

PEWIEN PRZYPADEK KSZTAŁTOWANIA BELEK POD OBCIĄŻENIAMI RUCHOMYMI

WOJCIECH MARKS (WARSZAWA)

1. Wstęp

Celem pracy jest podanie metody kształtowania belek z betonu sprężonego znajdujących się pod działaniem obciążeń ruchomych. W wielu publikacjach podano rozwiązania różnych przypadków kształtowania belek stalowych oraz betonowych pod działaniem obciążenia stałego. Obszerny spis bibliograficzny tych prac oraz najważniejsze wnioski z nich wypływające zestawiono w pracy [1].

Kształtowaniem z uwzględnieniem obciążenia ruchomego zajmowali się W. PRAGER, O. GROSS i M. SAVE w Stanach Zjednoczonych oraz JU. A. RADCIG i A. I. WINOGRADOW w Związku Radzieckim. O. GROSS i W. PRAGER [3] na przykładzie belki utwierdzonej na jednym końcu i swobodnie podpartej na drugim pokazali metodę postępowania przy poszukiwaniu kształtu belek hiperstatycznych o minimalnym ciężarze pod działaniem siły skupionej, która mogła być przykładana kolejno w różnych punktach belki. Zadanie to autorzy ci rozwiązali na podstawie założeń teorii plastyczności. Na podstawie otrzymanych wyników podali również rozwiązanie dla takiej belki w przypadku siły przesuwanej po belce w sposób ciągle. W. PRAGER i M. SAVE [4] na podstawie pracy [3] podali kilka przykładów rozwiązań belek hiperstatycznych obciążonych pojedynczą siłą skupioną przesuwaną wzdłuż belki na gruncie teorii plastyczności. JU. A. RADCIG [5] przedstawił zagadnienie kształtowania kratownic hiperstatycznych obciążonych siłami stale działającymi oraz pojedynczą siłą, która może dodatkowo działać na różne węzły kratownicy. Jako kryterium kształtowania przyjęto minimalny ciężar konstrukcji.

A. I. WINOGRADOW [6] rozpatrzył ustroje poddane działaniu dowolnej kombinacji wielu niezależnych obciążeń, działających w określonych punktach konstrukcji. Kształt przekrojów autor wyznaczał z warunku minimum objętości materiału jednorodnego przy przyjętych naprężeniach dopuszczalnych. Podał on wzory na momenty zginające i siły normalne, wg których trzeba kształtować poszczególne przekroje, oraz sformułował stwierdzenie, że objętość konstrukcji, poddanej zginaniu pochodzącemu od obciążenia stałego i niezależnych obciążeń działających chwilowo, jest równa objętości przy pełnym obciążeniu i połowie sumy objętości potrzebnych do przeniesienia poszczególnych obciążeń.

W niniejszej pracy sformułowano kryterium kształtowania belek przy obciążeniu ruchomym, oparte na wyrównywaniu maksymalnych potencjałów jednostkowych w możliwie wielu punktach belki. Następnie zanalizowano położenie obciążenia ruchomego, które wywołuje w danym przekroju belki izostatycznej powstanie

maksymalnych wartości potencjału jednostkowego i wyznaczono funkcję $g(u, y)$, określającą grubość przekroju belki, zmienną wzdłuż rozpiętości i wysokości. Otrzymane zależności wykorzystano w przykładzie liczbowym, w którym wyznaczono kształt przęśla mostu kolejowego sprężonego.

Przyjęto, że spełnione są następujące założenia:

1. Odształcenia są sprężyste i mogą być uważane za dostatecznie małe; materiał belki podlega prawu Hooke'a.
2. Rozkład naprężeń i odształceń może być wyznaczony z dostateczną dokładnością na podstawie wzorów wytrzymałości materiałów.
3. Wpływ tarcia kabli i odształceń belek na siły sprężające może być pominięty.
4. Obciążenia składają się z grupy sił skupionych oraz obciążenia ciągłego, równomiernie rozłożonego. Siły skupione mają określone wielkości i znajdują się zawsze w stałych odległościach od siebie. Jeżeli liczba sił jest większa niż dwie, to są one równe. Obciążenie ciągłe może być co najwyżej raz przerwane na długości belki.

Przyjęcie takich założeń dotyczących obciążeń wynika z tego, że na belki mostowe, które są przedmiotem niniejszego opracowania, może działać bardzo wiele różnych rodzajów obciążenia, których ściśle określenie nie jest możliwe. Dlatego też wszelkie konstrukcje mostowe są obliczane i projektowane na obciążenia normowe. Obciążenia te są różne w różnych krajach i ulegają zmianom w miarę pojawienia się coraz cięższych pojazdów. Wszystkie one jednak sprowadzają obciążenia rzeczywiste działające na konstrukcję do sił skupionych i obciążenia ciągłego równomiernie rozłożonego. Przyjęte w pracy obciążenia pozwalają kształtować belki na obciążenia drogowe i kolejowe przewidziane w polskich normach.

W pracy przyjęto następujące oznaczenia:

- a wysokość belki,
- b szerokość półki,
- c grubość półek,
- $g(u, y)$ grubości belki,
- l rozpiętość belki,
- u, y współrzędne przekrojów poprzecznych belki,
- x odległość obciążenia ciągłego od lewej podpory belki,
- e rzędne środków ciężkości uzbrojenia sprężającego,
- p obciążenie ruchome równomiernie rozłożone (jednostkowe),
- A pole przekroju poprzecznego,
- J moment bezwładności przekroju poprzecznego,
- S moment statyczny,
- E moduł sprężystości liniowej,
- G moduł sprężystości postaciowej,
- P siła sprężająca,
- M moment zginający,
- T siła styczna,
- M_1, T_1 maksymalny moment zginający i odpowiadająca temu momentowi siła styczna w przekroju o odciętej u ,
- T_0, M_0 maksymalna siła styczna i odpowiadający tej sile moment zginający w przekroju o odciętej u ,
- Ψ jednostkowy potencjał odształcenia sprężystego,

σ naprężenie normalne,
 τ naprężenie styczne,
 ν współczynnik Poissona,

$$\eta = \frac{y}{l/2}$$

$$\kappa = \sqrt{2(1+\nu)}.$$

Indeks dolny p oznacza obciążenie ruchome, kreska nad (pod) symbolem oznacza największą (najmniejszą) wartość dozwoloną.

2. Kryterium kształtowania

Różne kryteria kształtowania, a w szczególności kryterium minimum potencjału omówiono szczegółowo w wielu pracach, m.in. w [1 i 2]. Stanowi ono warunek wyrównania całkowitego potencjału jednostkowego przy stałej objętości tworzywa. Jest ono równoważne warunkowi minimum całkowitej energii odkształceń sprężystych przy zachowaniu danej objętości tworzywa. Wyrównywanie dotyczy wszystkich punktów konstrukcji, w których jest to możliwe ze względu na warunki ograniczające kształt. Jeżeli przyjąć za miarę sztywności konstrukcji odwrotność energii odkształceń sprężystych, to sformułowane kryterium jest równoważne kształtowaniu na największą sztywność [2].

W przypadku kształtowania na obciążenia ruchome każdemu ustawieniu obciążenia odpowiada inna wartość potencjału U_p w całej belce oraz Ψ_p w poszczególnych jej punktach. Ponieważ nie możemy zmieniać parametrów kształtu belki wraz ze zmianą obciążenia, przeto postąpimy w sposób następujący. Podzielimy myślowo belkę na n dostatecznie małych elementów o objętości $\Delta \mathcal{V}_i$. W każdym takim elemencie potencjał pochodzący od obciążeń ruchomych będzie równy $U_{p\Delta v_i} = \Psi_{pi} \Delta \mathcal{V}_i$. Potencjał jednostkowy Ψ_{pi} będzie funkcją położenia obciążeń i przy pewnym ich ustawieniu osiągnie wartość maksymalną. Utworzymy sumę maksymalnych potencjałów $U_{p\Delta v_i}$, jakie mogą wystąpić we wszystkich elementach $\Delta \mathcal{V}_i$ belki:

$$(2.1) \quad U_p^* = \sum_{i=1}^n U_{p\Delta v_i}^{\max} = \sum_{i=1}^n \Psi_{pi}^{\max} \Delta \mathcal{V}_i.$$

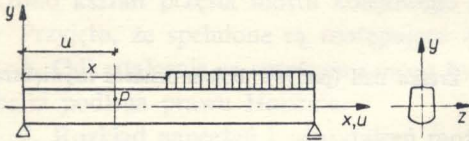
Nadamy belce taki kształt, aby ta suma przybierała wartość minimalną. Zmniejszając wymiary elementów $\Delta \mathcal{V}_i$ otrzymujemy w granicy całkę i wzór (1.1) przybiera postać

$$(2.2) \quad U_p^* = \int_V \Psi_p^{\max} d\mathcal{V}.$$

Na podstawie twierdzeń udowodnionych w pracy [2] możemy powiedzieć, że minimum całki (1.2) wystąpi wtedy, kiedy w każdym punkcie belki maksymalne potencjały jednostkowe Ψ_p będą wyrównane. Dochodzimy w ten sposób do następującego warunku kształtowania:

$$(2.3) \quad \Psi_p^{\max} = \bar{\Psi}.$$

Przyjęte kryterium określa taki kształt belki, przy którym maksymalne wartości potencjałów jednostkowych od obciążeń ruchomych, jakie mogą powstać we wszystkich jej punktach \mathcal{P} (rys. 1), są równe stałej wartości $\bar{\Psi}$.



Rys. 1

Na podstawie powyższego kryterium wyznaczamy kształty belek z dokładnością do jednej stałej. Tą stałą określamy przyjmując wartość liczbową $\bar{\Psi}$. Wartość tę możemy określić z warunków wytrzymałościowych, np. z warunku nie przekroczenia naprężeń

dozwolonych na krawędzi belki bądź też na osi obojętnej.

Kształty belek sprężonych wyznaczone z warunku wyrównania skrajnych potencjałów jednostkowych pod działaniem obciążeń ruchomych nie są jednak zbieżne z kształtami belek, wyznaczonymi z warunków wytrzymałościowych, które dobrze opisują wyężenie w betonie (np. hipotezy Mohra, Caquot). Stąd też nie jest możliwe takie dobranie wartości potencjału jednostkowego Ψ , przy której warunki wytrzymałościowe w betonie byłyby spełnione zarówno na osi belki, jak i na krawędziach. Oznacza to, że jeżeli wartość potencjału $\bar{\Psi}$ obierzemy ze względu na naprężenia normalne na krawędzi belki, to na osi obojętnej wystąpią naprężenia styczne $\tau_p = \sigma_p \sqrt{2(1+\nu)}$ a zatem dosyć duże; jeżeli natomiast wartość potencjału $\bar{\Psi}$ obierzemy ze względu na naprężenia na osi obojętnej, to naprężenia normalne σ_p na krawędziach wypadną za małe.

Kształt belki otrzymany z warunku wyrównania potencjałów jednostkowych pokazuje, jak należy rozłożyć materiał ze względu na sztywność. Kształt ten w następnym etapie (wymiarowanie) musi być poprawiony dla spełnienia warunków wytrzymałościowych, stateczności, warunków konstrukcyjnych itp. Dlatego w niektórych przekrojach belek należy dodać materiału zwiększając grubość środnika lub półki.

W niniejszej pracy obrano jako kryterium kształtowania wyrównanie potencjałów obciążeń ruchomych, decydujących o rzeczywistej odkształcalności konstrukcji, gdyż odkształcenia wywołane obciążeniem własnym, obciążeniem stałym i sprężeniem można sprowadzić do wielkości dowolnie małych przez odpowiedni dobór parametrów sprężania i przez znane sposoby zwierania konstrukcji.

Gdyby jako kryterium kształtowania obrać wyrównanie skrajnych potencjałów jednostkowych powstających pod działaniem wszystkich obciążeń, to rozwiązanie byłoby analogiczne.

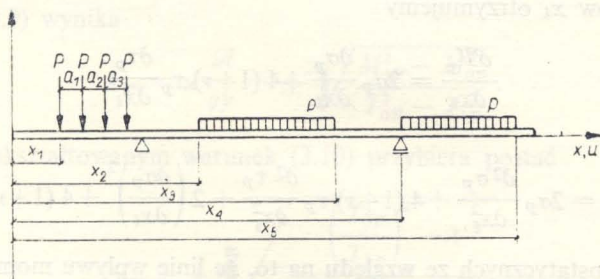
3. Wyznaczenie ustawienia obciążenia ruchomego, które wywołuje w danym punkcie belki maksymalny potencjał jednostkowy Ψ

Pierwszym zagadnieniem, które trzeba rozwiązać przy kształtowaniu belek według podanego kryterium, jest określenie ustawienia obciążenia, które w danym punkcie \mathcal{P} wywoła powstanie największego potencjału jednostkowego. Zdawać by się mogło, że każdemu punktowi \mathcal{P} przekroju normalnego belki odpowiada inne

ustawienie obciążenia. Okazuje się jednak, że w belkach izostatycznych każdemu przekrojowi odpowiadają jedynie dwa ustawienia obciążenia, wywołujące maksymalne potencjały jednostkowe. Można to sformułować w sposób następujący:

W każdym punkcie \mathcal{P} belki izostatycznej o dowolnym przekroju maksymalna wartość potencjału jednostkowego Ψ_p , wywołanego działaniem obciążeń opisanych w p. 1 (założenie 4), występuje tylko przy takim ustawieniu tego obciążenia, które wywołuje w przekroju normalnym belki przechodzącym przez punkt \mathcal{P} maksymalny moment zginający lub maksymalną siłę styczną.

W każdym przekroju normalnym belki izostatycznej istnieje przeto obszar, w którym maksymalne wartości Ψ_p występują przy ustawieniu obciążenia odpowiadającemu maksymalnemu momentowi zginającemu oraz obszar, w którym maksymalne wartości Ψ_p występują przy ustawieniu obciążenia odpowiadającemu maksymalnej sile stycznej. Przy innych ustawieniach obciążenia ruchomego, przy których nie występuje w rozpatrywanym przekroju M_{\max} ani T_{\max} w każdym punkcie przekroju Ψ_p osiąga mniejsze wartości.



Rys. 2

Istotnie, ustawienie obciążeń opisanych w p. 1 możemy jednoznacznie określić przez pięć niezależnych parametrów (rys. 2). Określają one położenie pierwszej siły \mathcal{P}_1 z grupy sił (x_1) oraz punkty początkowe i końcowe obydwóch odcinków obciążenia ciągłego (x_2 , x_3 , x_4 i x_5).

Potencjał jednostkowy Ψ_p w danym punkcie belki \mathcal{P} , traktowany jako funkcja ustawienia obciążenia, może osiągnąć wartość maksymalną wówczas, gdy

$$(3.1) \quad \frac{\partial \Psi_p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

albo gdy parametry x_i przybiorą wartości odpowiadające punktom granicznym przedziałów ich zmienności, albo punktom nieciągłości funkcji Ψ_p bądź jej pochodnych $\partial \Psi_p / \partial x_i$.

Różniczkując wyrażenie

$$(3.2) \quad \Psi_p = \frac{1}{2E} [\sigma_p^2 + 2(1+\nu)\tau_p^2]$$

względem σ_p i τ_p widzimy, że warunek konieczny, aby funkcja Ψ_p osiągała ekstremum jest spełniony tylko w punkcie $\sigma_p = 0$, $\tau_p = 0$. Wówczas jednak Ψ_p osiąga

minimum i jest równe zero. Na tej podstawie, uwzględniając symetrię funkcji Ψ_p względem σ_p i τ_p możemy powiedzieć, że przesunięcie obciążeń powoduje wzrost Ψ_p , gdy wywołuje wzrost σ_p i τ_p lub zmniejszenie Ψ_p , gdy wywołuje zmniejszenie σ_p i τ_p . Jeżeli przesunięcie obciążeń wywołuje wzrost σ_p i zmniejszenie τ_p lub odwrotnie, to nie wiemy, czy powoduje ono wzrost, czy zmniejszenie Ψ_p . W dalszym ciągu należy zatem rozpatrzyć takie zmiany ustawienia obciążeń, przy których rosną naprężenia normalne, a maleją styczne lub odwrotnie.

Zauważmy dalej, że funkcja $\Psi_p(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ może przybierać wartość maksymalną w punkcie x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , w którym $\partial\Psi_p/\partial x_i = 0$ tylko wtedy, gdy żadna z pochodnych $\partial^2\Psi_p/\partial x_i^2$ nie jest w tym punkcie dodatnia. Gdyby bowiem chociaż jedna z tych pochodnych, np. $\partial^2\Psi_p/\partial x_1^2$ była dodatnia, to Ψ_p traktowana jako funkcja x_1 przy założeniu $x_{2,3,4,5} = x_{2,3,4,5}^0$ osiągnęłaby w tym punkcie minimum, a zatem w punktach $x_1 \pm \delta$ przybierałaby wartości większe, co wyklucza istnienie maksimum Ψ_p w punkcie x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

Wypisując pierwsze i drugie pochodne wyrażenia (3.2) względem poszczególnych parametrów x_i otrzymujemy

$$(3.3) \quad \frac{\partial\Psi_p}{\partial x_i} = 2\sigma_p \frac{\partial\sigma_p}{\partial x_i} + 4(1+\nu)\tau_p \frac{\partial\tau_p}{\partial x_i}$$

oraz

$$(3.4) \quad \frac{\partial^2\Psi_p}{\partial x_i^2} = 2\sigma_p \frac{\partial^2\sigma_p}{\partial x_i^2} + 4(1+\nu)\tau_p \frac{\partial^2\tau_p}{\partial x_i^2} + 2\left(\frac{\partial\sigma_p}{\partial x_i}\right)^2 + 4(1+\nu)\left(\frac{\partial\tau_p}{\partial x_i}\right)^2.$$

W belkach izostatycznych ze względu na to, że linie wpływu momentów zginających i sił stycznych składają się wyłącznie z odcinków linii prostych — przyrosty naprężeń normalnych i stycznych, spowodowane przesunięciem obciążeń opisanych w p. 1, są liniowe. Możemy przeto napisać

$$(3.5) \quad \frac{\partial\tau_p}{\partial x_i} = a \frac{\partial\sigma_p}{\partial x_i}$$

oraz

$$(3.6) \quad \frac{\partial^2\tau_p}{\partial x_i^2} = a \frac{\partial^2\sigma_p}{\partial x_i^2}.$$

Uwzględniając zależności (3.5) i (3.6) w wyrażeniach (3.3) i (3.4) otrzymujemy

$$(3.7) \quad \frac{\partial\Psi_p}{\partial x_i} = [2\sigma_p + 4a(1+\nu)\tau_p] \frac{\partial\sigma_p}{\partial x_i}$$

oraz

$$(3.8) \quad \frac{\partial^2\Psi_p}{\partial x_i^2} = [2\sigma_p + 4a(1+\nu)\tau_p] \frac{\partial^2\sigma_p}{\partial x_i^2} + 2\left(\frac{\partial\sigma_p}{\partial x_i}\right)^2 + 4(1+\nu)a\left(\frac{\partial\tau_p}{\partial x_i}\right)^2.$$

Z wyrażenia (3.8) wynika, że w punktach, w których $\partial\Psi_p/\partial x_i = 0$, $\partial^2\Psi_p/\partial x_i^2$ jest zawsze dodatnie. Wynika stąd wniosek, że w punktach tych funkcja Ψ_p nie może przybierać wartości maksymalnych. Największe wartości funkcji Ψ_p mogą

więc wystąpić jedynie wtedy, gdy parametry x_i przybierają wartości odpowiadające punktom granicznym przedziałów ich zmienności albo punktom nieciągłości funkcji Ψ_p lub jej pochodnych. Z tych szczególnych położenia obciążenia możemy na podstawie powyższych rozważań wybrać dla każdego przekroju normalnego belki takie dwa ustawienia, przy których w różnych punktach rozpatrywanego przekroju wystąpią największe wartości potencjałów jednostkowych. Będą to zawsze takie położenia, które powodują w danym przekroju belki największy moment zginający lub największą siłę styczną. W niektórych przekrojach (przekroje na wspornikach lub nad podporami belek swobodnie podpartych) maksymalne potencjały jednostkowe występują we wszystkich punktach pod jednym obciążeniem.

Granice obszarów, w których występują największe Ψ_p przy jednym lub drugim ustawieniu, otrzymujemy porównując potencjały odpowiadające obydwom ustawieniom:

$$(3.9) \quad \left(\frac{M_{1p}y}{\mathcal{I}}\right)^2 + \left(\kappa \frac{T_{1p}\mathcal{S}}{\mathcal{I}_g}\right)^2 = \left(\frac{M_{0p}y}{\mathcal{I}}\right)^2 + \left(\kappa \frac{T_{0p}\mathcal{S}}{\mathcal{I}_g}\right)^2.$$

Z równania (3.9) wynika

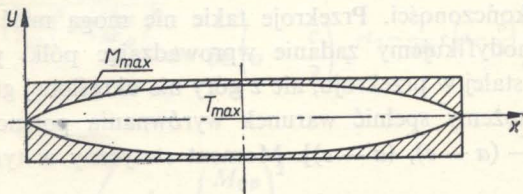
$$(3.10) \quad k_{gr} = \kappa \frac{\mathcal{A}}{gy} = \pm \sqrt{\frac{M_{1p}^2 - M_{0p}^2}{T_{0p}^2 - T_{1p}^2}}.$$

W przekroju ukształtowanym warunek (3.10) przybiera postać

$$(3.11) \quad \eta_{gr} = \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{T_{0p}}{T_{1p}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{T_{0p}}{T_{1p}}\right)^2 - \left(\frac{M_{0p}}{M_{1p}}\right)^2}}.$$

Rozkład obu obszarów w belce wykreślono na rys. 3.

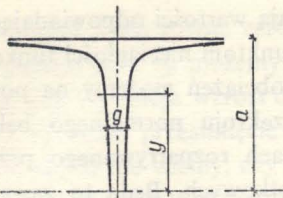
Cały obszar zewnętrzny zakreskowany (rys. 3) należy ukształtować na obciążenia wywołujące w belce maksymalne momenty zginające, a więc w przypadku belki swobodnie podpartej na obciążenie ustawione na całej rozpiętości belki, natomiast obszar wewnętrzny należy ukształtować na obciążenia wywołujące maksymalne siły styczne, a więc każdy przekrój na obciążenie ustawione na odcinku od tego przekroju do dalszego końca belki.



Rys. 3

4. Wyznaczenie grubości belki

Znając obciążenia, ze względu na które należy kształtować poszczególne obszary belki, można wyznaczać kształt przekrojów poprzecznych z warunku (3.1) analogicznie jak w pracy [2]. Podstawiając na Ψ_p wyrażenie (3.2) oraz przyjmując $\bar{\sigma}^2 = 2E\bar{\Psi}$, otrzymujemy



Rys. 4

$$(4.1) \quad \left(\frac{M_p y}{\mathcal{I}} \right)^2 + \left(\kappa \frac{T \mathcal{S}}{\mathcal{I}} \right)^2 = \bar{\sigma}^2.$$

Stąd po przekształceniach znajdujemy

$$(4.2) \quad \frac{\mathcal{S}}{g} = K \sqrt{a^2 - y^2},$$

gdzie $K = M/\kappa T$.

Obliczając $\mathcal{S} = \int_y^a g y dy$ otrzymujemy po podstawieniu do równania (4.2)

$$(4.3) \quad \frac{\int_y^a g y dy}{g} = K \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Równanie (4.3) przekształcamy przyjmując

$$(4.4) \quad \int_y^a g y dy = F(y), \quad g = -\frac{1}{y} F'(y).$$

W ten sposób otrzymujemy równanie różniczkowe

$$(4.5) \quad F'(y) + \frac{y}{K \sqrt{a^2 - y^2}} F(y) = 0,$$

którego ogólne rozwiązanie ma postać

$$(4.6) \quad F(y) = D e^{\frac{1}{K} \sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Różniczkując funkcję (4.4) i dzieląc wynik przez $-y$ otrzymujemy

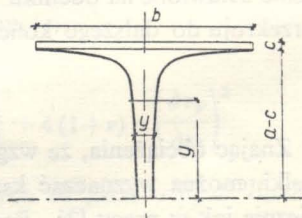
$$(4.7) \quad g = \frac{D}{K \sqrt{a^2 - y^2}} e^{\frac{1}{K} \sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Jeśli $y \rightarrow a$, to $g \rightarrow \infty$, czyli szerokość przekroju przy krawędziach dąży do nieskończoności. Przekroje takie nie mogą mieć zastosowania w praktyce, dlatego modyfikujemy zadanie wprowadzając półki prostokątne o danej szerokości b i stałej w przekroju, ale z góry nie określonej grubości c (rys. 5). W tym przypadku możemy spełnić warunek wyrównania potencjałów jednostkowych w przedziale $[-(a-c), (a-c)]$. Moment statyczny w tym przypadku wynosi

$$(4.8) \quad \mathcal{S} = \int_y^{a-c} g y dy + bc \left(a - \frac{c}{2} \right).$$

Postępując analogicznie jak poprzednio znajdujemy szerokość środka:

$$(4.9) \quad g = \frac{D}{K \sqrt{L^2 - y^2}} e^{\frac{1}{K} \sqrt{L^2 - y^2}},$$



Rys. 5

gdzie

$$L^2 = (a - c)^2 + \left[\frac{c \left(a - \frac{2}{c} \right)}{K} \right]^2.$$

Granicę przedziałów belki, które należy kształtować na obciążenie wywołujące maksymalne momenty zginające i maksymalne siły styczne, określa w tym przypadku równanie

$$(4.10) \quad y_{gr} = L \sqrt{\frac{\left(\frac{T_{0p}}{T_{1p}} \right)^2 - 1}{\left(\frac{T_{0p}}{T_{1p}} \right)^2 - \left(\frac{M_{0p}}{M_{1p}} \right)^2}}.$$

Szerokość belki w poszczególnych przedziałach przybiera postać

$$(4.11) \quad g_0 = \frac{D_0}{K_0 \sqrt{L_0^2 - y^2}} e^{\frac{1}{K_0} \sqrt{L_0^2 - y^2}}, \quad \text{jeżeli} \quad -y_{gr} \leq y \leq y_{gr};$$

$$(4.12) \quad g_1 = \frac{D_1}{K_1 \sqrt{L_1^2 - y^2}} e^{\frac{1}{K_1} \sqrt{L_1^2 - y^2}}, \quad \text{jeżeli} \quad y \leq -y_{gr} \quad \text{lub} \quad y \geq y_{gr}.$$

Stałe D_0 i D_1 wyznaczamy z warunków:

$$g_0 = g_1, \quad \text{jeżeli} \quad y = y_{gr},$$

$$g_1 = b, \quad \text{jeżeli} \quad y = a - c.$$

Przybierają one wartości:

$$(4.13) \quad D_1 = bc \left(a - \frac{c}{2} \right) e^{-\frac{1}{K_1} c \left(a - \frac{c}{2} \right)},$$

$$D_0 = D_1 e^{\frac{1}{K_1} \left[1 - \left(\frac{K_1}{K_0} \right)^2 \right] L_1} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{M_{0p}}{M_{1p}} \right)^2}{\left(\frac{T_{0p}}{T_{1p}} \right)^2 - \left(\frac{M_{0p}}{M_{1p}} \right)^2}} = bc \left(a - \frac{c}{2} \right) e^{\gamma L_1 - \frac{1}{K_1} c \left(a - \frac{c}{2} \right)},$$

gdzie

$$(4.14) \quad \gamma = \frac{1}{K_1} \left[1 - \left(\frac{K_1}{K_0} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{M_{0p}}{M_{1p}} \right)^2}{\left(\frac{T_{0p}}{T_{1p}} \right)^2 - \left(\frac{M_{0p}}{M_{1p}} \right)^2}}.$$

Znalezione funkcje powinny spełniać jeszcze jeden warunek: moment bezwładności przekroju musi odpowiadać momentowi zginającemu i przyjętej wartości potencjału $\bar{\Psi}$. Wartość $\bar{\Psi}$ obieramy taką, aby w przekroju środkowym belki skrajne naprężenia pochodzące od obciążeń ruchomych były równe $\bar{\sigma}$. Jeśli na krawędzi belki

wystąpią pod działaniem obciążenia ruchomego naprężenia $\bar{\sigma}$, to w punkcie $y = a - c$ potencjał przybierze wartość:

$$(4.15) \quad \Psi_{a-c} = \frac{1}{2E} [\sigma_{a-c}^2 + 2(1+\nu)\tau_{a-c}^2] = \frac{1}{2E} \left\{ \left[\frac{M_{p1}(a-c)}{\mathcal{I}} \right]^2 + \right. \\ \left. + 2(1+\nu) \left[\frac{T_{p1}c \left(a - \frac{c}{2} \right)}{\mathcal{I}} \right]^2 \right\} = \frac{1}{2E} \left(\frac{M_{p1}}{\mathcal{I}} \right)^2 \left\{ (a-c)^2 + \left[\frac{c \left(a - \frac{c}{2} \right)}{K_1} \right]^2 \right\} = \\ = \frac{1}{2E} \left(\frac{M_{p1} L_1}{\mathcal{I}} \right)^2 = \bar{\Psi}.$$

Stąd moment bezwładności belki w przekroju środkowym powinien być równy

$$(4.16) \quad \mathcal{I}^{1/2} = \frac{M_{p1}^{1/2} L_1^{1/2}}{\sqrt{2E\bar{\Psi}}}.$$

Ponieważ

$$\mathcal{I}^{1/2} = \frac{M_{p1}^{1/2} a}{\sigma}, \quad \text{to} \quad \sqrt{2E\bar{\Psi}} = \bar{\sigma} \frac{L_1^{1/2}}{a}.$$

Dla innych przekrojów belki mamy

$$(4.17) \quad \mathcal{I}^u = \frac{M_{p1}^u L_1^u}{\sqrt{2E\bar{\Psi}^u}} = \mathcal{I}^{1/2} \frac{M_{p1}^u L_1^u}{M_{p1}^{1/2} L_1^{1/2}} = \frac{M_{p1}^u a L_1^u}{\bar{\sigma} L_1^{1/2}}.$$

Zatem funkcje g_0 i g_1 muszą spełniać warunek

$$(4.18) \quad \mathcal{I}^u = \frac{M_{p1}^u a}{\bar{\sigma}} \frac{L_1^u}{L_1^{1/2}} = 2 \int_0^{y_{gr}} g_0 y^2 dy + 2 \int_{y_{gr}}^{a-c} g_1 y^2 dy + 2 \left[bc \left(a - \frac{c}{2} \right)^2 + \frac{bc^3}{12} \right].$$

Wprowadzając do równania (4.18) wartości funkcji g_0 i g_1 otrzymujemy zależność pomiędzy wielkościami b i c :

$$(4.19) \quad \frac{M_{p1} a}{2\bar{\sigma}} \frac{L_1^u}{L_1^{1/2}} = bc \left(a - \frac{c}{2} \right) e^{\gamma L_1 - \frac{1}{K_1^2} c \left(a - \frac{c}{2} \right)} \int_0^{y_{gr}} \frac{y^2 e^{\frac{1}{K_0} \sqrt{L_0^2 - y^2}}}{K_0 \sqrt{L_0^2 - y^2}} dy + \\ + bc \left(a - \frac{c}{2} \right) e^{-\frac{1}{K_1^2} c \left(a - \frac{c}{2} \right)} \int_{y_{gr}}^{a-c} \frac{y^2 e^{\frac{1}{K_1} \sqrt{L_1^2 - y^2}}}{K_1 \sqrt{L_1^2 - y^2}} dy + bc \left(a - \frac{c}{2} \right)^2 + \frac{bc^3}{12}.$$

Po rozwinięciu całek w szeregi i po przekształceniach warunek ten przyjmuje postać

$$(4.20) \quad \frac{M_{p1} a L_1^u}{2\bar{\sigma} L_1^{1/2}} = \frac{bc^2}{6} (3a - c) - D_0 a L_1 e^{\frac{K_1 \beta}{K_0^2} L_1} + \\ + D_0 a L_1 e^{\frac{L_0}{K_0}} \left[1 - \frac{\alpha^2 L_1^2}{6K_0 L_0} - \frac{\alpha^4 L_1^4}{40K_0 L_0^2} \left(\frac{1}{L_0} - \frac{1}{K_0} \right) + \dots \right] +$$

$$+D_1 a L_1 e^{\frac{\beta}{K_1} L_1} + D_1 (a-c) e^{\frac{L}{K_1}} \left[1 - \frac{(a-c)^2}{6K_1 L_1} - \frac{(a-c)^4}{40K_1 L_1^2} \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{K_1} \right) + \dots \right] -$$

$$- D_1 a L_1 e^{\frac{L_1}{K_1}} \left[1 - \frac{a^2 L_1^2}{6K_1 L_1} - \frac{a^4 L_1^4}{40K_1 L_1^2} \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{K_1} \right) + \dots \right],$$

przy czym

$$\alpha = \sqrt{\frac{\left(\frac{T_{0p}}{T_{1p}}\right)^3 - 1}{\left(\frac{T_{0p}}{T_{1p}}\right)^2 - \left(\frac{M_{0p}}{M_{1p}}\right)^2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{M_{0p}}{M_{1p}}\right)^2}{\left(\frac{T_{0p}}{T_{1p}}\right)^2 - \left(\frac{M_{0p}}{M_{1p}}\right)^2}}.$$

W przykładzie liczbowym do obliczeń przyjęto trzy pierwsze wyrazy szeregów, co już daje dostateczną dokładność.

W rozwiązaniu zadania jedną z wielkości b lub c możemy przyjąć dowolnie, a drugą trzeba wyznaczyć z równania (4.20). Równanie to znacznie łatwiej rozwiązać względem b niż c , jednak zwykle szerokość belki jest ograniczona względami użytkowymi i musimy ją przyjmować jako daną, a równanie rozwiązywać względem c . W tak ukształtowanej belce należy określić siłę sprężającą oraz sprawdzić naprężenia występujące pod działaniem wszystkich obciążeń. W rozpatrywanym przypadku belki symetrycznej siłę sprężającą oraz trasę kabla obieramy tak, aby moment pochodzący od sprężenia był równy momentowi od ciężaru własnego oraz połowie momentu od obciążenia ruchomego

$$(4.21) \quad Pe = M_q + \frac{1}{2} M_p.$$

W tym przypadku znany układ czterech nierówności [7], określający warunki nieprzekroczenia naprężeń dozwolonych w belce sprężonej w dwóch stanach obciążenia, sprowadza się do następujących dwóch nierówności:

$$(4.22) \quad \sigma_g = \frac{P}{\mathcal{A}} + \frac{M_p a}{2\mathcal{I}} \leq \bar{\sigma}, \quad \sigma_d = \frac{P}{\mathcal{A}} - \frac{M_p a}{2\mathcal{I}} \geq \underline{\sigma},$$

przy czym w stanie bezużytkowym pierwsza z tych nierówności musi być spełniona na krawędzi dolnej, a druga na krawędzi górnej, ponieważ M_p jest równe maksymalnemu momentowi pochodzącemu od obciążeń ruchomych z przeciwnym znakiem. Mimośród i siłę sprężającą w przekroju środkowym belki wyznaczamy zamieniając nierówności (4.22) na równania wykorzystując warunek (4.21). Otrzymujemy wtedy

$$(4.23) \quad P^{1/2} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma} + \underline{\sigma}) \mathcal{A}^{1/2}$$

oraz

$$(4.24) \quad e^{1/2} = \frac{M_q^{1/2} + \frac{1}{2} M_p^{1/2}}{P^{1/2}}.$$

W innych przekrojach otrzymujemy:

w przypadku stałej siły sprężającej

$$(4.25) \quad e^u = \frac{M_a^u + \frac{1}{2} M_{p1}^u}{P};$$

w przypadku zmiennej siły sprężającej

$$(4.26) \quad P^u = \frac{1}{2} (\bar{\sigma} + \underline{\sigma}) \mathcal{A}^u \frac{L^{1/2}}{L^u}$$

oraz

$$(4.27) \quad e^u = \frac{M_a^u + \frac{1}{2} M_{p1}^u}{P}.$$

Jeżeli mimośród wyznaczony ze wzoru (4.21) w przekroju środkowym jest większy od $a - d$, gdzie d oznacza minimalną odległość od krawędzi belki do środka ciężkości kabła sprężającego, to przyjmujemy $e^{1/2} = a - d$, a siłę sprężającą wyznaczamy z warunku

$$(4.28) \quad P^{1/2} = \frac{M^{1/2} + \frac{1}{2} M_{p1}^{1/2}}{a - d}.$$

W innych przekrojach otrzymujemy zależności:

w przypadku stałej siły sprężającej

$$(4.29) \quad e^u = \frac{M_a^u + \frac{1}{2} M_{p1}^u}{P};$$

w przypadku zmiennej siły sprężającej

$$(4.30) \quad e^u = e^{1/2} \frac{M_a^u + \frac{1}{2} M_{p1}^u}{M_a^{1/2} + \frac{1}{2} M_{p1}^{1/2}}$$

oraz

$$(4.31) \quad P^u = \frac{M_a^u + \frac{1}{2} M_{p1}^u}{e^u}.$$

Wprowadzenie zmiennej siły sprężającej pozwala na zmniejszenie ilości stali w belce, nie ma natomiast wpływu na wartość potencjału powstającego pod działaniem obciążeń ruchomych, a więc i na kształt belki.

5. Wyznaczenie grubości belki w przekroju podporowym

Wszystkie wyprowadzone poprzednio wzory tracą sens, gdy momenty zginające znikają. Z tego powodu przekrój podporowy trzeba ukształtować oddzielnie.

Wyrównanie potencjałów jednostkowych we wszystkich punktach przekroju ścinanego jest niemożliwe, bowiem naprężenia ścinające na krawędziach są zerami, niezależnie od kształtu przekroju. Konieczne jest więc utworzenie na krawędziach przedziałów przejściowych, w których potencjał wzrastałby stopniowo od zera do wartości $\bar{\Psi}$. Przyjmujemy, że części przejściowe mają kształt prostokątów o szerokości b i wysokości c .

Postępując analogicznie jak w pracy [2] przekrój będziemy tak kształtować, aby potencjał jednostkowy był wyrównany we wszystkich punktach przekroju zawartych w przedziale $[-(a-c), (a-c)]$. Ze względu na to, że chcemy, aby szerokość półki b w przekroju podporowym była równa szerokości półki w przekrojach przęsłowych dopuszczamy powstanie w odległości $\pm(a-c)$ od osi belki uskoków z szerokości półki b do szerokości środnika g .

Ze względu na zerową wartość naprężeń normalnych potencjał jednostkowy wynosi

$$(5.1) \quad \Psi_p = \frac{\kappa^2}{2E} \tau^2$$

i wyrównanie potencjałów sprowadza się do wyrównania naprężeń ścinających. Naprężenia te w odległości $a-c$ od osi obojętnej i w odległości y od tej osi określone są za pomocą wzorów

$$(5.2) \quad \tau_{a-c} = \frac{T_p bc \left(a - \frac{c}{2}\right)}{Jg}$$

oraz

$$(5.3) \quad \tau_y = \frac{T_p}{gJ} \left[\int_y^{a-c} gy dy + bc \left(a - \frac{c}{2}\right) \right].$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$(5.4) \quad \frac{bc \left(a - \frac{c}{2}\right)}{g} = \frac{1}{g} \int_y^{a-c} gy dy + \frac{b}{g} c \left(a - \frac{c}{2}\right).$$

Podstawiając

$$(5.5) \quad \int_y^{a-c} gy dy = F(y), \quad g = -\frac{1}{y} F'(y),$$

przekształcamy znalezione równanie całkowe na równanie różniczkowe

$$(5.6) \quad F'(y) + \frac{yg}{bc \left(a - \frac{c}{2}\right)} F(y) = -gy,$$

którego rozwiązanie ogólne ma postać:

$$(5.7) \quad F(y) = De^{-\frac{gy^2}{2cb\left(a-\frac{c}{2}\right)}} - bc\left(a-\frac{c}{2}\right).$$

Ze wzoru (5.5) po podstawieniu (5.7) znajdujemy

$$(5.8) \quad g = \frac{Dg}{bc\left(a-\frac{c}{2}\right)} e^{-\frac{gy^2}{2cb\left(a-\frac{c}{2}\right)}}.$$

Stałą D wyznaczamy z warunku, aby krawędź środkowa przechodziła przez punkt $[(a-c), g]$:

$$(5.9) \quad D = bc\left(a-\frac{c}{2}\right) e^{\frac{g(a-c)^2}{2bc\left(a-\frac{c}{2}\right)}}.$$

Stąd

$$(5.10) \quad g = g e^{\frac{g}{2bc\left(a-\frac{c}{2}\right)}[(a-c)^2-y^2]}.$$

Stałą g wyznaczamy z warunku, aby moment bezwładności przekroju odpowiadał sile stycznej i wartości potencjału jednostkowego $\bar{\Psi}$. Warunek ten przybiera postać

$$(5.11) \quad \mathcal{I} = \frac{T_p \kappa}{\bar{\sigma} L^{1/2}} \frac{bc\left(a-\frac{c}{2}\right)}{g} = 2g \int_0^{a-c} y^2 e^{\frac{g}{2bc\left(a-\frac{c}{2}\right)}[(a-c)^2-y^2]} dy + 2bc\left(a-\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} bc^3.$$

Tabl. I

$\frac{u}{l}$	M_1	M_0	T_1	T_0	M_a	c	$g(y=0)$	g_{\min}
	Tm	Tm	T	T	Tm	cm	cm	cm
0	0	0	196,812	196,812	0	0,010	73,489	0,312
						18,000	30,000	30,000
0,01	38,612	38,612	194,938	194,938	14,177	0,012	38,240	0,492
						18,000	29,697	29,697
0,05	178,068	178,068	178,068	178,068	67,875	1,742	14,870	14,857
						18,000		14,870
0,25	802,48	574,035	96,844	114,807	275,40	19,094	13,569	13,569
0,50	820,05	585,750	35,145	58,575	377,76	24,641	7,003	7,003

Rozwijając całkę w szereg znajdujemy:

$$(5.12) \quad \frac{T_p \times}{\sigma L_1^{1/2}} \left(a - \frac{c}{2} \right) = g \left\{ c \left(a - \frac{1}{3} c \right) + (2a - c)(a - c) \left[1 - \frac{g(a-c)^2}{3 \cdot 1! bc(2a-c)} + \frac{g^4(a-c)^4}{5 \cdot 2! b^2 c^2 (2a-c)^2} - \frac{g^6(a-c)^6}{7 \cdot 3! b^3 c^3 (2a-c)^3} + \dots \right] e^{\frac{g(a-c)^2}{bc(2a-c)}} \right\}.$$

6. Przykład liczbowy

W przykładzie liczbowym wyznaczmy kształty kilku przekrojów belki stanowiącej ustrój nośny mostu kolejowego o rozpiętości 20 m, pod działaniem obciążenia przewidzianego w przepisach *NC*. Szerokość półek belki wynosi 4,00 m, wysokość belki 1,40 m. Belka ma być sprężona kablami o przekroju stałym wzdłuż rozpiętości w ten sposób, że momenty pochodzące od sprężania są równe momentom od ciężaru własnego oraz połowie momentów maksymalnych od obciążenia ruchomego. Naprężenie skrajne pod działaniem obciążeń ruchomych wynosi $\bar{\sigma} = 85 \text{ kG/cm}^2$. Wyznaczono kształty przekrojów poprzecznych belki o odciętych $u = 0, 0,20 \text{ m}, 1,00 \text{ m}, 5,00 \text{ m}$ i $10,00 \text{ m}$. Wielkość momentów zginających i sił stycznych w poszczególnych przekrojach oraz wyznaczone z równań (4.20) lub (5.12) grubości półek zestawiono w tablicy 1.

Grubość środnika w poszczególnych przekrojach wyznaczono z następujących wzorów:

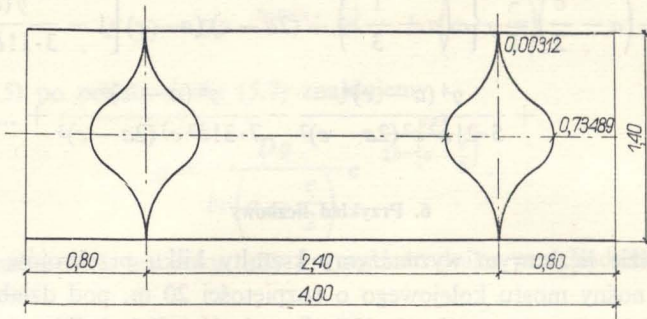
w przekroju $u = 0$

$$g = 0,0062429 \exp 11,149 (0,48986 - y^2);$$

ca 1

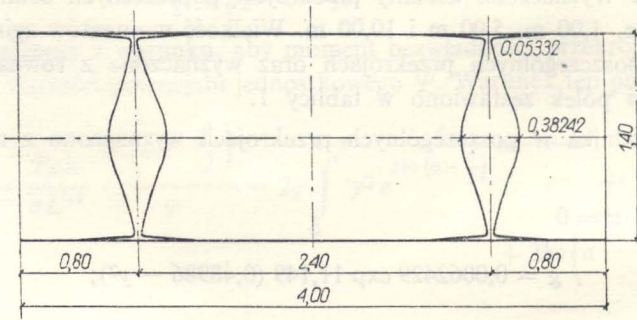
A	e	Naprężenia od obciążeń ruchomych			Naprężenia wypadkowe		
		σ_{\max}	σ_{\min}	τ_{\max}	σ_{\max}	σ_{\min}	τ_{\max}
cm ²	cm	kG/cm ²			kG/cm ²		
0,77988	—	0	0	36,06	—	—	—
1,75200	0	0	0	31,24	74,49	74,49	15,62
0,59550	—	55,10	—55,10	36,06	—	—	—
1,74900	2,566	2,47	—2,47	30,90	77,08	72,14	15,45
0,61290	—	56,47	—56,47	36,06	—	—	—
1,59500	12,024	22,94	—22,94	52,86	93,29	70,35	26,43
1,91780	51,850	75,50	—75,50	36,06	105,80	30,30	18,03
2,17064	60,357	85,00	—85,00	36,06	102,55	17,55	36,06

$X=0$
 $C=0,00010$



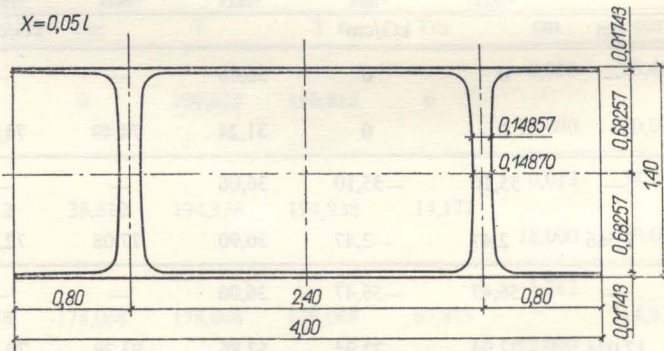
Rys. 6

$X=0,011$
 $C=0,00012$

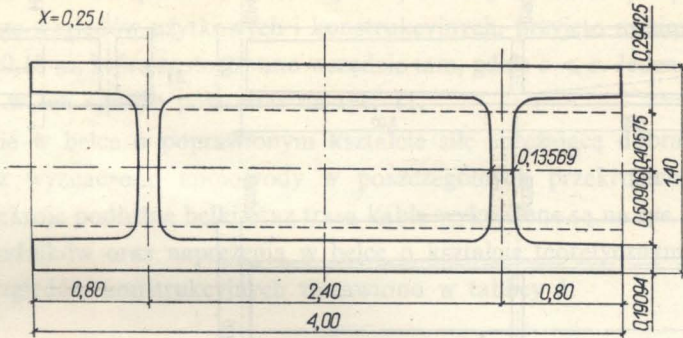


Rys. 7

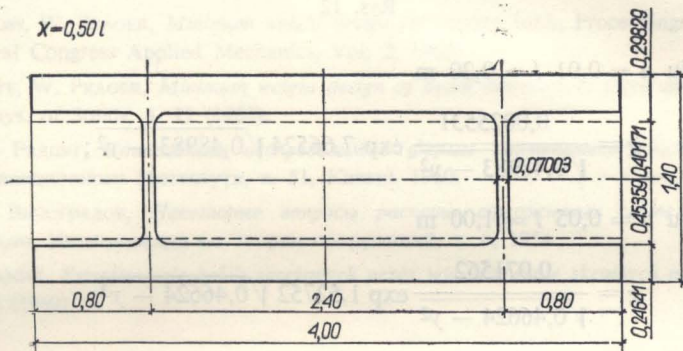
$X=0,051$



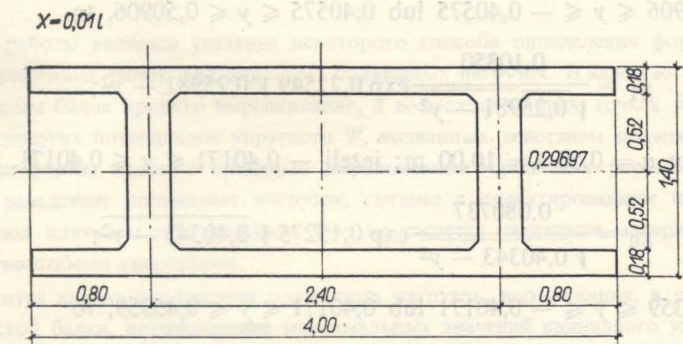
Rys. 8



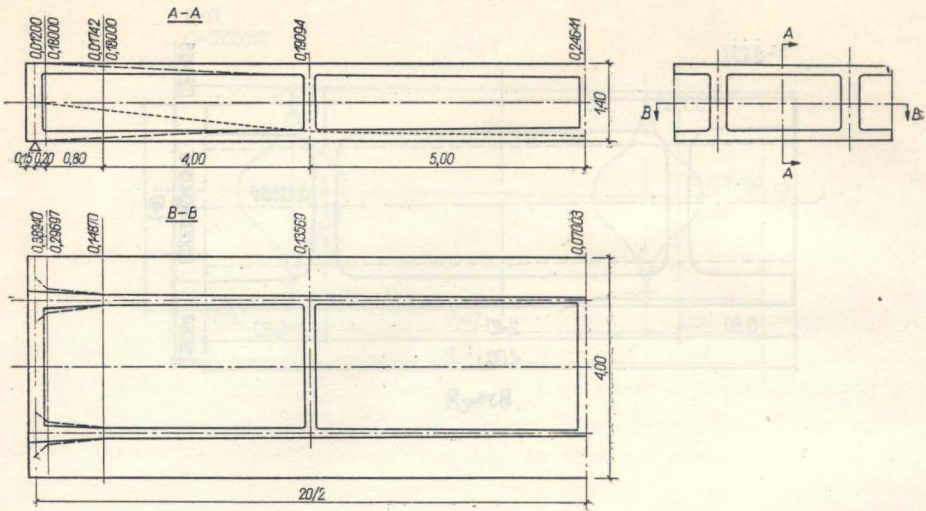
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

w przekroju $u = 0,01$ $l = 0,20$ m

$$g = \frac{0,0025531}{\sqrt{0,48983 - y^2}} \exp 7,66524 \sqrt{0,48983 - y^2};$$

w przekroju $u = 0,05$ $l = 1,00$ m

$$g = \frac{0,071562}{\sqrt{0,46624 - y^2}} \exp 1,52752 \sqrt{0,46624 - y^2};$$

w przekroju $u = 0,25$ $l = 5,00$ m: jeżeli $-0,40575 \leq y \leq 0,40575$, to

$$g_0 = \frac{0,13231}{\sqrt{0,33935 - y^2}} \exp 0,30550 \sqrt{0,33935 - y^2};$$

jeżeli $-0,50906 \leq y \leq -0,40575$ lub $0,40575 \leq y \leq 0,50906$, to

$$g_1 = \frac{0,10350}{\sqrt{0,25981 - y^2}} \exp 0,22549 \sqrt{0,25981 - y^2};$$

w przekroju $u = 0,50$ $l = 10,00$ m: jeżeli $-0,40171 \leq y \leq 0,40171$, to

$$g_0 = \frac{0,080737}{\sqrt{0,40343 - y^2}} \exp 0,15275 \sqrt{0,40343 - y^2};$$

jeżeli $-0,45359 \leq y \leq -0,40171$ lub $0,40171 \leq y \leq 0,45359$, to

$$g_1 = \frac{0,037195}{\sqrt{0,20583 - y^2}} \exp 0,065465 \sqrt{0,20583 - y^2}.$$

Kształty przekrojów poprzecznych pokazano na rys. 6-10.

Ponieważ grubości póltek w przekrojach położonych blisko podpór wypadają zbyt małe ze względów użytkowych i konstrukcyjnych, przyjęto minimalną grubość póltek $c = 0,18$ m, którą zastosowano wszędzie tam, gdzie $c < c$. Jeden z przekrojów zmieniony w ten sposób pokazano na rys. 11.

Następnie w belce o poprawionym kształcie siłę sprężającą dobrano ze wzoru (4.28) oraz wyznaczono mimośrodę w poszczególnych przekrojach z równania (4.25). Przekroje podłużne belki oraz trasa kabla wykreślone są na rys. 12. Wymiary póltek i środków oraz naprężenia w belce o kształcie teoretycznym i poprawionym ze względów konstrukcyjnych zestawiono w tablicy 1.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *The present state of knowledge in the field of optimum design of structures*, Appl. Mech. Rev., 5, 16 (1963).
2. Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, Akad. Nauk Techn., Warszawa 1939.
3. O. GROSS, W. PRAGER, *Minimum weight design for moving loads*, Proceedings of the Fourth U.S. National Congress Applied Mechanics, Vol. 2, 1962.
4. M. SAVE, W. PRAGER, *Minimum weight design of beam subjected to fixed and moving loads*, J. Mech. Phys. of Solids, 4, 11 (1963).
5. Ю. А. Радциг, *Статически неопределимые фермы наименьшего объема*, Труды Казанского Авиационного Института, в. 51, Казань 1960.
6. А. И. Виноградов, *Некоторые вопросы расчета стержневых систем с заданными напряжениями*, Исследования по теории сооружений, т. 6, 1954.
7. A. BRANDT, *Kształtowanie belek sprężonych przez wyrównywanie skrajnych naprężeń*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960).

Резюме

НЕКОТОРЫЙ СЛУЧАЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ БАЛОК ПОД ВЛИЯНИЕМ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК

Целью работы является указание некоторого способа определения формы предварительно напряженных балок под влиянием подвижных нагрузок. В качестве критерия определения формы балок принято выравнивание, в возможно многих точках балки, крайних единичных упругих потенциалов упругости Ψ , вызванных действием подвижной нагрузки. Определение формы балок, с помощью выравнивания единичных упругих потенциалов, возникших вследствие подвижных нагрузок, связано с проектированием на наибольшую жесткость под влиянием этих нагрузок. Оно не касается натяжения материала и не имеет связи с прочностными гипотезами.

Проводится анализ приложения подвижных нагрузок, вызывающих, в данном сечении изостатической балки, возникновение максимальных значений единичного упругого потенциала. Кроме того следует найти функцию $g(u, y)$, определяющую толщину поперечного сечения балки, изменяющуюся вдоль ее пролета и высоты. Полученные соотношения используются в числовом примере определения формы пролета предварительно напряженного моста.

Summary

A CERTAIN CASE OF DETERMINATION OF THE OPTIMUM FORM OF
PRESTRESSED BEAMS UNDER MOVING LOAD

The object of the present paper is to propose a method for determining the form of a prestressed beam under moving load. The criterion chosen for the determination of the shape is that of equal extreme unit potentials of elasticity Ψ produced by the moving load, at possibly many points. This is equivalent to the criterion of maximum rigidity under the same load and does not concern any strength theory.

The configurations of the moving load that produce in an isostatic beam of a given cross-section the maximum unit potential are analysed. The author obtains a function $g(u, y)$ expressing the thickness of the beam, which is variable in the longitudinal and vertical directions. The relations obtained are made use of in a numerical example illustrating the determination of the form of a beam for a prestressed railway bridge.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1965 r.