

**ZASTOSOWANIE METODY PERTURBACJI
DO ANALIZY PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA OŚRODKA TYPU COULOMBA
W STANIE OSIOWEJ SYMETRII ⁽¹⁾**

RYSZARD IZBICKI (WROCŁAW)

1. Wprowadzenie

Praca dotyczy zagadnienia plastycznego płynięcia sztywno, idealnie plastycznego ośrodka typu Coulomba w stanie osiowej symetrii. Wpływ sił ciężkości pomija się i jako prawo fizyczne przyjęto stowarzyszone prawo płynięcia. Systematyczną analizę równań statyki i kinematyki dla różnych stanów plastycznych podali Cox, EASON i HOPKINS [1], a poprzednio SHIELD [2] dla materiałów podlegających kryterium plastyczności Treski. Pokazano istnienie w materiale dwu typów stanów: determinowanych kinematycznie i statycznie; pierwszy odpowiada bokom sześcioboku Treski (Coulomba), drugi jego wierzchołkom. W specjalnych przypadkach dla wierzchołków, w których jedno z głównych naprężeń w płaszczyźnie osiowej jest równe naprężeniu normalnemu obwodowemu (stany Haara-Kármána), równania statyki są hiperboliczne i rozwiązanie statyczne buduje się podobnie jak w płaskim stanie odkształcenia (np. w przypadku ośrodka Treski charakterystyki są liniami maksymalnych naprężeń stycznych w płaszczyźnie osiowej). Związki wzdłuż charakterystyk zawierają wyrazy równań opisujących płaski stan odkształcenia i dodatkowo wyrażenia, które można interpretować jako wpływ pewnego pola sił masowych [11 i 12].

Otrzymane z prawa płynięcia materiału prawo zmian objętościowych oraz warunek współosiowości przedstawiają układ dwu równań także typu hiperbolicznego. Charakterystyki tego układu równań pokrywają się z charakterystykami pola naprężeń. Podobnie jak w równaniach statyki związki prędkości wzdłuż charakterystyk zawierają wyrazy równań, opisujących stan płaski, i dodatkowo wyrażenia, które można interpretować jako prędkości wydłużenia lub skrócenia (w płaskim stanie odkształcenia prędkości wydłużenia wzdłuż charakterystyk są równe zero). W pracy [1] rozpatrzono także pełne rozwiązanie zagadnienia wciskania osiowo-symetrycznego sztywnego gładkiego stempla w półprzestrzeń. Pewne przypadki pola naprężeń rozpatrzył BIEREZANCEW [3].

¹⁾ Praca została wykonana w czasie stażu naukowego, odbywanego przez autora w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie w roku 1968/69 pod kierunkiem doc. Z. MROZA.

Przy rozwiązywaniu nieliniowych, cząstkowych równań różniczkowych teorii plastyczności napotyka się znaczne trudności; w większości przypadków podanie analitycznego rozwiązania ściśle jest niemożliwe. Brak analitycznych rozwiązań potwierdza słuszność użycia metod aproksymacyjnych, dających rozwiązanie przybliżone, ale umożliwiające rozwiązanie konkretnych zagadnień praktycznych. W przypadku osiowej symetrii w literaturze spotyka się: metodę różnic skończonych [2 i 3], zastosowaną np. w pracach [1 i 13], metodę graficzną [11 i 12], metodę perturbacji (metodę małego parametru) po aproksymowanych charakterystykach, opracowaną przez SPENCERA [9] i metodę perturbacji po ścisłych charakterystykach, proponowaną przez RICHMONDA i MORRISONA [10]. Obie metody perturbacyjne opracowano dla ośrodka Treski.

Metody perturbacji są metodami rzadko używanymi przy rozwiązywaniu zagadnień teorii plastyczności. Poprzednio były rozwijane dla stanów płaskich [6, 7 i 8], a także [4 i 5]. W przypadku osiowej symetrii, zdaniem autora pracy, większe zastosowanie może znaleźć metoda Spencera; jest ona w porównaniu z metodą perturbacji po ścisłych charakterystykach mniej pracochłonna, a otrzymane rozwiązania nie są mniej dokładne.

W niniejszej pracy stosuje się metodę perturbacji po aproksymowanych charakterystykach, dostosowaną dla ośrodka typu Coulomba. Rozwiązania statyczne otrzymano wychodząc z założenia, że stan naprężenia odpowiada wierzchołkom sześcioboku Treski, dla których spełniona jest hipoteza Haara-Kármána. Następnie zbudowano pola prędkości i stwierdzono, że warunek zachodzący dla wierzchołków i wymagający, aby prędkości odkształceń głównych w płaszczyźnie osiowej miały różne znaki, nie jest spełniony we wszystkich obszarach deformacji. Zatem rozwiązania statyczne dostarczają wtedy dolnej oceny obciążenia granicznego, a pole kinematyczne górnej.

2. Równania statyki i kinematyki dla stanów Haara-Kármána

W przypadku osiowej symetrii, kiedy wpływ sił ciężkości pomija się, równania równowagi mają postać

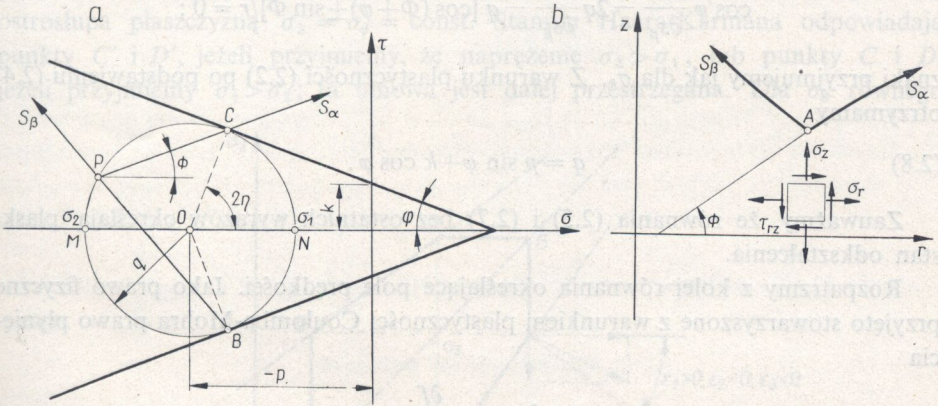
$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0,$$

gdzie σ_r , σ_z i τ_{rz} są składowymi naprężeniami w osiowej płaszczyźnie, (rys. 1.b), σ_θ jest naprężeniem normalnym obwodowym, r , z , θ jest walcowym układem współrzędnych (z jest osią symetrii). Przyjmuje się ponadto umowę, że większym algebraicznie naprężeniem głównym w płaszczyźnie r , z jest σ_1 , a mniejszym σ_2 . Poszukiwany stan naprężenia musi spełniać, oprócz równań (2.1), warunek plastyczności Coulomba-Mohra

$$(2.2) \quad \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_z) \sin \varphi + \left[\frac{1}{4} (\sigma_r - \sigma_z)^2 + \tau_{rz}^2 \right]^{1/2} = k \cos \varphi,$$

gdzie k jest kohezją, tzn. wytrzymałością materiału na ścinanie przy naprężeniu normalnym $\sigma = 0$, φ jest kątem tarcia wewnętrznego. Na płaszczyźnie σ, τ warunek (2.2) reprezentują dwie proste nachylone do osi σ pod kątem φ (rys. 1a). Hipoteza Haara-Kármána reprezentowana jest przez punkty N lub M na kole naprężeń w zależności od tego, czy σ_θ jest równe σ_1 , czy też σ_2 .



Rys. 1

Graniczny stan naprężenia można wyrazić następującymi związkami:

$$(2.3) \quad \sigma_r = -p + q \cos 2\eta, \quad \sigma_z = -p - q \cos 2\eta, \quad \tau_{rz} = q \sin 2\eta, \quad \sigma_\theta = -p \pm q,$$

gdzie

$$p = -\frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

$$(2.4) \quad q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \left[\frac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_z)^2 + \tau_{rz}^2 \right]^{1/2},$$

$$\operatorname{tg} 2\eta = 2\tau_{rz}/(\sigma_r - \sigma_z), \quad 0 \leq \eta \leq \pi.$$

Tym sposobem, graniczny stan naprężenia określony jest przez dwa niezależne parametry p i η . Ostatnia zależność z (2.3) wynika z hipotezy Haara-Kármána. Górny znak odnosi się do przypadku, kiedy σ_θ jest równe większemu naprężeniu głównemu w płaszczyźnie rz (punkt N , rys. 1a), znak dolny — kiedy jest równe mniejszemu (punkt M).

Układ równań otrzymany w rezultacie podstawienia (2.3) do (2.1) jest typu hiperbolicznego. Charakterystyki α i β określone są odpowiednio przez równania

$$(2.5) \quad \frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \Phi, \quad \frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \left(\Phi + \frac{\pi}{2} + \varphi \right),$$

gdzie

$$(2.6) \quad \Phi = \eta - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \varphi.$$

Jeżeli $\partial/\partial s_\alpha$ i $\partial/\partial s_\beta$ oznacza różniczkowanie wzdłuż α i β linii, związki wzdłuż charakterystyk mają postać

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p}{\partial s_\alpha} + 2q \frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha} + q [\sin \Phi \pm \cos (\Phi + \varphi)]/r = 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p}{\partial s_\beta} - 2q \frac{\partial \Phi}{\partial s_\beta} - q [\cos (\Phi + \varphi) \pm \sin \Phi]/r = 0; \end{aligned}$$

znaki przyjmujemy jak dla σ_θ . Z warunku plastyczności (2.2) po podstawieniu (2.4) otrzymamy

$$(2.8) \quad q = p \sin \varphi + k \cos \varphi.$$

Zauważmy, że równania (2.5) i (2.7) bez ostatnich wyrazów określają płaski stan odkształcenia.

Rozpatrzmy z kolei równania określające pole prędkości. Jako prawo fizyczne przyjęto stowarzyszone z warunkiem plastyczności Coulomba-Mohra prawo płynięcia

$$(2.9) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}};$$

f jest funkcją występującą w warunku plastyczności, a λ dodatnio określonym współczynnikiem mającym wymiar prędkości. Przyjęcie prawa stowarzyszonego jest równoznaczne z przyjęciem współosiowości kierunków głównych tensorów naprężenia i prędkości odkształcenia. Prawo to zakłada też ortogonalność wektora prędkości do powierzchni plastyczności. Składowe tensora prędkości odkształcenia wynoszą

$$(2.10) \quad \dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{u}{r}, \quad \dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r},$$

gdzie u i w są rzutami wektora prędkości na osie r i z .

Otrzymane z prawa płynięcia prawo zmian objętościowych materiału oraz warunki współosiowości dają układ dwu równań typu hiperbolicznego. Charakterystyki tego układu równań pokrywają się z charakterystykami pola naprężeń, a zależności wzdłuż charakterystyk mają postać

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} - (v_\beta + v_\alpha \sin \varphi) \frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha} + \frac{1 - \sin \varphi}{2r} [v_\alpha \cos (\Phi + \varphi) - v_\beta \sin \Phi] = 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} + (v_\alpha + v_\beta \sin \varphi) \frac{\partial \Phi}{\partial s_\beta} + \frac{1 - \sin \varphi}{2r} [v_\alpha \cos (\Phi + \varphi) - v_\beta \sin \Phi] = 0, \end{aligned}$$

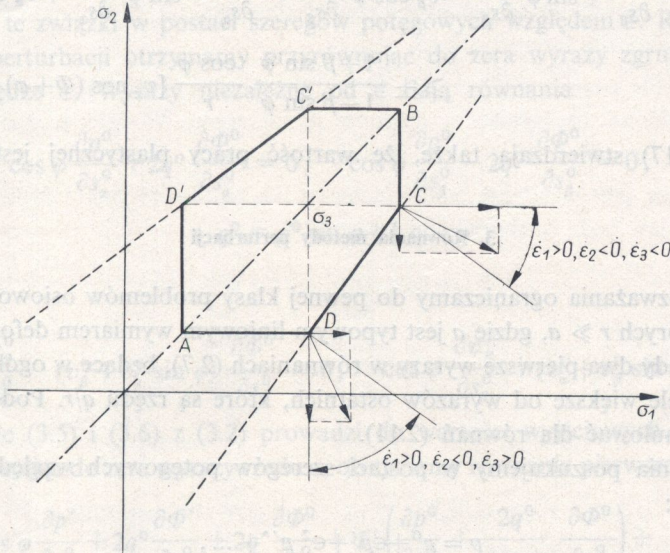
gdzie v_α i v_β są rzutami wektora prędkości odpowiednio na α i β -linię i są związane ze składowymi prędkości u, w wzorami

$$(2.12) \quad \begin{aligned} v_\alpha &= u \cos \Phi + w \sin \Phi, \\ v_\beta &= -u \sin (\Phi + \varphi) + w \cos (\Phi + \varphi); \end{aligned}$$

związki odwrotne są następujące:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} u \cos \varphi &= v_\alpha \cos (\Phi + \varphi) - v_\beta \sin \Phi, \\ w \cos \varphi &= v_\alpha \sin (\Phi + \varphi) + v_\beta \cos \Phi. \end{aligned}$$

Warunek plastyczności Coulomba-Mohra w przestrzeni naprężeń głównych przedstawia ostrosłup o podstawie sześciokąta [1]. Na rys. 2 przedstawiono przekrój ostrosłupa płaszczyzną $\sigma_3 = \sigma_\theta = \text{const}$. Stanom Haara-Kármána odpowiadają punkty C' i D' , jeżeli przyjmiemy, że naprężenie $\sigma_2 > \sigma_1$, lub punkty C i D , jeżeli przyjmiemy $\sigma_1 > \sigma_2$; ta umowa jest dalej przestrzegana. Dla σ_θ równego



Rys. 2

większemu algebraicznie naprężeniu głównemu w płaszczyźnie osiowej odpowiada punkt D , równo mniejszemu — punkt C . Prawo płynięcia (2.9) wymaga, aby wektor prędkości był skierowany na zewnątrz sześcioboku i zawarty między prostymi do przylegających do naroży płaszczyzn AD, DC i BC . Stan naprężenia reprezentowany przez punkt C musi spełniać warunek plastyczności dla dwu płaszczyzn DC i BC :

$$(2.14) \quad \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi - k \cos \varphi = 0, \\ f_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_\theta) + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_\theta) \sin \varphi - k \cos \varphi = 0; \end{aligned}$$

dla punktu D równania DC i AD są następujące:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi - k \cos \varphi = 0, \\ f_3 &= \frac{1}{2} (\sigma_\theta - \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_\theta + \sigma_2) \sin \varphi - k \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

Z prawa płynięcia (2.9) i zależności (2.14) i (2.15) otrzymujemy informację o znakach głównych prędkości odkształceń w narożach Haara-Kármána:

$$(2.16) \quad \dot{\varepsilon}_1 \geq 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 \leq 0, \quad -\dot{\beta}\dot{\varepsilon}_\theta \geq 0,$$

$\beta = 1$ dla punktu C i $\beta = -1$ dla punktu D .

Nierówności (2.16) mogą być wyrażone przez następujące warunki [1]:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} & \pm [v_\alpha \cos(\Phi + \varphi) - v_\beta \sin \Phi] \geq 0, \\ \Gamma = \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} + \sin \varphi \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} - v_\beta \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + \sin \varphi \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} + v_\alpha \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha} & \geq \\ & \geq \pm \frac{1 + \beta \sin \varphi}{1 - \beta \sin \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} [v_\alpha \cos(\Phi + \varphi) - v_\beta \sin \Phi]. \end{aligned}$$

Warunki (2.17) stwierdzają także, że wartość pracy plastycznej jest dodatnia.

3. Równania metody perturbacji

Dalsze rozważania ograniczamy do pewnej klasy problemów osiowo-symetrycznych, dla których $r \gg a$, gdzie a jest typowym liniowym wymiarem deformowanego obszaru. Wtedy dwa pierwsze wyrazy w równaniach (2.7), będące w ogólności rzędu q/a , są o wiele większe od wyrazów ostatnich, które są rzędu q/r . Podobne uwagi można sformułować dla równań (2.11).

Rozwiązania poszukujemy w postaci szeregów potęgowych względem małego parametru ε :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} p &= p^0 + \varepsilon p' + \varepsilon^2 p'' + \dots, \\ \Phi &= \Phi^0 + \varepsilon \Phi' + \varepsilon^2 \Phi'' + \dots, \\ q &= q^0 + \varepsilon q' + \varepsilon^2 q'' + \dots, \\ v_\alpha &= v_\alpha^0 + \varepsilon v_\alpha' + \varepsilon^2 v_\alpha'' + \dots, \\ v_\beta &= v_\beta^0 + \varepsilon v_\beta' + \varepsilon^2 v_\beta'' + \dots, \end{aligned}$$

gdzie $\varepsilon = a/r_0 < 1$, a układ $p^0, \Phi^0, q^0, v_\alpha^0$ i v_β^0 jest rozwiązaniem analitycznym odpowiedniego problemu prostego w płaskim stanie odkształcenia (rozwiązanie wyjściowe). Wyrazy $p', \Phi', q', v_\alpha', v_\beta'$ i rzędów wyższych są rozwiązaniem liniowych równań perturbacyjnych odpowiedniej klasy.

Zmiennymi niezależnymi są długości łuku dwóch krzywych

$$(3.2) \quad \frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \Phi^0, \quad \frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \left(\Phi^0 + \frac{\pi}{2} + \varphi \right)$$

przyjętych jako układ współrzędnych, które są także α^0 i β^0 -charakterystyką rozwiązania wyjściowego. Jeżeli $\partial/\partial s_\alpha^0$ i $\partial/\partial s_\beta^0$ oznacza różniczkowanie wzdłuż wyjściowych α i β -linii, to

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s_\alpha} &= \cos(\varphi - \Phi + \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\alpha^0} + \sin(\Phi - \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\beta^0}, \\ \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s_\beta} &= -\sin(\Phi - \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\alpha^0} + \cos(\varphi + \Phi - \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\beta^0}. \end{aligned}$$

Zanotujmy także, że

$$(3.4) \quad \frac{1}{r} = \frac{\epsilon}{a} + \frac{\epsilon^2}{a^2} x + \frac{\epsilon^3}{a^3} x^2 + \dots$$

W rezultacie podstawienia (3.1) i (3.4) do (2.7), (2.8) i (2.11) i mając na uwadze (3.3), otrzymamy te związki w postaci szeregów potęgowych względem ϵ . Równania dla kolejnych perturbacji otrzymamy przyrównując do zera wyrazy zgrupowane przy każdej potędze ϵ . Wyrazy niezależne od ϵ dają równania

$$(3.5) \quad \cos \varphi \frac{\partial p^0}{\partial s_\alpha^0} + 2q^0 \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} = 0, \quad \cos \varphi \frac{\partial p^0}{\partial s_\beta^0} - 2q^0 \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} = 0,$$

$$q^0 = p^0 \sin \varphi + k \cos \varphi$$

oraz

$$(3.6) \quad \cos \varphi \frac{\partial v_\alpha^0}{\partial s_\alpha^0} - (v_\beta^0 + v_\alpha^0 \sin \varphi) \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} = 0, \quad \cos \varphi \frac{\partial v_\beta^0}{\partial s_\beta^0} + (v_\alpha^0 + v_\beta^0 \sin \varphi) \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} = 0.$$

Rozwiązanie (3.5) i (3.6) z (3.2) prowadzi do wartości wyjściowych.

Przyrównując do zera wyrazy rzędu ϵ , otrzymamy równania pierwszej perturbacji:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\alpha^0} + 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\alpha^0} + 2q' \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} + \Phi' \left(\frac{\partial p^0}{\partial s_\beta^0} + \frac{2q^0}{\cos \varphi} \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} \right) + \\ + q^0 [\sin \Phi^0 \pm \cos(\Phi^0 + \varphi)]/a = 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\beta^0} - 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\beta^0} - 2q' \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} - \Phi' \left(\frac{\partial p^0}{\partial s_\alpha^0} - \frac{2q^0}{\cos \varphi} \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} \right) - \\ - q^0 [\cos(\Phi^0 + \varphi) \pm \sin \Phi^0]/a = 0, \\ q' = p' \sin \varphi \end{aligned}$$

oraz

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial v'_\alpha}{\partial s_\beta^0} - (v'_\beta + v'_\alpha \sin \varphi) \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} - (v_\beta^0 + v_\alpha^0 \sin \varphi) \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\alpha^0} + \frac{\Phi'}{\cos \varphi} \left[\cos \varphi \frac{\partial v_\alpha^0}{\partial s_\beta^0} - \right. \\ \left. - (v_\beta^0 + v_\alpha^0 \sin \varphi) \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} \right] + \frac{1 - \sin \varphi}{2a} [v_\alpha^0 \cos(\Phi^0 + \varphi) - v_\beta^0 \sin \Phi^0] = 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial v'_\beta}{\partial s_\alpha^0} + (v'_\alpha + v'_\beta \sin \varphi) \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} + (v_\alpha^0 + v_\beta^0 \sin \varphi) \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\beta^0} - \frac{\Phi'}{\cos \varphi} \left[\cos \varphi \frac{\partial v_\beta^0}{\partial s_\alpha^0} + \right. \\ \left. + (v_\alpha^0 + v_\beta^0 \sin \varphi) \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} \right] + \frac{1 - \sin \varphi}{2a} [v_\alpha^0 \cos(\Phi^0 + \varphi) - v_\beta^0 \sin \Phi^0] = 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że kinematyczne równania perturbacyjne nie dadzą rozwiązać się bez uprzedniego rozwiązania perturbacyjnych równań statyki. Będzie można rozwiązać niezależnie równania kinematyki jedynie dla przypadku, kiedy układ charakterystyk dla kolejnych perturbacji będzie taki sam jak w rozwiązaniu wyjściowym; wtedy mamy

$$(3.9) \quad \Phi = \Phi^0, \quad \Phi' = \Phi'' = \dots = 0.$$

Rozwiązanie równań (3.7) i (3.8) powinno spełniać warunki brzegowe dla p' , Φ' , v'_α i v'_β . Rozwiązanie wyjściowe musi być wybrane tak, żeby brzegowe wartości p^0 , Φ^0 , v_α^0 i v_β^0 różniły się co najwyżej o rząd ϵ od wartości p , Φ , v_α i v_β , które powinny spełniać rozwiązanie perturbacyjne.

Z warunków równowagi wynika, że p i Φ muszą być ciągłe lub mogą mieć co najwyżej specjalne nieciągłości w obszarze plastycznym. W dalszych rozwiązaniach założymy ciągłość p i Φ w całym obszarze deformacji.

Zbudowane perturbacyjne pole kinematyczne będzie spełniało hipotezę Haara-Kármána, jeżeli będą spełnione nierówności

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \pm [v_\alpha^0 \cos(\Phi^0 + \varphi) - v_\beta^0 \sin \Phi^0] > 0, \\ \Gamma^0 = & \frac{\partial v_\alpha^0}{\partial s_\beta^0} + \sin \varphi \frac{\partial v_\beta^0}{\partial s_\beta^0} - v_\beta^0 \cos \varphi \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} + \frac{\partial v_\beta^0}{\partial s_\alpha^0} + \\ & + \sin \varphi \frac{\partial v_\alpha^0}{\partial s_\alpha^0} + v_\alpha^0 \cos \varphi \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} > 0, \end{aligned}$$

otrzymane w wyniku podstawienia (3.1) do (2.17). W przypadku $\Gamma^0 = 0$ należy rozpatrzyć pierwszą klasę perturbacji Γ .

4. Osiowo-symetryczne wciskanie sztywnego pierścienia w półprzestrzeń

W ośrodek materialny leżący w półprzestrzeni $z \leq 0$ wciskany jest z prędkością V sztywny, gładki pierścień cylindryczny o promieniu zewnętrznym r_0 i ściance o grubości $2a$ (rys. 3). W pracy [9] podano perturbacyjne rozwiązanie zadania w klasie ϵ dla ośrodka Treski.

Rozwiązanie ograniczamy do pierwszej klasy perturbacji; wtedy

$$(4.1) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 - x} = \frac{\epsilon}{a} + o(\epsilon^2),$$

gdzie $\epsilon = a/r_0$ jest małym parametrem.

Możliwy układ charakterystyk dla rozwiązania wyjściowego (płaski stan odkształcenia) przedstawiają linie ciągłe na rys. 3. Założenie to opiera się na propozycji SHIELDA [14] z tą różnicą, że $A_1 E \neq A_2 E$:

$$(4.2) \quad a_1 + a_2 = 2a.$$

Wyjściowe pole naprężeń określają formuły:

w obszarze $A_1 B_1 C_1$

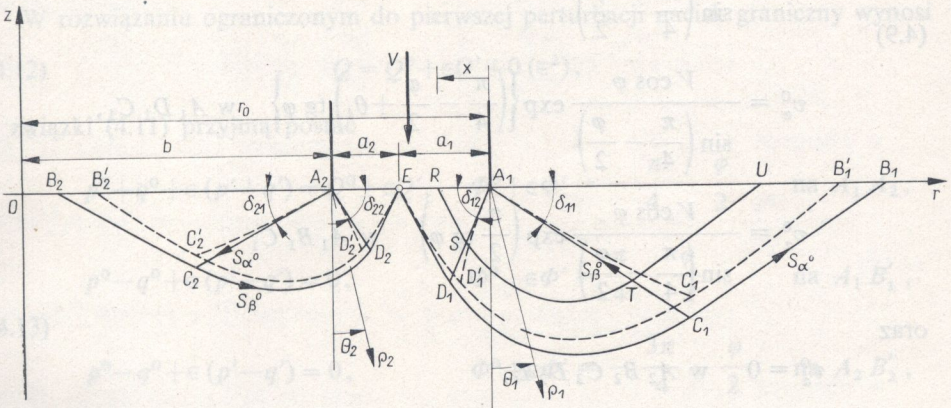
$$(4.3) \quad p^0 = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad q^0 = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \Phi^0 = \delta_{11} = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2};$$

w obszarze $A_1 C_1 D_1$

$$(4.4) \quad p^0 = k \operatorname{ctg} \varphi \left[\frac{1}{1 - \sin \varphi} \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \varphi - 2\theta_1 \right) \operatorname{tg} \varphi \right\} - 1 \right],$$

$$q^0 = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \varphi - 2\theta_1 \right) \operatorname{tg} \varphi \right\},$$

$$\Phi^0 = \theta_1 - \varphi, \quad -\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2};$$



Rys. 3

w obszarach $A_1 D_1 E$ i $A_2 D_2 E$

$$(4.5) \quad p^0 = k \operatorname{ctg} \varphi \left[\frac{1}{1 - \sin \varphi} \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) - 1 \right],$$

$$q^0 = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi), \quad \Phi^0 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2};$$

w obszarze $A_2 C_2 D_2$

$$(4.6) \quad p^0 = k \operatorname{ctg} \varphi \left[\frac{1}{1 - \sin \varphi} \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \varphi + 2\theta_2 \right) \operatorname{tg} \varphi \right\} - 1 \right],$$

$$q^0 = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \varphi + 2\theta_2 \right) \operatorname{tg} \varphi \right\},$$

$$\Phi^0 = \theta_2 - \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2};$$

w obszarze $A_2 B_2 C_2$

$$(4.7) \quad p^0 = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad q^0 = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \Phi^0 = -\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2},$$

gdzie ρ_1, θ_1 i ρ_2, θ_2 są współrzędnymi biegunowymi ze środkiem odpowiednio w punktach A_1 i A_2 . Nacisk Q^0 jest stały na $A_1 A_2$:

$$(4.8) \quad Q^0 = k \operatorname{ctg} \varphi \left[\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) - 1 \right].$$

Wyjściowe pole prędkości określają wzory następujące:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} v_\beta^0 &= 0 \quad \text{w } A_1 B_1 C_1 D_1 E, \\ v_\alpha^0 &= \frac{V \cos \varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad \text{w } A_1 D_1 E, \\ v_\alpha^0 &= \frac{V \cos \varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \quad \text{w } A_1 D_1 C_1, \\ v_\alpha^0 &= \frac{V \cos \varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \quad \text{w } A_1 B_1 C_1 \end{aligned}$$

oraz

$$(4.10) \quad \begin{aligned} v_\alpha^0 &= 0 \quad \text{w } A_2 B_2 C_2 D_2 E, \\ v_\beta^0 &= -\frac{V \cos \varphi}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \quad \text{w } A_2 D_2 E, \\ v_\beta^0 &= -\frac{V \cos \varphi}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \theta_2\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \quad \text{w } A_2 D_2 C_2, \\ v_\beta^0 &= -\frac{V \cos \varphi}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \quad \text{w } A_2 B_2 C_2, \end{aligned}$$

gdzie V jest prędkością pionową pierścienia. Przyjęto, że obszar na zewnątrz $B_1 C_1 D_1 E$ i $ED_2 C_2 B_2$ jest sztywny.

Obecnie rozważmy przypadek osiowej symetrii. Linia a^0 wychodząca z punktu E przechodzi w a -linię $ED'_1 C'_1 B'_1$, B'_1 leży na osi r , $A'_1 C'_1$ i $A'_1 D'_1$ są β -liniami (niekoniecznie prostymi), które ograniczają wachlarz β -linii w punkcie A_1 . Podobnie zmieni się układ a i β -linii w obszarze $A_2 ED_2 C_2 B_2$. Warunki brzegowe $\sigma_z = -Q$

na $A_1 A_2$, $\sigma_z = 0$ na $A_1 B'_1$ i $A_2 B'_2$, $\tau_{rz} = 0$ dla $z = 0$, $w = -V$ na $A_1 A_2$, napiszmy w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
 p+q &= Q, & \Phi &= -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} & \text{na } A_1 A_2, \\
 p-q &= 0, & \Phi &= \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} & \text{na } A_1 B'_1, \\
 p-q &= 0, & \Phi &= -\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} & \text{na } A_2 B'_2,
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

$$v_\alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - v_\beta \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = V \cos \varphi \quad \text{na } A_1 A_2.$$

W rozwiązaniu ograniczonym do pierwszej perturbacji nacisk graniczny wynosi

$$Q = Q^0 + \epsilon Q' + O(\epsilon^2),
 \tag{4.12}$$

a związki (4.11) przyjmą postać

$$\begin{aligned}
 p^0 + q^0 + \epsilon(p' + q') &= Q^0 + \epsilon Q', & \Phi^0 + \epsilon \Phi' &= -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} & \text{na } A_1 A_2, \\
 p^0 - q^0 + \epsilon(p' - q') &= 0, & \Phi^0 + \epsilon \Phi' &= \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} & \text{na } A_1 B'_1, \\
 p^0 - q^0 + \epsilon(p' - q') &= 0, & \Phi^0 + \epsilon \Phi' &= -\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} & \text{na } A_2 B'_2,
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

$$(v_\alpha^0 + \epsilon v_\alpha') \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - (v_\beta^0 + \epsilon v_\beta') \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = V \cos \varphi \quad \text{na } A_1 A_2.$$

Uwzględniając zależność $q' = p' \sin \varphi$ i wartości $p^0, q^0, \Phi^0, Q^0, v_\alpha^0$ i v_β^0 określone za pomocą wzorów (4.3) – (4.10), otrzymamy

$$\begin{aligned}
 Q' &= p' (1 + \sin \varphi), & \Phi' &= 0 & \text{na } A_1 A_2, \\
 p' &= \Phi' = 0 & & & \text{na } A_1 B'_1 \text{ i } A_2 B'_2, \\
 v_\alpha' \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - v_\beta' \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) &= 0 & & & \text{na } A_1 A_2.
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Warunek, że obszar na zewnątrz $B_1 C_1 D_1 E$ i $ED_2 C_2 B_2$ jest sztywny, prowadzi do warunków

$$\begin{aligned}
 v_\beta' &= 0 & \text{na } ED'_1 C'_1 B'_1, \\
 v_\alpha' &= 0 & \text{na } ED'_2 C'_2 B'_2.
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Warunki (4.14) i (4.15) są warunkami brzegowymi dla równań pierwszej perturbacji.

Dla przykładu podajemy systematyczny tok rozwiązania statycznego w obszarze $A_1 B'_1 C'_1 D'_1 E$. Zmiennymi niezależnymi w $A_1 D'_1 E$ i $A_1 C'_1 B'_1$ są układy współrzędnych ze środkiem w A_1 , opartych na charakterystykach wyjściowych z osiami skierowanymi zgodnie z kierunkami α^0 i β^0 -linii w danym obszarze; w $A_1 D'_1 C'_1$ przyjęto układ współrzędnych biegunowych ρ_1, θ_1 (rys. 3). Wtedy mamy

$$(4.16) \quad \frac{\partial}{\partial s_\alpha^0} = \cos \varphi \frac{\partial}{\rho_1 \partial \theta_1}, \quad \frac{\partial}{\partial s_\beta^0} = - \frac{\partial}{\rho_1} \quad \text{w } A_1 D'_1 C'_1.$$

Równania pierwszej perturbacji (3.7) dla poszczególnych obszarów plastycznych są następujące:

w obszarze $A_1 B'_1 C'_1$

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\alpha^0} + 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\alpha^0} + \left[2q^0 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] a &= 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\alpha^0} - 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\beta^0} - \left[2q^0 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] a &= 0; \end{aligned}$$

w obszarze $A_1 C'_1 D'_1$

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \cos^2 \varphi \frac{\partial p'}{\partial \theta_1} + 2q^0 \cos \varphi \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta_1} + 2p' \sin \varphi \cos \varphi + q^0 \rho_1 [\sin(\theta_1 - \varphi) + \cos \theta_1] / a &= 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial \rho_1} - 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial \rho_1} - \frac{4}{\rho_1} q^0 \Phi' + q^0 [\sin(\theta_1 - \varphi) + \cos \theta_1] / a &= 0; \end{aligned}$$

w obszarze $A_1 D'_1 E$

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\alpha^0} + 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\alpha^0} &= 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\beta^0} - 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\beta^0} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie q^0 dane są odpowiednio przez wzory (4.3) – (4.5).

Po elementarnym scałkowaniu równań (4.17) i wykorzystaniu warunków brzegowych (4.14)₂ otrzymamy dla $A_1 B'_1 C'_1$

$$(4.20) \quad p' = 0, \quad \Phi' = - \frac{1}{a} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) (s_\alpha^0 + s_\beta^0).$$

Pierwsze z równań (4.18) ma czynnik całkujący $(q^0)^{-1}$; po scałkowaniu otrzymujemy

$$(4.21) \quad p' = - \frac{2q^0}{\cos \varphi} \Phi' - \frac{1}{a} q^0 \rho_1 \{ \operatorname{tg} \varphi [\sin(\theta_1 - \varphi) + \cos \theta_1] + [\sin \theta_1 - \cos(\theta_1 - \varphi)] \} - q^0 F(\rho_1).$$

Z drugiej z równań (4.18), wykorzystując (4.21), otrzymamy

$$(4.22) \quad -\frac{2q^0}{\cos \varphi} \Phi' = \frac{1}{4a} q^0 \rho_1 \left\{ [\sin \theta_1 - \cos (\theta_1 - \varphi)] - \right. \\ \left. - \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} [\sin (\theta_1 - \varphi) + \cos \theta_1] \right\} + \frac{1}{2\rho_1} \left[q^0 \int \rho_1 \frac{\partial F(\rho_1)}{\partial \rho_1} d\rho_1 - G(\theta_1) \right].$$

Funkcje $F(\rho_1)$ i $G(\theta_1)$ wyznaczamy z warunku ciągłości $p^0 + \epsilon p'$ i $\Phi^0 + \epsilon \Phi'$ na linii $A_1 C'_1$, której równanie rzędu ϵ ma postać

$$(4.23) \quad \rho_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho_1} = \epsilon \Phi',$$

gdzie Φ' jest określone przez (4.20). Biorąc pod uwagę, że $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ dla $\rho_1 = 0$, z (4.23) dostajemy

$$(4.24) \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \epsilon \frac{1}{a} \rho_1 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Z (4.3), (4.20) i (4.24) otrzymujemy na $A_1 C'_1$

$$(4.25) \quad p^0 + \epsilon p' = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \\ \Phi^0 + \epsilon \Phi' = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \epsilon \frac{1}{a} \rho_1 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Z (4.4), (4.21), (4.22) i (4.24) mamy na $A_1 C'_1$

$$(4.26) \quad p^0 + \epsilon p' = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} + \epsilon \left\{ \rho_1 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left[\frac{1 + 3 \sin \varphi}{2a \cos \varphi} q^0 - \frac{2k}{a(1 - \sin \varphi)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\rho_1} \left[q^0 \int \rho_1 \frac{\partial F(\rho_1)}{\partial \rho_1} d\rho_1 - G(\theta_1) \right] + q^0 F(\rho_1) \right\}, \\ \Phi^0 + \epsilon \Phi' = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \epsilon \left\{ \frac{1}{4a} \rho_1 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) (5 - \sin \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{\cos \varphi}{4\rho_1} \left[\frac{1}{q^0} G(\theta_1) - \int \rho_1 \frac{\partial F(\rho_1)}{\partial \rho_1} d\rho_1 \right] \right\},$$

gdzie $q^0 = k \cos \varphi / (1 - \sin \varphi)$.

Wzory (4.25) i (4.26) dają te same wartości $p^0 + \epsilon p'$ i $\Phi^0 + \epsilon \Phi'$ na $A_1 C'_1$, jeżeli

$$(4.27) \quad F(\rho_1) = -\frac{2}{a} \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \rho_1 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \theta_1 \right) \operatorname{tg} \varphi \right\},$$

$$G(\theta_1) = 0.$$

Wobec (4.27) dla $A_1 C'_1 D'_1$ ostatecznie otrzymujemy

$$(4.28) \quad p' = -\frac{1}{4a} q^0 \rho_1 \left\{ 3 [\sin \theta_1 - \cos(\theta_1 - \varphi)] + \frac{1+3 \sin \varphi}{\cos \varphi} [\sin(\theta_1 - \varphi) + \cos \theta_1] - \frac{6(1+\sin \varphi)}{\cos \varphi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \right\},$$

$$\Phi' = -\frac{1}{8a} \rho_1 \left\{ [\sin \theta_1 - \cos(\theta_1 - \varphi)] \cos \varphi - (1 - \sin \varphi) [\sin(\theta_1 - \varphi) + \cos \theta_1] - 2(1 + \sin \varphi) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \right\},$$

gdzie

$$q^0 = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - 2\theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\}.$$

W obszarze $A_1 D'_1 E$ po scałkowaniu (4.19) mamy

$$(4.29) \quad p' = \frac{1}{2} [F(s_\beta^0) + G(s_\alpha^0)], \quad \frac{2q_0}{\cos \varphi} \Phi' = \frac{1}{2} [F(s_\beta^0) - G(s_\alpha^0)];$$

stąd, wobec $\Phi' = 0$ dla $s_\alpha^0 = s_\beta^0$ otrzymujemy

$$(4.30) \quad G(s_\alpha^0) = F(s_\alpha^0)$$

oraz

$$(4.31) \quad p' = \frac{1}{2} [F(s_\beta^0) + F(s_\alpha^0)], \quad \frac{2q^0}{\cos \varphi} \Phi' = \frac{1}{2} [F(s_\beta^0) - F(s_\alpha^0)].$$

Równanie $A_1 D'_1$ rzędu ϵ ma postać

$$(4.32) \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \epsilon \frac{1}{4a} \rho_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left[\cos \varphi + (1 - \sin \varphi) \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right].$$

Korzystając z warunku ciągłości $p^0 + \epsilon p'$ i $\Phi^0 + \epsilon \Phi'$ na linii $A_1 D'_1$, wyznaczamy funkcję F , a dla $A_1 D'_1 E$ ostatecznie dostaniemy

$$(4.33) \quad p' = -\frac{1}{a \cos \varphi} q^0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left[\cos \varphi + (1 + \sin \varphi) \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right] (s_\alpha^0 + s_\beta^0),$$

$$\Phi' = \frac{1}{2a} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left[\cos \varphi + (1 + \sin \varphi) \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right] (s_\alpha^0 - s_\beta^0).$$

Całkowity nacisk na $A_1 E$ wynosi

$$(4.34) \quad Q = Q^0 + \epsilon p' (1 + \sin \varphi).$$

W obszarze $A_1 D'_1 E$ mamy następujące związki między układami współrzędnych:

(4.35)

$$s_\alpha^0 = \frac{r-r_0}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} - \frac{z}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}, \quad s_\beta^0 = \frac{r-r_0}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{z}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)};$$

Podstawiamy p' z (4.33) przy $s_\alpha^0 = s_\beta^0$ do (4.34) i przejdźmy do zmiennych r, z :

$$(4.36) \quad Q = Q^0 + \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) \times \\ \times \left[\cos \varphi + (1 + \sin \varphi) \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \left(1 - \frac{r}{r_0} \right),$$

gdzie Q^0 określone jest przez wzór (4.8).

Postępując podobnie, dla obszaru $A_2 B'_2 C'_2 D'_2 E$ otrzymamy:

w obszarze $A_2 B'_2 C'_2$

$$(4.37) \quad p' = \Phi' = 0;$$

w obszarze $A_2 C'_2 D'_2$

$$(4.38) \quad p' = \frac{1}{4a} q^0 \rho_2 \left\{ 3 [\sin \theta_2 - \cos(\theta_2 + \varphi)] + \frac{1 - 3 \sin \varphi}{\cos \varphi} [\cos \theta_2 + \sin(\theta_2 + \varphi)] + \right. \\ \left. + 6 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \theta_2 \right) \operatorname{tg} \varphi \right\} \right\},$$

$$\Phi' = -\frac{1}{8a} \rho_2 \left\{ [\sin \theta_2 - \cos(\theta_2 + \varphi)] \cos \varphi - [\cos \theta_2 + \sin(\theta_2 + \varphi)] \times \right. \\ \left. \times (1 + 4 \sin \varphi) + 2 \cos \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \theta_2 \right) \operatorname{tg} \varphi \right\} \right\};$$

w obszarze $A_2 D'_2 E$

$$(4.39) \quad p' = \frac{1}{a \cos \varphi} q^0 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left[1 - \sin \varphi + \cos \varphi \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] (s_\alpha^0 + s_\beta^0), \\ \Phi' = \frac{1}{2a} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left[1 + \sin \varphi - \cos \varphi \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] (s_\alpha^0 - s_\beta^0),$$

gdzie q^0 określone są za pomocą wzorów (4.5)₂ - (4.7)₂, a całkowity nacisk na $A_2 E$ wynosi

$$(4.40) \quad Q = Q^0 + \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) \times \\ \times \left[\cos \varphi + (1 + \sin \varphi) \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \frac{(r - r_0 + 2a)}{r_0}.$$

Porównując (4.36) i (4.40) znajdujemy, że w punkcie E będzie zachowana ciągłość, jeżeli

$$(4.41) \quad a_1 = a_2 = a.$$

Perturbacyjne rozwiązanie kinematyczne budujemy w obszarach $A_1 D'_1 E$ i $A_2 D'_2 E$, a następnie kolejno w innych. Rozwiązanie to, oprócz warunków brzegowych (4.14)₃, powinno spełniać także warunki ciągłości $v'_\alpha + \epsilon v'_\alpha$ na linii $A_1 D'_1$ i $A_1 C'_1$ w obszarze $A_1 B'_1 C'_1 D'_1 E$ oraz ciągłości $v'_\beta + \epsilon v'_\beta$ na linii $A_2 D'_2$ i $A_2 C'_2$ w obszarze $A_2 B'_2 C'_2 D'_2 E$. Rozwiązanie dla pierwszej perturbacji jest następujące: w obszarze $A_1 D'_1 E$

$$(4.42) \quad v'_\alpha = \frac{V}{4a} \left\{ 2M(\varphi)(s_\alpha^0 - s_\beta^0) + N(\varphi) \left[2s_\beta^0 + \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \right] \right\},$$

$$v'_\beta = \frac{V}{4a} N(\varphi) \left[2s_\beta^0 + \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \right];$$

w obszarze $A_1 D'_1 C_1$

$$(4.43) \quad v'_\alpha = \frac{V}{8a} \left[2\rho_1 - \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \right] \times$$

$$\times \left[-2N(\varphi) - R(\varphi) + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \left\{ \sin \theta_1 - \right. \right.$$

$$\left. - \cos(\theta_1 - \varphi) \right\} (\sin 2\varphi - \cos \varphi) - [\cos \theta_1 + \sin(\theta_1 - \varphi)] (\sin \varphi + \cos 2\varphi) +$$

$$+ 2(1 - \sin \varphi) \sin(\theta_1 + \varphi) - \frac{2(1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi} \theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \right] + \frac{V}{8a} \rho_1 \left[4M(\varphi) - 2 \sin \varphi G(\varphi) + S(\varphi) - \right.$$

$$\left. - 4Q(\varphi) - \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \left\{ \sin \theta_1 - \right. \right.$$

$$\left. - \cos(\theta_1 - \varphi) \right\} (\sin \varphi + \cos 2\varphi) + [\cos \theta_1 + \sin(\theta_1 - \varphi)] (\sin 2\varphi - \cos \varphi) +$$

$$+ \frac{2(1 + \sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} -$$

$$\left. - \frac{4(1 - \sin \varphi)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \sin(\theta_1 + \varphi) \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \right],$$

$$(4.43) \quad v'_\beta = \frac{V}{8a \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \left[2\rho_1 - \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \times \right. \\ \left. \times \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \right] \left\{ [\sin \theta_1 - \cos(\theta_1 - \varphi)] \cos \varphi - \right. \\ \left. - [\cos \theta_1 + \sin(\theta_1 - \varphi)] (1 - \sin \varphi) - 2(1 + \sin \varphi) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \theta_1\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} + 2(1 - \sin \varphi) \cos \theta_1 \right\};$$

w obszarze $A_1 B_1 C_1'$

$$(4.44) \quad v'_\alpha = -\frac{V}{8a} \left\{ \left[2s_\beta^0 + \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right] [H(\varphi) - 2N(\varphi) - R(\varphi)] + \right. \\ \left. + [4M(\varphi) - 2 \sin \varphi G(\varphi) + S(\varphi) - 4Q(\varphi) - B(\varphi) + E(\varphi)] s_\beta^0 + F(\varphi) s_\alpha^0 \right\}, \\ v'_\beta = \frac{V}{4a \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \left[2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - (1 - \sin \varphi) \times \right. \\ \left. \times \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \left[2s_\beta^0 + \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right].$$

Występujące we wzorach (4.42) - (4.44) funkcje są następujące:

$$G(\varphi) = \left[\cos \varphi + (1 + \sin \varphi) \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right], \\ N(\varphi) = \left[G(\varphi) - (1 - \sin \varphi) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right], \\ M(\varphi) = \left[\sin \varphi G(\varphi) - (1 - \sin \varphi) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right], \\ R(\varphi) = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \left[-(2 \sin \varphi - 1) \cos \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \exp\left(\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \varphi\right) - (1 - \sin \varphi) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \varphi\right) \right],$$

$$S(\varphi) = \sin 2\varphi \left[-(\sin \varphi + \cos 2\varphi) - \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \right],$$

$$Q(\varphi) = \frac{1 - \sin \varphi}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \varphi \right),$$

$$F(\varphi) = \frac{4}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \left[2 \sin \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\ \left. + (1 - \sin \varphi) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right],$$

$$B(\varphi) = \frac{\cos \varphi \sin 2\varphi}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \left[(2 \sin \varphi - 1) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(1 + \sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] + \frac{4(1 - \sin \varphi)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \times \\ \times \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \varphi \right) \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right),$$

$$E(\varphi) = 8 \sin \varphi \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right),$$

$$H(\varphi) = \frac{2}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \left[-(\sin \varphi + \cos 2\varphi) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + (1 - \sin \varphi) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \varphi \right) \right].$$

Dla obszaru $A_2 B'_2 C'_2 D'_2 E$ otrzymano następujące wzory:

w obszarze $A_2 D'_2 E$

$$v'_\alpha = \frac{V}{4a} N(\varphi) \left[2s_\alpha^0 - \frac{a}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \right],$$

(4.45)

$$v'_\beta = \frac{V}{4a} \left[2M(\varphi) (s_\beta^0 - s_\alpha^0) + N(\varphi) \left[2s_\alpha^0 - \frac{a}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \right] \right];$$

w obszarze $A_2 D'_2 C'_2$

$$\begin{aligned}
 v'_\alpha &= \frac{V}{8a \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \theta_2\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \times \\
 &\times \left[2\rho_2 - \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \theta_2\right) \operatorname{tg} \varphi\right\}\right] \times \\
 (4.46) \quad &\times \left\{[\sin \theta_2 - \cos(\theta_2 + \varphi)] \cos \varphi - [\cos \theta_2 + \sin(\theta_2 + \varphi)] (1 + \sin \varphi) + \right. \\
 &\left. + 2 \cos \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \theta_2\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} + 2(1 - \sin \varphi) \cos \theta_2\right\}, \\
 v'_\beta &= \frac{V}{8a} \left[2\rho_2 - \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \theta_2\right) \operatorname{tg} \varphi\right\}\right] \left[2N(\varphi) + R(\varphi) - \right. \\
 &- \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \theta_2\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \left\{-[\sin \theta_2 - \cos(\theta_2 + \varphi)] \times \right. \\
 &\times (\cos \varphi + \sin 2\varphi) + [\cos \theta_2 + \sin(\theta_2 + \varphi)] (\sin \varphi - \cos 2\varphi) + 2(1 - \sin \varphi) \times \\
 &\times \sin(\theta_2 - \varphi) + 2\theta_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \theta_2\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \left. \right\} - \\
 &- \frac{V}{8a} \rho_2 \left[4M(\varphi) + 2 \sin \varphi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) G(\varphi) - S(\varphi) + 4Q(\varphi) + \right. \\
 &+ \frac{\sin 2\varphi}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \theta_2\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \left\{-[\cos \theta_2 + \sin(\theta_2 + \varphi)] \times \right. \\
 &\times (\cos \varphi + \sin 2\varphi) - [\sin \theta_2 - \cos(\theta_2 + \varphi)] (\sin \varphi - \cos 2\varphi) + 2\theta_2 \operatorname{tg} \varphi \times \\
 &\times \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \theta_2\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \left. \right\} - \\
 &- \frac{4(1 - \sin \varphi)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \sin(\theta_2 - \varphi) \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \theta_2\right) \operatorname{tg} \varphi\right\} \left. \right];
 \end{aligned}$$

w obszarze $A_2 B'_2 C'_2$

$$\begin{aligned}
 v'_\alpha &= \frac{V}{4a} (1 - \sin \varphi) \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \left[2s_\alpha^0 - \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right], \\
 v'_\beta &= \frac{V}{8a} \left\{ 4(1 + \sin \varphi) s_\beta^0 \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) + \left[2s_\alpha^0 - \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \times \right. \right. \\
 (4.47) \quad &\quad \left. \left. \times \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right] [2N(\varphi) + R(\varphi) - H(\varphi)] - s_\alpha^0 [4M(\varphi) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sin \varphi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) G(\varphi) - S(\varphi) + 4Q(\varphi) + B(\varphi) \right\}.
 \end{aligned}$$

Występujące we wzorach funkcje są następujące:

$$G(\varphi) = \left[1 + \sin \varphi - \cos \varphi \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right],$$

$$N(\varphi) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left[2 \sin \varphi - \cos \varphi \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right],$$

$$M(\varphi) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) [\sin \varphi G(\varphi) - (1 - \sin \varphi)],$$

$$R(\varphi) = \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \left[(\sin \varphi - \cos 2\varphi) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) + (1 - \sin \varphi) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \varphi\right) \right],$$

$$S(\varphi) = \sin 2\varphi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left[-(1 + 2 \sin \varphi) \cos \varphi + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right],$$

$$Q(\varphi) = \frac{1 - \sin \varphi}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \varphi\right),$$

$$H(\varphi) = \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \left[(1 + \sin \varphi) \cos \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - (1 - \sin \varphi) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \varphi\right) \right],$$

$$B(\varphi) = \sin 2\varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \left[(\sin \varphi - \cos 2\varphi) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi \right] + \frac{4(1 - \sin \varphi)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \varphi \right) \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right).$$

Skonstruowane pole kinematyczne nie spełnia nierówności (2.16) w obszarach $A_2 B'_2 C'_2$ i $A_2 D'_2 E$. Z twierdzeń o nośności granicznej dla ciała idealnie plastycznego [15] wynika, że ściśle rozwiązanie nośności otrzymuje się w przypadku, gdy dla pola statycznie dopuszczalnego można zbudować pole kinematycznie dopuszczalne. Jeżeli pole statycznie dopuszczalne jest polem niedopuszczalnym kinematycznie, to nośność obliczona z rozwiązania statycznego jest dolną oceną wartości nośności, samo pole kinematyczne daje ocenę górną.

Przy ograniczeniu rozwiązania do pierwszej perturbacji możliwe jest znalezienie nośności granicznej przez bezpośrednie scałkowanie jednego z równań (3.7) wzdłuż wyjściowej charakterystyki α^0 lub β^0 . Rozpatrzmy obszar $A_1 B_1 C_1 D_1 E$. W perturbacyjnym polu p^0, q^0 i Φ^0 dane są funkcjami (4.3) – (4.5); funkcje te są w ogólności nieciągłe na liniach $A_1 C'_1$ i $A_1 D'_1$. Natomiast w całym obszarze spełniony jest warunek

$$(4.48) \quad q^0 - \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - 2\Phi^0 \right) \operatorname{tg} \varphi \right\} = 0.$$

Przy założeniu ciągłości $q^0 + \epsilon q'$ i $\Phi^0 + \epsilon \Phi'$ w obszarze perturbacyjnym stwierdzamy, że funkcja

$$(4.49) \quad q^0 + \epsilon q' - \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - 2\Phi^0 - 2\epsilon \Phi' \right) \operatorname{tg} \varphi \right\}$$

jest też ciągła w całym obszarze. Z (4.49) po rozwinięciu potęgi w szereg i podstawieniu $q' = p' \sin \varphi$ otrzymamy, że następująca funkcja jest też ciągła w całym obszarze:

$$(4.50) \quad p' + \frac{2q^0}{\cos \varphi} \Phi'.$$

Całkując pierwsze z równań (3.7) wzdłuż wyjściowej linii $RSTU$ dla poszczególnych obszarów otrzymujemy

$$(4.51) \quad \left(p'_s + \frac{2q^0_s}{\cos \varphi} \Phi'_s \right) - \left(p'_R + \frac{2q^0_R}{\cos \varphi} \Phi'_R \right) = 0, \\ \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) \left(p'_T + \frac{2q^0_T}{\cos \varphi} \Phi'_T \right) - \left(p'_s + \frac{2q^0_s}{\cos \varphi} \Phi'_s \right) + \\ + \frac{2}{a} \left[\rho_1^* q^0_T \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) + \rho^0 q^0_s \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] = 0, \\ \left(p'_U + \frac{2q^0_U}{\cos \varphi} \Phi'_U \right) - \left(p'_T + \frac{2q^0_T}{\cos \varphi} \Phi'_T \right) + \frac{2}{a \cos \varphi} \rho_1^* q^0_U \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = 0,$$

gdzie

$$A_1 T = TU = \rho_1^* = \rho_0 \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right), \quad A_1 S = RS = \rho_0 = (r_0 - r_R)/2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

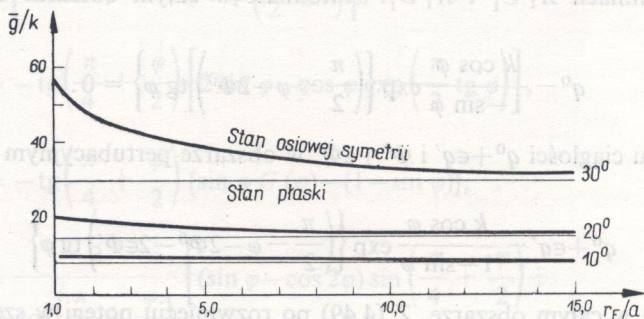
Eliminując

$$\left(p'_T + \frac{2q_T^0}{\cos \varphi} \Phi'_T\right) \quad \text{i} \quad \left(p'_s + \frac{2q_s^0}{\cos \varphi} \Phi'_s\right)$$

i wykorzystując brzegowe wartości na p' i Φ' [(4.14)₁ i (4.14)₂], otrzymamy dla pierwszej perturbacji

$$(4.52) \quad Q' = \frac{1}{a} \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \exp \pi \operatorname{tg} \varphi \times \\ \times \left[\cos \varphi + (1 + \sin \varphi) \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right] (r_0 - r).$$

Poprzednio otrzymaliśmy ten sam wzór [por. (4.36)].



Rys. 4

Na rys. 4 przedstawiono wykresy stosunku średniej nośności granicznej \bar{g} do k dla kąta tarcia wewnętrznego $\varphi = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ w zależności od stosunku r_E/a . Nośność graniczna w zadaniu osiowo-symetrycznym zbliża się asymptotycznie wraz ze wzrostem stosunku r_E/a do prostej odpowiadającej nośności granicznej w zadaniu płaskim. Dla danego ustalonego stosunku r_E/a różnica między nośnościami granicznymi w zadaniu osiowo-symetrycznym i w zadaniu płaskim rośnie wraz ze wzrostem kąta φ .

Jeżeli na rys. 3 punkty E i A_2 pokryją się z punktem O , $a_2 = 0$, $a_1 = 2a = r_0$, to otrzymamy problem wciskania sztywnego gładkiego stempla w półprzestrzeń. Przyjmując, że rozwiązanie (4.3) – (4.5) i (4.20), (4.28), (4.33) jest poprawne, obliczono wartości średniej nośności granicznej \bar{g} i maksymalnego ciśnienia Q_0 w punkcie O dla wybranych wartości φ . W tabelicy 1 zestawiono wyniki obliczeń (rubryka II) a także dla porównania podano wartości, które na drodze rozwiązania numerycznego uzyskali Cox, EASON i HOPKINS [1] (rubryka I).

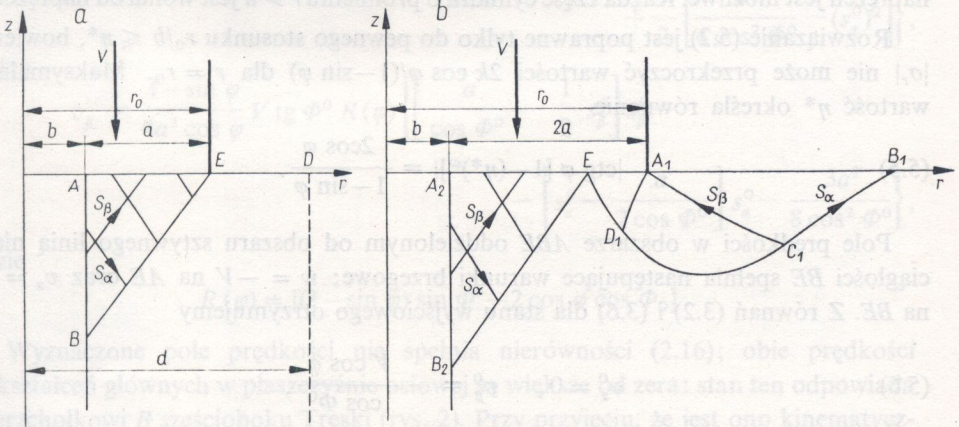
Otrzymana zgodność jest oczywiście przypadkowa. Z reguły rozwiązanie perturbacyjne nie jest ściśle w okolicy punktu O ; tym niemniej w tym przypadku daje dobre wartości przybliżonej nośności granicznej.

Tablica 1

φ	\bar{g}/k		Q_0/k	
	I	II	I	II
0°	5,69	5,81	7,1	7,1
5°	7,44	7,57	9,7	9,7
10°	9,98	10,3	14,	14,
15°	13,9	14,7	22,	22,
20°	20,1	21,8	34,	35,
25°	30,5	34,4	59,	62,
30°	49,3	58,2	110,	114,

5. Wciskanie sztywnego stempla w półprzestrzeń z cylindrycznym otworem

Schemat zadania przedstawia rys. 5. W półprzestrzeń $z \leq 0$ z cylindrycznym otworem o promieniu $r = b$ wciskany jest osiowo z prędkością V sztywny, gładki stempel o promieniu $r = r_0$ (zagadnienie dotyczy także wciskania sztywnego stempla w grubościenną rurę). Zadanie o tej treści dla ośrodka Treski rozpatrzono w pracy [11]; rozwiązania poszukiwano metodą graficzną.



Rys. 5

Rozważmy proste, statycznie dopuszczalne pole naprężeń (rys. 5a). Pobocznica cylindrycznego wydrążenia AB wolna od naprężeń, $\sigma_r = \tau_{rz} = 0$, określa stan naprężenia. Główne osie naprężeń pokrywają się z kierunkami r i z , składowe naprężenia

są funkcjami tylko r , a charakterystyki są liniami prostymi. Większym algebraicznie naprężeniem głównym jest σ_r . Warunek plastyczności daje

$$(5.1) \quad \sigma_\theta = \sigma_z = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_r - 2k \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}.$$

Równania równowagi (2.1) wobec (5.1) dają dla $b < r < r_0$

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \sigma_z = \sigma_\theta &= k \operatorname{ctg} \varphi \left[1 - \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \left(\frac{r}{b} \right)^\omega \right], \\ \sigma_r &= k \operatorname{ctg} \varphi \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^\omega \right], \quad \omega = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Dla $r > r_0$ pole naprężeń prowadzi do wzorów

$$(5.3) \quad \sigma_z = 0, \quad \sigma_r = \sigma_\theta \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - 2k \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi},$$

które razem z (2.1) dają wzory

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= k \operatorname{ctg} \varphi \left[1 - \frac{r_0^{s+\omega}}{b^\omega r^s} \right], \quad s = \frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}, \\ \sigma_\theta &= k \operatorname{ctg} \varphi \left[1 - \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{r_0^{s+\omega}}{b^\omega r^s} \right]. \end{aligned}$$

Dla $r = d = (r_0)^{1+q} (b)^{-q}$, gdzie $q = (1 + \sin \varphi)/(1 - \sin \varphi)$, mamy $\sigma_r = 0$; jest to minimalna wartość zewnętrznego promienia cylindra, dla której powyższe pole naprężeń jest możliwe. Każda część cylindra o promieniu $r > d$ jest wolna od naprężeń.

Rozwiązanie (5.2) jest poprawne tylko do pewnego stosunku $r_0/b \leq \eta^*$, bowiem $|\sigma_r|$ nie może przekroczyć wartości $2k \cos \varphi / (1 - \sin \varphi)$ dla $r = r_0$. Maksymalną wartość η^* określa równanie

$$(5.5) \quad |\operatorname{ctg} \varphi [1 - (\eta^*)^\omega]| = \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}.$$

Pole prędkości w obszarze ABE oddzielnym od obszaru sztywnego linią nieciągłości BE spełnia następujące warunki brzegowe: $w = -V$ na AE oraz $v_x = 0$ na BE . Z równań (3.2) i (3.6) dla stanu wyjściowego otrzymujemy

$$(5.6) \quad v_\alpha^0 = 0, \quad v_\beta^0 = -\frac{V \cos \varphi}{\cos \Phi^0},$$

gdzie $\Phi^0 = -(\pi/4 + \varphi/2)$ jest kątem nachylenia charakterystyki a^0 do osi r . Równania pierwszej perturbacji mają postać

$$(5.7) \quad \frac{dv'_\alpha}{ds_\alpha^0} + \frac{1 - \sin \varphi}{2a} V \operatorname{tg} \Phi^0 = 0, \quad \frac{\partial v'_\beta}{\partial s_\beta^0} + \frac{1 - \sin \varphi}{2a} V \operatorname{tg} \Phi^0 = 0,$$

skąd po scałkowaniu otrzymujemy

$$(5.8) \quad v'_\alpha = \frac{1 - \sin \varphi}{2a} V \operatorname{tg} \Phi^0 \left(\frac{a}{2 \cos \Phi^0} - s_\alpha^0 \right),$$

$$v'_\beta = \frac{1 - \sin \varphi}{2a} V \operatorname{tg} \Phi^0 \left\{ s_\alpha^0 - s_\beta^0 - \frac{\sin(\Phi^0 + \varphi)}{\cos \Phi^0} \left(\frac{a}{2 \cos \Phi^0} - s_\alpha^0 \right) \right\}.$$

Pomiędzy współrzędnymi zachodzą związki

$$(5.9) \quad s_\alpha^0 = \frac{r-b}{2 \cos \Phi^0} + \frac{z}{2 \sin \Phi^0}, \quad s_\beta^0 = \frac{r-b}{2 \cos \Phi^0} - \frac{z}{2 \sin \Phi^0}.$$

Dokładność rozwiązania zwiększamy rozpatrując drugie równania perturbacyjne

$$(5.10) \quad \frac{\partial v''_\alpha}{\partial s_\alpha^0} + WW = 0, \quad \frac{\partial v''_\beta}{\partial s_\beta^0} + WW = 0,$$

gdzie

$$WW = \frac{1 - \sin \varphi}{4a^2 \cos \varphi} V \operatorname{tg} \Phi^0 \left\{ 2 \cos \varphi [a - \cos \Phi^0 (s_\alpha^0 + s_\beta^0)] + \right. \\ \left. + (1 - \sin \varphi) \left[\left(\frac{a}{2 \cos \Phi^0} - s_\alpha^0 \right) \frac{\cos \varphi}{\cos \Phi^0} - (s_\alpha^0 - s_\beta^0) \sin \Phi^0 \right] \right\}.$$

Po scałkowaniu (5.10) i wykorzystaniu warunków brzegowych dla drugiej perturbacji otrzymujemy

$$(5.11) \quad v''_\alpha = \frac{1 - \sin \varphi}{4a^2 \cos \varphi} V \operatorname{tg} \Phi^0 R(\varphi) \left\{ \left[\frac{a}{2 \cos \Phi^0} - s_\alpha^0 \right] \left[s_\beta^0 - \frac{a}{\cos \Phi^0} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{a^2}{4 \cos^2 \Phi^0} - (s_\alpha^0)^2 \right] \right\},$$

$$v''_\beta = \frac{1 - \sin \varphi}{4a^2 \cos \varphi} V \operatorname{tg} \Phi^0 R(\varphi) \left\{ \left[\frac{a}{\cos \Phi^0} - \frac{1}{2} s_\beta^0 \right] s_\beta^0 - \right. \\ \left. - \left[s_\alpha^0 - \frac{a}{2 \cos \Phi^0} \right] s_\alpha^0 - \frac{3a^2}{8 \cos^2 \Phi^0} \right\},$$

gdzie

$$R(\varphi) = [(1 - \sin \varphi) \sin \Phi^0 - 2 \cos \varphi \cos \Phi^0].$$

Wyznaczone pole prędkości nie spełnia nierówności (2.16); obie prędkości odkształceń głównych w płaszczyźnie osiowej są większe od zera: stan ten odpowiada wierzchołkowi *B* sześcioboku Treski (rys. 2). Przy przyjęciu, że jest ono kinematycznie dopuszczalne, obliczona z niego nośność graniczna będzie oceną górną, a poprzednio zbudowane pole statyczne — dolną oceną nośności granicznej. Różnicę między górną i dolną oceną \bar{g}_k i \bar{g}_s średniej nośności granicznej można obliczyć ze wzoru

$$(5.12) \quad (\bar{g}_k - \bar{g}_s) \int V dA = \int (\sigma_{ij}^k - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^k dv,$$

gdzie σ_{ij}^k oznacza stan naprężenia, odpowiadający kinematycznie dopuszczalnemu stanowi prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_{ij}^k$, a σ_{ij}^s jest statycznie dopuszczalnym stanem naprężenia. Dla naroży sześcioboku Treski, odpowiadających polu prędkości i polu naprężeń, mamy [1]

$$(5.13) \quad \dot{\epsilon}_r^k + \dot{\epsilon}_z^k + N\dot{\epsilon}_\theta^k = 0, \quad \sigma_r^k = \sigma_z^k = \sigma_\theta^k/N + a_0, \quad \sigma_z^s = \sigma_\theta^s = (\sigma_r^s - a_0)N,$$

gdzie

$$N = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad a_0 = \frac{2k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}.$$

Prawą stronę (5.12), wykorzystując (5.13), przedstawiamy w postaci wygodnej do obliczeń:

$$(5.14) \quad \int (\sigma_{ij}^k - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^k dv = 2\pi \int_{ABE} [(\sigma_r^s - a_0)(1 - N)\dot{\epsilon}_z^k - a_0(N\dot{\epsilon}_\theta^k + \dot{\epsilon}_r^k)] r dr dz.$$

Obliczenia liczbowe przeprowadzono dla $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$. Na rys. 6 przedstawiono wykresy stosunków średniej nośności granicznej \bar{g} do $2k$ w zależności od stosunku $\bar{\eta} = r_0/b$ (krzywe na lewo od linii A i B). Krzywe przecinają oś pionową w punktach odpowiadających nośności w zadaniu płaskim. Ze wzrostem $\bar{\eta}$ jak również kąta φ nośność graniczna wzrasta; rośnie także różnica między górną i dolną oceną. Jest ona dość znaczna, dochodzi do 38%.

Dla stosunków r_0/b większych od tych, które wynikają z zależności (5.5), jako możliwy może być rozważany mechanizm graniczny przedstawiony schematycznie na rys. 5b. W obszarze $A_2 B_2 E$ (podobnie jak w ABE na rys. 5a) prędkość promieniowa skierowana jest do osi z , $u < 0$, w obszarze $A_1 B_1 C_1 D_1 E$ mamy $u > 0$. Rozwiązanie zadania można otrzymać na drodze połączenia dwóch rozwiązań dla poprzednio rozpatrzonych problemów (rys. 3 i rys. 5a). Obciążenie graniczne wynosi:

na $A_2 E$

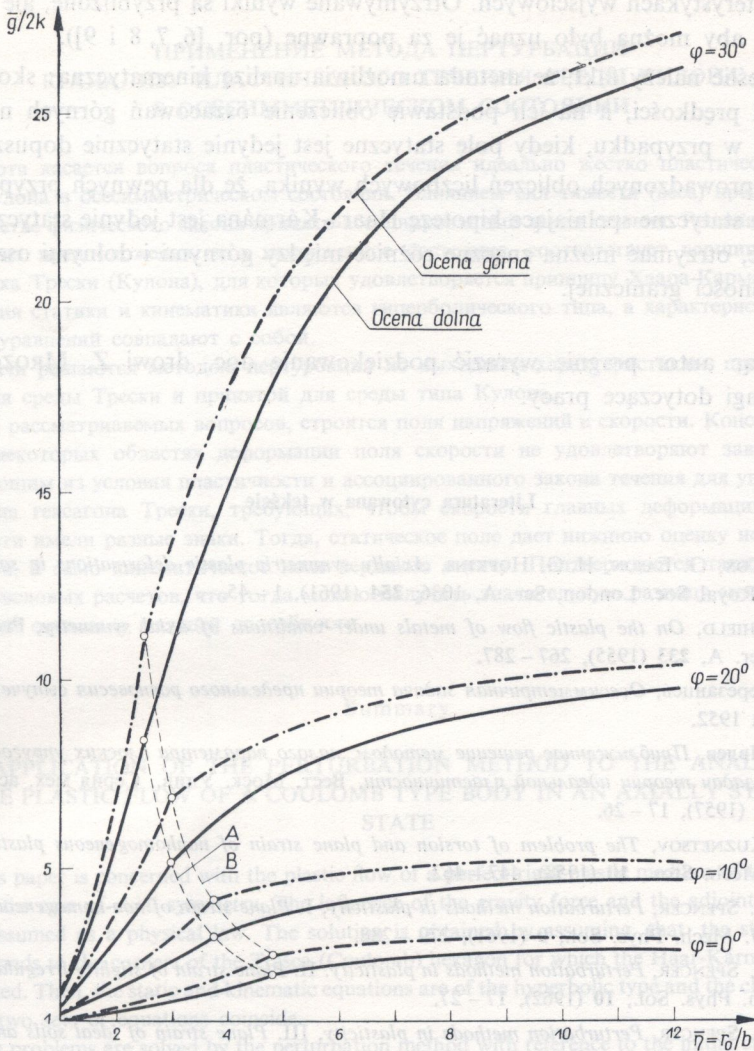
$$(5.15) \quad Q_1 = k \operatorname{ctg} \varphi \left[\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \left(\frac{r}{b} \right)^\omega - 1 \right], \quad \omega = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi};$$

na $A_1 E$

$$(5.16) \quad Q_2 = k \operatorname{ctg} \varphi \left[\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) - 1 \right] + \\ + \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) \left[\cos \varphi + (1 + \sin \varphi) \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \left(1 - \frac{r}{r_0} \right).$$

Położenie punktu E wyznaczamy z warunku ciągłości σ_r i σ_z , natomiast σ_θ będzie w tym punkcie nieciągłe. Linia nieciągłości σ_θ zjawi się także w sztywnym obszarze, kiedy pojawi się stan naprężenia na zewnątrz obszarów $A_1 B_1 C_1 D_1 E$ i $A_2 B_2 E$.

W obszarze $A_1 B_1 C_1 D_1 E$ dla pola statycznie dopuszczalnego można zbudować pole kinematycznie dopuszczalne (por. rozdz. 4), tak więc różnica między oceną górną i dolną obciążenia granicznego wynikać będzie z rozwiązania w obszarze $A_2 B_2 E$.



Rys. 6

Na rys. 6 przedstawiono wykresy stosunku średniej nośności granicznej \bar{g} do $2k$ w zależności od stosunku $\bar{\eta} = r_0/b$ (krzywe na prawo od linii A i B). Punkty na liniach A i B odpowiadają momentowi przejścia od mechanizmu z rys. 5a do mechanizmu z rys. 5b.

6. Wnioski

Rozpatrzony w pracy na przykładzie zadań problem początkowego plastycznego płynięcia osiowo-symetrycznego ośrodka typu Coulomba wskazuje na możliwość znalezienia rozwiązań pewnych klas zagadnień bez uciekania się do metody różnic skończonych za pomocą analitycznej metody aproksymacyjnej, metody perturbacji

na charakterystykach wyjściowych. Otrzymywane wyniki są przybliżone, ale na tyle dokładne, aby można było uznać je za poprawne (por. [6, 7, 8 i 9]).

Podkreślić należy fakt, że metoda umożliwia analizę kinematyczną: skonstruowanie pól prędkości, a na ich podstawie obliczenie oszacowań górnych nośności granicznej w przypadku, kiedy pole statyczne jest jedynie statycznie dopuszczalne.

Z przeprowadzonych obliczeń liczbowych wynika, że dla pewnych przypadków, kiedy pole statyczne spełniające hipotezę Haara-Kármána jest jedynie statycznie dopuszczalne, otrzymać można znaczne różnice między górnymi i dolnymi oszacowaniami nośności granicznej.

Kończąc autor pragnie wyrazić podziękowanie doc. drowi Z. MROZOWI za cenne uwagi dotyczące pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. A. D. COX, G. EASON, H. G. HOPKINS, *Axially symmetric plastic deformations in soils*, Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A, 1036, **254** (1961), 1 – 45.
2. R. T. SHIELD, *On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry*, Proc. Roy. Soc., Ser. A, **233** (1955), 267 – 287.
3. В. Г. Березанцев, *Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды*, Москва 1952.
4. Д. Д. Ивлев, *Приближенное решение методом малого параметра плоских упруго-пластических задач теории идеальной пластичности*, Вест. Моск. Унив., Серия мех. астр. физ. хим., **5** (1957), 17 – 26.
5. A. L. KUZNETSOV, *The problem of torsion and plane strain of nonhomogeneous plastic solids*, Arch. Mech. Stos., **10** (1958), 447 – 462.
6. A. J. M. SPENCER, *Perturbation methods in plasticity, I. Plane strain of non-homogeneous plastic solids*, J. Mech. Phys. Sol., **9** (1961), 279 – 288.
7. A. J. M. SPENCER, *Perturbation methods in plasticity. II. Plane strain of slightly irregular bodies*, J. Mech. Phys. Sol., **10** (1962), 17 – 27.
8. A. J. M. SPENCER, *Perturbation methods in plasticity, III. Plane strain of ideal soils and plastic solids with body forces*, J. Mech. Phys. Sol., **10** (1962), 165 – 178.
9. A. J. M. SPENCER, *The approximate solution of certain problems of axially-symmetric plastic flow*, J. Mech. Phys. Sol., **12** (1964), 231 – 244.
10. O. RICHMOND, H. L. MORRISON, *Application of a perturbation technique based on the method of characteristics to axisymmetric plasticity*, J. Appl. Mech., **38** (1968).
11. Z. MRÓZ, *Graphical solution of axially symmetric problems of plastic flow*, J. Appl. Mat. Phys. (ZAMP), **18** (1967), 219 – 236.
12. Z. MRÓZ, K. KWASZCZYŃSKA, *Axially symmetric plastic flow of soils treated by the graphical method*, Arch. Inżyn. Łądow., **14** (1968), 27 – 37.
13. K. KWASZCZYŃSKA, Z. MRÓZ, A. DRESCHER, *Analysis of compression of short cylinders of Coulomb material*, Int. J. Mech. Sci. Perg. Press, **11** (1969), 145 – 158.
14. R. T. SHIELD, *Mixed boundary value problems in soil mechanics*, Quart. Appl. Mat., **11** (1953), 61 – 75.
15. Praca zbiorowa pod redakcją Z. ORSZAKA, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПЕРТУРБАЦИИ
 К АНАЛИЗУ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ СРЕДЫ КУЛОНА
 В ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Работа касается вопроса пластического течения идеально жестко пластической среды типа Кулона в осесимметрическом состоянии. Влиянием сил тяжести (веса) пренебрегается и в качестве физического закона принято ассоциированный закон течения. Решение получено исходя из предположения, что напряженное состояние, соответствует вершинам шестиугольника Трески (Кулона), для которых удовлетворяется принципу Хаара-Кармана. Тогда, уравнения статики и кинематики являются гиперболического типа, а характеристики обеих систем уравнений совпадают с собой.

Задачи решаются методом пертурбации по выходным характеристикам, предложенной в [9] для среды Трески и принятой для среды типа Кулона.

Для рассматриваемых вопросов, строятся поля напряжений и скорости. Констатируется, что в некоторых областях деформации поля скорости не удовлетворяют зависимостям, вытекающим из условия пластичности и ассоциированного закона течения для углов Хаара-Кармана гексагона Трески, требующих, чтобы скорости главных деформаций в осевой плоскости имели разные знаки. Тогда, статическое поле дает нижнюю оценку несущей способности, а само кинематическое поле верхнюю оценку. Подтверждается также, на основании числовых расчетов, что тогда можно получить значительную разницу между верхней и нижней оценками несущей способности.

Summary

APPLICATION OF THE PERTURBATION METHOD TO THE ANALYSIS
 OF THE PLASTIC FLOW OF A COULOMB TYPE BODY IN AN AXIALLY SYMMETRIC
 STATE

This paper is concerned with the plastic flow of a perfect rigid-plastic medium of the Coulomb type in the case of axial symmetry. The influence of the gravity force and the adjoint law of flow being assumed as a physical law. The solution is obtained by assuming that the state of stress corresponds to the corners of the Tresca (Coulomb) hexagon for which the Haar-Kármán principle is satisfied. Then, the static and kinematic equations are of the hyperbolic type and the characteristics of the two sets of equations coincide.

The problems are solved by the perturbation method with reference to the initial characteristics as proposed in Ref. 9 for a Tresca body and adopted for a body of the Coulomb type.

The fields of stress and velocity are obtained for the problems under consideration. It is found that in some strain regions the field of velocity does not satisfy the relations resulting from the yield condition and the associate law of flow for the Haar-Kármán corners of the Tresca hexagon, and requiring that the principal strain rates have different signs in an axial plane. Then, the static field gives a lower estimate of the limit load and the kinematic field an upper one. It is also found by numerical computation that the difference between the two estimates of the limit load may be considerable.

INSTYTUT GEOTECHNIKI
 POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 czerwca 1969 r.

