

# MODELOWANIE ROZKŁADÓW NAPRĘŻEŃ I PRZEMIESZCZEŃ W OTOCZENIU WIERZCHOŁKA KARBU TRÓJKĄTNEGO W PŁASKICH ZAGADNIENIACH TEORII SPRĘŻYSTOŚCI CZEŚĆ II

ANDRZEJ SEWERYN (BIAŁYSTOK)

Praca przedstawia sposób modelowania rozkładów przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w obszarach płaskich posiadających karby trójkątne o dowolnym kącie rozwarcia za pomocą metody elementów skończonych. W części I wyprowadzone zostały wzory na naprężenia i przemieszczenia w pobliżu wierzchołka karbu trójkątnego oraz wyznaczono zależności współczynników asymptotyczności naprężeń od kąta rozwarcia karbu. W II części pracy omówiony został nowy element skończony AST (asymptotic strain triangle). Jest to element specjalny, którego funkcje interpolujące uwzględniają zmianę asymptotyczności naprężeń i odkształceń wraz ze zmianą kąta rozwarcia karbu. W definicji współczynników intensywności naprężeń został uwzględniony dowolny kąt rozwarcia karbu. Omówione zostały także sposoby ekstrapolacji współczynników intensywności naprężeń w obliczeniach metody elementów skończonych, umożliwiające analizę karbów o dowolnym kącie rozwarcia. Na zakończenie porównano wyniki obliczeń przemieszczeń i naprężeń w pobliżu wierzchołka przykładowego karbu trójkątnego, otrzymanych za pomocą elementu AST oraz innych stosowanych do tego celu elementów skończonych.

## WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

- $\beta$     połowa kąta rozwarcia karbu,
- $\delta$     odległość węzłów środkowych od węzła osobliwego w elemencie AST,
- $\varepsilon_{ij}$     tensor odkształcenia,
- $G$     moduł odkształcenia postaciowego,
- $K_I, K_{II}$     współczynniki intensywności naprężeń dla karbów trójkątnych,
- $\lambda$     współczynnik asymptotyczności naprężeń,
- $\lambda_I, \lambda_{II}$     współczynniki asymptotyczności naprężeń dla I i II przypadku obciążenia,
- $L$     długość boku elementu skończonego na kierunku ekstrapolacji,
- $l$     połowa długości karbu wewnętrznego,
- $N_i$      $i$ -ta funkcja kształtu elementu skończonego,
- $\nu$     liczba Poissona,

$r, \vartheta$	współrzędne biegunowe,
$x, y$	globalne współrzędne kartezjańskie,
$\xi, \eta$	współrzędne lokalne związane z elementem AST,
$\xi_i, \eta_i$	lokalne współrzędne wierzchołków elementu,
$q_i$	tensor przemieszczenia,
$u_i, v_i$	przemieszczenia $i$ -tego węzła elementu skończonego,
$u, v$	przemieszczenia w układzie kartezjańskim,
$u_r, u_\vartheta$	przemieszczenia w układzie biegunowym,
$\sigma_{ij}$	tensor naprężenia,
$\sigma_1, \sigma_2$	naprężenia główne,
$\sigma_x, \sigma_y$	naprężenia normalne w układzie kartezjańskim.

Uwaga! Oznaczenia wzorów posiadające oprócz numeru rzymską jedynekę odnoszą się do I części pracy (np. I-3.33).

## 1. WPROWADZENIE

Numeryczne modelowanie zjawisk zachodzących w otoczeniu wierzchołków karbów trójkątnych, których szczególnym przypadkiem są szczeliny płaskie, pozwala wyznaczyć rozkłady przemieszczeń i naprężeń oraz umożliwia przewidywanie procesu kruchego pęknięcia. W płaskich zagadnieniach teorii sprężystości (płaskim stanie naprężenia oraz odkształcenia) dobre efekty w ich określaniu otrzymuje się za pomocą metody elementów skończonych. Wskutek występowania dużych gradientów naprężeń i odkształceń uzyskanie odpowiedniej dokładności bez wykorzystania specjalnych elementów wymaga zastosowania tak gęstej siatki podziału, że staje się oczywista konieczność modelowania rozkładu naprężeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka karbu zgodnie z rozwiązaniem analitycznym. W początkowym etapie wykorzystywania metody elementów skończonych dla potrzeb mechaniki pęknięcia wykonywane były najczęściej dwustopniowe obliczenia [2, 3]. Pierwszy stopień - to ogólny podział i wyznaczenie przemieszczeń dla całego badanego obszaru, drugi - to obliczenie małego wycinka ciała przy wierzchołku karbu, przy wykorzystaniu jako warunków brzegowych poprzednich rozwiązań. Największą wadą tego sposobu są bardzo skomplikowane obliczenia i stosunkowo mała zbieżność z rozwiązaniem ścisłym. Stąd też, przy budowie dyskretnego modelu, punkt osobliwy (wierzchołek karbu) zawsze otacza się pewną ilością specjalnych elementów, których funkcje interpolujące utworzone zostały z uwzględnieniem asymptotycznego rozwiązania w tym obszarze.

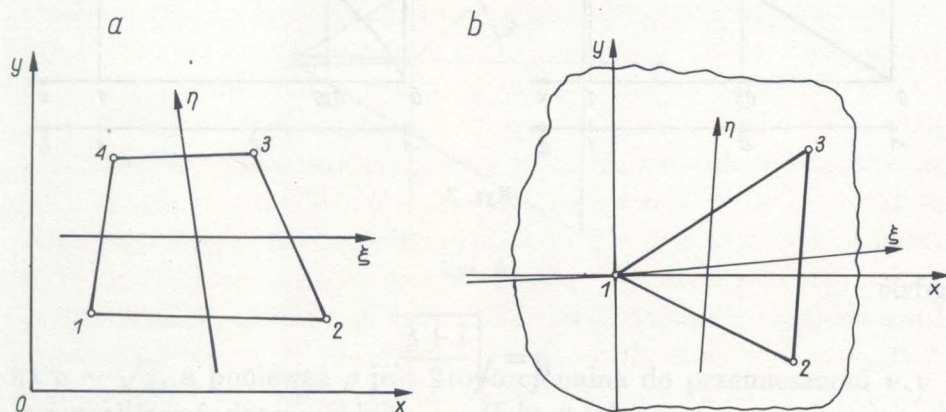
W niniejszej pracy przedstawiony został element skończony modelujący asymptotyczny rozkład naprężeń w pobliżu wierzchołka karbu trójkątnego oraz sposób określenia współczynników intensywności naprężeń uwzględniający dowolny kąt rozwarcia karbu, a co za tym idzie rozszerzone kryterium naprężeniowe kruchego pęknięcia.

## 2. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W MECHANICE PĘKANIA

Jeden ze sposobów otrzymywania elementu osobliwego z czworokątnego elementu izoparametrycznego (rys. 1a) polega na zbiegnięciu się węzłów 1 i 4, w wyniku czego powstaje osobliwy liniowy element trójkątny [3]. Funkcje kształtu elementu czworokątnego utworzone we współrzędnych lokalnych  $(\xi, \eta)$  mają postać:

$$N_i(\xi, \eta) = 0,25(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$$

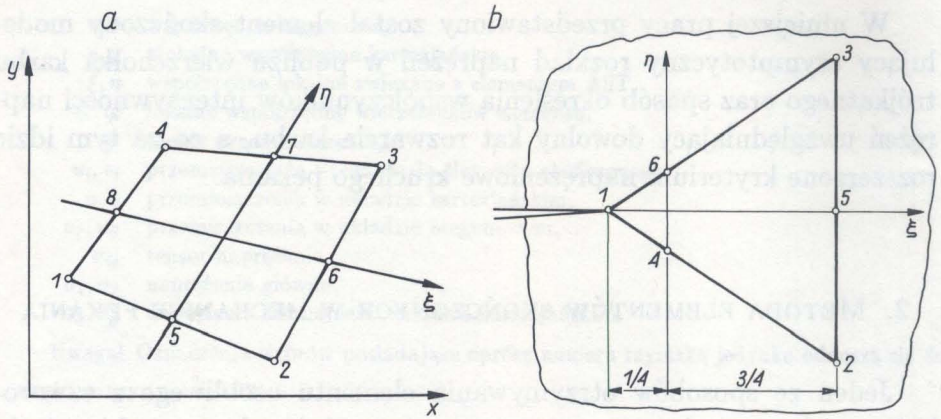
gdzie  $\xi_i, \eta_i$  - lokalne współrzędne wierzchołków oraz  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ .



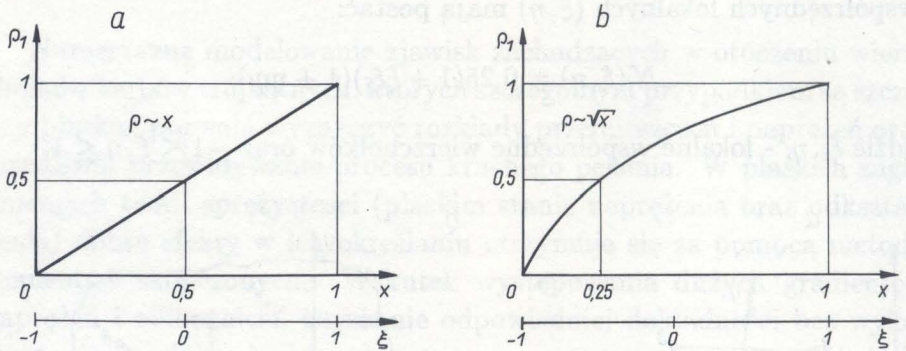
Rys. 1.

Upřednio wspomniane zbiegnięcie się węzłów 1 i 4 powoduje, że powstały element osobliwy liniowy (I rzędu) (rys. 1b) posiada znacznie zmieniony rozkład przemieszczeń (dla warunku  $u_1 = u_4, v_1 = v_4$ ):

$$u(\xi, \eta) = (1 - \rho)u_1 + 0,5\rho(1 - \eta)u_2 + 0,5\rho(1 + \eta)u_3,$$



Rys. 2.

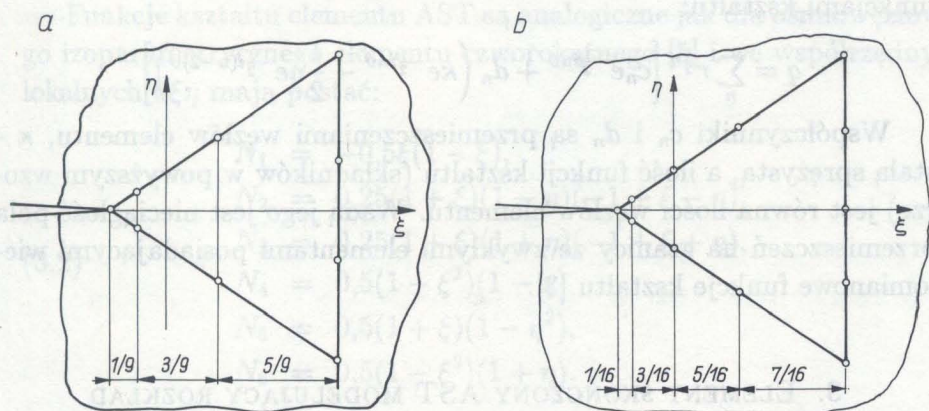


Rys. 3.

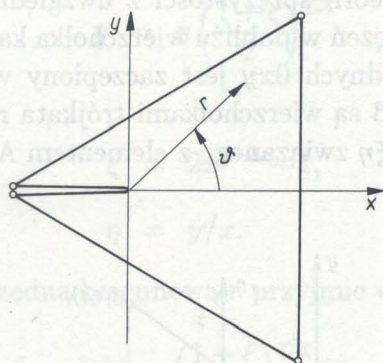
gdzie

$$\rho = \sqrt{\frac{1 + \xi}{2}}.$$

Element osobliwy kwadratowy (II rzędu) można otrzymać przez wprowadzenie węzłów bocznych kwadratowego izoparametrycznego elementu w  $1/4$  odległości boku od wierzchołka osobliwego oraz zbiegnięcie się wierzchołków 1, 4 i 8 (rys. 2a, b). Wskutek przesunięcia węzłów bocznych, pomimo niezmiennych funkcji interpolujących (w stosunku do elementu zwyczajnego), zależność między współrzędnymi  $\xi$  i  $x$  jest nieliniowa. Wykres  $\rho = (1 + \xi)/2$  w funkcji współrzędnej  $x$  jest przedstawiony na rys. 3a, b. Jak widać, zależność między  $\rho$  i  $x$  z liniowej zmieniła się



Rys. 4.



Rys. 5.

na  $\rho \sim \sqrt{x}$ , a ponieważ  $\rho$  jest proporcjonalna do przemieszczeń  $u, v$  - otrzymaliśmy żądany rozkład  $u \sim \sqrt{x}$  [2, 3, 4].

Także w elementach osobliwych wyższego rzędu (rys. 4a - III rzędu, b - IV rzędu) charakter rozkładu przemieszczeń na froncie płaskiej szczeliny został zachowany.

Należy jeszcze wspomnieć o metodzie wykorzystującej funkcje Kołosa - Muscheliszwili do opisanego stanu naprężeń i deformacji w elemencie osobliwym, zawierającym wierzchołek szczeliny (rys.5). W obszarze wielokątnego elementu przemieszczenia określone są następującymi

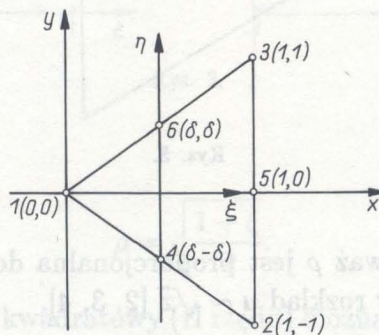
funkcjami kształtu:

$$q = \sum_n r^{\frac{1}{2}n} \left[ c_n e^{-\frac{1}{2}in\vartheta} + d_n \left( \kappa e^{-\frac{1}{2}in\vartheta} - \frac{1}{2} n e^{-\frac{1}{2}i(n-2)\vartheta} \right) \right].$$

Współczynniki  $c_n$  i  $d_n$  są przemieszczeniami węzłów elementu,  $\kappa$  - stałą sprężystą, a ilość funkcji kształtu (składników w powyższym wzorze) jest równa ilości węzłów elementu. Wadą jego jest nieciągłość pola przemieszczeń na granicy ze zwykłymi elementami posiadającymi wielomianowe funkcje kształtu [3].

### 3. ELEMENT SKOŃCZONY AST MODELUJĄCY ROZKŁAD PRZEMIESZCZEŃ I NAPRĘŻEŃ W OTOCZENIU WIERZCHOŁKA KARBU TRÓJKĄTNEGO

Element skończony AST (rys.6) jest przeznaczony do modelowania płaskich zagadnień teorii sprężystości z uwzględnieniem asymptotycznych rozkładów naprężeń w pobliżu wierzchołka karbu trójkątnego. Środek układu współrzędnych  $Oxy$  jest zaczepiony w węźle osobliwym 1, natomiast węzły 2 i 3 są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Oś  $\eta$  układu lokalnego  $O\xi\eta$  związanego z elementem AST jest przesunięta o odległość



Rys. 6.

$$(3.1) \quad \delta = 0,5 \frac{1}{1-\lambda},$$

gdzie  $\lambda$  jest współczynnikiem asymptotyczności naprężeń wyznaczonym w I części pracy. Węzły 4 i 6 leżą na osi  $\eta$ , a węzeł 5 znajduje się w środku podstawy trójkąta.

Funkcje kształtu elementu AST są analogiczne jak dla ośmiowęzłowego izoparametrycznego elementu czworokątnego [5] i we współrzędnych lokalnych  $0\xi\eta$  mają postać:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} N_1 &= -0,5\xi(1 - \xi), \\ N_2 &= 0,25(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta), \\ N_3 &= 0,25(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta), \\ N_4 &= 0,5(1 - \xi^2)(1 - \eta), \\ N_5 &= 0,5(1 + \xi)(1 - \eta^2), \\ N_6 &= 0,5(1 - \xi^2)(1 + \eta). \end{aligned}$$

Zależność między współrzędnymi  $0xy$  oraz  $0\xi\eta$  wyraża się wzorami:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} x &= \left(\frac{1 + \xi}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}, \\ y &= \eta \left(\frac{1 + \xi}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \end{aligned}$$

lub inaczej

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \xi &= 2x^{1-\lambda} - 1, \\ \eta &= y/x. \end{aligned}$$

Wzór na współrzędną biegunową  $r$  przyjmie w tym wypadku postać:

$$(3.5) \quad r = (x^2 + y^2)^{0,5} = \left(\frac{1 + \xi}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} (1 + \eta^2)^{0,5}.$$

Rozkład przemieszczeń w elemencie skończonym przedstawiają wyrażenia [5]:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^6 N_i u_i, \\ v &= \sum_{i=1}^6 N_i v_i. \end{aligned}$$

Wstawiając zależności (3.2) oraz uwzględniając wzór (3.5) otrzymujemy rozkład przemieszczeń we współrzędnych biegunowych:

$$(3.7) \quad q_i = r^{1-\lambda} A_i(u_k, v_k, \eta) + r^{2(1-\lambda)} B_i(u_k, v_k, \eta) + C_i(u_k, v_k, \eta).$$

Podstawiając wzór na uniwersalny współczynnik asymptotyczności naprężeń (I-4.3) otrzymujemy:

$$q_i = r^{\frac{\pi}{2\alpha}} A_i(u_k, v_k, \eta) + r^{\frac{\pi}{\alpha}} B_i(u_k, v_k, \eta) + C_i(u_k, v_k, \eta).$$

Powyższe związki wykazują analogię do wzorów (I-2.8) opisujących przemieszczenia w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego [1]. Świadczy to o poprawnym modelowaniu rozkładu przemieszczeń w elemencie.

Jakobian przekształcenia (3.3) jest następujący:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} & \frac{\eta}{1-\lambda} \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \\ 0 & 2 \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \end{bmatrix}.$$

Macierz odwrotna ma postać:

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda) \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} & -\eta \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \\ 0 & \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \end{bmatrix}.$$

Pochodne przemieszczeń  $u$  i  $v$  po współrzędnych  $x, y$  są następujące:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix},$$

gdzie pochodne przemieszczeń po współrzędnych lokalnych:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} u_i,$$

( $u_i$  - przemieszczenie  $i$ -tego węzła elementu w kierunku osi  $x$ ).

Analogicznie wyrażają się pozostałe pochodne przemieszczeń po współrzędnych  $\xi, \eta$ .

Wstawiając do równań wyrażenie na współrzędną biegunową otrzymujemy wyrażenia na pochodne przemieszczeń po współrzędnych globalnych:



$$(3.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_1 r^{-\lambda} + a_2 r^{1-2\lambda}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= b_1 r^{-\lambda} + b_2 r^{1-2\lambda}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= c_1 r^{-\lambda} + c_2 r^{1-2\lambda}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= d_1 r^{-\lambda} + d_2 r^{1-2\lambda}, \end{aligned}$$

gdzie  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$  - zależą od współrzędnej  $\eta$  i przemieszczeń węzłów.

Wykorzystując zależności między naprężeniami, odkształceniami a pochodnymi przemieszczeń otrzymujemy charakter naprężeń i odkształceń przyjętych w elemencie AST:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= r^{-\lambda} a_{ij}(u_k, v_k, \eta) + r^{1-2\lambda} b_{ij}(u_k, v_k, \eta), \\ \sigma_{ij} &= r^{-\lambda} c_{ij}(u_k, v_k, \eta) + r^{1-2\lambda} d_{ij}(u_k, v_k, \eta). \end{aligned}$$

Otrzymane zależności świadczą o dużych możliwościach elementu w zakresie modelowania dowolnych płaskich zagadnień teorii sprężystości. Należy zauważyć, że dla  $\lambda = 0$  otrzymujemy zwyczajny element o liniowym rozkładzie naprężeń (LST) [5]:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ij} + r d_{ij}, \\ q_i &= A_i r + B_i r^2 + C_i, \end{aligned}$$

natomiast dla  $\lambda = 0,5$  wyrażenie na naprężenia przyjmuje postać:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ij} r^{-0,5} + d_{ij}, \\ q_i &= A_i r^{0,5} + B_i r + C_i, \end{aligned}$$

czyli mamy do czynienia z elementem osobliwym do modelowania szcze-  
lin płaskich, dokładnie opisanym w [2, 3, 4].

#### 4. WYZNACZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ DLA KARBÓW TRÓJKĄTNYCH

Współczynniki intensywności naprężeń  $K_I$  (od rozdierania) i  $K_{II}$  (od ścinania wzdłużnego) dla karbów trójkątnych można zdefiniować w

następujący sposób:

$$(4.1) \quad K_I + iK_{II} = \lim_{\vartheta=0, r \rightarrow 0_+} [(2\pi r)^{\lambda_I} \sigma_\vartheta + i(2\pi r)^{\lambda_{II}} \tau_{r\vartheta}],$$

gdzie  $\lambda_I, \lambda_{II}$  są współczynnikami asymptotyczności naprężeń dla I i II przypadku obciążenia zależnymi od kąta rozwarcia karbu (wyznaczonymi w I części pracy).

Współczynniki intensywności naprężeń bezpośrednio wpływają na wielkości naprężeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka karbu:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= (2\pi r)^{-\lambda_I} K_I \phi_{ij}(\vartheta) + (2\pi r)^{-\lambda_{II}} K_{II} \psi_{ij}(\vartheta), \\ q_i &= \frac{r}{2G} [(2\pi r)^{-\lambda_I} K_I \Phi_i(\vartheta) + (2\pi r)^{-\lambda_{II}} K_{II} \Psi_i(\vartheta)], \end{aligned}$$

$\phi_{ij}, \psi_{ij}, \Phi_i, \Psi_i$  - kombinacje funkcji trygonometrycznych.

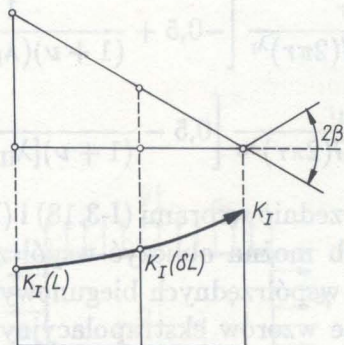
Jednostką miary współczynników intensywności naprężeń w układzie SI jest  $[Pa \cdot m^\lambda]$ .

Porównanie pola przemieszczeń zwyczajnego elementu (np. CST o liniowym rozkładzie przemieszczeń lub LST o kwadratowym rozkładzie przemieszczeń) z polem przemieszczeń określonym wzorami (4.2) dowodzi, iż przy ich zastosowaniu trudno oczekiwać szybkiej zbieżności z rozwiązaniem ścisłym. Dlatego też, podczas budowy dyskretnego modelu, punkt osobliwy (wierzchołek karbu) należy otoczyć pewną ilością specjalnych elementów, których funkcje interpolujące utworzone zostały z uwzględnieniem asymptotyczności rozwiązania w tym obszarze (np. element AST).

W metodach asymptotycznych, do znalezienia współczynników intensywności naprężeń można wykorzystać wyrażenia określające rozkład naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu (4.2). Jeżeli w rezultacie obliczeń otrzymamy wartości naprężeń i przemieszczeń punktu o współrzędnych  $(r, \vartheta)$  położonego blisko ostrza karbu, to współczynniki intensywności w tym punkcie można obliczyć w następujący sposób:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} K_I + iK_{II} &= (2\pi r)^{\lambda_I} \frac{\sigma_{nm}}{\phi_{nm}(\vartheta)} + i(2\pi r)^{\lambda_{II}} \frac{\sigma_{kl}}{\psi_{kl}(\vartheta)}, \\ K_I + iK_{II} &= \frac{2G}{r} \left[ (2\pi r)^{\lambda_I} \frac{q_m}{\Phi_m(\vartheta)} + i(2\pi r)^{\lambda_{II}} \frac{q_k}{\Psi_k(\vartheta)} \right]. \end{aligned}$$

Naprężenia w metodzie elementów skończonych oblicza się poprzez różniczkowanie przemieszczeń. Stąd też metody asymptotyczne w celu



Rys. 7.

zminimalizowania błędu, dotyczą przemieszczeń i dążą do zwiększenia dokładności przy wykorzystaniu różnych procedur ekstrapolacji. Jeżeli założymy  $\vartheta = \text{const}$  i obliczymy współczynniki intensywności naprężeń w punktach o różnych współrzędnych biegunowych  $r$ , to możemy je również wyznaczyć w punkcie osobliwym. Najczęściej do tego celu wykorzystywana jest liniowa lub kwadratowa ekstrapolacja [3]. Element AST wymaga ekstrapolacji po współrzędnej  $r^\lambda$  (zgodnie z rozkładem naprężeń) - rys.7. Otrzymamy wówczas następujące wzory:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} K_{I} &= \frac{1}{1 - \delta^{\lambda_I}} K_{I}(\delta L) - \frac{\delta^{\lambda_I}}{1 - \delta^{\lambda_I}} K_{I}(L), \\ K_{II} &= \frac{1}{1 - \delta^{\lambda_{II}}} K_{II}(\delta L) - \frac{\delta^{\lambda_{II}}}{1 - \delta^{\lambda_{II}}} K_{II}(L), \end{aligned}$$

gdzie  $L$  – długość boku elementu na kierunku ekstrapolacji,  $\delta$  – dana wzorem (3.1).

W przypadku szczeliny płaskiej wyrażenia (4.4) przyjmą postać:

$$K_{I,II} = 2K_{I,II}(L/4) - K_{I,II}(L),$$

czyli otrzymujemy współczynniki intensywności naprężeń obliczane za pomocą kwadratowej ekstrapolacji [3].

Założmy, że kierunek ekstrapolacji  $\vartheta = 0$ . Korzystając z zależności (I-3.25) i (I-3.36) otrzymujemy wzory na przemieszczenia na tym kierunku:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} u_r &= \frac{K_{I\Gamma} r}{(1 - \lambda_I)G(2\pi r)^{\lambda_I}} \left[ -0,5 + \frac{1}{(1 + \nu)(\lambda_I - 2)C_5} \right], \\ u_\vartheta &= \frac{K_{II} r}{(1 - \lambda_{II})G(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \left[ 0,5 - \frac{1}{(1 + \nu)[\lambda_{II} - 2)C_2 + 1]} \right], \end{aligned}$$

gdzie  $C_2$  i  $C_5$  są dane uprzednio wzorami (I-3.18) i (I-3.31). Z powyższych wzorów w prosty sposób można obliczyć współczynniki intensywności naprężeń w punktach o współrzędnych biegunowych  $\vartheta = 0$  oraz  $r = \delta L$  i  $r = L$ . Korzystając ze wzorów ekstrapolacyjnych (4.4) wyznaczamy współczynniki  $K_I, K_{II}$  w punkcie osobliwym. Należy zwrócić uwagę, że liniowy rozkład przemieszczeń nie wpływa na wartość współczynników intensywności naprężeń.

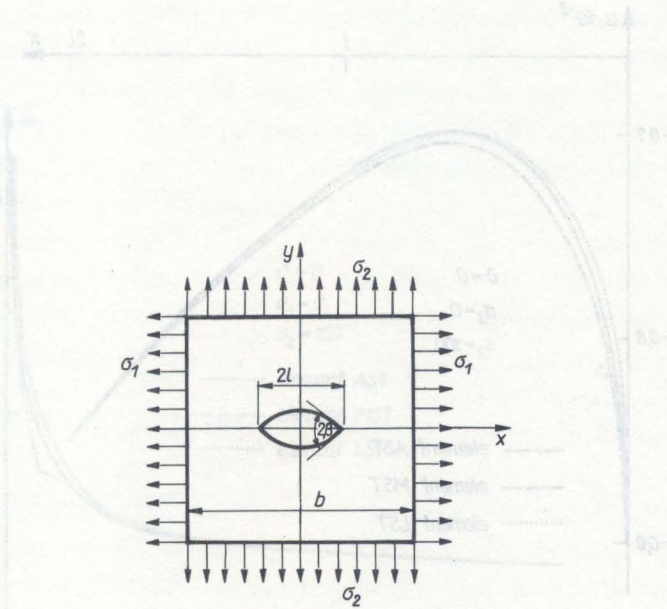
Bardzo ważna jest gęstość podziału obszaru w pobliżu punktu osobliwego. Ma ona znaczny wpływ na dokładność otrzymanych wyników, gdyż do obliczeń wykorzystywane jest jedynie pole przemieszczeń powstałe wskutek zaburzeń wywołanych geometrią karbu trójkątnego.

Porównanie wartości współczynników intensywności naprężeń z wartościami granicznymi daje możliwość przewidzenia rozpoczęcia procesu kruchej pęknięcia. Graniczne współczynniki intensywności  $K_I$  oraz  $K_{II}$  dla wartości  $\lambda = \text{const}$  są stałymi materiałowymi w płaskim stanie odkształcenia, natomiast w płaskim stanie naprężenia zależą także od wymiarów geometrycznych karbów.

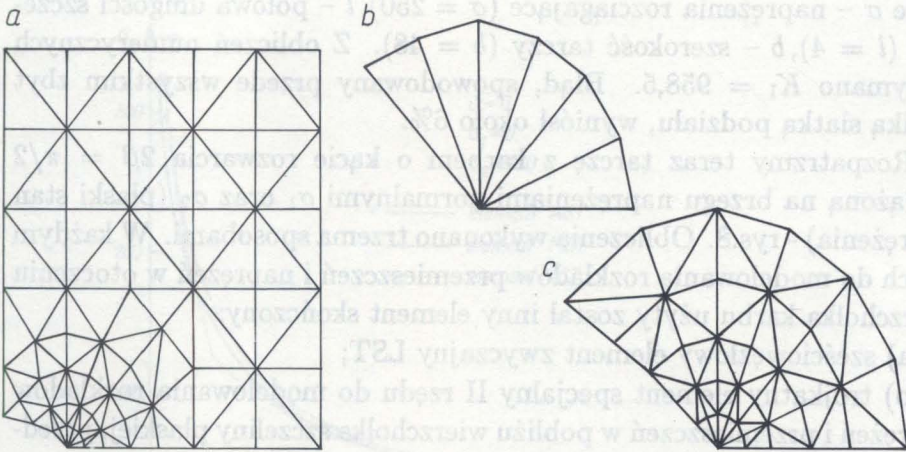
##### 5. PORÓWNANIE ROZKŁADÓW NAPRĘŻEŃ I PRZEMIESZCZEŃ OTRZYMANÝCH METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH Z WYKORZYSTANIEM ELEMENTÓW SPECJALNYCH AST

Do obliczeń użyty został program PSO/PSN-AST wykonany przez autora. Sprawdzenia dokładności dokonano na przykładzie równomiernie rozciąganej tarczy z płaską szczeliną. Analityczne rozwiązanie zagadnienia przedstawione jest w [1, 3]. Współczynnik intensywności naprężeń dla testowanego przykładu wynosi:

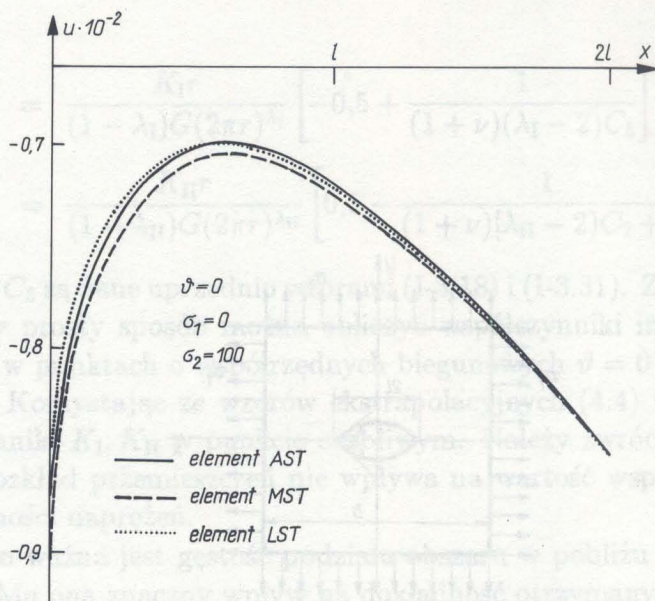
$$K_I = \sigma \left( \pi l \sec \frac{\pi l}{b} \right)^{0,5} = 901,7,$$



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10.

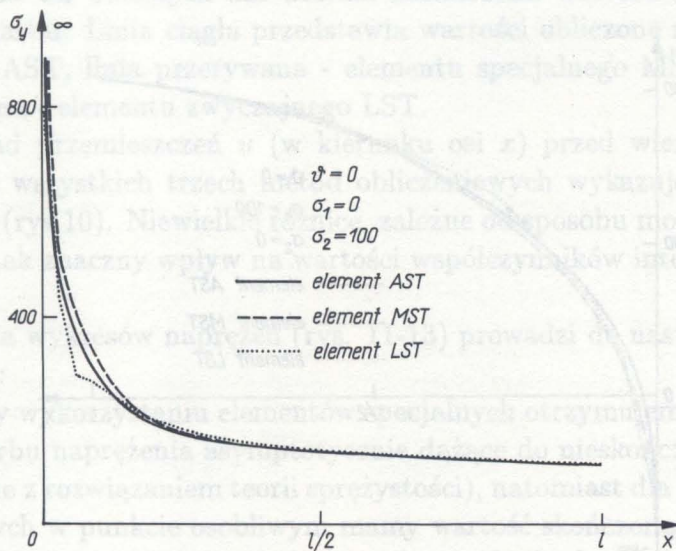
gdzie  $\sigma$  – naprężenia rozciągające ( $\sigma = 250$ ),  $l$  – połowa długości szczeliny ( $l = 4$ ),  $b$  – szerokość tarczy ( $b = 48$ ). Z obliczeń numerycznych otrzymano  $K_I = 958,5$ . Błąd, spowodowany przede wszystkim zbyt rzadką siatką podziału, wyniósł około 6%.

Rozpatrzmy teraz tarczę z karbem o kącie rozwarcia  $2\beta = \pi/2$  obciążoną na brzegu naprężeniami normalnymi  $\sigma_1$  oraz  $\sigma_2$  (płaski stan naprężenia) - rys.8. Obliczenia wykonano trzema sposobami. W każdym z nich do modelowania rozkładów przemieszczeń i naprężeń w otoczeniu wierzchołka karbu użyty został inny element skończony:

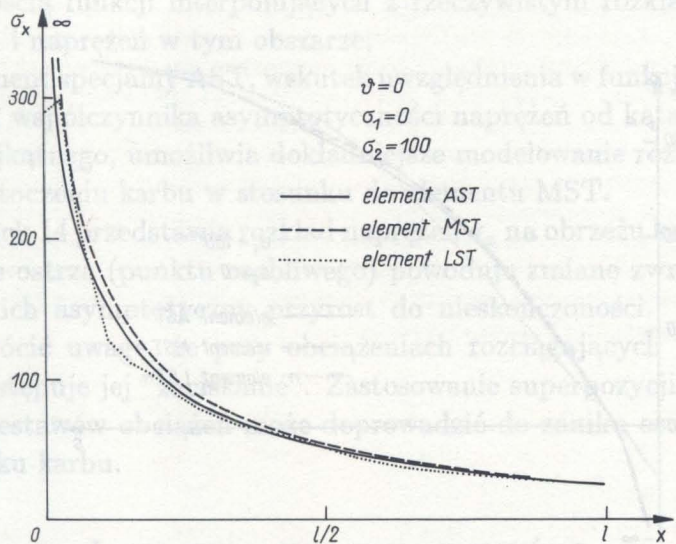
- sześciowęzłowy element zwyczajny LST;
- trójkątny element specjalny II rzędu do modelowania rozkładów naprężeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka szczeliny płaskiej, przedstawiony w drugim rozdziale pracy - zwany dalej MST;
- element AST.

Siatka podziału tarczy (ze względu na symetrię rozpatrzono ćwiartkę) przedstawiona została na rys. 9a. W pierwszym przypadku zastosowano znacznie gęstszy podział - na jeden element specjalny (rys.9b) przypadło 9 elementów zwyczajnych LST (rys. 9c).

Rysunki 10-14 przedstawiają graficzne porównanie rozkładów naprę-



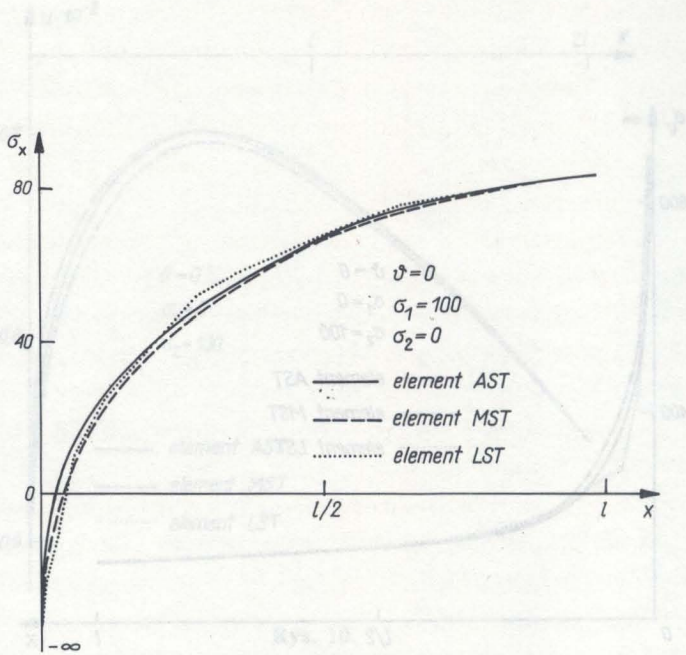
Rys. 11



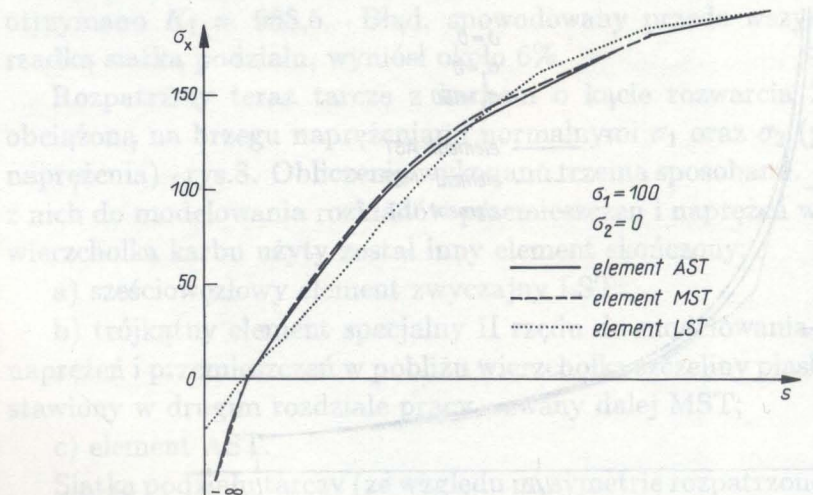
Rys. 12

1. Н.Ф. Морозов, Математическая теория трещин, Наука, Москва 1964.

2. Е.М. Морозов, Г.И. Ибрагимов, Метод конечных элементов в механике разрушения, Наука, Москва 1980.



Rys. 13



Rys. 14



żeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka karbu trójkątnego. Początek układu współrzędnych każdego wykresu jest umieszczony w punkcie osobliwym, na osi odciętych zaś została zaznaczona wartość  $l$  - połowy długości karbu. Linia ciągła przedstawia wartości obliczone za pomocą elementu AST, linia przerywana - elementu specjalnego MST, a linia kropkowana - elementu zwyczajnego LST.

Rozkład przemieszczeń  $u$  (w kierunku osi  $x$ ) przed wierzchołkiem karbu dla wszystkich trzech metod obliczeniowych wykazuje podobny charakter (rys.10). Niewielkie różnice, zależne od sposobu modelowania, mają jednak znaczny wpływ na wartości współczynników intensywności naprężeń.

Analiza wykresów naprężeń (rys. 11-13) prowadzi do następujących wniosków:

a) przy wykorzystaniu elementów specjalnych otrzymujemy w wierzchołku karbu naprężenia asymptotycznie dążące do nieskończoności (co jest zgodne z rozwiązaniem teorii sprężystości), natomiast dla elementów zwyczajnych w punkcie osobliwym mamy wartość skończoną;

b) rozkład naprężeń w otoczeniu wierzchołka karbu obliczony przy użyciu elementów LST obarczony jest dużym błędem, spowodowanym niezgodnością funkcji interpolujących z rzeczywistym rozkładem przemieszczeń i naprężeń w tym obszarze;

c) element specjalny AST, wskutek uwzględnienia w funkcjach kształtu zależności współczynnika asymptotyczności naprężeń od kąta rozwarcia karbu trójkątnego, umożliwia dokładniejsze modelowanie rozkładu naprężeń w otoczeniu karbu w stosunku do elementu MST.

Rysunek 14 przedstawia rozkład naprężeń  $\sigma_x$  na obrzeżu karbu. Występowanie ostrza (punktu osobliwego) powoduje zmianę zwrotu naprężeń oraz ich asymptotyczny przyrost do nieskończoności. Należy jeszcze zwrócić uwagę, że przy obciążeniach rozciągających wzdłuż osi karbu występuje jej "zaciskanie". Zastosowanie superpozycji rozwiązań dla obu zestawów obciążeń może doprowadzić do zaniku osobliwości w wierzchołku karbu.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Н.Ф.Морозов, Математические вопросы теории трещин, Наука, Москва 1984.
2. Е.М.Морозов, Г.П.Никишков, Метод конечных элементов в механике разрушения, Наука, Москва 1980.

3. В.З.Партон, Е.М.Морозов, *Механика упругопластического разрушения*, Наука, Москва 1985.
4. М. Сиратори, Т. Миеси, Х. Мацущита, *Вычислительная механика разрушения*, Мир, Москва 1986.
5. О.С. ZIENKIEWICZ, *The finite element method*, McGraw-Hill Book Comp., London 1977.

### Резюме

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ОТКРЕСНОСТИ ВЕРШИНЫ УГЛОВОГО ВЫРЕЗА В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### Часть II

Работа представляет способ моделирования распределений перемещений, деформаций и напряжений для плоских областей, обладающих угловыми вырезами с произвольным углом раскрытия, при помощи метода конечных элементов. В I части выведены формулы для напряжений и перемещений вблизи вершины углового выреза, а также определены зависимости коэффициентов асимптотики напряжений от угла раскрытия выреза. Во II части работы обсужден новый конечный элемент AST (asymptotic strain triangle). Это специальный элемент, которого интерполирующие функции учитывают изменение асимптотики напряжений и деформаций совместно с изменением угла раскрытия выреза. Осуждены также способы экстраполяции коэффициентов интенсивности напряжений в расчетах метода конечных элементов, которые дают возможность анализировать вырезы с произвольным углом раскрытия. В заключении сравнены результаты расчетов перемещений и напряжений вблизи вершины примерного углового выреза, которые получены при помощи элемента AST и других, применяемых конечных элементов.

## SUMMARY

## MODELLING OF STRESS AND DISPLACEMENT DISTRIBUTIONS IN VICINITY OF A V - NOTCH VERTEX IN PLANE ELASTICITY

## Part II

The paper presents a method of modelling the stress, strain and displacement distributions in plane regions containing V- notches of arbitrary vertex angles, by means of the Finite Elements Method. Formulae for stresses and displacements in the neighbourhood of the notch are derived in Part I, the asymptoticity coefficients being expressed as functions of the notch vertex angle. In Part II a novel finite element AST (Asymptotic Strain Triangle) is discussed. It is a special element with interpolation capabilities accounting for the changes of the asymptoticity coefficients due to the notch angle variations. The methods of extrapolation of the stress intensity factors calculated by the FEM are discussed, making it possible to consider arbitrary notch angles. The results concerning the displacement and stress distribution at a notch vicinity evaluated by means of the AST elements are compared with those obtained by means of other types of finite elements.

## POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA WSTĘP

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 maja 1989 r.

Zależnie od wartości współczynnika sprężalności  $\mu$  i kąta ostrza  $\alpha$  sprężarki i wartości sprężalności  $\mu$  w celu nieopuszczenia do wystąpienia spowolnienia pracy niestatecznej sprężarki należy ją regulować. Powszechnie używanym jest jeżeli sprężarka ma wartość  $\mu$ :

$\mu_{\text{spr}} > 6,9$  - stosuje się upust powietrza z dwu lub trzech stopni środkowych sprężarki.

$\mu_{\text{spr}} > 8,10$  - sprężarkę (silnik) konstruuje się wielowirnikową.

$\mu_{\text{spr}} > 10$  - stosuje się sterowanie lopatek wieńca dyfuzorowego sprężarki pierwszych i ostatnich jej stopni. Niekiedy w konstrukcjach o  $\mu_{\text{spr}} = 9,10$  reguluje się lopatki wieńca dyfuzorowego tylko pierwszych stopni.

W konstrukcjach wielowirnikowych o bardzo dużych sprężkach dla zachowania wymaganej wartości zapasu stateczności w całym zakresie eksploatacyjnych prędkości obrotowych silnika stosuje się jednocześnie upust powietrza i sterowanie lopatek wieńca dyfuzorowego. Czasami, dla zachowania wymaganych parametrów użytkowych, oba sposoby regulacji występują już w silnikach ze sprężarkami o umiarkowanych sprężkach np. silnik "31" serii 5 ( $\mu_{\text{spr}} = 9,1$ ).