

O ZANIKANIU DRGAŃ SWOBODNYCH W PEWNYM UKŁADZIE MECHANICZNYM Z NIELINIOWĄ WIBROIZOLACJĄ

WŁADYSŁAW ŁAŃCZAK (POZNAŃ)

1. Wprowadzenie

W zagadnieniach dynamicznych obiektów budowlanych, podlegających działaniu sił dynamicznych w postaci impulsów, w wielu przypadkach nie udaje się wywołać szybkiego zanikania drgań swobodnych przy zastosowaniu wibroizolacji o liniowych charakterystykach sprężystości i tłumienia [3]. W przypadku gdy zwiększamy częstość impulsów, w obiektach tych powstaje zjawisko zwane rezonansem udarowym. Powstawanie zbyt dużych amplitud drgań powoduje przeciążenie wibroizolacji, co staje się przyczyną utraty przez wibroizolatory własności sprężystych. Zatem w takich obiektach ograniczenie amplitud drgań oraz spowodowanie szybkiego zanikania drgań jest istotnym problemem projektowania wibroizolacji.

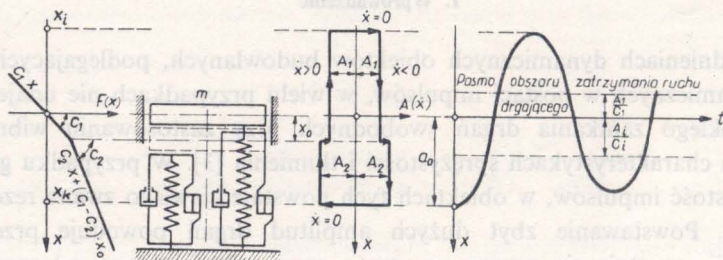
W wibroizolacji wykonanej z metalowych sprężyn śrubowych w czasie drgań występuje stosunkowo niewielka siła oporu ruchu, wywołana zjawiskiem histerezy sprężystej materiału sprężyn, powodująca tłumienie ruchu naprzemiennego. Tę siłę oporu ruchu możemy zwiększyć przez wprowadzenie do sprężyn śrubowych specjalnych elementów mających właściwości rozpraszania energii drgań. Jednym z prostych rodzajów tłumienia, które możemy wprowadzić do sprężyn, jest suche tarcie. Konstrukcja takiego typu wibroizolatora, który nazwano wibroizolatorem «Stała», została omówiona w pracy [5]. Suche tarcie w czasie drgań obiektu wywołuje w wibroizolatorze «Stała» siłę oporu ruchu w postaci nieliniowej funkcji zależnej od znaku prędkości. Wibroizolator ten możemy przedstawić modelem Kelvina z równoległe połączonym elementem Saint-Venanta.

W pracy niniejszej opiszemy wieloboczną zamkniętą pętlę histerezy funkcją zależną od x i \dot{x} w takiej szczególnej postaci, aby można było zmieniając parametry tej funkcji badać różne przypadki tłumienia ruchu drgającego w układzie przez suche tarcie. Poza tym przyjmujemy, że w pierwszym przybliżeniu suche tarcie podlega prawu Coulomba [2 i 6].

Według JORISZA [2] oraz MACDUFFA i CURERRIEGO [4] wibroizolatory wykonane z metalowych sprężyn śrubowych mają charakterystyki sprężyste typu sztywnego. Nieliniowość charakterystyki sprężystej w sprężynach śrubowych stwierdzono również w pracy [5]. Jeśli obiekt ustawimy na wibroizolacji, to w czasie ruchu drgającego pojawiają się w nim przemieszczenia, przy których w wibroizolacji występują naprężenia jednego znaku. Jest to przyczyną zjawiska, w którym charakterystyka

sprężysta typu sztywnego staje się nieliniową charakterystyką sprężystą w postaci niesymetrycznej. Do badań drgań charakterystykę tę przyjmiemy w pierwszym przybliżeniu w postaci linii łamanej. Przez dobór odpowiednich parametrów układu możemy otrzymać w szczególnych przypadkach charakterystykę liniową. Takie ujęcie zagadnienia ułatwi nam badanie wpływu niesymetrycznej charakterystyki na przebieg ruchu drgającego przy istnieniu w układzie tych samych własności tłumiących. Omówiony powyżej układ przedstawiony na rys. 1 stanowi typowy przykład fundamentu młota kuźniczego.

W pracy niniejszej zajmiemy się badaniem wpływu nieliniowych charakterystyk sprężystości i tłumienia na zanikanie drgań swobodnych układu przedstawionego na rys. 1, wywołanych pojedynczymi impulsami.



Rys. 1

Ogólne równanie różniczkowe drgań układu autonomicznego o jednym stopniu swobody ma postać

$$(1.1) \quad m\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = 0.$$

Dla układu drgającego przedstawionego na rys. 1 równanie (1.1) możemy sprowadzić do postaci

$$(1.2) \quad m\ddot{x} + C_2 \dot{x} = \varepsilon f(x, \dot{x}),$$

przy czym zakładamy, że prawa część (1.2) zawiera małe nieliniowe wyrazy charakteryzujące suche tarcie i reakcję sprężystą.

Analityczna postać wyrażenia $\varepsilon f(x, \dot{x})$ jest następująca:

$$(1.3) \quad \varepsilon f(x, \dot{x}) = \begin{cases} -(C_1 - C_2)x - k_1 \dot{x} - A_1 \operatorname{sign} \dot{x} & \text{dla } x \in < -x_i, x_0 \geq, \\ -(C_1 - C_2)x_0 - k_2 \dot{x} - A_2 \operatorname{sign} \dot{x} & \text{dla } x \in < x_0, x_k \geq, \end{cases}$$

przy czym C_1 i C_2 charakteryzują sprężystość wibroizolacji, k_1 i k_2 są współczynnikami oporu liniowego, A_1 i A_2 siłami tarcia, a ε jest parametrem, którego wartość liczbową jest mała.

2. Równanie obwiedni amplitud drgań

Dla rozwiązania równania (1.2) zastosujemy metodę asymptotyczną podaną przez Kryłowa i Bogolubowa [1] ograniczając się do przybliżenia pierwszego.

Zatem rozwiązanie równania (1.2) w przybliżeniu pierwszym możemy przedstawić w postaci układu

$$(2.1) \quad \begin{cases} x = a \cos \psi, \\ \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi a_2 m} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a a_2 \sin \psi) \cos \psi d\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} = a_e(a), \end{cases}$$

przy czym

$$a_2^2 = \frac{C_2}{m},$$

$$a_e^2(a) = a_2^2 - \frac{\varepsilon}{\pi m a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a a_2 \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

We wzorach powyższych a oznacza amplitudę, ψ fazę, $a_e(a)$ równoważną prędkość kątową ruchu drgającego, a_2 stałą większą od zera.

Oznaczmy przez ψ_0 najmniejszy pierwiastek równania (2.1)₁:

$$(2.2) \quad x_0 = a \cos \psi_0.$$

Po obliczeniu całek występujących w równaniach (2.1)₂ i (2.1)₃ przybiorą one postać

$$(2.3) \quad \frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\pi m a_2} \left\{ 2 \left[(A_1 + A_2) + (A_1 - A_2) \frac{x_0}{a} \right] + \right. \\ \left. + a a_2 \left[k_1 \pi + (k_2 - k_1) \left(\arccos \frac{x_0}{a} - \frac{x_0}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a} \right)^2} \right) \right] \right\},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = a_2 \sqrt{\beta + \frac{1}{\pi} (\beta - 1) \left[\frac{x_0}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a} \right)^2} - \arccos \frac{x_0}{a} \right]},$$

przy czym

$$\beta = \frac{C_1}{C_2}.$$

Przyjmując w równaniu (2.3)₁ $k_1 = k_2 \neq 0$ otrzymamy

$$(2.4) \quad \frac{a da}{\frac{k_1}{2m} a^2 + \frac{(A_1 + A_2)}{\pi m a_2} a + \frac{(A_1 - A_2) x_0}{\pi m a_2}} = -dt.$$

Dla $A_1 = 0$ lub $A_1 = A_2$ równanie (2.4) da się sprowadzić do postaci

$$(2.5) \quad \frac{\pi k_1 a_2 a^2 + 2(A_1 + A_2) a + 2(A_1 + A_2) x_0}{\sqrt{\frac{E^{\pm}}{\left[\pi k_1 a_2 a + (A_1 + A_2) - \sqrt{E} \right]^{(A_1 + A_2)}} \left[\pi k_1 a_2 a + (A_1 + A_2) + \sqrt{E} \right]}} = 2\pi m a_2 C \exp\left(-\frac{k_1}{2m} t\right),$$

przy czym C jest stałą dowolną oraz

$$E = (A_1 + A_2)^2 - 2\pi k_1 a_2 x_0 (A_1 - A_2).$$

Dla obliczenia stałej C przyjmujemy następujący warunek początkowy ruchu drgającego:

$$(2.6) \quad \text{dla } t = 0, \quad a(t) = a_0.$$

Rozpatrzmy układ, w którym $x_0 = 0$; zatem dla $x_0 = 0$ i po wykorzystaniu (2.6) otrzymamy wzór określający zmienność amplitudy w postaci

$$(2.7) \quad a(t) = \frac{1}{\pi k_1 a_2} \left\{ -2(A_1 + A_2) + [\pi k_1 a_2 a_0 + 2(A_1 + A_2)] \exp\left(-\frac{k_1}{2m} t\right) \right\}.$$

Dla $k_1 = k_2 = 0$ wzór określający zmienność amplitudy drgań ma postać

$$(2.8) \quad a(t) = a_0 - \frac{(A_1 + A_2)t}{\pi m a_2}.$$

3. Czas trwania drgań

Ruch drgający wejdzie w pasmo obszaru zatrzymania ruchu naprzemiennego, jeśli zostanie spełniony warunek

$$(3.1) \quad C_e(a) a(t) < A_i,$$

przy czym $C_e(a)$ oznacza równoważną charakterystykę sprężystości wibroizolacji, a A_i odpowiednią siłę wywołaną tarciami suchymi, $i = 1, 2$.

Równoważną charakterystykę sprężystości można wyrazić za pomocą wzoru [1]

$$(3.2) \quad C_e(a) = C_2 - \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a a_2 \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

Po wykonaniu całkowania mamy

$$C_e(a) = C_2 \left\{ \beta + \frac{1}{\pi} (\beta - 1) \left[\frac{x_0}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2} - \arccos \frac{x_0}{a} \right] \right\}.$$

Po podstawieniu do nierówności (3.1) wielkości wyrażonych wzorami (2.7) i (3.2) i przyjęciu $x_0 = 0$, otrzymamy

$$(3.3) \quad t > \frac{1}{a_2 \mu} \ln \frac{\frac{(\beta+1)}{2} C_2 a_0 + \frac{(\beta+1)(A_1+A_2)}{2\pi\mu}}{A_i + \frac{(\beta+1)(A_1+A_2)}{2\pi\mu}},$$

przy czym

$$\mu = \frac{k_1}{k_k}, \quad k_k = 2m a_2.$$

Dla $k_1 = k_2 = 0$ czas trwania ruchu drgającego możemy przedstawić w postaci

$$(3.4) \quad t > \frac{\pi m a_2}{(A_1 + A_2)} \left[a_0 - \frac{2A_i}{C_2(\beta+1)} \right].$$

4. Określenie liczby drgań

Oznaczając przez N poszukiwaną liczbę drgań ruchu naprzemiennego, po przekroczeniu której dalszy ruch jest nienaprzemienny, można napisać

$$(4.1) \quad N = E \left(\frac{t}{T_e} \right).$$

We wzorze (4.1) T_e oznacza okres drgań układu,

$$(4.2) \quad T_e = \frac{2\pi}{\alpha_e} = \frac{2\pi}{a_2 \sqrt{\frac{1}{2}(\beta+1)}}.$$

Podstawiając do wzoru (4.1) wyrażenia (3.3) i (4.2) otrzymamy

$$(4.3) \quad N = E \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\beta+1)}}{2\pi\mu} \ln \frac{\frac{\beta+1}{2} C_2 a_0 + \frac{(\beta+1)(A_1+A_2)}{2\pi\mu}}{A_i + \frac{(\beta+1)(A_1+A_2)}{2\pi\mu}} \right].$$

Gdy $k_1 = k_2 = 0$ wzór na N przyjmie postać

$$(4.4) \quad N = E \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\beta+1)}}{(A_1+A_2)} \left[\frac{C_2 a_0}{2} - \frac{1}{(\beta+1)} A_i \right] \right\}.$$

5. Dyskusja wyników rozwiązania

Zajmiemy się analizą wyników rozwiązania przy różnych wartościach sił oporu A_i wywołanych przez suche tarcie.

Jeżeli przyjmiemy, że $A_1 = 0$ to $A_i = A_2$ i formuły (4.3) oraz (4.4) przyjmują postać

$$(5.1) \quad N = E \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\beta+1)}}{2\pi\mu} \ln \frac{\frac{1}{2}(\beta+1)\eta_1 + \frac{(\beta+1)}{2\pi\mu}}{1 + \frac{(\beta+1)}{2\pi\mu}} \right],$$

$$N = E \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\beta+1)}}{2} \eta_1 - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}(\beta+1)}} \right].$$

Natomiast gdy $A_2 = A_1$, to $A_i = A_1$ i wzory (4.3) oraz (4.4) przybierają postać

$$(5.2) \quad N = E \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\beta+1)}}{2\pi\mu} \ln \frac{\frac{1}{2}(\beta+1)\eta_2 + \frac{(\beta+1)}{\pi\mu}}{1 + \frac{(\beta+1)}{\pi\mu}} \right],$$

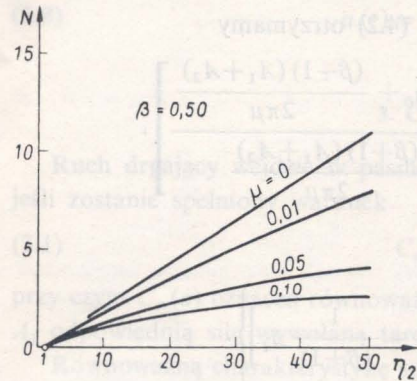
$$(5.2) \quad N = E \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\beta+1)}}{4} \eta_2 - \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}(\beta+1)}} \right],$$

[c.d.]

przy czym

$$\eta_1 = \frac{C_2 a_0}{A_2}, \quad \eta_2 = \frac{C_2 a_0}{A_1}.$$

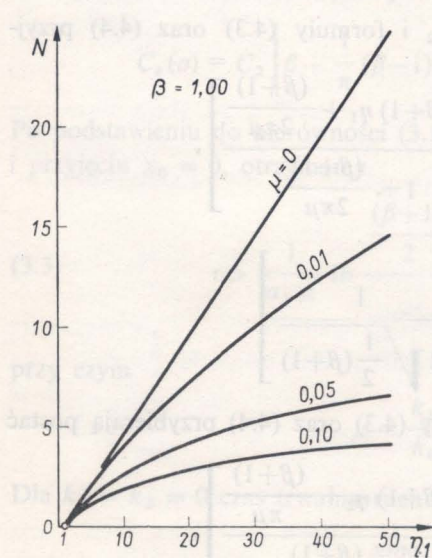
Przyjmując odpowiednie kombinacje bezwymiarowych parametrów β i μ , możemy otrzymać układy mające wibroizolację o różnych charakterystykach sprężystości i tłumienia. Dla odpowiednich parametrów β i μ , występujących w równaniach (5.1) i (5.2), przeprowadzono obliczenia numeryczne w zależności od η . Wyniki obliczeń obrazują wykresy na rys. 2–5.



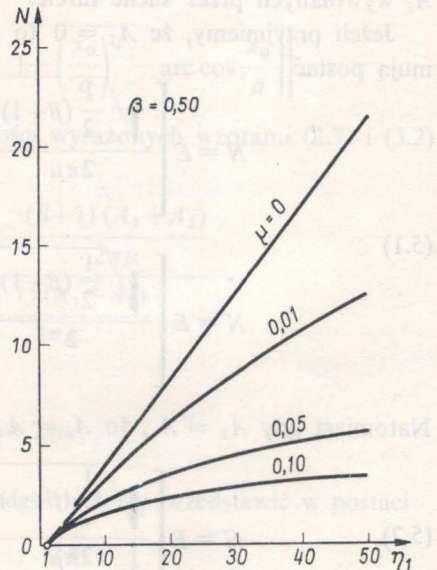
Rys. 2

Jak wynika ze wzoru (4.1), ruch ten ma skończoną liczbę miejsc zerowych. Zatem drgania swobodne w układzie wygasają po skończonej ilości wahanć. Jak wiemy przy istnieniu w układzie tylko oporu liniowego mniejszego od wartości krytycznej ruch drgający swobodny posiada nieskończoną liczbę miejsc zerowych [3].

Na podstawie wykresów możemy również stwierdzić, że zmiana parametru β , przy stałych μ i η , wpływa także na liczbę drgań N .



Rys. 3



Rys. 4

Dalej spostrzegamy, że przy wzroście μ , tj. przy dużym tłumieniu liniowym wpływ suchego tarcia na zanikanie drgań swobodnych maleje.

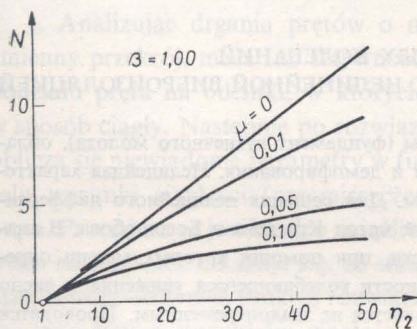
Dla celów doświadczalnych wykonano model, który charakteryzują następujące dane liczbowe:

$$m = 0,147 \text{ kGcm}^{-1} \text{ s}^2, \quad C_2 = 193,6 \text{ kGcm}^{-1},$$

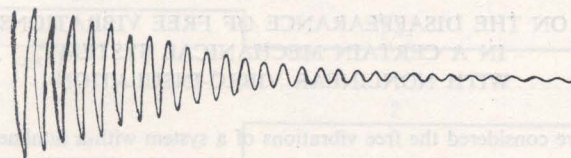
$$A_1 = A_2 = 10,56 \text{ kG}, \quad \mu = 0,00108, \quad \beta = 1, \quad x_0 = 0.$$

Rysunek 6 przedstawia oscylogram drgań własnych modelu. Na oscylogramie tym nie występuje wyraźnie pasmo obszaru zatrzymania ruchu naprzemiennego o wartości $2A_1/C_2$. Wynika to z niedoskonałej konstrukcji modelu. Jednak na podstawie rys. 6 możemy stwierdzić, że zanikanie drgań swobodnych w modelu przy zastosowaniu wibroizolatorów «Stała» jest szybkie.

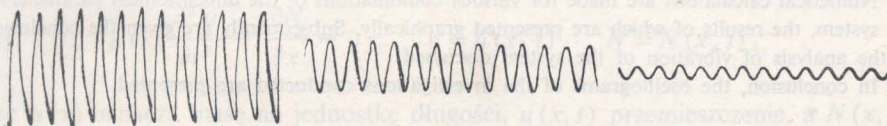
Na rys. 7 przedstawiono wycinki oscylogramu, na którym zapisane są drgania swobodne tegoż modelu przy $A_1 = A_2 = 0$. Porównanie oscylogramów na rys. 6 i 7 daje jakościową ocenę poprawności rozwiązania teoretycznego. Jeśli chodzi o ilościową ocenę drgań swobodnych, to porównując wyniki badań modelowych z wynikami przykładu liczbowego stwierdzono, że występujące różnice są małe i nie mają większego znaczenia z punktu widzenia zastosowań praktycznych.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Literatura cytowana w tekście

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва 1958.
2. Ю. И. Иориш, *Измерение вибрации*, Гос. Н. Тех. Лит., Москва 1956.
3. I. KISIEL, *Dynamika fundamentów pod maszynę*, PWN, Warszawa 1957.
4. I. N. MACDUFF, I. R. CURRERI, *Drgania w technice*, PWT, Warszawa 1960.
5. W. ŁAŃCZAK, *Przeładka sprzężysta z zastosowaniem suchego tarcia jako elementu tłumiącego drgania*, Praca doktorska, Wrocław 1966.
6. Z. OSIŃSKI, *Wpływ tarcia suchego na ruchy drgające układów mechanicznych*, Arch. Bud. Maszyn, 1, 7 (1960).

Резюме

**О ЗАТУХАНИИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ
В НЕКОТОРОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВИБРОИЗОЛЯЦИЕЙ**

Рассматриваются свободные колебания системы (фундамент кузнечного молота), обладающей нелинейными характеристиками упругости и демпфирования. Нелинейная характеристика демпфирования вызывается сухим трением. Для решения нелинейного дифференциального уравнения, применяется асимптотический метод Крылова и Боголюбова. В анализе свободных колебаний, приводятся зависимости, при помощи которых можно определить огибающие амплитуды колебаний, длительности колеблющегося увижения и число колебаний, после которых дальнейшее движение является не знакопеременным. Проводятся численные расчеты для различных безразмерных комбинаций параметров системы, результаты которых представлены в виде диаграмм. Затем, даются предложения, касающиеся, обсуждаемого анализа колебаний системы. В заключение, представлены осциллограммы из проведенных исследований.

Summary

**ON THE DISAPPEARANCE OF FREE VIBRATIONS
IN A CERTAIN MECHANICAL SYSTEM
WITH NONLINEAR VIBRO-INSULATION**

In this paper are considered the free vibrations of a system with a nonlinear characteristics of elasticity and damping. The nonlinear characteristic of damping is caused by dry friction. For the solution of the nonlinear differential equation, the asymptotic method is used as given by KRYLOV and BOGOLYUBOV.

In the analysis of the free vibration, relationships are given by means of which the envelopes of the amplitudes of vibration can be determined, the time of duration of the vibrating motion, and the number of vibrations after which the further motion is non-alternative.

Numerical calculations are made for various combinations of the dimensionless parameters of the system, the results of which are presented graphically. Subsequently are given the conclusions of the analysis of vibration of the system discussed.

In conclusion, the oscillograms of the investigations conducted are presented.

KATEDRA BUDOWNICTWA
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ