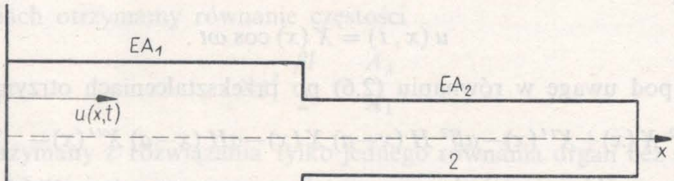
ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, **18** (1970)

DRGANIA PRĘTÓW O NIECIĄGŁYCH WŁASNOŚCIACH

CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

1. Analizując drgania prętów o nieciągłych własnościach takich jak skokowo zmienny przekrój, masa lub sztywność punktowa stosuje się na ogół [1 i 2] metodę podziału pręta na odcinki, w których wspomniane wyżej parametry zmieniają się w sposób ciągły. Następnie po rozwiązaniu równania drgań dla każdego z odcinków oblicza się niewiadome parametry w funkcjach rozwiązujących, wykorzystując w tym celu warunki ciągłości (przemieszczeń, sił itp.) na stykach sąsiednich odcinków pręta. Procedura ta jest bardzo uciążliwa zwłaszcza przy jednoczesnym występowaniu wielu nieciągłości. Okazuje się, że stosując równania różniczkowe typu dystrybucyjnego można otrzymać funkcję rozwiązującą poprawną dla całego pręta, nie korzystając przy tym z warunków ciągłości. W pracy dla prostoty rozpatrzono drgania swobodne podłużne, co jednak nie zwęża ogólności proponowanej metody.

2. Weźmy pod uwagę pręt drgający podłużnie o skokowo zmiennym przekroju tak jak to pokazano na rys. 1.



Rys. 1

W przypadku ogólnym równanie drgań podłużnych ma postać

$$\mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial N}{\partial x}=0\,,\qquad u=u(x,t)\,,\qquad N=N(x,t)\,, \tag{2.1}$$

gdzie $\mu(x)$ oznacza masę na jednostkę długości, $u(x,t)$ przemieszczenie, a $N(x,t)$ siłę podłużną w przekroju x pręta. W rozważanym przypadku zmienny przekrój pręta jako funkcję współrzędnej x można wyrazić w postaci

$$A(x)=A_1-A_0\,H(x-a)\,,\qquad A_0=A_1-A_2\,,\qquad H(x-a)=\begin{cases}0\,, & x\leqslant a\\ 1\,, & x>a\end{cases}. \tag{2.2}$$

W związku z tym intensywność masy i siła podłużna będą miały postać:

$$\mu(x) = \rho A(x) = \rho\,[A_1 - A_0 H(x-a)],$$

(2.3)
$$N(x,t) = EA(x)\frac{\partial u}{\partial x} = E[A_1 - A_0 H(x-a)]\frac{\partial u}{\partial x},$$

gdzie ρ jest gęstością masy, a E modułem Younga.

Wstawiając wielkości (2.3) do równania wyjściowego (2.1) mamy

(2.4)
$$\rho\,[A_1 - A_0 H(x-a)]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E\frac{\partial}{\partial x}\left\{[A_1 - A_0 H(x-a)]\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = 0.$$

Wykonując przewidziane różniczkowanie w (2.4) skorzystamy ze wzoru na pochodną dystrybucji, mianowicie [3]

(2.5)
$$\frac{d}{dz}[f(z)H(z-a)] = f'(z)H(z-a) + f(a)\,\delta(z-a).$$

Wobec powyższego równanie (2.4) przyjmie postać

(2.6)
$$\rho\,[A_1 - A_0 H(x-a)]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EA_0 H(x-a)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EA_0\,\delta(x-a)\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=a} = 0.$$

Załóżmy obecnie, że pręt wykonuje drgania harmoniczne o częstości ω, opisane zależnością

(2.7)
$$u(x,t) = X(x)\cos\omega t.$$

Biorąc to pod uwagę w równaniu (2.6) po przekształceniach otrzymamy

(2.8)
$$\beta^2 X(x) + X''(x) - a\beta^2 H(x-a)X(x) - aH(x-a)X''(x) - aX'(a)\,\delta(x-a) = 0,$$

$$\beta^2 = \frac{\rho\omega^2}{E}, \quad a = \frac{A_0}{A_1}.$$

Otrzymane równanie rozwiążemy stosując rachunek operatorów Laplace'a, przedtem jednak zauważmy, że transformata trzeciego i czwartego wyrazu (2.8) da się przedstawić w postaci

(2.9)
$$\mathcal{L}[\beta^2 H(x-a)X(x) + H(x-a)X''(x)] = \beta^2\int_a^\infty e^{-sx}X(x)\,dx + \int_a^\infty e^{-sx}X''(x)\,dx = \beta^2\int_a^\infty e^{-sx}X(x)\,dx - \beta^2\int_a^\infty e^{-sx}X(x)\,dx = 0,$$

gdzie w drugiej całce (2.9) przyjęto założenie, że funkcja $X(x)$ spełnia równanie funkcji własnych $X''(x) = -\beta^2 X(x)$.

Przy uwzględnieniu ostatniego rezultatu transformata poszukiwanej funkcji otrzymana z (2.8) wyniesie

$$X(s)=\frac{sX(0)+X'(0)+aX'(a)\,e^{-sa}}{s^2+\beta^2}. \tag{2.10}$$

Po odwróceniu (2.10) funkcja własna $X(x)$ i jej pochodna wyrażą się wzorami

$$\begin{aligned} X(x) &= X(0)\cos\beta x+\frac{X'(0)}{\beta}\sin\beta x+\frac{aX'(a)}{\beta}\sin\beta(x-a)\,H(x-a), \\ X'(x) &= -X(0)\,\beta\sin\beta x+X'(0)\cos\beta x+aX'(a)\cos\beta(x-a)H(x-a). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Niewiadomą wielkość $X'(a)$ obliczymy z drugiej równości (2.11). Wstawiając $X'(a)=[X'(x)]_{x=a+}$, $[H(x-a)]_{x=a+}=1$) mamy

$$X'(a)=\frac{X'(0)\cos\beta a-\beta X(0)\sin\beta a}{1-a}=\frac{A_1}{A_2}[X'(0)\cos\beta a-X(0)\beta\sin\beta a]. \tag{2.12}$$

Wobec tego funkcja własna pręta o skokowo zmiennym przekroju wyrazi się w postaci:

$$\begin{aligned} X(x) = X(0)\cos\beta x+\frac{X'(0)}{\beta}\sin\beta x+\frac{A_0}{\beta A_2}[X'(0)\cos\beta a- \\ -X(0)\beta\sin\beta a]\sin\beta(x-a)/H(x-a) \end{aligned} \tag{2.13}$$

W celu sprawdzenia poprawności rezultatu (2.13) określmy wartości własne pręta zamocowanego przy $x=0$, swobodnego dla $x=l$ i o skokowej zmianie przekroju przy $a=l/2$. Uwzględniając założone warunki brzegowe $X(0)=X'(l)=0$ po przekształceniach otrzymamy równanie częstości

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\beta l}{2}=\frac{A_2}{A_1}. \tag{2.14}$$

Wynik ten otrzymany z rozwiązania tylko jednego równania drgań bez stosowania warunków ciągłości jest poprawny, co łatwo sprawdzić np. w [4].

3. Z kolei rozpatrzmy pręt jednorodny z masą skupioną M usytuowaną przy $x=a$. W przypadku tym intensywność masy $\mu(x)$ i siłę podłużną $N(x,t)$ można wyrazić w postaci

$$\mu(x)=\rho A+M\delta(x-a),\quad A=\text{const},\quad N(x,t)=EA\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3.1}$$

Wstawiając funkcje (3.1) do równania drgań (2.1) mamy

$$[\rho A+M\delta(x-a)]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{3.2}$$

Zakładając, że pręt drga ruchem harmonicznym wg zależności (2.7) i wprowadzając oznaczenia (2.8) otrzymamy równanie na wyznaczenie funkcji własnych:

$$X''(x)+\beta^2X(x)+\frac{M\beta^2}{\rho A}X(x)\,\delta(x-a)=0. \tag{3.3}$$

Otrzymana stąd transformata poszukiwanej funkcji wyniesie

$$(3.4)\qquad X(s) = \frac{sX(0)+X'(0)-\dfrac{M\beta^2}{\rho A}X(a)e^{-sa}}{s^2+\beta^2},$$

a po odwróceniu znajdziemy

$$(3.5)\qquad X(x) = X(0)\cos\beta x + \frac{X'(0)}{\beta}\sin\beta x - \frac{M\beta}{\rho A}X(a)\sin\beta(x-a)H(x-a).$$

Niewiadome przemieszczenie masy $X(a)$ obliczymy podstawiając do ostatniej zależności $X(a) = [X(x)]_{x=a+}$. Po obliczeniach funkcja własna pręta z masą skupioną przy $x = a$ przyjmie ostatecznie postać

$$(3.6)\qquad X(x) = X(0)\cos\beta x + \frac{X'(0)}{\beta}\sin\beta x - \frac{M\beta}{\rho A}\left[X(0)\cos\beta a + \frac{X'(0)}{\beta}\sin\beta a\right]\sin\beta(x-a)H(x-a).$$

Poprawność otrzymanego rezultatu sprawdzimy obliczając równanie częstości pręta zamocowanego przy $x = 0$ i swobodnego dla $x = l$ z masą skupioną M w połowie długości $a = l/2$. Biorąc pod uwagę przyjęte warunki brzegowe $X(0) = X'(l) = 0$ po przeliczeniach otrzymujemy

$$(3.7)\qquad \operatorname{ctg}\beta l = \frac{\beta M}{2\rho A}.$$

Otrzymane równanie częstości jest poprawne, o czym łatwo się przekonać porównując je np. z pracą [1]. W przypadku umieszczenia masy skupionej na początku lub końcu pręta warunek brzegowy w tym miejscu należy wziąć np. w postaci $X'(l+) = 0$, tak aby masa skupiona należała do pręta. Jeśli np. $X(0) = X'(l+) = 0$, $a = l$, to równanie częstości ma postać

$$(3.8)\qquad \operatorname{ctg}\beta l = \frac{\beta M}{\rho A}.$$

Jak łatwo sprawdzić jest ono również poprawne, co świadczy o poprawności zaproponowanego sposobu uwzględnienia mas skupionych.

4. Weźmy obecnie pod uwagę punktową zmianę szytwności w jednorodnym pręcie tak, jak na rys. 2.

Intensywność masy i siłę podłużną w pręcie można przedstawić tu w postaci:

$$(4.1)\qquad \mu(x) = \rho A, \quad N(x,t) = EA\frac{\partial u}{\partial x} + ku(a,t)H(a-x).$$

W związku z tym równanie drgań (2.1) będzie

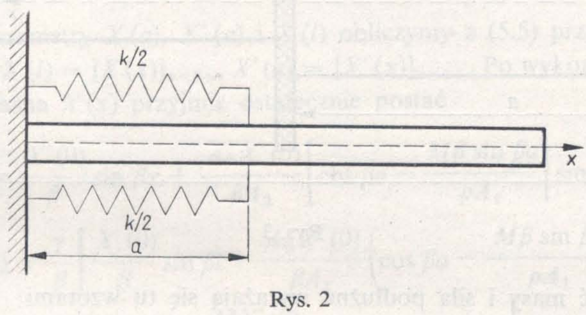
$$(4.2)\qquad \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[EA\frac{\partial u}{x\partial} + ku(a,t)H(a-x)\right] = 0.$$

Wykonując przewidziane różniczkowanie otrzymamy

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku(a,t)\,\delta(x-a) = 0. \tag{4.3}$$

Zakładając ruch harmoniczny opisany zależnością (2.7) po przekształceniach będziemy mieli

$$X''(x)+\beta^2 X(x) - \gamma X(a)\,\delta(x-a) = 0, \qquad \beta^2 = \frac{\rho\omega^2}{E}, \quad \gamma = \frac{k}{EA}. \tag{4.4}$$



Rys. 2

Obliczona stąd transformata poszukiwanej funkcji własnej ma postać

$$X(s) = \frac{sX(0)+X'(0)+\gamma X(a)\,e^{-sa}}{s^2+\beta^2}, \tag{4.5}$$

po odwróceniu zaś otrzymamy

$$X(x) = X(0)\cos\beta x + \frac{X'(0)}{\beta}\sin\beta x + \frac{\gamma}{\beta} X(a)\sin\beta(x-a)\,H(x-a). \tag{4.6}$$

Niewiadome przemieszczenie punktu zaczepienia sztywności k znajdziemy podstawiając do (4.6) $X(a) = [X(x)]_{x=a+}$. Po pewnych przekształceniach otrzymamy funkcję własną pręta z dodatkową sprężyną zaczepioną w punkcie $x = a$:

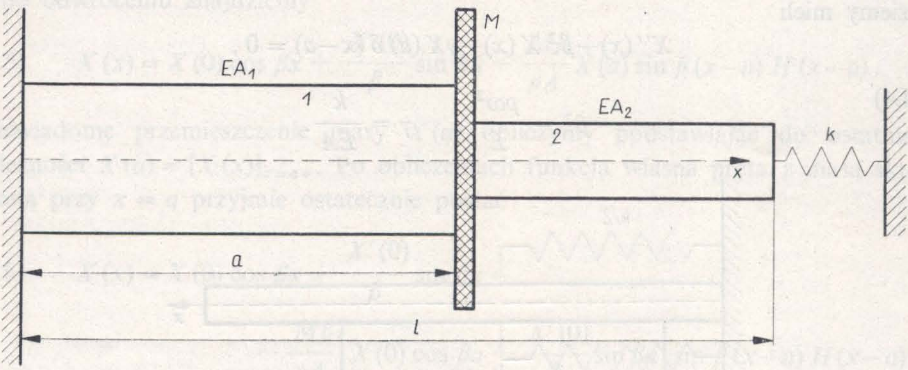
$$X(x) = X(0)\cos\beta x + \frac{X'(0)}{\beta}\sin\beta x + \frac{\gamma}{\beta}\left[X(0)\cos\beta a + \frac{X'(0)}{\beta}\sin\beta a\right]\sin\beta(x-a)\,H(x-a). \tag{4.7}$$

W celu sprawdzenia otrzymanego rezultatu obliczmy równanie częstości pręta zamocowanego przy $x = 0$ ze sprężyną na końcu $x = l$. Warunki brzegowe pręta mają tu postać: $X(0) = X'(l+) = 0$, $a = l$. Uwzględniając je po przeliczeniach otrzymamy równanie częstości

$$\operatorname{ctg}\beta l = -\frac{\gamma}{\beta} \tag{4.8}$$

zgodne z wynikiem uzyskanym innymi metodami [2 i 4].

5. Jako ilustrację ogólną przedstawionej metody weźmy pod uwagę przypadek jednoczesnego występowania omówionych nieciągłości. Rozważmy pręt zamocowany przy $x = 0$ ze sprężyną o sztywności k na końcu $x = l$. Niech skokowa zmiana przekroju ma miejsce przy $x = a$, gdzie również umieszczona jest masa skupiona M tak jak na rys. 3.



Rys. 3

Intensywność masy i siła podłużna wyrażają się tu wzorami

$$\mu(x) = \rho\,[A_1 - A_0\,H(x-a)] + M\delta(x-a), \qquad A_0 = A_1 - A_2,$$

(5.1)

$$N(x,t) = E\,[A_1 - A_0\,H(x-a)]\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + ku(l,t)\,H(l-x).$$

Stąd na podstawie (2.1) równanie drgań rozważanego pręta będzie mieć postać

$$\{\rho\,[A_1 - A_0\,H(x-a)] + M\delta(x-a)\}\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \tag{5.2}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{E\,[A_1 - A_0\,H(x-a)]\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + ku(l,t)\,H(l-x)\right\} = 0.$$

Zakładając, że drgania pręta opisane są funkcją $u(x, t) = X(x)\cos\omega t$ i wykonując przewidziane operacje, z równania (5.2) otrzymamy

$$X''(x) + \beta^2 X(x) - \alpha\,[\beta^2 H(x-a)\,X(x) + H(x-a)\,X''(x)] + \tag{5.3}$$

$$+\frac{M\beta^2}{\rho A_1}\,\delta(x-a)\,X(x) - \alpha\,X'(a)\,\delta(x-a) - \gamma X(l)\,\delta(x-l) = 0.$$

Pamiętając, że na podstawie (2.9) transformata wyrażenia w nawiasie kwadratowym jest zerem i biorąc pod uwagę warunek brzegowy $X(0) = 0$, otrzymamy transformatę poszukiwanej funkcji

$$X(s) = \frac{X'(0) + \alpha X'(a)\,e^{-sa} + \gamma X(l)\,e^{-sl} - \dfrac{M\beta^2}{\rho A_1}\,X(a)\,e^{-sa}}{s^2 + \beta^2}. \tag{5.4}$$

Wobec tego funkcja własna i jej pochodna wyrażą się wzorami

$$
(5.5)\quad
\begin{aligned}
X(x) &= \frac{X'(0)}{\beta}\sin\beta x + \frac{a}{\beta}X'(a)\sin\beta(x-a)\,H(x-a) + \\
&\quad + \frac{\gamma}{\beta}X(l)\sin\beta(x-l)\,H(x-l) - \frac{M\beta}{\rho A_1}\sin\beta(x-a)\,H(x-a),\\
X'(x) &= X'(0)\cos\beta x + a\,X'(a)\cos\beta(x-a)\,H(x-a) + \\
&\quad + \gamma X(l)\cos\beta(x-l)\,H(x-l) - \frac{M\beta^2}{\rho A_1}X(a)\cos\beta(x-a)\,H(x-a).
\end{aligned}
$$

Niewiadome parametry $X(a)$, $X'(a)$ i $X(l)$ obliczymy z (5.5) przyjmując $X(a) = [X(x)]_{x=a+}$, $X(l) = [X(x)]_{x=l+}$, $X'(a) = [X'(x)]_{x=a+}$. Po wykonaniu przekształceń funkcja własna $X(x)$ przyjmie ostatecznie postać

$$
(5.6)\quad
\begin{aligned}
X(x) &= \frac{X'(0)}{\beta}\sin\beta x + \frac{A_0 X'(0)}{\beta A_2}\left[\cos\beta a - \frac{M\beta\sin\beta a}{\rho A_1}\right]\sin\beta(x-a)\times\\
&\times H(x-a) + \frac{\gamma}{\beta}\left[\frac{X'(0)}{\beta}\sin\beta l + \frac{A_0 X'(0)}{\beta A_2}\left(\cos\beta a - \frac{M\beta\sin\beta a}{\rho A_1}\right)\sin\beta(l-a) -\right.\\
&\left. - \frac{MX'(0)}{\rho A_1}\sin\beta a\sin\beta(l-a)\right]\sin\beta(x-l)\,H(x-l) - \\
&\qquad - \frac{MX'(0)}{\rho A_1}\sin\beta a\sin\beta(x-a)\,H(x-a).
\end{aligned}
$$

Jak już zauważyliśmy poprzednio, dla końca pręta ze sprężyną poprawny jest warunek brzegowy $X'(l+) = 0$. Uwzględniając to i przyjmując $a = l/2$ po przekształceniach otrzymamy równanie częstości dla rozważanego pręta w postaci

$$
(5.7)\quad \operatorname{ctg}^2\frac{\beta l}{2} + \frac{\gamma}{\beta}\left[\frac{A_1+A_2}{A_1}\operatorname{ctg}\frac{\beta l}{2} - \frac{M\beta}{\rho A_1}\right] - \frac{M\beta}{\rho A_1} = \frac{A_2}{A_1}.
$$

Łatwo sprawdzić, że przy zerowaniu się masy i sztywności ($M = 0$, $\gamma = 0$) otrzymamy równanie częstości pręta o skokowo zmiennym przekroju (2.14), a dla $M = 0$, $A_1 = A_2$ i $A_0 = 0$ równanie częstości pręta jednorodnego ze sprężyną k na końcu $x = l$ (4.8) oraz dla $\gamma = 0$, $A_0 = 0$ i $A_1 = A_2$ równanie częstości pręta z masą M na środku ((3.7), [1]).

6. Z rozważań przeprowadzonych wyżej wynika, że opisując intensywność masy $\mu(x)$ i siłę podłużną $N(x, t)$ w pręcie za pomocą dystrybucji, możliwe jest ułożenie jednego równania drgań dla pręta o dowolnej kombinacji nieciągłości. Funkcja własna, będąca rozwiązaniem tego równania, opisuje drgania całego pręta, a występujące w niej niewiadome parametry można określić bez stosowania warunków ciągłości. Warto podkreślić, że zaproponowana metoda poprawna jest nie tylko dla drgań swobodnych podłużnych, lecz również w przypadku drgań wymuszonych, a także po pewnych uzupełnieniach można ją zastosować do drgań poprzecznych prętów o nieciągłych własnościach.

Literatura cytowana w tekście

1. R. Solecki, J. Szymkiewicz, *Układy prętowe i powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1964.
2. S. Kaliski, *Drgania i fale*, praca zbiorowa, Bibl. Mech. Stosow., Warszawa 1966.
3. M. J. Lighthill, *Wstęp do analizy Fouriera i teorii dystrybucji*, Małe Monografie, PWN, Matematyka, Warszawa 1963.
4. *Прочность, устойчивость, колебания*, **3**, Справочник, Изд. Машиностроение, Москва 1968.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ С ПРЕРЫВНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В работе, обсуждается вопрос продольных свободных колебаний стержня с переменным сечением, жесткостью или массой описанной с помощью дифференциального уравнения с обобщенными функциями (теория обобщенных функций). Благодаря применению символики и операции на обобщенных функциях, удалось представить решение в некотором компактном виде. Такой подход к вопросу значительно упрощает и унифицирует исследования колебаний, рассматриваемых стержней. Представленный метод, иллюстрируется рядом примеров.

Summary

VIBRATIONS OF THE RODS WITH DISCONTINUOUS PROPERTIES

In this paper are solved the vibrations of the rods with step variable sections, concentrated mass and elasticity. Writing the motion of the rod by means of a distributive differential equation, eigenfunctions correct as to total lengths of the rod was obtained. Examples of the frequency equations so calculated are identical with the same obtained by application of continuity conditions.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 czerwca 1969 r.