

## NIESPRĘŻYSTE WYBOCZENIE PRĘTA PRZY KRÓTKOTRWAŁYM OBCIĄŻENIU

ZBIGNIEW KORDECKI (KRAKÓW)

## Wstęp

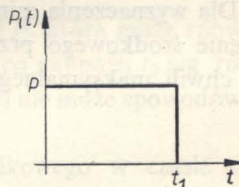
Istnieją dwa typy zagadnień związanych z krótkotrwałymi, udarowymi obciążeniami konstrukcji. W jednym z nich rozważa się sprężyste i plastyczne fale naprężeń rozchodzących się w materiale konstrukcji i bada się przede wszystkim miejscowe odkształcenia wywołane lokalnym spiętrzeniem naprężeń. W drugim typie zagadnień bada się wpływ dużych obciążeń, których czas trwania jakkolwiek krótki, jest jednak znacznie dłuższy niż czas potrzebny na rozejście się fali naprężeń wzdłuż konstrukcji. W tych przypadkach przyjmuje się, że prędkość rozchodzenia się fal podłużnych jest nieskończenie wielka. Daje to znaczne uproszczenie matematycznej strony zagadnienia. Ponadto stosuje się tu często model ciała sztywno-plastycznego. Jest to uzasadnione, jeżeli głównym celem badania jest wyznaczenie trwałych odkształceń, dostatecznie wielkich w stosunku do odkształceń sprężystych.

Pierwszą pracą tego rodzaju była publikacja SYMONDSA i LEE [4] z 1952 r. Później rozwiązano w podobny sposób szereg problemów związanych z *poprzecznymi* udarowymi obciążeniami prętów i płyt. Stosunkowo obszerny przegląd tych rozwiązań zawiera praca [1].

Zagadnienie omawiane w niniejszej pracy należy również do tego typu zagadnień. Dotyczy ono jednak obciążenia podłużnego, słabo wygiętego pręta. Ze względu na duże znaczenie odkształceń sprężystych w początkowej fazie pracy pręta model ciała sztywno-plastycznego wprowadzono dopiero z chwilą pojawienia się w pręcie odkształceń plastycznych. Ta dwoistość założeń pozwoliła jednak w prosty sposób uzyskać obraz pracy pręta i ocenić wielkość trwałych odkształceń spowodowanych dużym krótkotrwałym obciążeniem.

## 1. Wyboczenie pręta sprężystego

Rozważa się pręt obustronnie przegubowo podparty o przekroju dwuteowym idealnym (przekrój dwupunktowy), wykonany z materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Pręt posiada niewielkie wygięcie początkowe, o którym zakłada się, że jest w kształcie półfali sinusoidy. Obciążenie pręta stanowi siła podłużna ściskająca, nagle przyłożona, o krótkim czasie trwania  $t_1$ . W czasie  $t_1$  siła posiada stałą wielkość  $P$  (rys. 1).



Rys. 1



Po przyłożeniu obciążenia pręt zaczyna drgać, a postać tych drgań przy założeniu małych ugięć pozostaje sinusoidalną. Do opisu ruchu pręta wystarczy jedna funkcja czasu, np. wychylenie środkowego przekroju [3]:

$$(1.1) \quad T(t) = e \left[ \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}} + \left( 1 - \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}} \right) \cos \sqrt{\Omega^* \left( 1 - \frac{P}{P_E} \right)} t \right].$$

Tutaj oznaczają (rys. 2):  $T(t)$  wychylenie środkowego przekroju pręta liczone od prostej łączącej przeguby,  $e$  początkowe wychylenie środkowego przekroju pręta,  $t$  czas liczony od chwili przełożenia obciążenia,  $P_E$  eulerowską siłę krytyczną  $\pi^2 EI/L^2$ ,  $\Omega^* = \pi^2 P_E/mL^2$  oraz  $m$  masą pręta na jednostkę jego długości.

Równanie (1.1) odnosi się do obszaru podkrytycznego, to jest dla  $P < P_E$ . Ponadto nie uwzględnia ono tłumienia.

Po czasie  $t_1$  siła podłużna  $P$  znika, a ruch pręta opisywany jest za pomocą równania

$$(1.2) \quad T(t) = e + (T_1 - e) \cos \sqrt{\Omega^*} (t - t_1) + \frac{\dot{T}_1}{\sqrt{\Omega^*}} \sin \sqrt{\Omega^*} (t - t_1),$$

gdzie  $T_1$  oznacza wychylenie środkowego przekroju pręta w chwili  $t_1$  oraz  $\dot{T}_1$  prędkość poprzeczną środkowego przekroju w chwili  $t_1$ .

Pojawienie się w pręcie naprężeń plastycznych, w szczególności uplastycznienie najniekorzystniej obciążonego przekroju (tj. przekroju środkowego), może nastąpić w wyniku łącznego działania siły podłużnej i momentu zginającego. Ze względu na założenie małego wygięcia wstępnego, decydującym będzie tu

wpływ siły podłużnej. Dlatego uplastycznienie może mieć miejsce jedynie tylko w chwili  $t \leq t_1$ , a nie po zniknięciu obciążenia pomimo tego że, jak wynika ze wzoru (1.2), wygięcie pręta, a więc i moment zginający w tej drugiej fazie, mogą być większe.

Dla wyznaczenia minimalnej wielkości siły  $P$ , która może spowodować uplastycznienie środkowego przekroju, należy przyjąć, że fakt ten nastąpi w chwili  $t_0$ , tj. w chwili maksymalnego wygięcia pręta. Czas ten można znaleźć z warunku

$$\cos \sqrt{\Omega^* \left( 1 - \frac{P}{P_E} \right)} t_0 = -1,$$

zatem

$$(1.3) \quad t_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\Omega^* \left( 1 - \frac{P}{P_E} \right)}}.$$

Wychylenie środkowego przekroju pręta wyniesie w chwili  $t_0$

$$(1.4) \quad T(t_0) = T_{\max} = e \left( \frac{2}{1 - \frac{P}{P_E}} - 1 \right).$$

Warunek uplastycznienia idealnego przekroju dwuteowego przy łącznym działaniu momentu zginającego i siły podłużnej ma, jak wiadomo, postać

$$(1.5) \quad \frac{M}{M_0} + \frac{P}{N_0} = 1.$$

Tutaj  $M$  i  $P$  oznaczają odpowiednio moment zginający i siłę podłużną działające w przekroju, a  $M_0$  i  $N_0$  takie wielkości tych sił wewnętrznych, które działając niezależnie, mogłyby spowodować uplastycznienie.

Dla przekroju środkowego mamy

$$(1.6) \quad M = P_E(T - e).$$

Ze względu na to, że uplastycznienie nastąpić ma w chwili  $t_0$ , warunek (1.5) przyjmie postać

$$2P_E e \left( \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}} - 1 \right) \frac{1}{M_0} + \frac{P}{N_0} = 1.$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe

$$(1.7) \quad X = \frac{P}{P_E}, \quad \lambda = \frac{N_0}{P_E}, \quad \mu = \frac{N_0 e}{M_0},$$

można ten warunek po przekształceniach napisać w postaci

$$(1.8) \quad X^2 - (2\mu + \lambda + 1)X + \lambda = 0,$$

a zatem

$$(1.9) \quad X_0 = \frac{2\mu + \lambda + 1 \mp \sqrt{(\lambda + 2\mu)^2 - 2\lambda + 4\mu + 1}}{2}.$$

Wzór (1.9) podaje więc tę minimalną wartość siły podłużnej  $P$ , która może spowodować uplastycznienie pręta, o ile czas jej działania wyniesie co najmniej  $t_0$  wg równania (1.3). Siła mniejsza niż określona za pomocą wzoru (1.9) nie może spowodować uplastycznienia.

Siły większe spowodują uplastycznienie przekroju środkowego w czasie odpowiednio krótszym. Podstawiając wyrażenie (1.1) do warunku (1.5) przy uwzględnieniu (1.6) łatwo uzyskać związek

$$(1.10) \quad X^2 - [1 + \lambda + \mu (1 - \cos \sqrt{\Omega^* (1 - X)t})]X + \lambda = 0,$$

pozwalający wyznaczyć te pary wartości  $X$  i  $t$ , przy których może nastąpić uplastycznienie środkowego przekroju pręta.

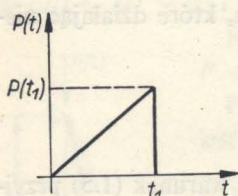


Dla obciążenia liniowo rosnącego w czasie  $P = at$ , czyli przy tzw. impulsie trójkątnym (rys. 3), wygodnie jest wprowadzić jako zmienną niezależną bezwymiarowy czas

$$(1.11) \quad z = 1 - \frac{P(t)}{P_E}.$$

Wtedy na wychylenie środkowego przekroju pręta w obszarze podkrytycznym otrzymuje się wyrażenie [2]

$$(1.12) \quad T(z) = \frac{2\pi\Omega^{1/2} e}{3\sqrt{3}} z^{1/2} \left\{ \left[ - \int_0^{2/3 \Omega^{1/2}} J_{-1/3}(\gamma) d\gamma + J_{2/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{2/3 \Omega^{1/2} z^{3/2}} J_{-1/3}(\gamma) d\gamma \right] J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} z^{3/2} \right) + \left[ \int_0^{2/3 \Omega^{1/2}} J_{1/3}(\gamma) d\gamma + \right. \right. \\ \left. \left. + J_{-2/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} \right) - \int_0^{2/3 \Omega^{1/2} z^{3/2}} J_{1/3}(\gamma) d\gamma \right] J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} z^{3/2} \right) \right\}.$$



Rys. 3

Tutaj przyjęliśmy następujące oznaczenia:

$$\Omega = \frac{\pi^2 P_E^3}{mL^2 a^2}, \quad \gamma = \frac{2}{3} \Omega^{1/2} s^{3/2},$$

a  $s$  oznacza zmienną pomocniczą.

Warunek uplastycznienia dla środkowego przekroju pręta można napisać w postaci

$$\frac{P_E [T(z) - e]}{M_0} + \frac{P_E (1 - z)}{N_0} = 1.$$

Oznaczając

$$(1.13) \quad T^*(z) = \frac{T(z)}{e}$$

otrzymujemy

$$\frac{P_E e [T^*(z) - 1]}{M_0} + \frac{P_E (1 - z)}{N_0} = 1.$$

Jeżeli ponadto wprowadzić wielkości bezwymiarowe wg (1.7), to można warunek ten doprowadzić do postaci

$$(1.14) \quad T^*(z) = \frac{z + \lambda + \mu - 1}{\mu}.$$

Stąd można wyznaczyć tę wartość bezwymiarowego czasu  $z$ , a zatem tę wielkość siły podłużnej, przy której nastąpi uplastycznienie środkowego przekroju pręta przy danym współczynniku  $\Omega$  charakteryzującym dynamiczność procesu wyboczenia.

Na rysunku 4 linią ciągłą wykreślono pęk krzywych  $T^*(z)$  dla różnych wartości  $\Omega$ . Linią przerywaną zaznaczono prostą, której równanie stanowi prawą stronę wzoru (1.14). Punkty przecięcia prostej z poszczególnymi krzywymi  $T^*(z)$  posiadają odcięte  $z_0$ , przy których dla danej wartości współczynnika  $\Omega$  nastąpi uplastycznienie środkowego przekroju pręta.

## 2. Wyoboczenie pręta z przegubem plastycznym

Z chwilą spełnienia w środkowym przekroju pręta warunku (1.5) przy równoczesnym braku odciążenia kończy się faza, w której cały pręt pracuje sprężysto i rozpoczyna się następna, tj. faza pracy z przegubem plastycznym w środku rozpiętości. Pręt składa się wtedy z dwóch odcinków sprężystych połączonych uplastycznionym przekrojem. Jednakże w dalszych rozważaniach pominię się odkształcenia sprężyste traktując odcinki pręta jako *sztynwo-plastyczne*.

Ponadto odcinki między przegubem plastycznym a podporami traktowane będą jako proste, jakkolwiek na końcu fazy sprężystej są one lekko wygięte. Takie przyjęcie upraszcza niezmiernie całość rozważań oraz wydaje się najsluszniejsze ze względu na to, że na skutek działania sił bezwładności po uplastycznieniu przekroju środkowego krzywizna tych odcinków zmniejsza się, a nawet zmienia znak.

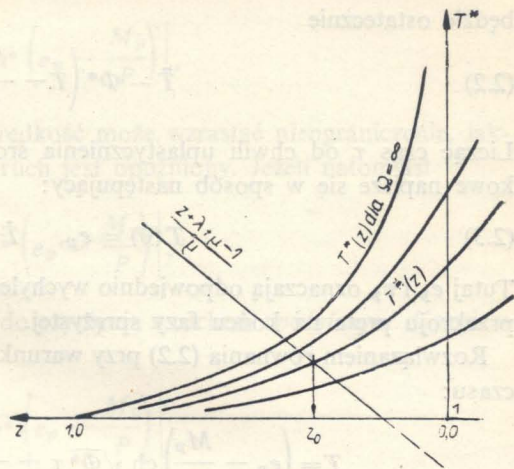
Przyjmuje się, że po utworzeniu się przegubu plastycznego obciążenie zachowuje przez pewien krótki czas stałą wartość, która w dalszym ciągu oznaczana będzie przez  $P$ . Jeżeli przemieszczenia są małe, to przy podanych wyżej założeniach ruch obu połówek pręta można traktować jako obrót sztywnych odcinków dookoła punktów podparcia. Siły bezwładności są wtedy normalne do sztywnych odcinków pręta i mają wykres jak na rys. 5.

Z warunku równowagi górnego odcinka otrzymuje się (identycznie zresztą dla odcinka dolnego)

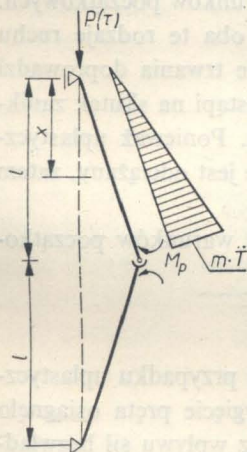
$$PT - M_p - \frac{ml^2}{3} \ddot{T} = 0,$$

stąd

$$\ddot{T} - \frac{3P}{ml^2} \left( T - \frac{M_p}{P} \right) = 0.$$



Rys. 4



Rys. 5



Przy oznaczeniu

$$(2.1) \quad \Phi^* = \frac{3P}{ml^2}$$

będzie ostatecznie

$$(2.2) \quad \ddot{T} - \Phi^* \left( T - \frac{M_p}{P} \right) = 0.$$

Licząc czas  $\tau$  od chwili uplastycznienia środkowego przekroju, warunki początkowe napisze się w sposób następujący:

$$(2.3) \quad T(0) = e_p, \quad \dot{T}(0) = v_p.$$

Tutaj  $e_p$  i  $v_p$  oznaczają odpowiednio wychylenie i prędkość poprzeczną środkowego przekroju pręta na końcu fazy sprężystej.

Rozwiązaniem równania (2.2) przy warunkach początkowych (2.3) będzie funkcja czasu:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} T &= \left( e_p - \frac{M_p}{P} \right) \text{ch} \sqrt{\Phi^*} \tau + \frac{v_p}{\sqrt{\Phi^*}} \text{sh} \sqrt{\Phi^*} \tau + \frac{M_p}{P}, \\ \dot{T} &= \sqrt{\Phi^*} \left( e_p - \frac{M_p}{P} \right) \text{sh} \sqrt{\Phi^*} \tau + v_p \text{ch} \sqrt{\Phi^*} \tau, \\ \ddot{T} &= \Phi^* \left( e_p - \frac{M_p}{P} \right) \text{ch} \sqrt{\Phi^*} \tau + \sqrt{\Phi^*} v_p \text{sh} \sqrt{\Phi^*} \tau. \end{aligned}$$

Rodzaj ruchu opisywanego równaniami (2.4) zależy od warunków początkowych. Może tu mieć miejsce ruch opóźniony, przyspieszony lub oba te rodzaje ruchu kolejno. Ruch przyspieszony przy dostatecznie długim czasie trwania doprowadzi do zniszczenia pręta. W innym przypadku zniszczenie nie nastąpi na skutek zaniknięcia ruchu i wytworzenia się stanu równowagi statycznej. Ponieważ uplastycznienie może nastąpić jedynie w momencie, kiedy przekrój nie jest odciążany, zatem musi być  $v_p \geq 0$ .

Drugi stały współczynnik w równaniach (2.4), zależny od warunków początkowych, to wielkość:  $e_p - M_p/P$ . Jeżeli

$$e_p - M_p/P > 0,$$

to wtedy równania (2.4) opisują ruch przyspieszony. W tym przypadku uplastycznienie środkowego przekroju nastąpiło wcześniej, zanim wygięcie pręta osiągnęło wielkość odpowiadającą położeniu równowagi statycznej (bez wpływu sił bezwładności) przy danej sile  $P$  dla pręta absolutnie sprężystego.

Jeżeli natomiast

$$e_p - \frac{M_p}{P} < 0.$$

to uplastycznienie nastąpiło przy większym wygięciu niż to, jakie odpowiada sta-  
tecznemu działaniu siły  $P$ . Innymi słowy, wygięcie umożliwiające powstanie prze-

gubu plastycznego nastąpiło w wyniku działania sił bezwładności. W tym przypadku może powstać ruch przyspieszony lub opóźniony, co zależy od wartości  $v_p$ . Mianowicie jeżeli

$$v_p > \left| \sqrt{\Phi^*} \left( e_p - \frac{M_p}{P} \right) \right|,$$

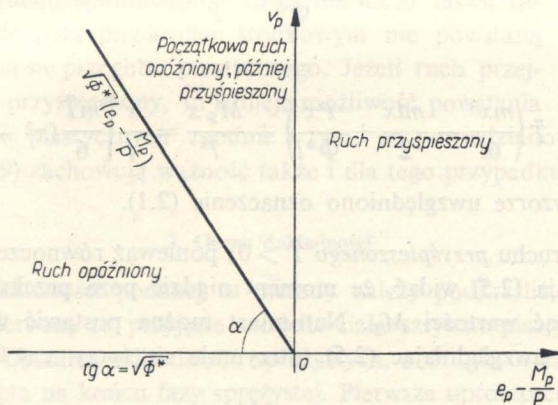
to z równań (2.4) jest widoczne, że prędkość może wzrastać nieograniczenie, jakkolwiek na początku fazy plastycznej ruch jest opóźniony. Jeżeli natomiast

$$v_p < \left| \sqrt{\Phi^*} \left( e_p - \frac{M_p}{P} \right) \right|,$$

to prędkość stale maleje, a więc mamy do czynienia z ruchem *opóźnionym*. Granicznym będzie tu więc przypadek, kiedy

$$v_p = \left| \sqrt{\Phi^*} \left( e_p - \frac{M_p}{P} \right) \right|.$$

Mamy wtedy ruch opóźniony, ale prędkość osiąga wartość zero po nieskończonej długim czasie. Równocześnie wychylenie środkowego przekroju pręta dąży do wartości  $M_p/P$ .



Rys. 6

Rysunek 6 przedstawia graficznie wynik przeprowadzonej dyskusji warunków początkowych. Np. w przypadku uplastycznienia przekroju środkowego na skutek działania siły  $P$  o wielkości wg wzoru (1.9)  $v_p = 0$  oraz  $e_p - M_p/P < 0$ . Powinien zatem powstać ruch opóźniony, co ze względu na zerową prędkość początkową oznacza ruch z prędkością ujemną. Spowoduje to natychmiastowe zniknięcie przegubu plastycznego, co unieważnia dla tego przypadku wzory (2.4), ponieważ pręt wraca do fazy sprężystej.



Dla nieco większej siły  $P$ ,  $v_p > 0$  oraz  $e_p - M_p/P < 0$ . Wtedy będzie również ruch opóźniony, o ile tylko

$$v_p \leq \left| \sqrt{\Phi^*} \left( e_p - \frac{M_p}{P} \right) \right|.$$

Odształcenia plastyczne osiągną pewną wielkość, ale zniszczenie pręta nie nastąpi.

Równania (2.4) uzyskano przy założeniu, że w pręcie, w środkowym przekroju, tworzy się jeden stacjonarny przegub plastyczny. Takie przyjęcie jest uzasadnione wynikami analizy sprężystej, niemniej jednak konieczne jest wyznaczenie granic stosowalności uzyskanego rozwiązania. Można to przeprowadzić badając, czy i kiedy poza przekrojem środkowym powstaną warunki do utworzenia się nowego przegubu plastycznego. Jeżeli to nastąpi, to pręt przechodzi do nowej fazy pracy plastycznej, w której schemat z jednym przegubem plastycznym w środku rozpiętości jest już nieważny.

Moment zginający w dowolnym przekroju pręta wyniesie (rys. 5)

$$M(x) = PT \frac{x}{l} + \frac{m\ddot{T}x^3}{6l} - \frac{m\ddot{T}lx}{2} = \ddot{T} \left( \frac{mx^3}{6l} - \frac{mlx}{2} \right) + \frac{Px}{l} T.$$

Ponieważ z równania (2.2) wynika, że

$$T = \frac{\ddot{T}}{\Phi^*} + \frac{M_p}{P},$$

zatem

$$(2.5) \quad M(x) = \ddot{T} \left( \frac{mx^3}{6l} - \frac{mlx}{2} + \frac{Px}{\Phi^* l} \right) + \frac{M_p x}{l} = \frac{x}{l} \left[ \frac{m\ddot{T}}{6} (x^2 - l^2) + M_p \right].$$

W powyższym wzorze uwzględniono oznaczenie (2.1).

W przypadku ruchu przyspieszonego  $\ddot{T} > 0$ ; ponieważ równocześnie  $x^2 - l^2 < 0$ , zatem z wyrażenia (2.5) widać, że moment nigdzie poza przekrojem środkowym nie może osiągnąć wartości  $M_p$ . Natomiast można postawić warunek  $M(x) = -M_p$ . Skąd, uwzględniając (2.5), otrzymuje się (przy  $x \neq 0$ ,  $x \neq l$ )

$$(2.6) \quad \ddot{T} = \frac{6M_p}{mx(l-x)}.$$

Jest to ta wartość przyspieszenia, przy której w przekroju o odciętej  $x$  powstanie moment zginający o wielkości  $-M_p$ , a zatem powstaną warunki do utworzenia się przegubu plastycznego. Wartość ta będzie najmniejsza dla takiego  $x$ , przy którym mianownik (2.6) osiągnie maksimum. Zatem odcięta przekroju, w którym powstanie nowy przegub plastyczny, wynosi

$$(2.7) \quad x_1 = \frac{l}{2}.$$



Podstawiając do (2.6) znajdziemy

$$(2.8) \quad \ddot{T}_1 = \frac{24M_p}{ml^2}.$$

W wyniku można stwierdzić, że w przypadku ruchu przyspieszonego w I fazie plastycznej ruch wg wzorów (2.4) odbywa się do chwili, kiedy przyspieszenie osiągnie wartość określoną równaniem (2.8). Gdy to nastąpi, w środkach połówek pręta powstają nowe przeguby plastyczne, co powoduje zmianę równań ruchu. Pręt przechodzi do II fazy plastycznej (rys. 7). Z równania (2.2) znajdziemy

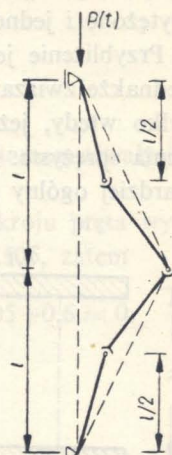
$$T = \frac{\ddot{T}}{\Phi^*} + \frac{M_p}{P}.$$

Podstawiając (2.8) przy uwzględnieniu (2.1) oraz (1.5) otrzymuje się

$$(2.9) \quad T_1 = \frac{9M_p}{P} = 9M_0 \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{N_0} \right).$$

Jest to wielkość wychylenia środkowego przekroju pręta na końcu I fazy plastycznej. Musi być tu jednak  $T_1 \geq e_p$  jako konsekwencja warunków początkowych.

W przypadku ruchu *opóźnionego* z równania (2.5) łatwo zauważyć, że nigdzie poza przekrojem środkowym nie powstaną warunki utworzenia się przegubu plastycznego. Jeżeli ruch przejdzie następnie w przyspieszony, to istnieje możliwość powstania nowych przegubów plastycznych zgodnie z tym, co powiedziano wyżej, a zatem wzory (2.6) do (2.9) zachowują ważność także i dla tego przypadku.



Rys. 7

### 3. Ocena dokładności

Przy ocenie dokładności podanej tu metody należy podkreślić, że istnieją dwa źródła błędów. Pierwsze to przyjęcie modelu ciała sztywno-plastycznego i pominięcie w pewnym obszarze odkształceń sprężystych, a drugie to zaniedbanie krzywizny połówek pręta na końcu fazy sprężystej. Pierwsze uproszczenie posiada więc charakter fizyczny, a drugie geometryczny.

Jak już wspomniano poprzednio, pominięcie krzywizny połówek pręta jest uzasadnione ze względu na to, że, jak wynika z przeprowadzonej analizy, krzywizna ta w dalszej fazie pracy pręta zmienia znak. Zatem usztywnienie połówek pręta w postaci wygiętej powodowałoby zwiększenie błędu. Niemniej jednak na początku I fazy plastycznej wpływ tej krzywizny jest większy i dlatego np. wartości  $T_1$  uzyskane ze wzoru (2.9) a bardzo bliskie wartości  $e_p$  są wątpliwe.

Łączy się to z wpływem uproszczenia fizycznego, który jest duży, jeżeli odkształcenia plastyczne nie są dostatecznie wielkie w stosunku do sprężystych. Dlatego szybkie przejście pręta od I do II fazy plastycznej, co ma miejsce dla  $P$  bliskich  $N_0$ , nie jest dobrze oceniane przez podaną tu teorię. Towarzyszy mu bowiem



stosunkowo małe przemieszczenie w przegubie plastycznym. Należy to wziąć pod uwagę przy korzystaniu z podanych wzorów.

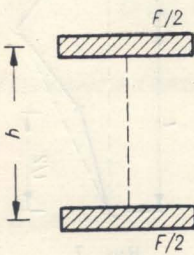
Jako miarę dokładności rachunku opartego na modelu ciała sztywno-plastycznego przyjmuje się zazwyczaj [1] wartość stosunku

$$(3.1) \quad R = \frac{E_{pl}}{E_{spr}},$$

gdzie  $E_{pl}$  oznacza energię odkształcenia plastycznego,  $E_{spr}$  energię odkształcenia sprężystego wyliczoną przy założeniu, że wszystkie przekroje pręta są jednakowo wyteżone i jednocześnie osiągają maksymalny moment zginający równy  $M_p$ .

Przybliżenie jest naturalnie tym lepsze, im większą jest wartość stosunku  $R$ . Jednakże związanie pewnej wartości  $R$  z konkretną wielkością błędu jest możliwe tylko wtedy, jeżeli znane jest rozwiązanie «dokładne», uwzględniające odkształcenia sprężyste. Zatem w rozpatrywanym przypadku wielkość  $R$  daje jedynie najbardziej ogólny pogląd na dokładność rachunku.

Dla jednej połowy pręta będzie



Rys. 8

$$(3.2) \quad \begin{aligned} E_{pl} &= M_p \vartheta_{pl} = M_p \frac{T}{l}, \\ E_{spr} &= \frac{1}{2} \int_0^l M y'' dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_p^2}{EJ} dx = \frac{M_p^2 l}{2EJ}, \\ R &= \frac{2EJT}{M_p l^2}. \end{aligned}$$

#### 4. Przykład

Podaną metodę obliczeniową ilustruje poniższy przykład.

Pręt obustronnie przegubowo podparty, o przekroju dwuteowym wg rys. 8, wykonany jest ze stali miękkiej o granicy plastyczności  $2500 \text{ kG/cm}^2$  i posiada następujące wielkości charakterystyczne: pole przekroju poprzecznego  $F = 2.60 = 120 \text{ cm}^2$ , moment bezwładności  $I = 96\,000 \text{ cm}^4$ , długość  $L = 2000 \text{ cm}$ , strzałka wygięcia wstępnego (stan beznaprężeniowy)  $e = L/400 = 5 \text{ cm}$ ,  $N_0 = F \cdot \sigma_{pl} = 300 \text{ T}$ ,  $M_0 = 0.5 \cdot N_0 h = 12\,000 \text{ Tcm}$  oraz  $P_E = \pi^2 EI/L^2 = 495 \text{ T}$ . Zatem współczynniki wynoszą

$$\lambda = \frac{N_0}{P_E} = \frac{300}{495} = 0.6, \quad \mu = \frac{N_0 e}{M_0} = \frac{300 \cdot 5}{12\,000} = 0.125, \quad \Omega^* = \frac{\pi^2 P_E}{mL^2} = 1260 \text{ sek}^{-2}.$$

Obciążenie pręta stanowi siła podłużna ściskająca, nagle przyłożona, o wielkości  $P = 250 \text{ T}$ . Czas trwania obciążenia wynosi  $0.12 \text{ sek}$ . Zatem

$$\Phi^* = \frac{3P}{ml^2} = 780 \text{ sek}^{-2}.$$



Minimalną siłą mogącą spowodować powstanie przegubu plastycznego oblicza się ze wzoru (1.9):

$$X_0 = \frac{2 \cdot 0,125 + 0,6 + 1 - \sqrt{(0,6 + 2 \cdot 0,125)^2 - 2 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,125 + 1}}{2} = 0,42.$$

Wzięto pod uwagę jedynie znak minus przed pierwiastkiem, ponieważ znak plus daje  $P_0 > P_E$ :

$$P_0 = X_0 P_E = 0,42 \cdot 495 = 208 \text{ [T]}.$$

Minimalny czas trwania wg wzoru (1.3) wynosi

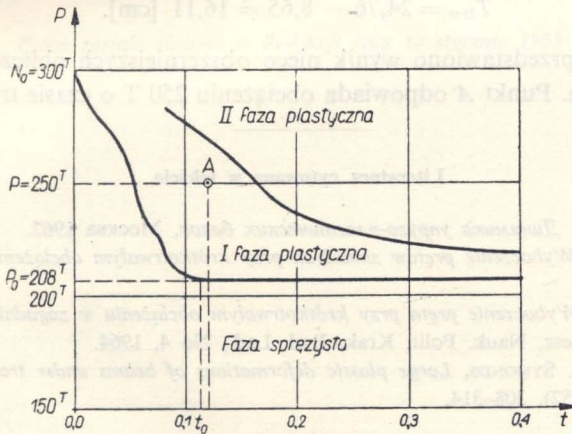
$$t_0 = \frac{\pi}{\sqrt{1260 \cdot (1 - 0,42)}} = 0,116 \text{ [sek]}.$$

Rzeczywiste obciążenie jest większe, zatem należy się liczyć z powstaniem trwałych odkształceń.

Czas utworzenia się przegubu plastycznego w środkowym przekroju pręta wyznaczony zostanie z równania (1.10). Ponieważ  $X = 250/495 = 0,505$ , zatem

$$0,505^2 - [1 + 0,6 + 0,125 \cdot (1 - \cos \sqrt{1260 (1 - 0,505) t_p})] \cdot 0,505 + 0,6 = 0.$$

Stąd  $t_p = 0,051$  sek.



Rys. 9

Wychylenie przekroju środkowego w chwili tworzenia się tam przegubu plastycznego oraz jego prędkość poprzeczną daje wzór (1.1):

$$e_p = 5 \left[ \frac{1}{1 - 0,505} + \left( 1 - \frac{1}{1 - 0,505} \right) \cos \sqrt{1260 \cdot (1 - 0,505) \cdot 0,051} \right] = 8,65 \text{ [cm]},$$

$$v_p = -5 \left( 1 - \frac{1}{1 - 0,505} \right) \cdot \sqrt{1260 \cdot (1 - 0,505)} \sin \sqrt{1260 \cdot (1 - 0,505)} \times \\ \times 0,051 = 122 \text{ [cm/sek]},$$

$$M_p = \left(1 - \frac{P}{N_0}\right) M_0 = \left(1 - \frac{250}{300}\right) \cdot 12\,000 = 2000 \text{ [Tcm]}.$$

Zatem będzie

$$e_p - \frac{M_p}{P} = 8,65 - \frac{2000}{250} = 0,65 > 0,$$

$$v_p = 122 \text{ [cm/sek]} > \left| \sqrt{\Phi^*} \left( e_p - \frac{M_p}{P} \right) \right| = 18,1 \text{ [cm/sek]},$$

co oznacza, że przekrój środkowy poruszać się będzie ruchem przyśpieszonym. Po upływie 0,12 sek. od chwili przyłożenia siły  $P$  wychylenie środkowego przekroju wyniesie

$$\begin{aligned} T &= 0,65 \operatorname{ch} [\sqrt{780} (0,12 - 0,051)] + \frac{122}{\sqrt{780}} \operatorname{sh} [\sqrt{780} (0,12 - 0,051)] + \frac{2000}{250} = \\ &= 24,76 \text{ [cm]} < \frac{9M_p}{P} = 72 \text{ [cm]}, \end{aligned}$$

co oznacza, że pręt nie przejdzie do drugiej fazy plastycznej. Ugięcie trwałe, liczone od prostej łączącej przeguby, wyniesie

$$T_{trw} = 24,76 - 8,65 = 16,11 \text{ [cm]}.$$

Na rysunku 9 przedstawiono wynik nieco obszerniejszych obliczeń dotyczących tego samego pręta. Punkt  $A$  odpowiada obciążeniu 250 T o czasie trwania 0,12 sek.

#### Literatura cytowana w tekście

1. И. Л. Дикович, *Динамика упруго-пластических балок*, Москва 1962.
2. Z. KORDECKI, *Wyboczenie prętów smukłych przy krótkotrwałym obciążeniu*, Rozpr. Inżyn., 2, 12 (1964).
3. Z. KORDECKI, *Wyboczenie pręta przy krótkotrwałym obciążeniu w zagadnieniach konstrukcji wież wyciągowych*, Zesz. Nauk. Polit. Krak. Bud. Łąd., No 4, 1964.
4. E. H. LEE, P. S. SYMONDS, *Large plastic deformations of beams under transverse impact*, J. Appl. Mech., 19 (1952), 308–314.

#### Резюме

#### НЕУПРУГИЙ ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ ПРИ КРАТКОВРЕМЕННОЙ НАГРУЗКЕ

Обсуждается вопрос стержня с небольшим начальным синусоидальным прогибом, под влиянием нагрузки продольной сжимающей, динамической и кратковременной силой.

Дается приближенный метод расчета, с помощью которого стержень рассматривается первоначально как упруго-пластический, а с момента появления первых пластических деформации (в середине пролета) — как жестко-пластический. Предполагается, что сечение стержня является идеальным двутавром.



Определяется минимальная нагрузка, вызывающая появление пластического шарнира в середине пролета стержня для случая внезапно приложенной нагрузки постоянной величины, а также для случая нагрузки линейно зависящей от времени. Исследовалось движение стержня с одним пластическим шарниром для случая нагрузки постоянной величины. Определяется область важности этой схемы, а также схема работы стержня в дальнейшей пластической фазе.

Оценивается приближенно степень точности метода. Дается пример иллюстрирующий ход действия.

### Summary

#### ANELASTIC BUCKLING OF A BAR UNDER SHORT DURATION LOAD

The object of the considerations is a bar of small initial sinusoidal bend, loaded by a longitudinal, compressive, dynamic load of short duration.

An approximate computation method is proposed, in which the bar is first considered to be elastic-plastic and, then, starting from the instant of the first occurrence of elastic strain (at middle span), rigid-plastic. The profile is assumed to be a perfect double tee profile.

The minimum load producing a plastic hinge at middle span in the case of a suddenly applied constant load and a load linearly depending on time have been determined. The motion of a bar with one plastic hinge is analysed in the case of a constant load. The validity range of that scheme is determined as well as the type of behaviour of the bar in the plastic phase which follows.

The accuracy of the method is estimated in an approximate manner. The procedure is illustrated by an example.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 stycznia 1965 r.*