

ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH W BELCE Z PŁASKĄ SZCELINĄ

PREM N A R A I N (KANPUR)

Wstęp

Najwcześniejsze obliczenia dotyczące rozkładu naprężeń w otoczeniu szczeliny należą prawdopodobnie do INGLISA [2], który rozważał przypadek szczeliny eliptycznej w nieskończonej sprężystej tarczy. GRIFFITH [3] przedstawił wyjaśnienie pęknięcia kruchego materiału oparte na hipotezie, że taki materiał ma liczne rysy podobne do szczeliny o różnych wymiarach, że powierzchnie ograniczające ciało posiadają napięcie powierzchniowe takie jak ciecze oraz że gdy szczelina się rozszerza, spadek energii odkształcenia jest równoważony przez przyrost energii potencjalnej wywołanej tym napięciem powierzchniowym. SNEDDON i ELLIOT [4] badali rozkład naprężeń w sąsiedztwie szczeliny Griffitha, która jest poddana ciśnieniu wewnętrznemu, zmieniającemu się wzdłuż długości szczeliny.

Problem półnieskończonego pasma był rozważany przez WESTERGAARDA [5], ostatnio zaś przez ENGLANDA i GREENA [6], oraz KOITERA [7], lecz wydaje się, że ich metody rozwiązania nie można dostosować do bardziej złożonych problemów. TAIT [8] badał problem określenia stanu naprężenia w sąsiedztwie szczeliny Griffitha w nieskończonym sprężystym pasmie o skończonej szerokości. Również przypadek izotermiczny, gdy wymiary pasma są porównywalne z wymiarami szczeliny, był rozważany przez SNEDDONA i SRIVASTAVA [9]. Problem znalezienia naprężeń cieplnych w sąsiedztwie szczeliny Griffitha był rozwiązany przez OLESIAKA i SNEDDONA [10]. W tej pracy będziemy rozważać rozkład naprężeń w belce o przekroju prostokątnym wykonanej z materiału sprężystego izotropowego jednorodnego, wypełniającej obszar $-\delta \leq x \leq \delta$, $-\pi \leq y \leq \pi$, $-\infty \leq z \leq \infty$ przy zwykłym założeniu małych odkształceń teorii sprężystości, właściwej przypadkowi płaskiego stanu odkształcenia. Zakłada się, że szczelina w belce jest położona w płaszczyźnie $x = 0$ wzdłuż pasma $-c < y < c$, $-\infty \leq z \leq \infty$. Przyjmuje się, że stan naprężenia w belce jest wywołany ciśnieniem wewnętrznym działającym do brzegu szczeliny oraz polem cieplnym. Zakładamy dalej, że ściany boczne belki $x = \pm\delta$, $y = \pm\pi$ są odizolowane termicznie, a rozkład temperatury jest taki, że nie powoduje żadnych zmian własności materiału.

Wyłaniają się dwa interesujące typy problemów brzegowych:

a) powierzchnie boczne $y = \pm\pi$ są tak utwierdzone, że składowa normalna wektora przemieszczenia oraz naprężenia ścinające znikają;

b) powierzchnie boczne $y = \pm\pi$ są wolne od naprężeń. Powierzchnie $x = \pm\delta$ mogą być albo wolne od naprężeń, albo utwierdzone w taki sposób, że składowa normalna wektora przemieszczenia oraz naprężenia ścinające się zerują.

W obecnej pracy będziemy rozważać przypadek, gdy wszystkie cztery powierzchnie boczne są utwierdzone. Fizycznie stan ten jest zrealizowany, gdy belka jest objęta sztywnym pojemnikiem z idealnym smarowaniem.

Problem znalezienia rozkładu naprężeń w otoczeniu szczeliny jest oczywiście równoważny określeniu rozkładu naprężeń w półnieskończonym paśmie $0 \leq x \leq \delta$, $-\pi \leq y \leq \pi$ przy spełnieniu następujących warunków brzegowych:

Warunki mechaniczne. Na krawędzi $x = 0$

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_{xy} &= 0, & -\pi \leq y \leq \pi, \\ \sigma_{xx} &= -2\mu p(y), & -c \leq y \leq c, \\ U_x &= 0, & c < |y| \leq \pi, \end{aligned}$$

gdzie μ oznacza stałą Lamégo, a $2c$ jest szerokością szczeliny.

Na krawędzi $y = \pm\pi$

$$(2) \quad \sigma_{xy} = U_y = 0, \quad 0 \leq x \leq \delta.$$

Na krawędzi $x = \delta$

$$(3) \quad \sigma_{xy} = U_x = 0, \quad -\pi \leq y \leq \pi.$$

Warunki termiczne. Na krawędzi $y = \pm\pi$

$$(4) \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq \delta.$$

Na krawędzi $x = \delta$

$$(5) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad -\pi \leq y \leq \pi.$$

Na krawędzi $x = 0$

$$(6) \quad \theta = \cos my, \quad -\pi \leq y \leq \pi,$$

gdzie m jest liczbą całkowitą dodatnią.

Z pracy NARAIN i SRIVASTAVA [11] mamy

$$(7) \quad \begin{aligned} U_x(0, y) &= 2(1 - \eta) \left(\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny \right) - \cos my, \\ -\frac{\sigma_{xx}(0, y)}{2\mu} &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (1 + K(n\delta)) \cos ny, \end{aligned}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{u_0}{2(1 - \eta)}, \quad \alpha = \frac{2(1 - \eta)^2}{\delta(1 - 2\eta)}, \quad K(\xi) = \frac{\xi + e^{-\xi} \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{sh}^2 \xi}.$$

Mieszany problem brzegowy przedstawiony przez (1)₂ i (1)₃ prowadzi do równań dualnych.

$$(8) \quad -\frac{1}{2} a a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (1 + K(n\delta)) \cos ny = p(y), \quad 0 \leq |y| < c,$$

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny = \frac{\cos my}{2(1-\eta)}, \quad c < |y| \leq \pi,$$

gdzie określić należy ciąg stałych a_n spełniających szeregi podwójne (8).

Jest rzeczą oczywistą, że $K(n\delta) = O(n\delta e^{-n\delta})$. Dla dowolnego ustalonego rozmiaru δ można pominąć $K(n\delta)$ dla wartości n większych niż pewna stała dodatnia. Dla prostoty będziemy pomijali $K(n\delta)$ dla $n = 2, 3, 4, \dots$, i dlatego dualne związki (8) przyjmują postać

$$(9) \quad \frac{1}{2} a a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos ny = p(y) - a_1 k(\delta) \cos y, \quad 0 \leq |y| < c,$$

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny = \frac{1}{2(1-\eta)} \cos my, \quad c < |y| \leq \pi.$$

Szeregi podwójne typu (9) były już analizowane przez SRIVASTAVA [1].

Wykorzystując jego technikę dokonajmy następującego podstawienia:

$$(10) \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny = \frac{1}{2(1-\eta)} \cos my + \cos \frac{y}{2} \int_y^c \frac{g(t) dt}{\sqrt{\cos y - \cos t}},$$

$$0 \leq y < c,$$

gdzie nieznaną jest funkcja $g(t)$.

Z teorii szeregów Fouriera i całki Mehlera wynika, że

$$(11) \quad a_0 = \sqrt{2} \int_0^c g(t) dt,$$

$$a_n = \frac{1}{2(1-\eta)} c_m \delta_{mn} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^c g(t) (P_n(\cos t) + P_{n-1}(\cos t)) dt.$$

Jeśli podstawimy teraz te wartości do równania (9)₁, to po kilku uproszczeniach znajdujemy funkcję $g(t)$:

$$(12) \quad g(t) = \frac{\frac{a}{dt} [P_m(\cos t) - P_{m-1}(\cos t)]}{2\sqrt{2}(1-\eta)} + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sin \frac{y}{2} [\int_0^y P(u) du] dy}{\sqrt{\cos y - \cos t}} -$$

$$-\frac{a a_0}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{t}{2} - \frac{a_1 K(\delta)}{\sqrt{2}} \sin t.$$

Przypadek szczególny. Ponieważ w ogólnym przypadku obliczenia stają się bardzo zawiłe, dla zilustrowania metody będziemy rozważać przypadek szczególny, gdy stała całkowita dodatnia $m = 1$, $\delta \rightarrow \infty$ ($\alpha \rightarrow 0$, $K(\delta) \rightarrow 0$), a rozwarcie szczeliny jest spowodowane przyłożeniem do jej brzegu ciśnienia hydrostatycznego $p(y) = P_0$. W tym przypadku wyrażenie dla $g(t)$ przyjmuje postać

$$(13) \quad g(t) = p_0 \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{2\mu} - \frac{\sin t}{2\sqrt{2}(1-\eta)}.$$

Przeszczenie powierzchni szczeliny jest następujące:

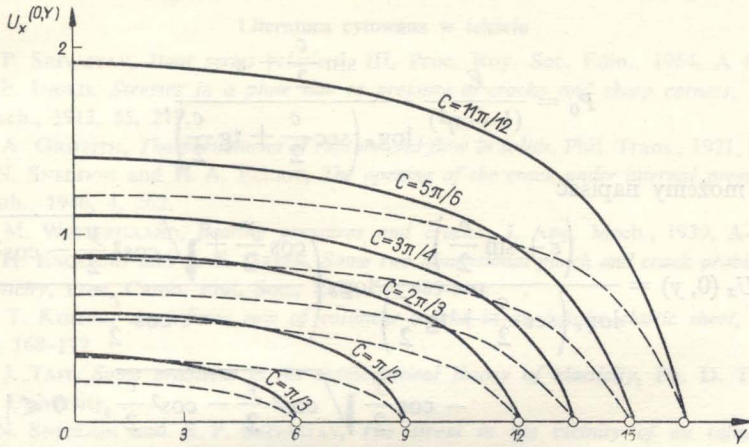
$$(14) \quad \begin{aligned} U_x(0, y) &= 2(1-\eta) \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny \right] - \cos y = \\ &= 2(1-\eta) \cos \frac{y}{2} \int_0^c \frac{g(t) dt}{\sqrt{\cos y - \cos t}} = \\ &= \frac{2(1-\eta)}{\mu} p_0 \log_e \left(\frac{\cos \frac{y}{2} + \sqrt{\cos^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{c}{2}}}{\cos \frac{c}{2}} \right) - \\ &\quad - \cos \frac{y}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{c}{2}}, \quad 0 \leq |y| < c. \end{aligned}$$

Podobnie składowa normalna naprężenia wzdłuż szczeliny wynosi

$$(15) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}(0, y) &= -\frac{\cos y}{2(1-\eta)} - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^c \frac{g(t) \cos \frac{y}{2} dt}{\sqrt{\cos t - \cos y}}, \quad |y| > c, \\ -\frac{\sigma_{xx}(0, y)}{2\mu} &= \frac{p_0}{\mu} \left[1 - \frac{\sin \frac{y}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{c}{2} - \cos^2 \frac{y}{2}}} \right] - \\ &= \frac{1}{4(1-\eta)} \left(2 \cos y + \frac{\cos c \sin \frac{y}{2} - \sin \frac{3y}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{c}{2}}} \right) + \frac{\cos y}{2(1-\eta)}. \end{aligned}$$

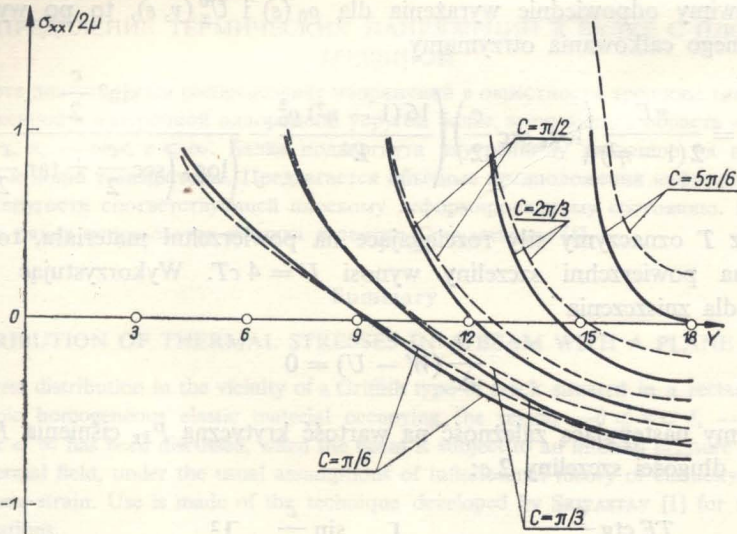
Rysunek 1 przedstawia zmianę rozwarcia szczeliny w zależności od przyrostu szerokości szczeliny odcinkowej. Składowa normalna przemieszczenia wewnątrz szczeliny była obliczona za pomocą wyrażenia (14) dla długości szczeliny równej odpowiednio $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, $11\pi/12$. Krzywe kreskowane przedstawiają rozwarcie szczeliny dla szkła, a pozostałe krzywe dla miedzi. Zmiana składowej

normalnej naprężenia wzdłuż linii szczeliny jest zilustrowana na rys. 2 dla długości szczeliny równej $\pi/6, \pi/3, \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/6$.



Rys. 1. Zmiana składowej normalnej przemieszczenia $U_x(0Y)$ wzdłuż linii szczeliny w zależności od Y

Warto zauważyć, że składowa normalna naprężenia zmienia znak dla rozważanego typu rozkładu temperatury. Krzywe kreskowane przedstawiają zmianę składowej normalnej naprężenia wzdłuż szczeliny dla szkła, a pozostałe krzywe dla miedzi.



Rys. 2. Zmiana składowej normalnej naprężenia $\sigma_{xx}(0Y)/2\mu$ wzdłuż linii szczeliny w zależności od Y

Warunek zniszczenia. Wykorzystamy teorię Griffitha do wyprowadzenia kryterium zniszczenia dla nieskończonej tarczy o skończonej szerokości. Szerokość szczeliny ε jest łatwa do wyznaczenia za pomocą równania (14), gdzie przyjmując $y = 0$ otrzymujemy

$$(16) \quad \varepsilon = 4(1 - \eta^2) \frac{P_0}{E} \log_e \left(\sec \frac{c}{2} + \operatorname{tg} \frac{c}{2} \right) - \sin \frac{c}{2},$$

lub

$$P_0 = \frac{E}{(1 - \eta^2)} \frac{\sin \frac{c}{2} + \varepsilon}{\log_e \left(\sec \frac{c}{2} + \operatorname{tg} \frac{c}{2} \right)}.$$

Zatem możemy napisać

$$(17) \quad U_x(0, y) = \frac{\left(\varepsilon + \sin \frac{c}{2} \right)}{\log_e \left(\sec \frac{c}{2} + \operatorname{tg} \frac{c}{2} \right)} \log_e \left(\frac{\cos \frac{y}{2} + \sqrt{\cos^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{c}{2}}}{\cos \frac{c}{2}} \right) - \\ - \cos \frac{y}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{c}{2}}, \quad 0 \leq |y| < c.$$

Energia odkształcenia zużyta na rozwarcie szczeliny odniesiona do jednostki grubości materiału jest dana równaniem

$$W = 4 \int_0^c \int_0^c [U_x^0(y, \varepsilon + d\varepsilon) - U_x^0(y, \varepsilon)] P_0(\varepsilon) dy = 4 \int_0^c \int_0^c \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [U_x(y, \varepsilon)] P_0(\varepsilon) d\varepsilon dy.$$

Jeśli wstawimy odpowiednie wyrażenia dla $\varrho_0(\varepsilon)$ i $U_x^0(y, \varepsilon)$, to po wykonaniu elementarnego całkowania otrzymamy

$$(18) \quad W = \frac{\pi E}{2(1 - \eta^2)} \left(\log_e \sec \frac{c}{2} \right) \left(\frac{16(1 - \eta^2) \varrho_0^2}{E^2} - \frac{\sin^2 \frac{c}{2}}{\left(\log_e \left(\sec \frac{c}{2} + \tan \frac{c}{2} \right) \right)^2} \right).$$

Jeśli przez T oznaczymy siły rozciągające na powierzchni materiału, to energia potencjalna powierzchni szczeliny wynosi $U = 4cT$. Wykorzystując warunek Griffitha dla zniszczenia

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial c} (W - U) = 0$$

otrzymujemy następującą zależność na wartość krytyczną P_{kr} ciśnienia P_0 odpowiadającą długości szczeliny $2c$:

$$(20) \quad P_{kr}^2 = \frac{TE \operatorname{ctg} \frac{c}{2}}{\pi(1 - \eta^2)} + \frac{E}{4(1 - \eta^2)} \left[\frac{\sin \frac{c}{2}}{\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi + c}{4} \right)} \right]^2 \times \\ \times \left\{ 1 - \operatorname{ctg} \frac{c}{2} \log_e \left[\sec \frac{c}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{c}{2} - \frac{\sec \frac{c}{2}}{\log \left(\operatorname{tg} \frac{\pi + c}{4} \right)} \right) \right] \right\}.$$

Można od razu zauważyć, że pierwszy wyraz w wyrażeniu (26) na wielkość ciśnienia krytycznego jest wyrazem odpowiadającym problemowi izotermicznemu (1).

Literatura cytowana w tekście

1. R. P. SRIVASTAV, *Dual series relations*, III, Proc. Roy. Soc. Edin., 1964, A 66, 173-184.
2. C. E. INGLIS, *Stresses in a plate due to pressure of cracks and sharp corners*, Trans. Inst. Naval Arch., 1913, 55, 219.
3. A. A. GRIFFITH, *The phenomena of rupture and flow in solids*, Phil. Trans., 1921, A 221, 163.
4. I. N. SNEDDON and H. A. ELLIOT, *The opening of the crack under internal pressure*, Quart. App. Math., 1946, 4, 262.
5. H. M. WESTERGAARD, *Bearing pressures and cracks*, J. App. Mech., 1939, A-49.
6. A. H. ENGLAND and A. E. GREEN, *Some two dimensional punch and crack problems in classical elasticity*, Proc. Camb. Phil. Soc., 1963, 59, 489-500.
7. W. T. KOITER, *An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet*, Ing. Arch., 1959, 28, 168-172.
8. R. J. TAIT, *Some problems in the mathematical theory of elasticity*, Ph. D. Thesis, 1962, Glasgow University.
9. I. N. SNEDDON and R. P. SRIVASTAV, *The stress in the vicinity of an infinite row of collinear cracks in an elastic body*, A 67, 1965, 39-49.
10. I. N. SNEDDON, and Z. OLESIAK, *The distribution of stress in an infinite elastic solid containing a penny shaped crack*, Arch. Prat. Mech. and Anal., 4, 1960, 3, 238-254.
11. Prem NARAIN and R. P. SRIVASTAV, *A two-dimensional indentation problems of a heated punch*, Proc. Eighth Congress, Theoretical and Applied Mechanics, Delhi 1963, 1-10.

Резюме

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В БАЛКЕ С ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНОЙ

В работе дискутируется распределение напряжений в окрестности трещины типа Грифита, расположенной в изотропной однородной упругой балке, занимающей область $-\delta < x < \delta$, $-\pi < y < \pi$, $-\infty < z < \infty$. Балка подвергнута внутреннему давлению на поверхности трещины и полю температуры. Предлагается обычные предположения инфинитезимальной теории упругости соответствующей плоскому деформированному состоянию. К решению дуальных рядов используется техника развития Сриваставым [1].

Summary

DISTRIBUTION OF THERMAL STRESSES IN A BEAM WITH A PLANE CRACK

The stress distribution in the vicinity of a Griffith type of crack situated in a rectangular beam of isotropic homogeneous elastic material occupying the region $-\delta < x < \delta$, $-\pi < y < \pi$, $-\infty < z < \infty$ has been discussed, when the beam is subject to an internal pressure in the crack and a thermal field, under the usual assumptions of infinitesimal theory of elasticity appropriate to the plane strain. Use is made of the technique developed by SRIVASTAV [1] for solving dual series relations.

ZAKŁAD MATEMATYCZNY
INDYJSKIEGO INSTYTUTU POLITECHNICZNEGO
KANPUR (INDIA)

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 czerwca 1964 r.

(1) Autor wyraża podziękowanie dr. R. P. SRIVASTAVOWI za jego sugestje odnośnie problemu oraz za wskazówki w toku wykonywania tej pracy.