

NOŚNOŚĆ GRANICZNA PRĘTA Z KARBAMI OBCIĄŻONEGO SIŁĄ PODŁUŻNĄ I MOMENTEM ZGINAJĄCYM

JANUSZ MIELNICZUK (POZNAŃ)

1. WSTĘP

Analiza oparta na teorii plastyczności pozwala określić nośność graniczną elementów konstrukcji, a co za tym idzie umożliwić racjonalne projektowanie ich wymiarów. Wiele części maszyn, obciążanych w sposób złożony, wykonywanych jest z osłabieniami konstrukcyjnymi w postaci otworów lub korbów. Wymienić tu można między innymi niektóre elementy maszyn rolniczych, jak ramy, chwytty czy jarzma. Odpowiednie zaprojektowanie tych elementów na gruncie teorii plastyczności zapewnia ich lekkość i wytrzymałość.

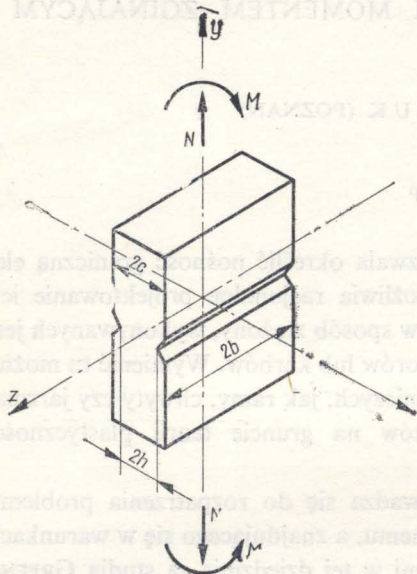
Od strony teoretycznej zagadnienie sprowadza się do rozpatrzenia problemu pręta z korbami, poddanego obciążeniu złożonemu, a znajdującego się w warunkach plastycznego płynięcia. Podstawowymi pracami w tej dziedzinie są studia GREENA [1, 2 i 3] i HILLA [4]. Rozpatrzono w nich w warunkach płaskiego stanu odkształcenia zachowanie się płaskiego pręta z korbami kątowymi i okrągłymi bądź rozciąganego siłą podłużną, bądź też poddanego czystemu zginaniu.

Spośród dalszych prac należy wymienić badania HUNDY'EGO [5] oraz LIANISA i FORDA [6 i 7]. W ostatniej z nich przedstawiono rozwiązanie odnoszące się do płaskiego stanu naprężenia prętów zginanych. Wspomniemy również o pracy EWINGA [8], w której podano kinematycznie dopuszczalne pole prędkości dla pręta z ostrymi korbami kątowymi, oraz DIETRICHA i SZCZEPIŃSKIEGO [9], zawierającą przedłużenie siatki linii poślizgu dla zginanych prętów z korbami, a więc podającą statycznie dopuszczalne pole naprężeń.

Celem niniejszego opracowania jest wyznaczenie nośności granicznej pręta z korbami kątowymi, poddanego jednoczesnemu rozciąganiu siłą podłużną N i zginaniu momentem zginającym M (rys. 1). Częściowo problem ten badany był przez SHINDO i So [10]. Autorzy ci ograniczyli się jedynie do rozpatrzenia pręta z jednym wycięciem, a celem było uaktualnienie interpretacji wyników badań na udarność (por. również [11]). Przedmiotem niniejszej pracy jest rozwiązanie zarówno przypadków płaskiego stanu odkształcenia, jak i płaskiego stanu naprężenia w pełnym zakresie obciążeń momentem zginającym M i siłą podłużną N . Otrzymane krzywe graniczne, to znaczy zależności $f(M, N)=0$, pozwalają określić współczynniki zwiększenia obciążenia granicznego w stosunku do obciążenia granicznego dla pręta bez korbów. Porównanie krzywych granicznych, uzyskanych dla obu typów

zadań, uwydatnia różnicę między wspomnianymi współczynnikami, powiększającą się wraz ze zmniejszeniem kąta rozwarcia karbów.

Po przytoczeniu podstawowych zależności skonstruowano rozwiązania problemu plastycznego płynięcia płaskiego pręta z symetrycznymi karbami. Wykazano istnienie dwóch typów rozwiązań w zależności od kąta rozwarcia karbu. W przypadku gdy niemożliwe było uzyskanie rozwiązania zupełnego, określono tylko granice przedziału nośności granicznej podając rozwiązanie kinematycznie dopuszczalne oraz rozwiązanie statyczne.



Rys. 1. Obciążenie i wymiary pręta

nadto dwie składowe prędkości płynięcia V_x i V_y . Do dyspozycji mamy równania równowagi, warunek plastyczności, prawo płynięcia Misesa i warunek nieściśliwości. Układ równań sprowadza się do dwóch układów quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego. Wykorzystując podstawienie LEVY'EGO [12]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma - k \sin 2\theta, \\ \sigma_{yy} &= \sigma + k \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta, \end{aligned}$$

gdzie σ jest naprężeniem średnim w danym punkcie, a kąt θ określa nachylenie charakterystyki α względem osi x , sprowadzamy problem wyznaczenia naprężeń do znalezienia funkcji θ i σ , tzn. do określenia kierunków charakterystycznych i zmiany średniego ciśnienia wzdłuż charakterystyk. Przyjęty system znakowania osi i kątów podaje rys. 2a. Charakterystyki równań określających pole naprężeń tworzą siatkę ortogonalną. Wzdłuż charakterystyk natomiast zachodzą związki następujące:

wzdłuż linii α

$$(2.2) \quad \frac{\sigma}{2k} - \theta = \xi(\beta) = \text{const},$$

2. ZWIĄZKI PODSTAWOWE

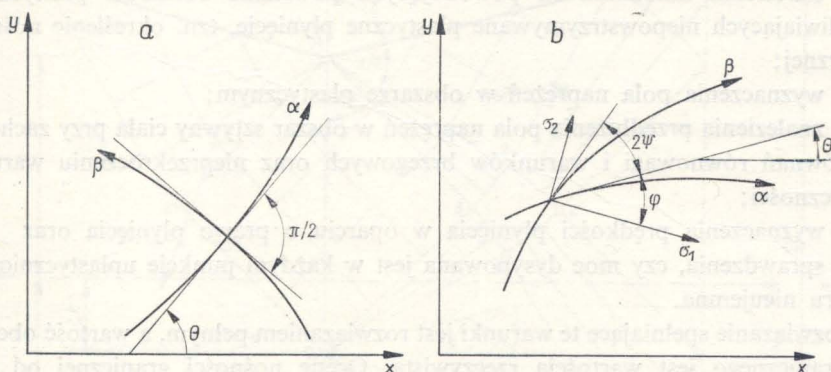
Dyskusja stanu naprężenia i odkształcenia płaskiego pręta z karbami może być przeprowadzona przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia, jeżeli grubość $2b$ pręta jest dostatecznie duża w porównaniu z wymiarami karbu. Przeciwnie, gdy wymiar $2b$ jest mały, w pręcie realizuje się płaski stan naprężenia.

Rozpatrzmy przypadek płaskiego stanu odkształcenia. W obszarze uplastycznionym pręta należy wyznaczyć cztery składowe naprężenia σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} i po-

wzdłuż linii β

$$(2.3) \quad \frac{\sigma}{2k} + \theta = \eta(\alpha) = \text{const},$$

gdzie $k = \sigma_{pl}/\sqrt{3}$ dla warunku Hubera-Misesa i $k = \sigma_{pl}/2$ dla warunku plastyczności Treski. Pole prędkości opisane jest również układem równań hiperbolicznych, a charakterystyki pola naprężeń i prędkości pokrywają się tworząc siatkę linii poślizgu.



Rys. 2. Znakowanie kątów: a — płaski stan odkształcenia, b — płaski stan naprężenia

O ile w płaskim stanie oba warunki plastyczności prowadzą do tego samego typu równań różniczkowych, to w płaskim stanie naprężenia sytuacja jest odmienna. W dalszych obliczeniach skorzystamy z warunku Hubera-Misesa. W tym przypadku układ równań różniczkowych płaskiego stanu naprężenia może być różnego typu. Przedstawiając naprężenia główne w postaci

$$(2.4) \quad \sigma_1 = 2k \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right), \quad \sigma_2 = 2k \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right),$$

gdzie $\cos \omega = \sqrt{3}\sigma/2k$ i $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/3$, można się przekonać, że układ równań jest typu hiperbolicznego, jeżeli $3 - 4\cos^2 \omega > 0$, tj. gdy $\pi/6 < \omega < 5\pi/6$ lub $7\pi/6 < \omega < 11\pi/6$. Granicznymi wartościami kąta ω odpowiada typ paraboliczny, a dla $11\pi/6 < \omega < \pi/6$ i $5\pi/6 < \omega < 7\pi/6$ równania są typu eliptycznego.

Charakterystyki przecinają się pod kątem różnym od $\pi/2$ i nie są teraz liniami poślizgu, a związki wzdłuż nich mają postać:

wzdłuż linii α

$$(2.5) \quad \Omega(\omega) - \varphi = \zeta(\beta) = \text{const},$$

wzdłuż linii β

$$(2.6) \quad \Omega(\omega) + \varphi = \eta(\alpha) = \text{const},$$

gdzie

$$\Omega(\omega) = -\frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\omega} \frac{\sum(\omega)}{\sin \omega} d\omega \quad \text{i} \quad \sum(\omega) = \sqrt{3 - 4\cos^2 \omega}$$

oraz φ jest kątem między kierunkiem większego z naprężeń głównych a linią α (rys. 2b). Znając rozkład naprężeń możemy na podstawie prawa płynięcia i warunku nieściśliwości określić pole prędkości. Znajomość rozkładu naprężeń i prędkości w każdym punkcie obszaru plastycznego umożliwia sprawdzenie warunku dodatniości mocy dysypowanej w tym obszarze.

Rozwiązanie zupełne problemu równowagi granicznej ciała sztywno-plastycznego wymaga:

- 1) określenia mnożnika sił powodujących powstanie obszarów plastycznych umożliwiających niepowstrzymane plastyczne płynięcie, tzn. określenie nośności granicznej;
- 2) wyznaczenia pola naprężeń w obszarze plastycznym;
- 3) znalezienia przedłużenia pola naprężeń w obszar sztywny ciała przy zachowaniu równań równowagi i warunków brzegowych oraz nieprzekroczeniu warunku plastyczności;
- 4) wyznaczenia prędkości płynięcia w oparciu o prawo płynięcia oraz
- 5) sprawdzenia, czy moc dysypowana jest w każdym punkcie uplastycznionego obszaru nieujemna.

Rozwiązanie spełniające te warunki jest rozwiązaniem pełnym, a wartość obciążenia granicznego jest wartością rzeczywistą. Ocenę nośności granicznej od dołu daje rozwiązanie statyczne, spełniające trzy pierwsze warunki. Natomiast górną ocenę daje rozwiązanie kinematyczne, nie spełniające z reguły warunku trzeciego. W przypadkach gdy nie jest możliwe uzyskanie rozwiązania zupełnego, konstruować będziemy rozwiązanie dające oszacowanie obciążeń powodujących uplastycznienie najbardziej wyęźonego przekroju.

3. PŁASKI STAN ODKSZTALCENIA

Dla dużych kątów rozwarcia karbu γ siatkę charakterystyk w strefie plastycznej karbu przedstawiono na rys. 3a. Wykorzystując zależności wzdłuż charakterystyk rozwiązujemy w obszarze $A12$ zagadnienie brzegowe Cauchy'ego, a następnie określamy σ i θ w obszarach $A23$ i $A303$. W trójkącie $A12$ $\sigma_1 = k$ i $\theta_1 = -\pi/4 - \gamma$, a w trójkącie $A30$ nie znamy σ_0 , natomiast $\theta_0 = 3\pi/4$. Stąd

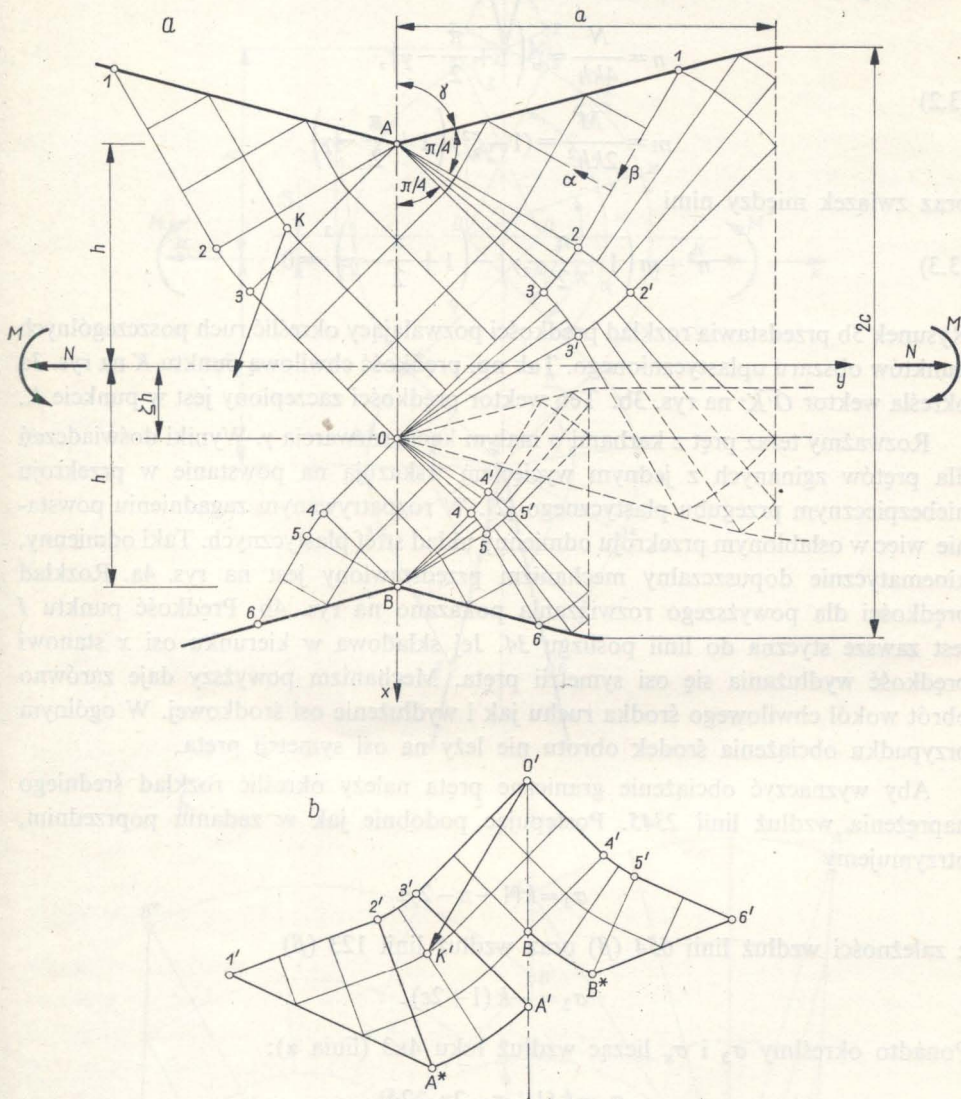
$$\eta_1 = \eta_0 = \text{const} \quad (\text{linia } \beta \text{ (1230)}),$$

$$\frac{\sigma_1}{2k} + \theta_1 = \frac{\sigma_0}{2k} + \theta_0, \quad \sigma_0 = k(1 + \pi - 2\gamma).$$

W podobny sposób wyznaczymy σ i θ w obszarze jednorodnego ściskania $B404$. Znając średnie ciśnienie σ_0 i kąt θ_0 , jaki tworzy linia α z osią x , określimy σ_{yy} w przekroju AB . Pozwala to obliczyć wielkości siły podłużnej N i momentu zginającego M powodujących wyczerpanie nośności granicznej pręta:

$$(3.1) \quad N = 4kh\zeta \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma\right), \quad M = 2kh^2(1 - \zeta^2) \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma\right).$$

Ażeby wykazać, że powyższa ocena nośności stanowi rozwiązanie rzeczywiste, należy zbudować statycznie dopuszczalne przedłużenie pola naprężeń w obszar sztywny pręta. Sposób przedłużania siatki linii poślizgu dla prętów rozciąganych podał BISHOP [13], a przypadek zginania rozpatrzyli DIETRICH i SZCZEPIŃSKI [9]. Graficzne przedłużenie dla rozpatrywanego przypadku uzyskaliśmy posługując się



Rys. 3: a - Siatka linii poślizgu, b - Plan prędkości

przy rozwiązywaniu zagadnienia charakterystycznego w obszarach 232'3' i 454'5' tablicą zawartą w [14]. W strefie środkowej pręta, wydzielonej na rys. 3 linią przerywaną, powstają pola naprężeń rozdzielone liniami nieciągłości, w których spełniony jest warunek plastyczności. Opierając się na skonstruowanym przedłużeniu

linii poślizgu, wyznaczyć można dwa istotne wymiary pręta, mianowicie jego najmniejszą szerokość $2c$ i najmniejszą odległość karbów $2a$. Dla kąta rozwarcia $\gamma = 75^\circ$ wyznaczono $c/h \approx 1,3$ i $a/h \approx 1,08$, przy założeniu takiego obciążenia, dla którego $\zeta = 1/3$. Dla wyznaczonej już nośności granicznej współczynniki wzmocnienia n i m dla pręta bez karbów będą następujące:

$$(3.2) \quad n = \frac{N}{4kh} = \zeta \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma \right),$$

$$m = \frac{M}{2kh^2} = (1 - \zeta^2) \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma \right)$$

oraz związek między nimi

$$(3.3) \quad n^2 + m \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma \right) - \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma \right)^2 = 0.$$

Rysunek 3b przedstawia rozkład prędkości pozwalający określić ruch poszczególnych punktów obszaru uplastycznionego. Tak np. prędkość chwilową punktu K na rys. 3a określa wektor $\vec{O'K'}$ na rys. 3b. Ten wektor prędkości zaczepiony jest w punkcie K .

Rozważmy teraz pręt z karbami o małym kącie rozwarcia γ . Wyniki doświadczeń dla prętów zginanych z jednym wycięciem wskazują na powstanie w przekroju niebezpiecznym przegubu plastycznego [2]. W rozpatrywanym zagadnieniu powstanie więc w osłabionym przekroju odmienny układ stref plastycznych. Taki odmienny, kinematycznie dopuszczalny mechanizm przedstawiony jest na rys. 4a. Rozkład prędkości dla powyższego rozwiązania pokazano na rys. 4b. Prędkość punktu I jest zawsze styczna do linii poślizgu 34. Jej składowa w kierunku osi x stanowi prędkość wydłużania się osi symetrii pręta. Mechanizm powyższy daje zarówno obrót wokół chwilowego środka ruchu jak i wydłużenie osi środkowej. W ogólnym przypadku obciążenia środek obrotu nie leży na osi symetrii pręta.

Aby wyznaczyć obciążenie graniczne pręta należy określić rozkład średniego naprężenia wzdłuż linii 2345. Postępując podobnie jak w zadaniu poprzednim, otrzymujemy

$$\sigma_3 = k(1 + \pi - 2\gamma)$$

z zależności wzdłuż linii 654 (β) oraz wzdłuż linii 123 (β)

$$\sigma_3 = -k(1 + 2\varepsilon).$$

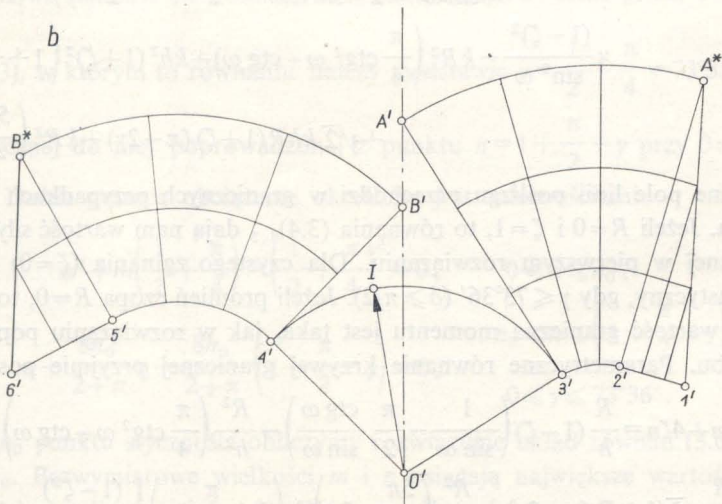
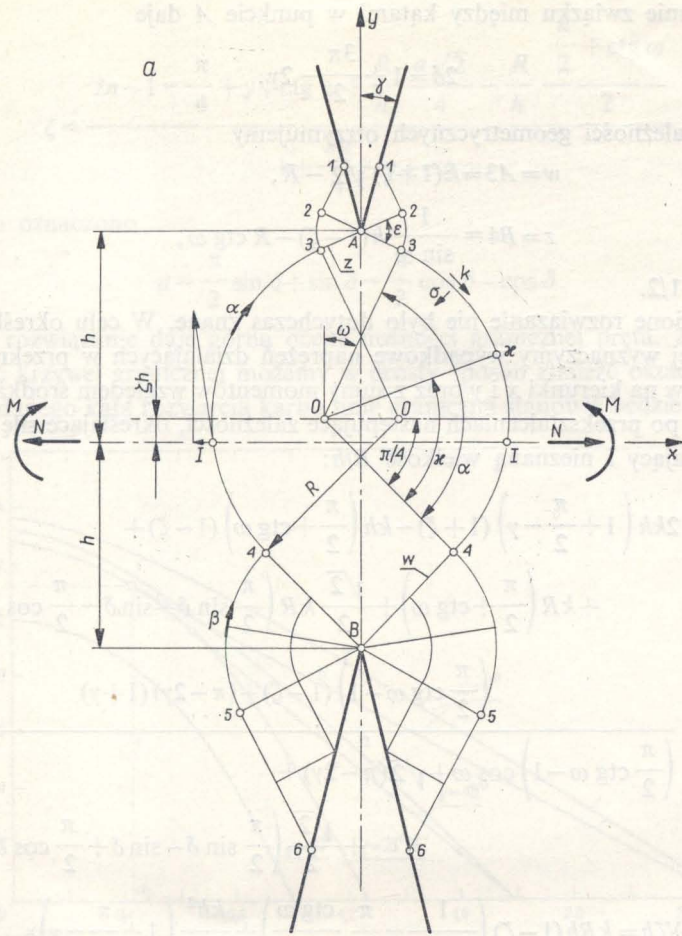
Ponadto okreśmy σ_3 i σ_κ licząc wzdłuż łuku $4\kappa 3$ (linia α):

$$\sigma_3 = k(1 + \pi - 2\gamma - 2\delta),$$

$$\sigma_\kappa = k(1 + \pi - 2\gamma - 2\kappa).$$

Nie znane wielkości kątów ε i δ wyznaczmy porównując średnie naprężenia σ_3 liczone wzdłuż łuków 123 i $4\kappa 3$. Mamy zatem

$$\varepsilon = \gamma + \delta - 1 - \frac{\pi}{2},$$



Rys. 4: a - Siatka linii poślizgu przy ostrym wcięciu, b - Plan prędkości

a wykorzystanie związku między kątami w punkcie A daje

$$2\delta = 1 + \frac{3\pi}{2} - 2\gamma.$$

Również z zależności geometrycznych otrzymujemy

$$w = A3 = h(1 + \zeta) \sqrt{2} - R,$$

$$z = B4 = \frac{1}{\sin \omega} h(1 - \zeta) - R \operatorname{ctg} \omega,$$

gdzie $\omega = \gamma - 1/2$.

Przedstawione rozwiązanie nie było dotychczas znane. W celu określenia krzywej granicznej wyznaczmy wypadkowe naprężeń działających w przekroju $A3B$. Z sumy rzutów na kierunki x i y oraz z sumy momentów względem środka obrotu O otrzymujemy po przekształceniach następujące zależności, określające siłę podłużną, moment zginający i nieznaną wielkość R/h :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} N &= 2kh \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma \right) (1 + \zeta) - kh \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg} \omega \right) (1 - \zeta) + \\ &+ kR \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg} \omega \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} kR \left(\frac{\pi}{2} \sin \delta + \sin \delta - \frac{\pi}{2} \cos \delta + \cos \delta \right), \\ \frac{R}{h} &= \frac{\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \omega - 1 \right) (1 - \zeta) + (\pi - 2\gamma) (1 + \gamma)}{\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \omega - 1 \right) \cos \omega + \sqrt{2} (\pi - 2\gamma) +} \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} \sin \delta - \sin \delta + \frac{\pi}{2} \cos \delta + \cos \delta \right) \\ M + N\zeta h &= kRh(1 - \zeta) \left(\frac{1}{\sin \omega} - \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{ctg} \omega}{\sin \omega} \right) + \frac{kh^2}{2} \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma \right) \times \\ &\times \frac{(1 - \zeta)^2}{\sin^2 \omega} - kR^2 \left(\frac{\pi}{4} \operatorname{ctg}^2 \omega - \operatorname{ctg} \omega \right) + kh^2 (1 + \zeta)^2 \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma \right) + \\ &+ \sqrt{2} khR(1 + \zeta) (\pi - 2\gamma) + kR^2 \left(\frac{5\pi}{4} - 2\gamma \right). \end{aligned}$$

Proponowane pole linii poślizgu przechodzi w granicznych przypadkach w znane rozwiązania. Jeżeli $R=0$ i $\zeta=1$, to równania (3.4)_{1,3} dają nam wartość siły granicznej, uzyskanej w pierwszym rozwiązaniu. Dla czystego zginania ($\zeta=0$) powstaje przegub plastyczny, gdy $\gamma \leq 73^\circ 36'$ ($\delta \geq \pi/2$). Jeżeli promień czopa $R=0$, to i w tym przypadku wartość graniczna momentu jest taka, jak w rozwiązaniu poprzednim, bez przegubu. Parametryczne równanie krzywej granicznej przyjmie postać

$$(3.5) \quad \begin{aligned} 2m + 4\zeta n &= \frac{R}{h} (1 - \zeta) \left(\frac{1}{\sin \omega} - \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{ctg} \omega}{\sin \omega} \right) - \frac{R^2}{h^2} \left(\frac{\pi}{4} \operatorname{ctg}^2 \omega - \operatorname{ctg} \omega \right) + \\ &+ \frac{R}{h} \sqrt{2} (1 + \zeta) (\pi - 2\gamma) + \frac{R^2}{h^2} \left(\frac{5\pi}{4} - 2\gamma \right) + \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma \right) \left[\frac{(1 - \zeta^2)}{2 \sin^2 \omega} + (1 + \zeta)^2 \right], \end{aligned}$$

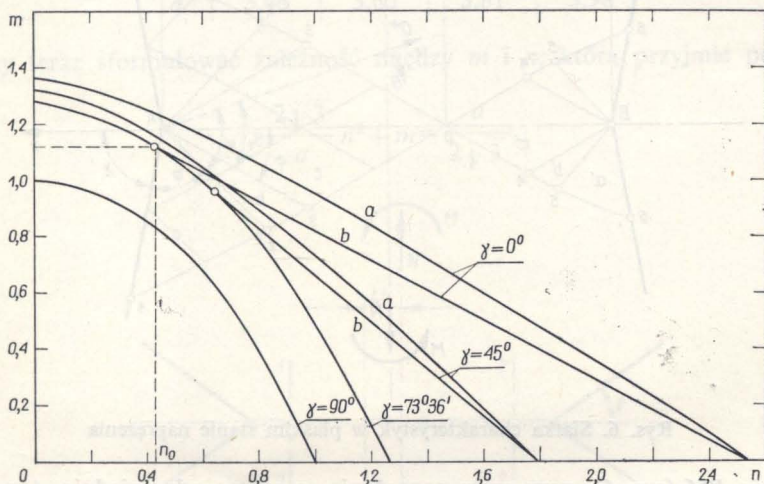
gdzie

$$\zeta = \frac{2n-1 - \frac{\pi}{4} + \gamma + \operatorname{ctg} \omega + \frac{R}{h} \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{R}{h} \frac{\frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg} \omega}{2}}{1 + \frac{3\pi}{4} - \gamma + \operatorname{ctg} \omega}$$

przy czym oznaczono

$$a = \frac{\pi}{2} \sin \delta + \sin \delta - \frac{\pi}{2} \cos \delta - \cos \delta.$$

Powyższe rozwiązanie daje górną ocenę nośności granicznej pręta. Zważywszy na wypukłość krzywej granicznej możemy w prosty sposób znaleźć oszacowanie dolne [16]. Dla danego kąta rozwarcia karbu linię graniczną stanowić będzie część krzywej



Rys. 5. Krzywe graniczne dla płaskiego stanu odkształcenia: a – ocena górna, b – ocena dolna

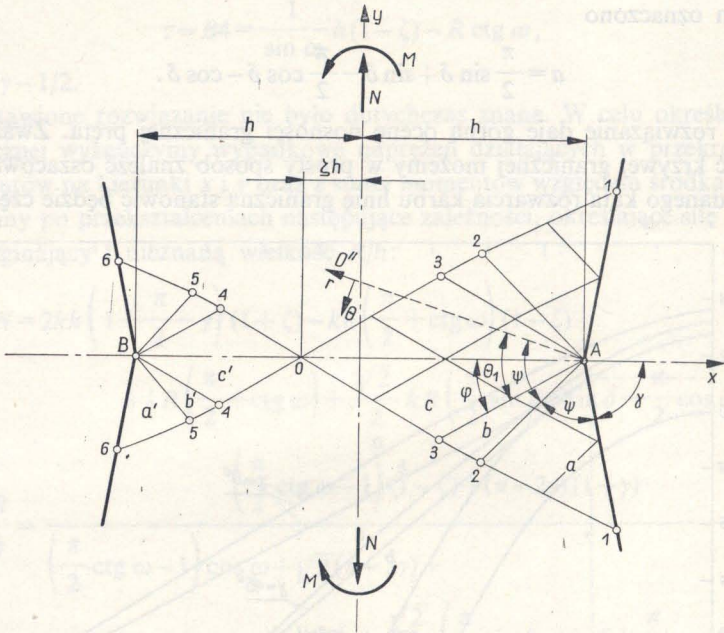
$m-n$ (3.3), w którym to równaniu należy podstawić $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = 73^\circ 35'$, oraz odcięk stycznej do niej poprowadzonej z punktu $n = 1 + \frac{\pi}{2} - \gamma$ przy $0 \leq \gamma \leq 73^\circ 36'$ (rys. 5). Dolna granica obciążenia określona jest zależnościami

$$(3.6) \quad \begin{aligned} n^2 + m \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)^2 &= 0, & 0 \leq n \leq n_0, \\ m + \frac{8n_0}{2+\pi} n + \frac{8n_0}{2+\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma \right) &= 0, & n_0 \leq n \leq \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma \right), \\ & & 0 \leq \gamma \leq 73^\circ 36'. \end{aligned}$$

Odciętą n_0 punktu styczności obliczymy rozwiązując układ równań (3.6), przyjmując $n = n_0$. Bezwymiarowe wielkości m i n osiągają największe wartości w przecię z karami szczelinowymi ($\gamma = 0$). Wówczas dla czystego zginania $m \approx 1,38$, a dla osiowego rozciągania $n = 2,57$.

4. PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA

Płaski stan naprężenia w przecię będzie realizowany wówczas, gdy grubość pasma $b \rightarrow 0$. Skonstruujmy zatem rozwiązanie dla dużych kątów rozwarcia karbu γ . Do swobodnych krawędzi karbów przylegają pola jednorodnego rozciągania $A12$



Rys. 6. Siatka charakterystyk w płaskim stanie naprężenia

i ściskania $B56$ (rys. 6), przy czym naprężenia są równe odpowiednio $\pm\sigma_{p1}$. Chcąc wyznaczyć naprężenia główne w obszarach $A303$ i $B404$ wykorzystamy związki wzdłuż charakterystyk, przytoczone w p. 2. W polu $A303$ zachodzi zależność (KACZANOW [15], s. 254)

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2\operatorname{tg} \theta_1.$$

Na podstawie rys. 6 można stwierdzić, że

$$\varphi = \theta_1 - (\gamma + 2\Psi - \pi),$$

czyli kąt θ_1 , określający przebieg charakterystyk w tym obszarze, będzie określony równaniem

$$2\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} 2(\gamma - 2\Psi - \theta_1) = 0.$$

Naprężenia w przekroju AO wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} \sigma_1^{AO} &= \frac{k}{2} (3 \cos \theta_1 + \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta_1}), \\ \sigma_2^{AO} &= \frac{k}{2} (3 \cos \theta_1 - \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta_1}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

W obszarze $B404$ pręta realizuje się stan jednorodnego ściskania, przy czym $\sigma_1^{BO} = -\sigma_1^{AO}$ i $\sigma_2^{BO} = -\sigma_2^{AO}$. Znajomość rozkładu naprężenia σ_1 w przekroju AOB pozwala określić współczynniki zwiększenia nośności granicznej w stosunku do pręta bez korbów. Będą one

$$(4.2) \quad n = \frac{a}{2\sqrt{3}} \zeta, \quad m = \frac{a}{2\sqrt{3}} (1 - \zeta^2),$$

gdzie

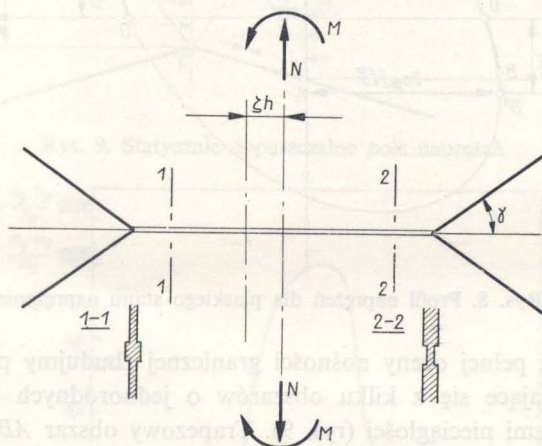
$$a = 3 \cos \theta_1 + \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta_1}.$$

Poniżej przytoczono wartości parametru a :

γ	90°	85°	80°	$70^\circ 32'$
a	3,46	3,65	3,81	3,98

Możemy teraz sformułować zależność między m i n , która przyjmie postać

$$(4.3) \quad \frac{2\sqrt{3}}{a} n^2 + m = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$



Rys. 7. Mechanizm zniszczenia pręta dla ostrego wcięcia

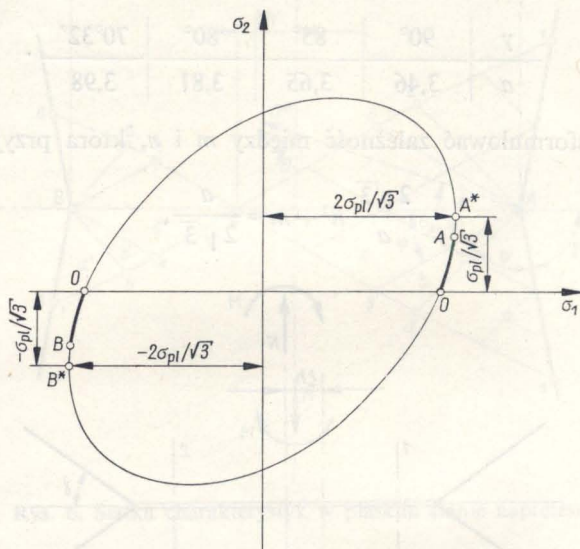
Podane rozwiązanie jest możliwe, gdy $\varphi > 0$. Dla $\varphi = 0$ również $\theta_1 = 0$, a $\gamma = 70^\circ 32'$. Obie charakterystyki pokrywają się. Wzdłuż linii AO tworzy się przewężenie pręta, a wzdłuż linii BO jego zgrubienie (rys. 7). Otrzymujemy więc

$$(4.4) \quad n = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad m = \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - \zeta^2)$$

oraz związek

$$(4.5) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} n^2 + m = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Przedstawione rozwiązania są rozwiązaniami kinematycznie dopuszczalnymi, nie da się bowiem skonstruować przedłużenia charakterystyk w obszar sztywny. Zilustrujmy uzyskane wyniki. Odcinki AO i OB elipsy Hubera-Misesa (rys. 8) reprezentują profile naprężeń dla rozwiązania z rys. 6. Punkty O elipsy odzwierciedlają odpowiednio stany naprężeń w obszarach jednoosiowego ściskania a' i rozciągania a . Podobnie łuki OA i OB odpowiadają wachlarzom b i b' , a współrzędne punktów A i B na rys. 8 odwzorowują naprężenia w strefach środkowych c i c' . Punkty A^* i B^* przedstawiają profil naprężenia dla pręta z ostrymi wycięciami kątowymi ($\gamma \leq 70^\circ 32'$). Łatwo zauważyć, że punkt O na rys. 6 jest punktem nieciągłości dla naprężeń σ_2 , co jest dopuszczalne w rozwiązaniu niezupełnym.



Rys. 8. Profil naprężeń dla płaskiego stanu naprężenia

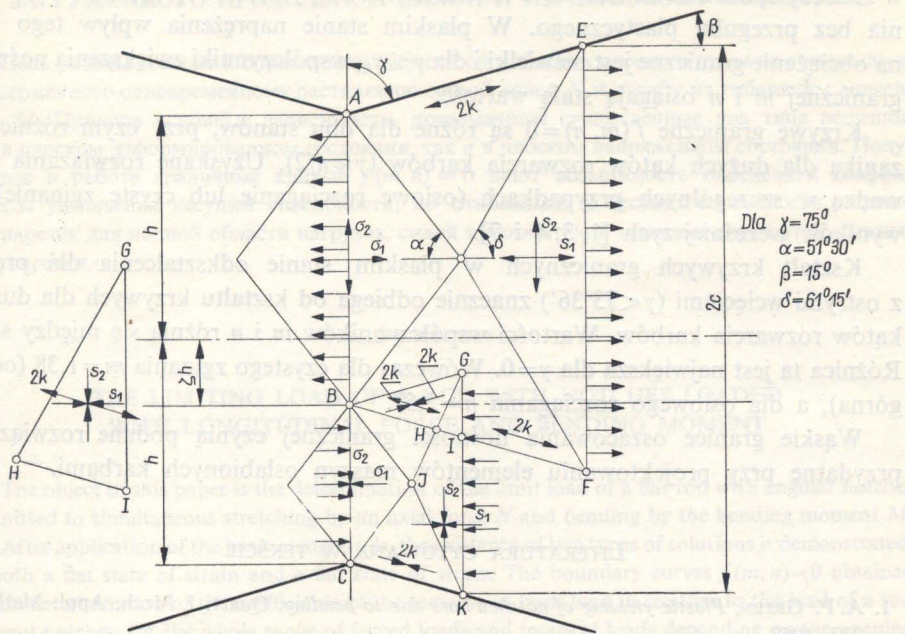
Dla uzyskania pełnej oceny nośności granicznej zbudujemy pole statycznie dopuszczalne, składające się z kilku obszarów o jednorodnych stanach naprężeń, podzielonych liniami nieciągłości (rys. 9). Trapezowy obszar $ABEF$ obciążony jest na bokach AB i EF odpowiednio równomiernie rozłożonymi naprężeniami σ_1 i S_1 , spełniającymi warunek równowagi $\sigma_1 \overline{AB} = S_1 \overline{EF}$. Boki AE i BF są wolne od naprężeń. We wszystkich trójkątach pola $ABEF$ osiągnięty zostaje stan plastyczny (spełniony warunek plastyczności), jeżeli

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\cos(\alpha - \gamma) \sin \gamma}{\sin \alpha} \sigma_{pl}, \\ \sigma_2 &= \frac{\cos(\alpha - \gamma) \cos \gamma}{\sin \alpha} \sigma_{pl} \end{aligned}$$

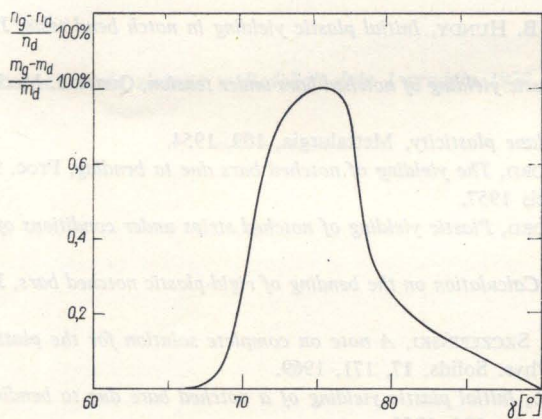
dla kątów rozwarcia karbu $67^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$.

Wykorzystując wyniki LIANISA i FORDA [7] dla osiowego rozciągania, można uzyskać pole naprężeń dla obciążenia złożonego nasuwając obszary $ABEF$ i $BCGK$

przy jednoczesnym zachowaniu warunku plastyczności we wszystkich powstałych polach. Takie rozwiązanie przedstawiono dla pręta o kącie rozwarcia karbu $\gamma = 75^\circ$ i wartości mimośrodru $\zeta = 1/3$ (rys. 9). Została również określona istotna praktycznie



Rys. 9. Statycznie dopuszczalne pole naprężeń



Rys. 10. Różnice między oszacowaniem górnym i dolnym w płaskim stanie naprężenia

szerokość części chwytowej pręta $c = 1,21h$. Dla prętów z ostrymi wcięciami kątowymi ($\gamma < 67^\circ$) można utworzyć tylko takie pole statycznie dopuszczalne, jak dla $\gamma = 67^\circ$. Zatem w miarę dalszego zmniejszania kąta karbu otrzymujemy stałą wartość dolnej oceny obciążenia granicznego.

Wykres na rys. 10 ukazuje różnicę między oceną górną (4.1) i oceną dolną (4.6) nośności granicznej jako funkcji kąta rozwarcia karbów.

5. WNIOSKI

Wartość obciążenia granicznego dla płaskiego stanu odkształcenia zmienia się w znaczny sposób ze zmianą kąta rozwarcia karbu γ jedynie w przypadku rozwiązania bez przegubu plastycznego. W płaskim stanie naprężenia wpływ tego kąta na obciążenie graniczne jest niewielki i dla $\gamma \leq \gamma_{kr}$ współczynniki zwiększenia nośności granicznej m i n osiągają stałą wartość.

Krzywe graniczne $f(m, n) = 0$ są różne dla obu stanów, przy czym różnica ta zanika dla dużych kątów rozwarcia karbów ($\gamma \approx \pi/2$). Uzyskane rozwiązania prowadzą w szczególnych przypadkach (osiowe rozciąganie lub czyste zginanie) do wyników wcześniejszych [1, 3, 4 i 7].

Kształt krzywych granicznych w płaskim stanie odkształcenia dla prętów z ostrymi wcięciami ($\gamma < 73^\circ 36'$) znacznie odbiega od kształtu krzywych dla dużych kątów rozwarcia karbów. Wartości współczynników m i n różnią się między sobą. Różnica ta jest największa dla $\gamma = 0$. Wówczas dla czystego zginania $m = 1,38$ (ocena górna), a dla osiowego rozciągania $n = 2,57$.

Wąskie granice oszacowania nośności granicznej czynią podane rozwiązanie przydatne przy projektowaniu elementów maszyn osłabionych korbami.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. P. GREEN, *Plastic yielding of notched bars due to bending*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 6, 223, 1953.
2. A. P. GREEN, *The plastic yielding of shallow notched bars due to bending*, J. Mech. Phys. Solids, 4, 259, 1956.
3. A. P. GREEN, B. B. HUNDY, *Initial plastic yielding in notch bend tests*, J. Mech. Phys. Solids, 4, 128, 1956.
4. R. HILL, *The plastic yielding of notched bars under tension*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 2, 40, 1949.
5. B. B. HUNDY, *Plane plasticity*, Metallurgia, 109, 1954.
6. G. LIANIS, H. FORD, *The yielding of notched bars due to bending*, Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., 8, Brussels 1957.
7. G. LIANIS, H. FORD, *Plastic yielding of notched strips under conditions of plane stress*, ZAMP, 8, 360, 1957.
8. D. J. F. EWING, *Calculation on the bending of rigid-plastic notched bars*, J. Mech. Phys. Solids, 16, 205, 1968.
9. L. DIETRICH, W. SZCZEPIŃSKI, *A note on complete solution for the plastic bending of notched bars*, J. Mech. Phys. Solids, 17, 171, 1969.
10. A. SHINDO, T. SO, *Initial plastic yielding of a notched bars due to bending*, Proc. 16th Japan. Congr. Appl. Mech., 194, 1966.
11. J. M. ALEXANDER, T. J. KOMOLY, *On the yielding of rigid-plastic bar with an Izod notch*, J. Mech. Phys. Solids, 10, 265, 1962.
12. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.
13. J. F. BISHOP, *On the complete solutions to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 45, 1953.
14. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, Warszawa 1967.
15. Л. М. Качанов, *Основы теории пластичности*, Москва 1969.
16. P. G. HODGE, *Boundary value problems in plasticity*, Plasticity, Proc. 2nd Symp. Naval Struct. Mech., Providence 1960, Pergamon Press, 297, Oxford 1960.

Резюме

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СТЕРЖНЯ С НАРЕЗКАМИ,
ЗАГРУЖЕННОГО ПРОДОЛЬНОЙ СИЛОЙ И ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ

Цель работы состоит в определении несущей способности плоского стержня с нарезками, подверженного одновременному растяжению осевой силой N и изгибу изгибающим моментом M . Приводя основные зависимости, доказываются существенные два типа решения, как в плоском деформированном состоянии, так и в плоском напряженном состоянии. Полученные в работе граничные кривые $f(m, n) = 0$ дают возможность определить коэффициенты увеличения несущей способности, по отношению к несущей способности стержня без нарезок для полной области нагрузок, силой и моментом в зависимости от угла раскрытия нарезки.

SUMMARY

THE LIMITING LOAD OF A ROD WITH NOTCHES LOADED
WITH LONGITUDINAL FORCE AND BENDING MOMENT

The object of this paper is the determination of the limit load of a flat rod with angular notches submitted to simultaneous stretching by an axial force N and bending by the bending moment M .

After application of the basic compounds, the existence of two types of solutions is demonstrated, in both a flat state of strain and a flat state of stress. The boundary curves $f(m, n) = 0$ obtained enable determination of the coefficients of the increase of limit load in relation to the load of a rod without notches, for the whole range of forced loads and moment loads depending on the opening angle of the notch.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 grudnia 1970 r.