Rozprawy Inżynierskie
1, 18 (1970)

O PEWNYM MODELU STOCHASTYCZNYM PROCESU FILTROWANIA PŁYNÓW

STANISŁAW BOROWIK, BRUNON REDMER (WARSZAWA)

1. Założenia

Rozważony w niniejszej pracy model procesu filtrowania płynów dotyczy analizy przegrody porowatej oraz ilości i rozkładu wymiarów cząstek w płynie przed i za przegrodą. Zakładamy, że cząstki zawieszone w płynie są twarde i posiadają kształty kuliste. Promienie cząstek oznaczać będziemy przez x, a rozkład prawdopodobieństwa ich wymiarów dla danego czasu t opiszemy funkcjami gęstości $g(x, t)$ i $h(x, t)$ odpowiednio dla płynu przed i po przejściu przez przegrodę porowatą. Zakładamy, że pory przegrody są kapilarami w kształcie cylindrów o jednakowej długości. Promienie porów oznaczać będziemy przez y, a rozkład prawdopodobieństwa wymiarów porów czynnych opiszemy funkcją gęstości $f(y, t)$. Jako zasadnicze założenie rozpatrywanego modelu procesu filtrowania przyjmujemy, że cząstka trafiająca por zatyka go całkowicie, gdy promień x jest większy od promienia y. Przyjmujemy, że koncentracja objętościowa cząstek w płynie jest tak mała, że pomijalny jest jej wpływ na lepkość płynu.

2. Analiza przegrody porowatej

Niżej wyprowadzimy podstawową zależność procesu filtrowania płynu dla przyjętego modelu. Rozważymy przegrodę filtrującą o ilości porów równej n. Niech promienie porów $y_1, y_2, \ldots, y_n$ będą określoną realizacją układu zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Funkcję gęstości $f(y, t)$ dla początku rozważanego procesu można zatem wyrazić jako następującą granicę:

$$f(y, 0) = \frac{1}{n} \lim_{\Delta y \to 0_+} \frac{1}{\Delta y} \sum_{i=1}^{n} P\{y \leqslant Y_i < y + \Delta y\}. \tag{2.1}$$

Funkcję $f(y, 0) = f_0(y)$ przedstawimy w postaci sumy dwu gęstości defektywnych:

$$f_0(y) = f_A(y, t) + f_B(y, t), \tag{2.2}$$

gdzie

(2.3)
$$f_A(y,t)=\frac{1}{n}\lim_{\Delta y\to 0_+}\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=1}^{n}P\{A_i\,[y,y+\Delta y)\},$$
$$f_B(y,t)=\frac{1}{n}\lim_{\Delta y\to 0_+}\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=1}^{n}P\{B_i\,[y,y+\Delta y)\},$$

natomiast symbole $A_i\,[y, y+\Delta y)$ i $B_i\,[y, y+\Delta y)$ oznaczają zdarzenia polegające na tym, że wymiar i-tego pora y_i należy do przedziału $[y, y+\Delta y)$ i że po upływie czasu t od początku procesu filtrowania por ten jest odpowiednio czynny i zatkany.

Dokonany w taki sposób podział funkcji gęstości $f_0(y)$ odpowiada podziałowi rozkładu prawdopodobieństwa na część dotyczącą porów otwartych i część dotyczącą porów zatkanych. Można wykazać, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla porów czynnych ma postać (1)

(2.4)
$$f(y,t)=\Xi_y\,[f_A(y,t)].$$

Jeżeli symbolem $\lambda(y,t)$ oznaczymy proces stochastyczny, wyrażający intensywność dopływu do pora o promieniu y — cząstek o promieniach $x>y$, to spełniona będzie zależność

(2.5)
$$f_A(y,t)=f_0(y)\,E\{\exp[-\Lambda(y,t)]\},$$

gdzie

(2.6)
$$\Lambda(y,t)=\int_0^t\lambda(y,\tau)\,d\tau.$$

W celu wykazania prawdziwości tej zależności weźmy pod uwagę dowolną realizację ζ_i procesu $\lambda(y,t)$. Ponieważ zgodnie z przyjętym założeniem każda cząstka o przekroju większym od przekroju pora powoduje jego zatkanie, to możemy napisać

(2.7)
$$\lambda(y,t;\zeta_i)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-P\{C_y(t,t+\Delta t]\,\|\,\zeta_i\}}{\Delta t},$$

gdzie $C_y(t_1, t_2]$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że por o promieniu y nie ulega zatkaniu w przedziale czasu $(t_1, t_2]$.

W przyjętych warunkach filtrowania koncentracja objętościowa cząstek w cieczy jest tak mała, że $C_y(0,t]$ i $C_y(t, t+\Delta t]$ mogą być rozpatrywane jako zdarzenia niezależne. Zatem

(2.8)
$$P\{C_y(0,t+\Delta t]\,\|\,\zeta_i\}=P\{C_y(0,t]\,\|\,\zeta_i\}\,P\{C_y(t,t+\Delta t]\,\|\,\zeta_i\}.$$

---

(1) Wprowadzona w tej pracy celem uproszczenia zapisu funkcja Ξ jest określona następującą formułą:

$$\Xi_\alpha[f(\alpha,\beta)]=\frac{f(\alpha,\beta)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha,\beta)\,d\alpha}.$$

Z (2.7) i (2.8) otrzymujemy równanie

$$\frac{\partial}{\partial t} P\{C_y(0,t]\| \zeta_i\} + \lambda(y,t;\zeta_i) P\{C_y(0,t]\| \zeta_i\} = 0 \tag{2.9}$$

przy warunku początkowym $P\{C_y(0,t]\| \zeta_i\} = 1$ dla $t = 0$; stąd

$$P\{C_y(0,t]\| \zeta_i\} = \exp\left[-\int_0^t \lambda(y,\tau;\zeta_i)\,d\tau\right]. \tag{2.10}$$

Dla nieznanej realizacji procesu $\lambda(y,t)$ mamy zatem

$$P\{C_y(0,t]\} = E\left\{\exp\left[-\int_0^t \lambda(y,\tau)\,d\tau\right]\right\}. \tag{2.11}$$

Z oczywistej zależności

$$\lim_{\Delta y\to 0_+} \frac{P\{A_t[y, y+\Delta y)\}}{\Delta y} = P\{C_y(0,t]\} \lim_{\Delta y\to 0_+} \frac{P\{y \leqslant Y_i < y+\Delta y\}}{\Delta y} \tag{2.12}$$

oraz z (2.1), (2.3) i (2.11) wynika (2.5).

3. Rozkład cząstek w płynie

Udowodniony powyżej wzór (2.5) umożliwia wyprowadzenie zasadniczego wzoru wyrażającego rozkład cząstek w płynie po przejściu przez przegrodę porowatą.

Dokonamy podziału funkcji $g(x,t)$ na dwie gęstości defektywne

$$g(x,t) = g_A(x,t) + g_B(x,t), \tag{3.1}$$

tak, aby $g_A(x,t)$ odpowiadała cząstkom przepuszczonym przez przegrodę porowatą, a $g_B(x,t)$ odpowiadała cząstkom zatrzymanym w przegrodzie porowatej. Traktując wymiary wpadających kolejno do przegrody porowatej cząstek jako zdarzenia niezależne, możemy powyższe funkcje zdefiniować następująco:

$$g(x,t) = \lim_{\Delta x\to 0_+} \frac{P\{x \leqslant X(t) < x+\Delta x\}}{\Delta x},$$

$$g_A(x,t) = \lim_{\Delta x\to 0_+} \frac{P\{A_t[x, x+\Delta x)\}}{\Delta x}, \tag{3.2}$$

$$g_B(x,t) = \lim_{\Delta x\to 0_+} \frac{P\{B_t[x, x+\Delta x)\}}{\Delta x}.$$

Symbolem $A_t[x, x+\Delta x)$ oznaczono tutaj zdarzenie polegające na tym, że wartość zmiennej losowej $X(t)$, czyli wymiar cząstki wpadającej w chwili t do przegrody porowatej, mieści się w przedziale $[x, x+\Delta x)$ i że cząstka ta przechodzi przez przegrodę; symbolem $B_t[x, x+\Delta x)$ — zdarzenie, że cząstka ta spełnia ten sam warunek odnośnie do jej wymiaru, ale zostaje zatrzymana w porach przegrody.

Ponieważ

$$\lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{P\{B_t[x, x+\Delta x)\}}{\Delta x} = K(x,t) \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{P\{x \leqslant X(t) < x+\Delta x\}}{\Delta x}, \tag{3.3}$$

gdzie $K(x, t)$ oznacza prawdopodobieństwo zatrzymania cząstki o promieniu x w przegrodzie porowatej, przeto

$$\begin{aligned} g_A(x,t) &= g(x,t)[1-K(x,t)], \\ g_B(x,t) &= g(x,t)\, K(x,t). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa dla cząstek w płynie po przejściu przez przegrodę ma zatem postać

$$h(x,t) = \Xi_x\{g(x,t)[1-K(x,t)]\}. \tag{3.5}$$

Wzór (3.5) wyrażający związek między elementami układu złożonego z przegrody porowatej oraz cząstek w płynie przed i za tą przegrodą umożliwia analizę dynamiki procesu filtrowania.

4. Rozkład hydrodynamiczny porów

Rozpatrzymy występującą we wzorze (3.5) funkcję $K(x, t)$. Można wykazać [1], że w przypadku laminarnego przepływu cieczy przez przegrodę porowatą, w którym natężenie przepływu jest proporcjonalne do kwadratu przekroju pora,

$$K(x,t) = \int_0^x k(y,t)\, dy, \tag{4.1}$$

gdzie

$$k(y,t) = \Xi_y[y^4 f(y,t)]. \tag{4.2}$$

Funkcja $k(y, t)$ spełnia warunki gęstości prawdopodobieństwa, a funkcja $K(y, t)$ jest jej dystrybuantą. Obie te funkcje charakteryzują własności hydrodynamiczne przegrody filtrującej, określając rozdział natężenia przepływu płynu w zależności od wielkości porów. Będziemy je nazywać odpowiednio gęstością hydrodynamiczną i dystrybuantą hydrodynamiczną przegrody porowatej. Funkcja $K(x, t)$ ma duże znaczenie praktyczne w technice filtrowania ze względu na to, że jest ona równoważna charakterystyce odfiltrowania [1]. Dalej rozpatrzymy gęstość $k(y, t)$, która opisuje dynamikę zmian własności filtrujących przegrody porowatej. W tym celu rozważymy przebieg $k(y, t)$ dla dwu przypadków szczególnych procesu $\lambda(y, t)$.

5. Wyznaczenie gęstości hydrodynamicznej dla deterministycznych parametrów procesu filtrowania

Przyjmiemy, że spadek ciśnienia na przegrodzie filtrującej $p(t)$, koncentracja cząstek w płynie $z(t)$, gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wielkości cząstek przed filtrowaniem $g(x, t)$, lepkość cieczy $\eta(t)$ będą przebiegami deterministycznymi i dla takiego założenia wyznaczymy gęstość hydrodynamiczną przegrody $k(y, t)$.

W zakresie spadku ciśnienia na przegrodzie porowatej, w którym przepływ przez por jest laminarny, możemy napisać

$$q(y,t) = ay^4 \frac{p(t)}{\eta(t)}, \tag{5.1}$$

gdzie $q(y,t)$ oznacza natężenie przepływu cieczy przez por o promieniu y a a stałą.

Dla warunków początkowych

$$[q(y,t)]_{t=0} = q_0(y), \qquad [p(t)]_{t=0} = p_0, \qquad [\eta(t)]_{t=0} = \eta_0 \tag{5.2}$$

otrzymujemy

$$q_0(y) = ay^4 \frac{p_0}{\eta_0}. \tag{5.3}$$

Dla pora o nieznanym wymiarze y wartość oczekiwana $q_0(y)$ ma postać

$$E\{q_0\} = a \frac{p_0}{\eta_0} K_0, \tag{5.4}$$

gdzie

$$K_0 = \int_0^\infty y^4 f_0(y)\, dy. \tag{5.5}$$

Ze względu na to, że ilość porów przegrody filtrującej jest bardzo duża, możemy przyjąć, że całkowite natężenie przepływu przez przegrodę Q_0 dla $t = 0$ wyniesie

$$Q_0 = nE\{q_0\}. \tag{5.6}$$

Zatem

$$a = \frac{Q_0 \eta_0}{np_0 K_0} \tag{5.7}$$

i stąd

$$q(y,t) = \frac{Q_0 y^4}{nK_0} \frac{p(t)}{p_0} \frac{\eta_0}{\eta(t)}. \tag{5.8}$$

Koncentracja ilościowa cząstek o wymiarze $x > y$ jest równa

$$z(t)[1 - G(y,t)],$$

gdzie

$$G(y,t) = \int_0^y g(x,t)\, dx. \tag{5.9}$$

Intensywność dopływu cząstek o promieniach x większych od promienia poru y ma zatem postać

$$\lambda(y,t) = \frac{Q_0 y^4 \eta_0}{np_0 K_0} \frac{p(t)\, z(t)}{\eta(t)} [1 - G(y,t)]. \tag{5.10}$$

Ze względu na deterministyczny charakter przebiegu $\lambda(y, t)$ mamy

$$E\{\exp[-\Lambda(y, t)]\} = \exp[-\Lambda(y, t)]. \tag{5.11}$$

Zatem

$$k(y, t) = \Xi_y\left(k_0(y)\exp\left\{-\frac{Q_0 y^4 \eta_0}{np_0 K_0}\int_0^t \frac{p(\tau)z(\tau)}{\eta(\tau)}[1-G(y,\tau)]\,d\tau\right\}\right). \tag{5.12}$$

6. Wyznaczenie gęstości hydrodynamicznej dla stochastycznego przebiegu ciśnienia filtracji

Rozpatrzymy postać $k(y, t)$ dla przypadku, w którym $z(t) = z_0$, $g(x, t) = g_0(x)$, $\eta(t) = \eta_0$, a przebieg spadku ciśnienia cieczy na przegrodzie porowatej $p(t)$ jest procesem stochastycznym $P(t)$.

Przy tych założeniach otrzymamy

$$k(y, t) = \Xi_y(k_0(y)E\{\exp[-a(y)S(t)]\}), \tag{6.1}$$

gdzie

$$a(y) = \frac{Q_0 y^4}{nK_0}[1-G_0(y)], \quad G_0(y) = \int_0^y g_0(x)\,dx, \quad S(t) = \int_0^t P(\tau)\,d\tau. \tag{6.2}$$

Niech $f_s(s, t)$, $m(t)$ i $\mu_k(t)$ oznaczają odpowiednio funkcję gęstości prawdopodobieństwa, wartość średnią i k-ty moment centralny całki stochastycznej $S(t)$ oraz $\xi(t)$, $C(t_1, t_2)$ — wartość średnią i autokowariancję procesu $P(t)$. Przy tych oznaczeniach znajdziemy

$$E\{\exp[-a(y)S(t)]\} = \int_0^\infty f_s(s, t)\exp[-a(y)s]\,ds. \tag{6.3}$$

Zastępując w tym wyrażeniu funkcję $\exp[-a(y)s]$ jej rozwinięciem w szereg Taylora względem zmiennej s w otoczeniu punktu $m(t)$ otrzymujemy

$$E\{\exp[-a(y)S(t)]\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-a(y)]^k}{k!}\exp[-a(y)m(t)]\int_0^\infty [s-m(t)]^k \times$$
$$\times f_s(s, t)\,ds = \left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}[-a(y)]^k\frac{\mu_k(t)}{k!}\right\}\exp[-a(y)m(t)] \tag{6.4}$$

i stąd (moment μ_1 jest równy zeru)

$$k(y, t) = \Xi_y\left(k_0\left\{1+\sum_{k=2}^{\infty}[-a(y)]^k\frac{\mu_k(t)}{k!}\right\}\exp[-a(y)m(t)]\right). \tag{6.5}$$

Gdy

$$1+[a(y)]^2\frac{\mu_2(t)}{2} \gg \sum_{k=3}^{\infty}[-a(y)]^k\frac{\mu_k(t)}{k!}, \tag{6.6}$$

możemy (6.5) zastąpić prostszym wyrażeniem

$$k(y, t) = \Xi_y \left(k_0(y) \left\{ 1 + \frac{[a(y)]^2 \mu_2(t)}{2} \right\} \exp\left[-a(y)\, m(t)\right] \right). \tag{6.7}$$

Wartość średnia i wariancja całki stochastycznej $S(t)$ są równe [2]

$$m(t) = \int_0^t \xi(\tau)\, d\tau, \quad \mu_2(t) = \int_0^t \int_0^t C(t_1, t_g)\, dt_1\, dt_2, \tag{6.8}$$

a gdy proces $P(t)$ jest stacjonarny, to

$$m(t) = \xi t, \quad \mu_2(t) = 2t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) C(\tau)\, d\tau. \tag{6.9}$$

7. Zakończenie

Przedstawiona praca zawiera teorię filtrowania płynów, opartą na prostym modelu stochastycznym. Pomimo prostoty przyjętego modelu, uzyskane rezultaty można wykorzystać dla wielu zastosowań. Przeprowadzono badania laboratoryjne procesu filtrowania cieczy za pomocą przegrody porowatej wykonanej ze spieków metalowych oraz dla sit filtracyjnych i wyliczono dla warunków eksperymentu przebieg zmian gęstości hydrodynamicznej na podstawie wzoru (5.12) przy zastosowaniu iteracyjnej maszyny analogowej. Uzyskano zgodność z niedokładnością 5%.

Przedstawiona teoria umożliwia więc analityczne rozpatrywanie zagadnień związanych z filtrowaniem płynów. Opierając się na wyprowadzonych wzorach możliwe jest rozwiązanie bardziej skomplikowanych układów filtrowania, np. układów zamkniętych i wieloobwodowych.

Literatura cytowana w tekście

1. S. Borowik, B. Redmer, *Metoda analizy statystycznej efektu kolmatacji i filtrowania*, Rozpr. Inżyn., 2, **16** (1968).
2. A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Mc Graw-Hill, New York 1965.

Резюме

О НЕКОТОРОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ПРОЦЕССА ФИЛЬТРОВАНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

В работе, представлена теория стохастической модели процесса фильтрования жидкостей, с помощью пористой перегородки. Выводятся основные зависимости, выражающие количество и распределение вероятностей размеров частиц в жидкости после фильтрования, а также изменение фильтрационных свойств пористой перегородки. Не смотря на то, что принятая модель является упрощением действительного процесса явлений, полученные результаты находят экспериментальное подтверждение.

Summary

ON A CERTAIN STOCHASTIC MODEL OF THE FILTERING PROCESS OF FLUIDS

In the paper a theory of stochastic model of the fluid filtering process by means of a parous barrier is presented. Basic relations expressing the quantity and probability distribution of the particle dimensions in the fluid after the filtering and change of filtering properties of the porous barrier were derived. In spite of the fact that the assumed model is a simplification of the real process, the obtained results were confirmed by experiment.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT AUTOMATYKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 grudnia 1968 r.