a co za tym idzie także dwa liniowo niezależne rozwiązania

$$(1.7) \quad \mathbf{X}_1(\beta) = \mathbf{a}_1 e^{+in\beta}, \quad \mathbf{X}_2(\beta) = \mathbf{a}_2 e^{-in\beta},$$

tworzące bazę w dwuwymiarowej podprzestrzeni własnej Ω związanej z częstością własną ω . Ta specyficzna własność przestrzeni form drgań, niepodpartych pierścieni kołowych decyduje o szczególnych właściwościach dynamicznych tych układów.

W związku z tym, że wyznaczanie niewiadomych $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ odbywa się na podstawie równań o macierzach wzajemnie sprzężonych

$$(1.8) \quad [\mathbf{L}(\omega) - in\mathbf{I}]\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{L}(\omega) + in\mathbf{I}]\mathbf{a}_2 = \mathbf{0},$$

niewiadome te są również wzajemnie sprzężone $\mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{a}}_2$. Umożliwia to skupienie uwagi tylko na jednym równaniu np. (1.8)₁ z niewiadomą \mathbf{a}_1 , bez zawężania ogólności rozważań, wszystkie bowiem właściwości rozwiązania \mathbf{a}_1 są równocześnie także właściwościami rozwiązania z nim sprzężonego \mathbf{a}_2 . Dla uproszczenia zapisu niewiadomą \mathbf{a}_1 oznaczymy w dalszym ciągu przez \mathbf{a} i konsekwentnie przyjmiemy, że $\lambda = \lambda_1 = in$.

2. FORMY DRGAŃ WŁASNYCH W PRZYPADKU REGULARNYM ($n > 1$)

Uproszczenie zapisu oraz wynikające z niego usprawnienia dalszej analizy uzyskamy dzięki wprowadzeniu do rozważań nowych niewiadomych $\mathbf{Z}(\beta)$ i \mathbf{b} , związanych z $\mathbf{X}(\beta)$ i \mathbf{a} wzorami

$$(2.1) \quad \mathbf{X}(\beta) = \mathbf{PZ}(\beta) = \mathbf{P}[U(\beta), N(\beta), M(\beta), W(\beta), \phi(\beta), Q(\beta)]^T,$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{Pb},$$

w których przez

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oznaczono ortogonalną macierz odpowiednich przestawień współrzędnych. Po uwzględnieniu (2.1) otrzymujemy zamiast (1.5) nowe równanie

$$(2.2) \quad [\mathbf{L}^*(\omega) - in\mathbf{I}]\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

równoważne układowi dwu równań rzeczywistych

$$(2.3) \quad \mathbf{L}^*(\omega)\mathbf{b}' + n\mathbf{b}'' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}^*(\omega)\mathbf{b}'' - n\mathbf{b}' = \mathbf{0},$$

przy czym

$$(2.4) \quad \mathbf{L}^*(\omega) = \mathbf{P}^T \mathbf{L}(\omega) \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}_1^*(\omega) \\ \mathbf{L}_2^*(\omega) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}' + i\mathbf{b}'',$$

$$(2.5) \quad \mathbf{L}_1^*(\omega) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \nu_3 \\ -p^2 & 0 & 1 \\ 0 & rp^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2^*(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_1 \\ -p^2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie (2.3), w wyniku eliminacji, otrzymujemy dla wyznaczenia niewiadomych \mathbf{b}' , \mathbf{b}'' dwa identyczne równania

$$(2.6) \quad [(\mathbf{L}^*)^2 + n^2\mathbf{I}]\mathbf{b}' = \mathbf{0}, \quad [(\mathbf{L}^*)^2 + n^2\mathbf{I}]\mathbf{b}'' = \mathbf{0},$$

w których

$$(2.7) \quad (\mathbf{L}^*)^2 + n^2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1(\omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_2(\omega) \end{bmatrix},$$

$$(2.8) \quad \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1^*\mathbf{L}_2^* + n^2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \kappa_3 & -\nu_2 - \nu_3 & -\nu_1 \\ -2p^2 & \kappa_2 & 0 \\ -p^2 & -1 & \kappa_1 \end{bmatrix},$$

$$(2.9) \quad \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2^*\mathbf{L}_1^* + n^2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \kappa_2 & 1 & \nu_2 + \nu_3 \\ 0 & \kappa_1 & -\nu_1 \\ 2p^2 & -p^2 & \kappa_3 \end{bmatrix},$$

$$(2.10) \quad \kappa_1 = n^2 - \nu_1rp^2, \quad \kappa_2 = n^2 - 1 - \nu_2p^2, \quad \kappa_3 = n^2 - 1 - \nu_3p^2.$$

Z postaci równań (2.6) wynika, że oba wektory \mathbf{b}' , \mathbf{b}'' należą do podprzestrzeni zerowej tego samego operatora (2.7). Dzięki jego strukturze quasideagonalnej równanie

$$(2.11) \quad [(\mathbf{L}^*)^2 + n^2\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

jest równoważne dwom niezależnym równaniom

$$(2.12) \quad \mathbf{L}_1(\omega)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_2(\omega)\mathbf{x}_2 = \mathbf{0},$$

które mają rozwiązania nietrywialne dla tych samych par liczbowych (ω, n) ponieważ

$$(2.13) \quad \det(\mathbf{L}_1) \equiv \det(\mathbf{L}_2) \equiv \det(\mathbf{L}^* - \lambda\mathbf{I}) \equiv \det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I}) \equiv \\ \equiv \kappa_1[\kappa_2\kappa_3 - 2(\nu_2 + \nu_3)p^2] - \nu_1(\kappa_2 + 2)p^2.$$

Rozwiązanie ogólne równania (2.11) można więc napisać w postaci

$$(2.14) \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{E}_1 + B\mathbf{E}_2,$$

w której przez A, B oznaczono dowolne stałe liczbowe, a przez $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ odpowiednie, niezerowe rozwiązania równań (2.12). Zbiór rozwiązań (2.14) tworzy dwuwymiarową podprzestrzeń zerową operatora (2.7), przy czym liczby A, B odgrywają rolę współrzędnych wektora \mathbf{x} względem bazy $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ tej podprzestrzeni.

Jak wynika z (2.6), każdy z wektorów $\mathbf{b}', \mathbf{b}''$ jest rozwiązaniem równania o postaci (2.11). Na podstawie zatem (2.14) możemy napisać

$$\mathbf{b}' = A'\mathbf{E}_1 + A''\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{b}'' = B'\mathbf{E}_1 + B''\mathbf{E}_2.$$

Stałe A', A'', B', B'' występujące w tych wzorach nie mogą być jednak zupełnie dowolne, ponieważ wektory $\mathbf{b}', \mathbf{b}''$ nie są niezależne i muszą spełniać związki (2.3). Ze związków tych wynika, że

$$A'' = \varepsilon B', \quad B'' = -\varepsilon A',$$

przy czym

$$(2.15) \quad \varepsilon = (\mathbf{e}_2^T \mathbf{L}_2^* \mathbf{e}_1) / (n \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2).$$

Ostatecznie więc pozostają tylko dwie dowolne, niezależne stałe A', B' , które w dalszym ciągu oznaczymy przez A, B i dzięki temu otrzymamy

$$(2.16) \quad \mathbf{b}' = A\mathbf{E}_1 + \varepsilon B\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{b}'' = B\mathbf{E}_1 - \varepsilon A\mathbf{E}_2.$$

Bazę (1.7) podprzestrzeni własnej Ω , dzięki związkom (2.1) możemy obecnie przekształcić do nowej postaci

$$(2.17) \quad \mathbf{Z}_1(\beta) = \mathbf{b} e^{in\beta}, \quad \mathbf{Z}_2(\beta) = \bar{\mathbf{b}} e^{-in\beta},$$

a następnie wykorzystując fakt, że funkcje (2.17) są wzajemnie sprzężone, nadać jej wygodniejszą postać rzeczywistą

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_1(\beta) &= \mathbf{b}' \cos(n\beta) - \mathbf{b}'' \sin(n\beta), \\ \mathbf{Y}_2(\beta) &= \mathbf{b}'' \cos(n\beta) + \mathbf{b}' \sin(n\beta). \end{aligned}$$

Uwzględnienie związków (2.16) prowadzi do wzorów

$$(2.19) \quad \mathbf{Y}_1(\beta) = A\mathbf{H}_1(\beta) - B\mathbf{H}_2(\beta), \quad \mathbf{Y}_2(\beta) = A\mathbf{H}_2(\beta) + B\mathbf{H}_1(\beta),$$

w których posłużono się oznaczeniami

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}_1(\beta) &= \mathbf{E}_1 \cos(n\beta) + \varepsilon \mathbf{E}_2 \sin(n\beta) = \mathbf{H}_2(\beta + \pi/2n), \\ \mathbf{H}_2(\beta) &= \mathbf{E}_1 \sin(n\beta) - \varepsilon \mathbf{E}_2 \cos(n\beta) = -\mathbf{H}_1(\beta + \pi/2n). \end{aligned}$$

Funkcje $H_1(\beta), H_2(\beta)$ określone wzorami (2.20) i pokazane schematycznie na rys.2 stanowią najdogodniejszą dla dalszych rozważań bazę podprzestrzeni własnej Ω związanej z częstością własną ω .

Konsekwencją istnienia dwuwymiarowych podprzestrzeni własnych jest możliwość występowania jednoczęściowych drgań swobodnych w postaci różnego rodzaju fal, począwszy od stojącej (z ustalonym położeniem węzłów na obwodzie) aż do biegnącej (z węzłami przemieszczającymi się z prędkością liniową $v = \pm\omega R/n$), poprzez wszystkie przypadki pośrednie wymagające oddzielnej analizy.

W celu uzyskania jednoznaczności, oznaczymy przez ω_{nk} $k - t\alpha$ częstość własną przynależną liczbie falowej n [1], a przez Ω_{nk} odpowiadającą jej dwuwymiarową podprzestrzeń własną rozpiętą na bazie (H_{1nk}, H_{2nk}) . Baza ta jest ortogonalna w sensie iloczynu skalarnego

$$(2.21) \quad (\mathbf{F}, \mathbf{G}) = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}^T(\beta) \mathbf{G}(\beta) d\beta.$$

Ogólnie, warunek ortogonalności $(H_{ink}, H_{jml}) = 0$ dwu różnych form bazowych $H_{ink} \in \Omega_{nk}, H_{jml} \in \Omega_{ml}$ jest spełniony w dwu przypadkach: 1) gdy $i \neq j$ i 2) gdy $n \neq m$. W pozostałych przypadkach (tzn. gdy $i = j, n = m, k \neq l$) formy bazowe nie są wzajemnie ortogonalne w sensie definicji (2.21).

Określenie bazowych form drgań własnych $H_{ink} (i = 1, 2)$ na podstawie wzorów (2.20) sprowadza się do obliczenia wektorów e_1, e_2 odpowiadających ustalonej parze liczbowej (n, ω_{nk}) . Wektory te, z dokładnością do stałego mnożnika, możemy wyznaczyć na podstawie równań (2.12), z których wynika, że w rozważanym przypadku ($n > 1$)

$$(2.22) \quad e_1^T = [\kappa_2, 2p^2, \alpha], \quad e_2^T = [\nu_1 p^2 - \kappa_1 \kappa_3, 2\nu_1 p^2, 2\kappa_1 p^2],$$

przy czym wprowadzono oznaczenie

$$(2.23) \quad \alpha = \begin{cases} [\kappa_2 \kappa_3 - 2(\nu_2 + \nu_3)p^2]/\nu_1, & \text{gdy } \nu_1 \neq 0, \\ (\kappa_2 + 2)p^2/\kappa_1, & \text{gdy } \kappa_1 \neq 0. \end{cases}$$

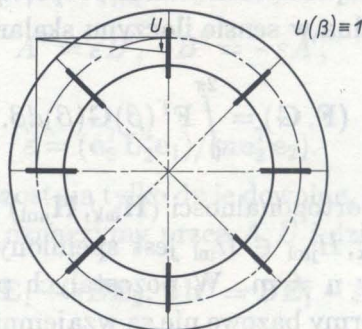
Wzory (2.22) są uniwersalne i obowiązują przy $n > 1$ dla modeli wszystkich typów. Dzięki wykorzystaniu związków wynikających z zerowania się wyznaczników (2.13) wzorom tym można w niektórych przypadkach szczególnie nadać inną, prostszą i wygodniejszą postać.

3. SZCZEGÓLNE PRZYPADKI FORM DRGAŃ WŁASNYCH ($n \leq 1$)

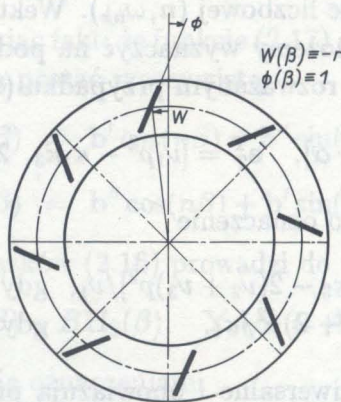
Wyznaczanie form własnych w przypadku, gdy $n \leq 1$, wymaga analizy indywidualnej poszczególnych modeli z powodu występowania pewnych osobliwości.

3.1. Przypadek $n = 0$

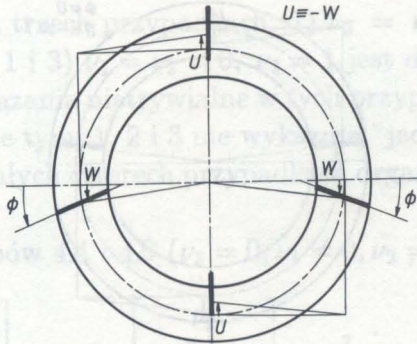
Rozwiązania e_1, e_2 wyznaczamy na podstawie równania (2.2), które przybiera postać trzech niezależnych układów równań rzeczywistych



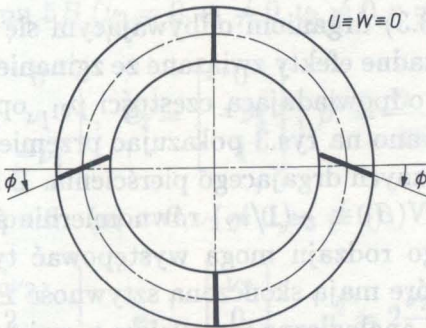
Rys. 3. Forma drgań $U(\beta) \equiv 1$



Rys. 4. Forma drgań $\phi(\beta) \equiv 1, W(\beta) \equiv -r$



Rys. 5. Forma drgań $U(\beta) \equiv -W(\beta)$



Rys. 6. Forma drgań $U(\beta) \equiv -W(\beta) \equiv 0$

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 \\ -p^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & \nu_3 \\ -p^2 & 0 & 1 \\ 0 & rp^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = 0, \\ \nu_1 b_3 = 0.$$

Z postaci tej wynika, że istnieją tylko dwie wartości p^2 :

$$(3.2) \quad p_{01}^2 = 1/\nu_2, \quad p_{02}^2 = (1+r)/(r\nu_3),$$

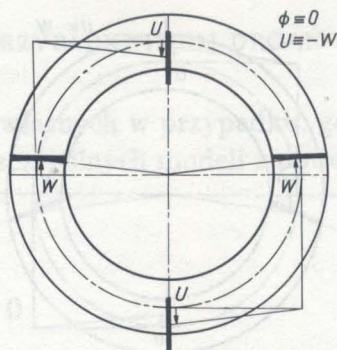
którym odpowiadają rozwiązania nietrywialne

$$(3.3) \quad \mathbf{e}_1^T = [1, -p_{01}^2, \alpha], \quad \mathbf{e}_2 = 0,$$

$$(3.4) \quad \mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{e}_2^T = [-r, 1, -rp_{02}^2],$$

przy czym

$$(3.5) \quad \alpha = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \nu_1 \neq 0, \\ \text{nieokreślone (dowolne)}, & \text{gdy } \nu_1 = 0. \end{cases}$$



Rys. 7. Forma drgań $\phi(\beta) \equiv 0, U(\beta) \equiv -W(\beta)$

Jak wynika z (3.3) drganiom odbywającym się z częstością własną p_{01} nie towarzyszą żadne efekty związane ze zginaniem i ścinaniem ($\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$). Formę własną odpowiadającą częstości p_{01} , opisaną przez funkcję $U(\beta) \equiv 1$, zilustrowano na rys.3 pokazując przemieszczenia wybranych przekrojów poprzecznych drgającego pierścienia. Z formą tą skojarzona jest siła podłużna $N(\beta) \equiv -(1/\nu_2)$ równomiernie ściskająca cały pierścień. Drgania tego rodzaju mogą występować tylko w tych typach modeli (2,4,6,7), które mają skończoną sztywność EA (por. tabl.2).

Sytuacja w pełni analogiczna ma miejsce również w przypadku drgań własnych modeli o skończonej sztywności kGA (typy 3,5,6,7) i niezerowej ($r \neq 0$) bezwładności obrotowej przekrojów poprzecznych (tabl.2). Odbywają się one z częstością własną p_{02} , a ich formie pokazanej na rys.4, związanej z czystym ścinaniem, nie towarzyszą żadne inne efekty ($\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$). Forma ta jest opisana przez dwie funkcje $\Phi(\beta) \equiv 1, W(\beta) \equiv -r$, przy czym jest z nią skojarzona siła poprzeczna $Q(\beta) \equiv -(1+r)/\nu_3$. Ponieważ przy $r \rightarrow 0$ jest $p_{02} \rightarrow \infty$, zatem ten przypadek graniczny nie ma żadnego sensu fizycznego.

3.2. Przypadek $n = 1$

Podstawę wyznaczania rozwiązań $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ stanowią w tym przypadku równania i wzory (2.12) - (2.13). Wynika z nich, że

$$(3.6) \quad \det(\mathbf{L}_1) = -p^2 \{ \nu_1 \nu_2 \nu_3 r p^4 - [(\nu_1 + \nu_3) \nu_2 + 2(\nu_2 + \nu_3) \nu_1 r] p^2 + 2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) \},$$

i że w następujących trzech przypadkach: 1) $\nu_2 = \nu_3 = 0, \nu_1 = 1$, 2) $\nu_1 = \nu_3 = 0, \nu_2 = 1$ i 3) $\nu_1 = \nu_2 = 0, \nu_3 = 1$ jest $\det(\mathbf{L}_1) = -2p^2 \neq 0$. Oznacza to, że rozwiązania nietrywialne w tych przypadkach nie istnieją, a modele uproszczone typu 1, 2 i 3 nie wykazują "jednofalowych" drgań własnych. W pozostałych czterech przypadkach drgania takie są możliwe i otrzymujemy

4) dla modeli typów 4A i 4B ($\nu_3 = 0, \nu_1 \neq 0, \nu_2 \neq 0$):

$$(3.7) \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \nu_1\nu_2 \\ -2\nu_1 \\ 2\nu_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \nu_2 \\ 2\nu_2 \\ \nu_2 p^2 - 2 \end{bmatrix}, \quad p^2 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{(r + 0,5)\nu_1\nu_2},$$

5) dla modelu typu 5B ($\nu_2 = 0, \nu_1 \neq 0, \nu_3 \neq 0, r \neq 0$):

$$(3.8) \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu_1 \\ -\nu_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\nu_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p^2 = \frac{\nu_1 + \nu_3}{r\nu_1\nu_3},$$

6) dla modelu typu 6 ($\nu_1 = 0, \nu_2 \neq 0, \nu_3 \neq 0$):

$$(3.9) \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -\nu_2 \\ 2 \\ 2 - \nu_2 p^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \nu_3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad p^2 = 2 \frac{\nu_2 + \nu_3}{\nu_2\nu_3},$$

7) dla modeli typów 7A i 7B ($\nu_1 \neq 0, \nu_2 \neq 0, \nu_3 \neq 0$) wzory mają postać (2.22), przy czym p^2 jest pierwiastkiem równania

$$\nu_1\nu_2\nu_3rp^4 - [(\nu_1 + \nu_3)\nu_2 + 2(\nu_2 + \nu_3)\nu_1r]p^2 + 2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) = 0.$$

Jednofalowe ($n = 1$) formy drgań własnych (2.20) określone na podstawie wyszczególnionych powyżej wzorów przedstawiono na rys. 5, 6 i 7 ilustrujących przemieszczenia charakterystycznych przekrojów drgającego pierścienia.

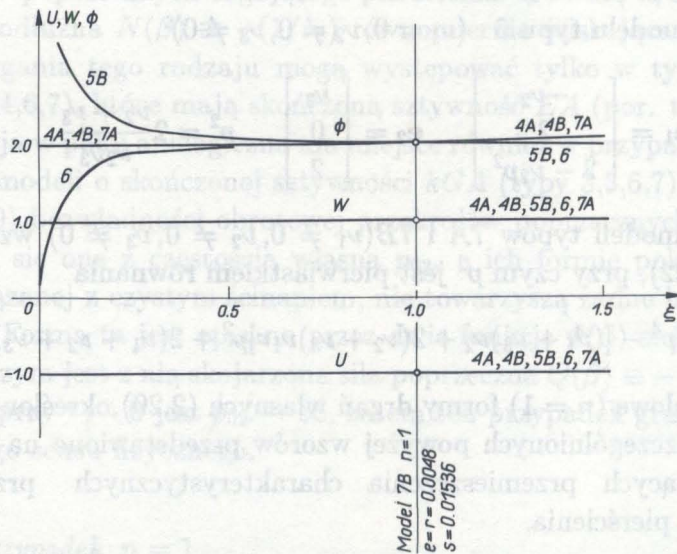
4. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

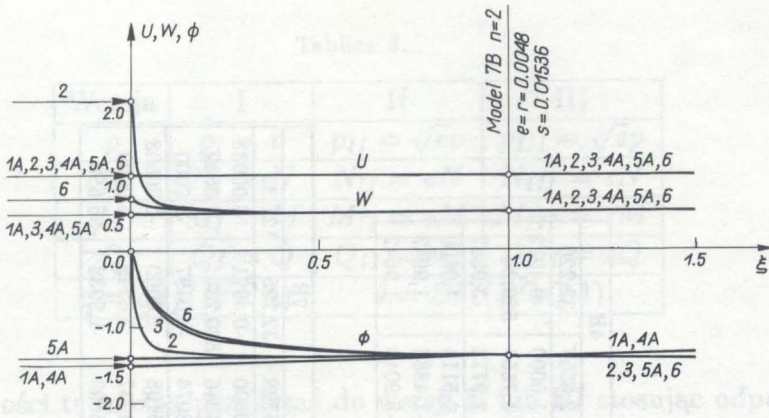
Na podstawie wzorów (2.20), (2.22) i (3.7)-(3.9) przeprowadzono, dla omawianego w [1] przykładowego pierścienia żeliwnego, obliczenia form drgań własnych, modeli wszystkich typów przy założeniu, że ich

Tablica 3.

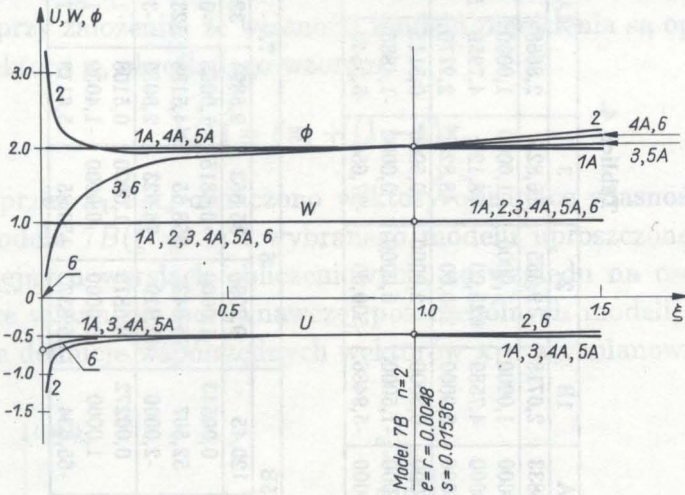
Typ	4A	4B	5B	6	7A	7B	
p	20,461	20,364	117,35	23,385	20,461	20,363	117,91
e_1	-1,0000	-1,0000	0,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	0,00487
	416,67	416,67	65,104	416,67	416,67	416,67	-2,0309
	-2,0000	-2,0000	-1,0000	-130,21	-1,9697	-2,0309	-1,0000
εe_2	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000	-0,00487
	2,0000	2,0000	1,0000	0,0000	1,9697	2,0309	1,0000
	2,0000	-1,9810	-65,104	130,21	1,9697	-2,0113	-65,739

własności fizyczne są określone za pomocą trzech parametrów bezwymiarowych e , r , s . Przyjęto, że parametry te są zdefiniowane tak samo jak w [1] i że przyjmują te same co tam wartości liczbowe $e = EI/(R^2EA) = 0,0048$, $r = J/(R^2\bar{A}) = 0,0048$, $s = EI/(R^2kGA) = 0,01536$. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicach 3 i 4 tylko dla dwu wybranych przypadków odpowiednio, gdyż $n = 1$ i $n = 2$.

Rys. 8. Zależność form drgań, odpowiadających częstości ω_{11} , od parametru ξ



Rys. 9. Zależność form drgań, odpowiadających częstości ω_{21} , od parametru ξ



Rys. 10. Zależność form drgań, odpowiadających częstości ω_{22} , od parametru ξ

Uzyskanie wyników dla wszystkich rodzajów modeli wymagało stosowania trzech wersji obliczeniowych, różniących się definicjami wielkości bezwymiarowych (por. tabl. 1 i 2). Z tego też powodu otrzymane wyniki mogły być ze sobą porównane tylko dzięki temu, że zostały czysto formalnie przeliczone do jednej, ustalonej wersji. W przeprowadzonych obliczeniach zastosowano przeliczanie do wersji I i do niej właśnie odnoszą się wszystkie wartości wielkości bezwymiarowych p, N, M, Q .

Tablica 4.

Typ	1A	1B	2	3	4A		4B	
p	2,6833	2,6718	19,365	10,825	2,6668	32,474	2,6557	32,226
ϵ_1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	-0,5115	1,0000	-0,4972
	4,8000	4,7589	625,00	78,125	4,7959	523,23	4,7554	520,24
	3,0000	3,0000	250,00	48,828	2,9770	-4,0460	2,9772	-3,9887
ϵ_2	0,5000	0,5000	2,0000	0,5000	0,5115	1,0000	0,5114	1,0000
	-1,5000	-1,5000	0,0000	0,0000	-1,4885	2,0230	-1,4886	1,9943
	-6,0000	-5,9486	-500,00	-97,656	-5,9540	8,0921	-5,9040	-1,9642

Typ	5A	5B		6		7A		7B		
p	2,6045	2,5945	120,45	9,7995	35,653	2,5894	32,462	2,5798	32,225	121,32
ϵ_1	1,0000	1,0000	0,00543	1,0000	-0,6815	1,0000	-0,5108	1,0000	-0,4971	0,00933
	4,5222	4,4877	52,507	75,643	558,65	4,5186	523,09	4,4846	520,23	-4,0609
	2,8263	2,8277	-2,0000	42,919	-76,923	2,8059	-3,8093	2,8074	-4,0497	-2,0000
ϵ_2	0,5000	0,5000	0,00272	0,6815	1,0000	0,5108	1,0000	0,5108	1,0000	-0,00508
	-1,4132	-1,4138	1,0000	0,0000	0,0000	-1,4030	1,9047	-1,4037	2,0249	1,0000
	-5,6527	-5,6097	-65,634	-85,837	153,85	-5,6118	7,6187	-5,5699	-1,9938	-66,650

Tablica 5.

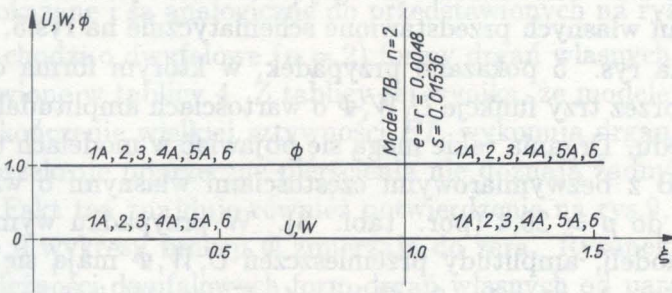
Wersja	I	II	III
p	$p_I = p$	$p_{II} = \sqrt{e}p$	$p_{III} = \sqrt{s}p$
N	$N_I = N$	$N_{II} = eN$	$N_{III} = sN$
M	$M_I = M$	$M_{II} = eM$	$M_{III} = sM$
Q	$Q_I = Q$	$Q_{II} = eQ$	$Q_{III} = sQ$
$e = EI/(R^2EA)$		$s = EI/(R^2kGA)$	

Wartości te można przeliczać do wersji II lub III stosując odpowiednio współczynniki e i s zgodnie z tablicą 5.

Dodatkowo przeprowadzono obliczenia mające na celu zbadanie zależności form drgań własnych od wartości zmiennych e, r, s . Zależności te badano przy założeniu, że własności modelu pierścienia są opisane za pomocą wektora \mathbf{x} , określonego wzorem

$$(4.1) \quad \mathbf{x}(\xi) = \xi \mathbf{x}_1 + (1 - \xi) \mathbf{x}_0,$$

w którym przez \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_0 oznaczono wektory opisujące własności odpowiednio modelu $7B(\xi = 1)$ i wybranego modelu uproszczonego ($\xi = 0$). W kolejnych wersjach obliczeniowych, ze względu na osobiwości występujące w analizie porównawczej poszczególnych modeli, przyjęto za [1] różne definicje współrzędnych wektorów \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_0 , mianowicie



Rys. 11. Zależność form drgań, odpowiadających częstości ω_{23} , od parametru ξ

- w wersji I: $\mathbf{x}_1 = (e, r, s)^T, \quad \mathbf{x}_0 = (e_0, r_0, s_0)^T,$
- w wersji II: $\mathbf{x}_1 = (1/e, r, s/e)^T, \quad \mathbf{x}_0 = (1/e_0, r_0, s_0/e_0)^T,$
- w wersji III: $\mathbf{x}_1 = (1/s, r, e/s)^T, \quad \mathbf{x}_0 = (1/s_0, r_0, e_0/s_0)^T.$

Zdefiniowanie wektora x jako funkcji (4.1) tylko jednej zmiennej niezależnej ξ sprawia, że zostają jedynie od niej uzależnione wartości badanych wielkości U, N, M, W, Φ, Q , które składają się na określenie (2.1) formy drgań własnych. Wykresy niektórych z tych zależności pokazano na rys. 8, 9, 10, 11. Jest przy tym istotne, że formy drgań modeli uproszczonych są reprezentowane przez rzędne funkcji tylko w punkcie $\xi = 0$. Wszystkie pozostałe rzędne, w punktach $\xi \neq 0$, dotyczą różnych modeli typu 7B o własnościach określonych przez wartości współrzędnych wektora x obliczone zgodnie ze wzorem (4.1). W związku z tym oznaczenia poszczególnych krzywych na rys. 8, 9, 10, 11, symbolami modeli uproszczonych, należy rozumieć tylko umownie i jedynie w ten sposób, że krzywe te ilustrują zmiany form drgań własnych modeli 7B o własnościach zmieniających się w funkcji ξ "wzdłuż ścieżki" prowadzącej, w przestrzeni współrzędnych wektora x , ku wybranemu modelowi uproszczonemu ($\xi = 0$) o zaznaczonym symbolu.

5. PODSUMOWANIE

Na podstawie przeprowadzonej analizy porównawczej można podjąć próbę opisu istotnych cech charakterystycznych wszystkich rodzajów form drgań własnych, różnych typów modeli pierścieni kołowych.

Formy własne drgań bezfalowych ($n = 0$) zostały już omówione szczegółowo w p.3.1. Omówienia wymagają natomiast jednofalowe ($n = 1$) formy drgań własnych przedstawione schematycznie na rys. 5, 6 i 7.

I tak na rys. 5 pokazano przypadek, w którym forma drgań jest określona przez trzy funkcje U, W, Φ o wartościach amplitudalnych tego samego rzędu. Drgania takie mogą się pojawiać w modelach typów 4A, 4B, 7A, 7B z bezwymiarowymi częstościami własnymi o wartościach zbliżonych do $p = 20,4$ (por. tabl. 3). W przypadku wymienionych czterech modeli, amplitudy przemieszczeń U, W, Φ mają się do siebie odpowiednio jak $-1 : 1 : 2$. Zależność $U = -W$ jest konsekwencją spełnienia przez siły bezwładności drgającego pierścienia jego warunków równowagi jako ciała przestrzennie swobodnego. Spełnienie tych warunków jest możliwe dzięki ruchom pierścienia wynikającym z rozciągłości jego osi.

Formę drgań pokazaną na rys. 6, określa głównie tylko przemieszcze-

nie kątowe Φ przy zerowych (model typu 5B) lub też znikomo małych (model typu 7B) wartościach przemieszczeń liniowych U, W . Drgania takie mogą występować w wymienionych typach modeli z częstościami własnymi zbliżonymi do wartości $p = 117,5$ (por. tabl. 3). W przypadku drgań modelu 5B, wobec braku sił bezwładności związanych z występowaniem przemieszczeń U, W , zachodzi związek $N = -Q$.

Cechą charakterystyczną drgań własnych o formie pokazanej na rys. 7 i częstości $p = 23,385$, jest zupełny brak przemieszczeń kątowych Φ spowodowany nieskończeniem wielką sztywnością pierścienia na zginanie ($EI = \infty$). Opisane drgania mogą się pojawiać w modelu typu 6 tylko dzięki rozciągłości jego osi umożliwiającej spełnienie warunków równowagi przez siły bezwładności działające na swobodny pierścień.

Wykresy zależności form drgań jednofalowych, odpowiadających niższej częstości własnej ω_{11} , od wartości parametru ξ , przedstawiono na rys.8 przy założeniu, że normowanie form odbywa się względem przemieszczenia W . Konsekwencją takiego sposobu normowania jest, w przypadku przejścia granicznego do modelu 5B, nieograniczony wzrost kąta Φ , który dominuje przemieszczenia U, W , gdy $\xi \rightarrow 0$. Zastosowanie w tym przypadku normowania względem kąta Φ prowadzi oczywiście do wyniku zgodnego z rys.6: $\Phi \equiv 1$, przy $U, W \rightarrow 0$, gdy $\xi \rightarrow 0$.

Jednofalowe formy drgań, odpowiadające wyższej częstości własnej ω_{12} , charakteryzują się znaczną przewagą wartości kąta Φ nad przemieszczeniami U, W w całym zakresie zmienności parametru ξ . Ponieważ przewaga ta jest co najmniej tysiąckrotna, wykresy funkcji U, W, Φ nie zostały pokazane i są analogiczne do przedstawionych na rys.11.

Jeżeli chodzi o dwufalowe ($n = 2$) formy drgań własnych, to zostały one zestawione w tablicy 4. Z tablicy tej wynika, że modele typów 2, 3 i 6 o nieskończenie wielkiej sztywności EI , wykonują drgania, podczas których przekroje poprzeczne pierścienia nie doznają żadnych obrotów ($\Phi = 0$). Fakt ten znajduje również potwierdzenie na rys.9, na którym przy $\xi \rightarrow 0$ wykresy funkcji Φ zbiegają do zera. Rysunek ten przedstawia zależności dwufalowych form drgań własnych od parametru ξ w przypadku drgań zachodzących z najniższą częstością własną ω_{21} .

Na rys. 10 przedstawiono analogiczne wykresy form własnych, ale odbywających się z częstością pośrednią ω_{22} . Na uwagę zasługuje dość jak się wydaje niespodziewane zachowanie funkcji U i Φ , które przy $\xi \rightarrow 0$ zbiegają do nieskończoności. Zachowanie to można próbować

wytłumaczyć posługując się analogią z dwumasowym układem drgającym, w którym wartość jednej z mas zmierza do zera. Przy dokonywaniu przejścia granicznego, w układzie tym, druga z częstości drgań własnych oraz amplituda malejącej masy, rosną nieograniczenie. Mamy tu więc do czynienia jak gdyby z zanikaniem odpowiedniego, dynamicznego stopnia swobody drgań układu.

Rysunek 11 ilustruje zależności form drgań własnych od parametru ξ w przypadku drgań zachodzących z najwyższą częstością własną ω_{23} . Wobec znacznej przewagi (ponad tysiąckrotnej) wartości kąta Φ nad pozostałymi przemieszczeniami, wykresy z rys. 11 nie wnoszą do opisu badanego zjawiska żadnych istotnych informacji.

Na zakończenie warto zauważyć, że mimo swej konstrukcyjnej prostoty, przestrzenie swobodne pierścienie kołowe jako układy drgające, okazują się jednak obiektami o dość interesujących własnościach dynamicznych. Badanie możliwości zastosowań w analizie tych układów różnych typów modeli uproszczonych, ujawnia ich interesujące i znacznie zróżnicowane własności dynamiczne, zasługujące na uwagę, jak się wydaje, nie tylko ze względów czysto poznawczych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. OLSZOWSKI, *Płaskie drgania swobodne niepodpartych pierścieni kołowych. Część I. Częstości drgań własnych*, Rozpr. Inżyn., **37**, 3, 547-563, 1989.

Резюме

ПЛОСКИЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕПОДПЕРТЫХ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ. ЧАСТЬ II. ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В работе обсужден сравнительный анализ плоских форм собственных колебаний разных типов уточненных моделей, пространственно свободных круговых колец. Этот анализ представляет дальнейшее развитие темы обсужденной в публикации [1] только в аспекте сравнений частот собственных колебаний.

SUMMARY

FREE IN-PLANE VIBRATIONS OF UNSUPPORTED CIRCULAR RINGS
 PART II. NATURAL MODES

The aim of the paper is a comparison of natural modes obtained numerically for different types of ring models taking into account extension, rotary inertia and shear deformation. Special attention is laid on the singularities appearing in two cases when the wavenumber is equal to zero or one.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
 INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI, KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lutego 1990 r.

Na podstawie poprzednich opracowań [1,2] w niniejszej pracy omówiono charakterystyczne cechy jednoczesnościowych drgań swobodnych, powstających w modelach pierścieni sztywnych w sensie Timoshenki, uwzględniając występowanie własności dwuwymiarowych podprzestrzeni własnych. Dodatkowo omówiono również ogólny przypadek drgań swobodnych i wymuszonych.

1. WSTĘP

Przebiegiem swobodnych pierścieni kołowych, wykonujących drgania w płaszczyźnie wyznaczonej przez ich oś teoretyczną, są układami o dość skomplikowanych właściwościach dynamicznych. Własności te wynikają z charakterystycznej dla takich pierścieni struktury przestrzeni ich form drgań, będącej sumą prostą dwuwymiarowych podprzestrzeni własnych, odpowiadających kolejnym częstościom własnym [1,2]. Dzięki swoim właściwościom, pierścienie bez podpór mogą wykonywać jednoczesnościowe drgania swobodne o jakościowo różnych formach, zależnych od aktualnych warunków początkowych ruchu. Drgania te w dwóch szczególnych przypadkach szczególnie przybierają prostą postać fali stojącej (z ustalonymi położeniami węzłów na obwodzie pierścienia) lub biegnącej (z węzłami poruszającymi się po obwodzie ze stałą prędkością fazową $v = \pm cR/n$). W przypadku natomiast ogólnym, takie jednoczesnościowe drgania swobodne przybierają postać fali pulsującej, stanowiącej pewną pośrednią formę ruchu, zawierającą się pomiędzy wyżej wymienionymi dwiema formami szczególnymi.