

O STATECZNOŚCI SPRĘŻYSTEJ UKŁADÓW NIEZACHOWAWCZYCH

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Analiza stateczności statycznej niezachowawczych układów sprężystych stanowiła przedmiot prac wielu autorów [2-8 i 11]. W pracach tych najczęściej uwagi poświęcono tzw. obciążeniu śledzącemu w postaci siły skupionej, której linia działania odchyła się po utracie stateczności układu od swego pierwotnego kierunku.

W dotychczasowych pracach z zakresu stateczności dynamicznej układów niezachowawczych zajmowano się jedynie przypadkiem obciążenia śledzącego ze współczynnikiem $\eta = 1,0$. Analizę wpływu obciążenia tego typu na kształt stref rezonansowych znaleźć można w pracach [1 i 10].

Celem niniejszej publikacji jest analiza stref rezonansu parametrycznego pierwszego i drugiego rodzaju (rezonans kombinacyjny) dla układów o dwóch stopniach swobody w przypadku obciążenia śledzącego z dowolnym współczynnikiem η . Układy takie stanowią pierwsze przybliżenie dla analogicznych układów o masie rozłożonej w sposób ciągły. Ze względu na ścisły związek pomiędzy statyczną i dynamiczną utratą stateczności w artykule zamieszczono również wyniki analizy stateczności statycznej wspomnianych układów. Bardziej szczegółowe omówienie zagadnienia znaleźć można w pracy [9].

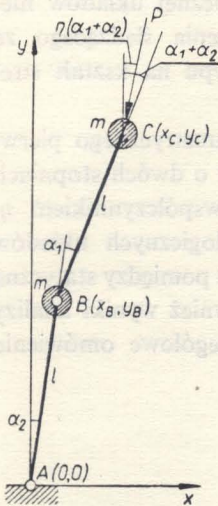
Oznaczenia

$A, B, C, D, D_0,$	macierze,
E, H, N, U, V	
m, J	masa i jej moment bezwładności,
η	współczynnik śledzenia,
P, P_0, P_t	siły skupione,
p	siła bezwymiarowa,
ε	mały parametr,
t	czas,
τ	bezwymiarowa zmienna czasowa,
l	długość ogniwa układu,
$\bar{a}(a_1, a_2)$	współrzędne uogólnione,
$\bar{x}(a, \varphi)$	
x, y, z	osie układu współrzędnych,
c, k	stałe sprężyste,
n	$=\sqrt{k/c}$
ω_i	częstość kołowa drgań własnych,

- λ_i kwadrat bezwymiarowej częstości kołowej drgań własnych,
- μ stosunek częstości skrętnej do giętej drgań własnych układu nieobciążonego,
- θ częstość kołowa siły wymuszającej,
- θ_0 porównawcza częstość kołowa,
- $|\theta^{(1)}|$ szerokość strefy rezonansowej,
- $\nu = \theta/\theta_0$
- $\nu_i = \omega_i/\theta$
- $\nu^{(i)}$ współczynnik szeregu potęgowego względem ϵ ,
- $\bar{\nu} = c/ml^2\theta_0^2$
- \bar{r} wektor własny macierzy.

2. Zagadnienia stateczności statycznej

Rozważmy płaski układ o dwóch stopniach swobody przedstawiony na rys. 1. Układ ten, który można traktować jako uproszczony model wybożenia ściskanego pręta wspornikowego, składa się z dwóch prostoliniowych, nieodkształcalnych i nieważkich ogniw AB i BC połączonych za pomocą przegubów o własnościach idealnie sprężystych. Przeguby te o jednakowych sztywnościach c umieszczone są w punktach A i B . W punktach B i C układu znajdują się dwie jednakowe masy skupione m . Jako uogólnione niezależne współrzędne przyjmijmy kąty α_1 i α_2 , z których pierwszy wyraża względne przemieszczenie katowe obu ogniw, a drugi podaje odchylenie ogniwa AB od kierunku osi y . W stanie nieobciążonym ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) układ zajmuje położenie wzdłuż osi y . Obciążenie układu stanowi skupiona siła P działająca w punkcie C i śledząca ze współczynnikiem η , którego sens wyjaśnia rys. 1. Ruch rozważanego układu w liniowym ujęciu zagadnienia opisany jest następującym układem równań różniczkowych:



Rys. 1

$$(2.1) \quad \begin{aligned} ml^2(\ddot{\alpha}_1 + 2\ddot{\alpha}_2) + [c - Pl(1 - \eta)]\alpha_1 - Pl(1 - \eta)\alpha_2 &= 0, \\ ml^2(2\ddot{\alpha}_1 + 5\ddot{\alpha}_2) - Pl(1 - 2\eta)\alpha_1 + [c - 2Pl(1 - \eta)]\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu bezwymiarowego czasu τ i siły p według wzoru

$$(2.2) \quad \tau = \sqrt{\frac{c}{ml^2}} t, \quad p = \frac{Pl}{c},$$

układ (2.1) równań ruchu możemy napisać w postaci

$$(2.3) \quad A\ddot{\bar{a}} + (E - pB)\bar{a} = 0,$$

gdzie

$$(2.4) \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = (1 - \eta) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1 - 2\eta}{1 - \eta} & 2 \end{bmatrix}.$$

Symbol E oznacza macierz jednostkową.

Analizę stateczności statycznej przeprowadzimy badając pierwiastki λ_1 i λ_2 równania charakterystycznego

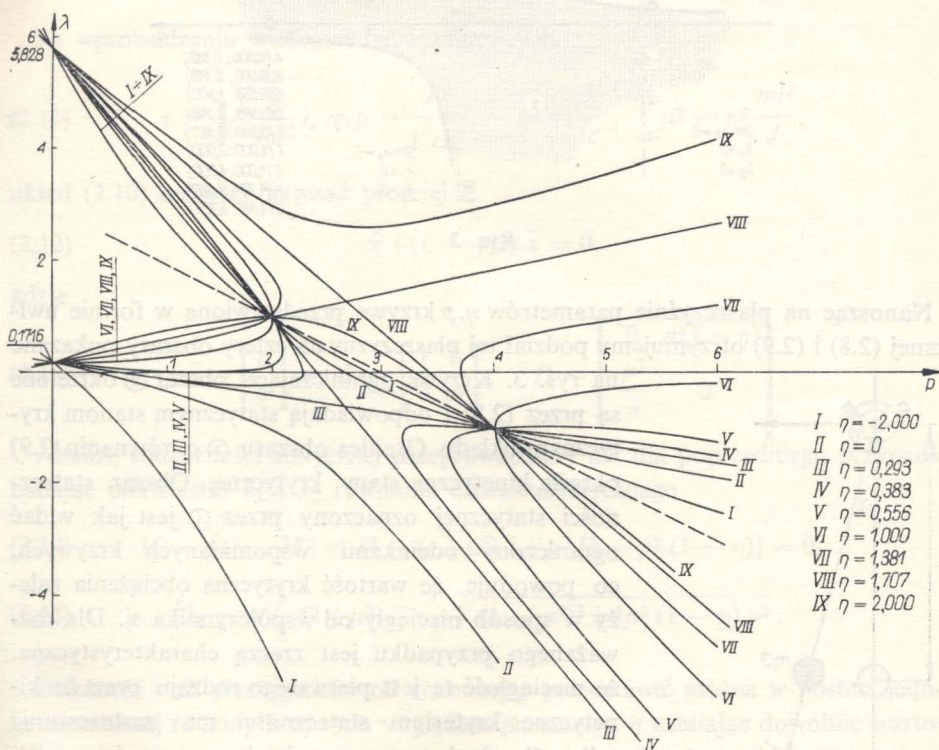
$$(2.5) \quad |E - pB - \lambda A| = \lambda^2 - a(\eta, p)\lambda + b(\eta, p) = 0,$$

$$(2.6) \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} a(\eta, p) \mp \frac{1}{2} \sqrt{a^2(\eta, p) - 4b(\eta, p)},$$

gdzie

$$(2.7) \quad a(\eta, p) = (\eta - 3)p + 6, \quad b(\eta, p) = (1 - \eta)p(p - 3) + 1.$$

Pierwiastki te równe są kwadratam bezwymiarowych częstości drgań własnych układu, a ich zależność od zmiennej p pokazano na rys. 2 w postaci rodziny krzy-



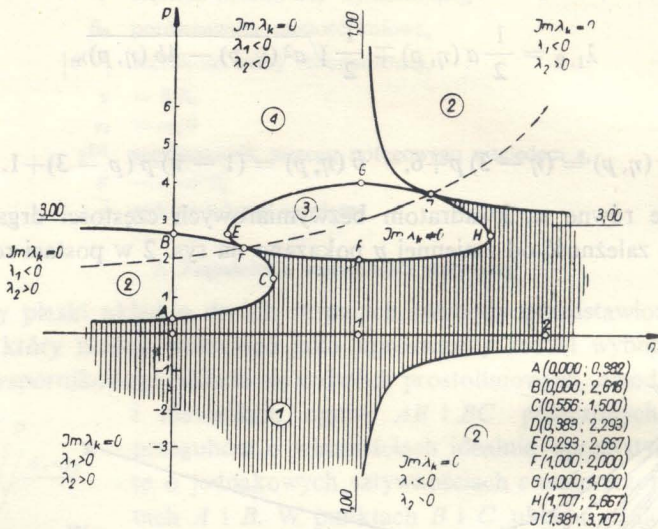
Rys. 2

wych względem parametru η . Punkty przecięcia tych krzywych z osią p ($\lambda_1 = 0$) określają statyczne stany krytyczne układu, a punkty odpowiadające zrównaniu się obu pierwiastków ($\lambda_1 = \lambda_2$) wyznaczają kinetyczne stany krytyczne. Na podstawie (2.6) otrzymujemy następujące kryteria utraty stateczności:

$$(2.8) \quad \text{statyczne } (\lambda_1 = 0) \quad (1 - \eta)p(p - 3) + 1 = 0,$$

kinetyczne ($\lambda_1 = \lambda_2$)

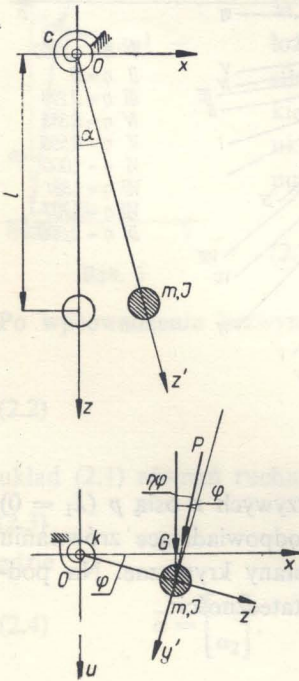
$$(2.9) \quad (\eta^2 - 2\eta + 5)p^2 - 24p + 32 = 0.$$



Rys. 3

Nanosząc na płaszczyźnie parametrów η, p krzywe przedstawione w formie uwikłanej (2.8) i (2.9) otrzymujemy podział tej płaszczyzny na cztery obszary pokazane

na rys. 3. Krzywe ograniczające obszar ② określone są przez (2.8) i odpowiadają statycznym stanom krytycznym układu. Granica obszaru ③ o równaniu (2.9) określa kinetyczne stany krytyczne. Obszar stateczności statycznej oznaczony przez ① jest jak widać ograniczony odcinkami wspomnianych krzywych, co powoduje, że wartość krytyczna obciążenia zależy w sposób nieciągły od współczynnika η . Dla rozważanego przypadku jest rzeczą charakterystyczną, że nieciągłość ta jest pierwszego rodzaju oraz że kinetyczne kryterium stateczności ma zastosowanie tylko dla skończonego przedziału zmienności współczynnika η .



Rys. 4

Przedstawione na rys. 2 i 3 zależności $\lambda = \lambda(p; \eta)$ oraz $p = p(\eta)$ dla układu z rys. 1 różnią się jakościowo od analogicznych zależności dla układu pokazanego na rys. 4. Układem tym jest nieodkształcalny, prostoliniowy i nieważki pręt poziomy zamocowany na jednym z końców. Zamocowanie to zrealizowane jest za pomocą idealnie sprężystego przegubu o sztywności c dla zginania w płaszczyźnie poziomej

Ozx oraz o sztywności k dla skręcania względem osi z . Pręt jest całkowicie utwierdzony w płaszczyźnie pionowej Oyz . Omawiany układ można traktować w pierwszym przybliżeniu jako uproszczony model zwiczenia belki wspornikowej zginanej w płaszczyźnie większej sztywności. Jako niezależne uogólnione współrzędne przyjmujemy kąty α i φ , z których pierwszy określa wielkość odchylenia osi pręta z' od kierunku osi z , drugi zaś — wzajemne nachylenie płaszczyzn Ozz' i Ozx . Na swobodnym końcu pręta znajduje się skupiona masa m o momencie bezwładności J względem osi pręta. Obciążenie układu stanowi skupiona siła P działająca na swobodnym końcu pręta i śledząca ze współczynnikiem η za kierunkiem osi y' . Pręt w stanie nieobciążonym ($\alpha = \varphi = 0$) zajmuje położenie wzdłuż osi z . Ruch układu w liniowym ujęciu zagadnienia opisany jest następującym układem równań różniczkowych:

$$(2.10) \quad ml^2 \ddot{\alpha} + c\alpha - Pl(1 - \eta)\varphi = 0, \quad J\ddot{\varphi} - Pl\alpha + k\varphi = 0.$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$(2.11) \quad \tau = \sqrt{\frac{c}{ml^2}} t, \quad p = \frac{Pl}{\sqrt{ck}}, \quad n^2 = \frac{k}{c}, \quad \mu^2 = n^2 \frac{ml^2}{J},$$

układ (2.10) możemy napisać prościej:

$$(2.12) \quad \ddot{\bar{x}} + (C - pD)\bar{x} = 0,$$

gdzie

$$(2.13) \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & n(1 - \eta) \\ \frac{\mu^2}{n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Analizę stateczności statycznej przeprowadzimy jak dla poprzedniego przypadku badając pierwiastki λ_1 i λ_2 równania charakterystycznego

$$(2.14) \quad |C - pD - \lambda E| = \lambda^2 - (1 + \mu^2)\lambda + \mu^2[1 - p^2(1 - \eta)] = 0,$$

$$(2.15) \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 + \mu^2) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \mu^2)^2 + 4\mu^2(1 - \eta)p^2}.$$

Zależność tych pierwiastków od zmiennej p przedstawić można w postaci jedno-parametrowej rodziny krzywych względem parametru η ustalając dowolnie wartość parametru μ , wyrażającego stosunek częstości giętej do skrętnej drgań własnych układu nieobciążonego ($p = 0$). Na rysunku 5 pokazano rodzinę krzywych $\lambda = \lambda(p; \eta)$ przykładowo dla przypadku $\mu = 2$.

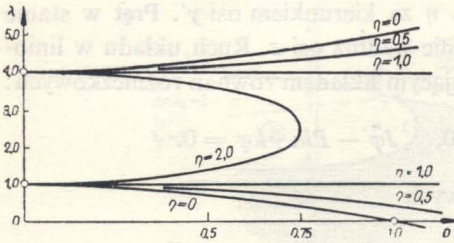
Na podstawie (2.15) otrzymujemy następujące kryteria utraty stateczności: statyczne ($\lambda_1 = 0$)

$$(2.16) \quad (1 - \eta)p^2 - 1 = 0,$$

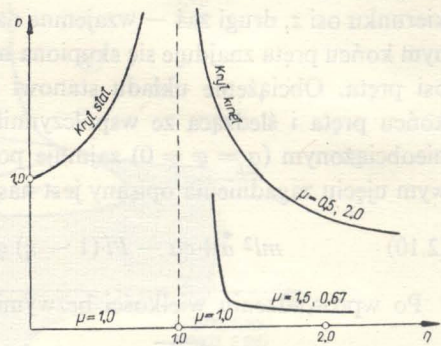
kinetyczne ($\lambda_1 = \lambda_2$)

$$(2.17) \quad 4\mu^2(1 - \eta)p^2 + (1 - \mu^2)^2 = 0.$$

Równania (2.16) i (2.17) przedstawiają w postaci uwikłanej pewne krzywe na płaszczyźnie parametrów ηp , pokazane na rys. 6. Jest tutaj rzeczą charakterystyczną, że przy założeniu $\mu \neq 1$ kryterium statyczne obowiązuje dla $\eta < 1$, kinetyczne zaś dla $\eta > 1$. Zależność wartości krytycznej obciążenia od parametru η wykazuje



Rys. 5



Rys. 6

dla $\eta = 1$ nieciągłość drugiego rodzaju. Przy założeniu $\mu = 1$, tzn. gdy częstotliwości skrętnych i giętych drgań własnych układu nieobciążonego ($p = 0$) są sobie równe, mamy do czynienia z charakterystycznym przypadkiem osobliwym. Jak wynika z (2.17) krytyczną wartością obciążenia odpowiadającą przypadkowi $\mu = 1$ jest $p = 0$. Układ jest więc niestateczny przy dowolnej wartości obciążenia.

3. Zagadnienia stateczności dynamicznej

Rozważać będziemy układy przedstawione na rys. 1 i 4 przy założeniu, że $P = P_0 + P_t \cos \theta t$. Wyznaczenie obszarów rezonansowych pierwszego i drugiego rodzaju przeprowadzimy metodą E. METTLERA [7], uogólnioną dla przypadku obciążenia śledzącego ze współczynnikiem $\eta = 1$ przez K. PISZCZKA [10]. Metodę tę zastosujemy dla przypadku dowolnego współczynnika śledzenia η , dzięki czemu uzyskamy wyniki pozwalające na wyciągnięcie pewnych ogólnych wniosków dotyczących położenia i szerokości poszczególnych obszarów rezonansowych. Obliczenie przeprowadzimy ograniczając się do pierwszego przybliżenia i poprzestaniemy na wyznaczeniu krzywych granicznych dla podstawowych obszarów rezonansowych z dokładnością do wyrazów liniowych względem parametru ε charakteryzującego wielkość wymuszenia parametrycznego.

Układ równań ruchu (2.1) po wykorzystaniu związków (2.4), podstawieniu $P = P_0 + P_t \cos \theta t$ oraz wprowadzeniu oznaczeń

$$(3.1) \quad \tau = \theta t, \quad \nu = \frac{\theta}{\theta_0}, \quad \vartheta = \frac{c}{ml^2 \theta_0^2}, \quad p = \frac{P_0 l}{c}, \quad \varepsilon = \frac{P_t l}{c}$$

możemy napisać w następującej postaci:

$$(3.2) \quad \nu^2 \ddot{\bar{a}} + \vartheta A^{-1} [E - (p + \varepsilon \cos \tau) B] \bar{a} = 0.$$

W zależności od rozważanej strefy rezonansowej stała θ_0 występująca w (3.1) przybiera odpowiednio jedną z wartości

$$(3.3) \quad \theta_0 = 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, |\omega_1 - \omega_2|,$$

gdzie ω_1, ω_2 są częstościami drgań własnych układu przy $\varepsilon = 0$. Dalsze uproszczenie zapisu (3.2) uzyskamy sprowadzając do postaci przekątnej macierz

$$(3.4) \quad H = A^{-1} (E - pB) = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - p \begin{bmatrix} 3 - \eta & 1 - \eta \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ równanie charakterystyczne $|A^{-1}(E - pB) - \lambda E| = 0$ macierzy H jest równoważne równaniu (2.5), przeto jej wartości własne λ_i ($i = 1, 2$) wyrażają się za pomocą wzoru (2.6). Współrzędne wektorów własnych \bar{r}_i ($i = 1, 2$), obliczone z równania

$$(3.5) \quad (H - \lambda_i E) \bar{r}_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

tworzą macierz własną

$$(3.6) \quad V = (\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 - \lambda_2 \\ 2 - p & 2 - p \end{bmatrix}.$$

Sprowadzenie macierzy H do postaci przekątnej przeprowadzimy stosując w (3.2) transformację

$$(3.7) \quad \bar{\alpha} = V \bar{x}.$$

Po przekształceniach otrzymujemy zamiast (3.2)

$$(3.8) \quad \nu^2 \ddot{\bar{x}} + (N - \varepsilon U \cos \tau) \bar{x} = 0,$$

gdzie

$$(3.9) \quad N = \vartheta V^{-1} H V = \vartheta \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1^2 & 0 \\ 0 & \nu_2^2 \end{bmatrix},$$

$$U = \vartheta V^{-1} A^{-1} B V, \quad \nu_k = \sqrt{\vartheta \lambda_k} = \frac{\omega_k}{\theta_0}, \quad k = 1, 2.$$

Poszukiwane krzywe graniczne obszarów rezonansowych napisać można w postaci szeregu potęgowego względem małego parametru ε :

$$(3.10) \quad \theta = \theta_0 (1 + \nu^{(1)} \varepsilon + \nu^{(2)} \varepsilon^2 + \dots)$$

lub

$$(3.11) \quad \nu = 1 + \nu^{(1)} \varepsilon + \nu^{(2)} \varepsilon^2 + \dots$$

Stosując dla wyznaczenia współczynników $\nu^{(k)}$ metodę Mettlera otrzymujemy dla

czterech podstawowych obszarów rezonansowych następujące wartości współczynników $\nu^{(1)}$:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} 1. \quad \theta_0 &= 2\omega_1, & \nu^{(1)} &= \pm u_{11}, \\ 2. \quad \theta_0 &= 2\omega_2, & \nu^{(1)} &= \pm u_{22}, \\ 3. \quad \theta_0 &= \omega_1 + \omega_2, & \nu^{(1)} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_{12}u_{21}}{\nu_1 \nu_2}}, \\ 4. \quad \theta_0 &= |\omega_1 - \omega_2|, & \nu^{(1)} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{u_{12}u_{21}}{\nu_1 \nu_2}}, \end{aligned}$$

gdzie przez u_{ik} ($i, k = 1, 2$) oznaczono elementy macierzy U . Ze względu na dość złożoną budowę tej macierzy w przypadku ogólnym analizę stref rezonansowych układu przedstawionego na rys. 1 przeprowadzimy dla przypadku $p = 0$. Strefy rezonansowe odpowiadające kolejnym wartościom θ_0 numerować będziemy od 1 do 4 tak, jak to wynika z (3.12). Na podstawie (2.4), (2.6), (3.6) i (3.9) otrzymujemy

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 3 - 2\sqrt{2} = 0,1716, & \lambda_2 &= 3 + 2\sqrt{2} = 5,8284, \\ \omega_1 &= \sqrt{\lambda_1 \frac{c}{ml^2}} = 0,4142 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, & \omega_2 &= \sqrt{\lambda_2 \frac{c}{ml^2}} = 2,414 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, \\ V &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 1 & \sqrt{2} + 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4142 & 2,4142 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ U &= \vartheta \begin{bmatrix} 0,4394 - 0,5\eta & 0,02515 - 0,08580\eta \\ 4,975 - 2,914\eta & 2,561 - 0,5\eta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Stąd znajdujemy: dla strefy 1

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \theta_0 &= 2\omega_1 = 0,8284 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, & \vartheta &= 1,457, \\ u_{11} &= 0,6403 - 0,7287\eta, \\ \nu &= 1 \pm (0,6403 - 0,7287\eta) \varepsilon + \dots, \\ \theta &= 2\omega_1 \nu = [0,8284 \pm (0,5304 - 0,6037\eta) \varepsilon + \dots] \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, \end{aligned}$$

dla strefy 2

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \theta_0 &= 2\omega_2 = 4,828 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, & \vartheta &= 0,04289, \\ u_{22} &= 0,1099 - 0,02145\eta, \\ \nu &= 1 \pm (0,1099 - 0,02145\eta) \varepsilon + \dots, \\ \theta &= 2\omega_2 \nu = [4,828 \pm (0,5306 - 0,1036\eta) \varepsilon + \dots] \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, \end{aligned}$$

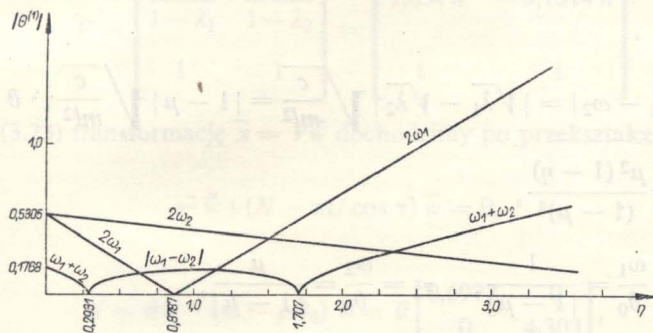
dla strefy 3

$$\begin{aligned}
 \theta_0 &= \omega_1 + \omega_2 = 2,828 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, & \vartheta &= 0,1250, \\
 u_{12} &= 0,003145 - 0,01073 \eta, & u_{21} &= 0,6220 - 0,3643 \eta, \\
 v_1 &= \frac{\omega_1}{\theta_0} = 0,1464, & v_2 &= \frac{\omega_2}{\theta_0} = 0,8536, \\
 v &= 1 \pm 0,06250 \sqrt{2\eta^2 - 4\eta + 1} \cdot \varepsilon + \dots, \\
 \theta &= \theta_0 v = (2,828 \pm 0,1768 \sqrt{2\eta^2 - 4\eta + 1} \cdot \varepsilon + \dots) \sqrt{\frac{c}{ml^2}};
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

dla strefy 4

$$\begin{aligned}
 \theta_0 &= |\omega_1 - \omega_2| = 2,000 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, & \vartheta &= 0,2500, \\
 u_{12} &= 0,006288 - 0,02145 \eta, & u_{21} &= 1,244 - 0,7285 \eta, \\
 v_1 &= \frac{\omega_1}{\theta_0} = 0,2071, & v_2 &= \frac{\omega_2}{\theta_0} = 1,2071, \\
 v &= 1 \pm 0,08839 \sqrt{-2\eta^2 + 4\eta - 1} \cdot \varepsilon + \dots, \\
 \theta &= \theta_0 v = (2,000 \pm 0,1768 \sqrt{-2\eta^2 + 4\eta - 1} \cdot \varepsilon + \dots) \sqrt{\frac{c}{ml^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Jeżeli wprowadzimy dla stref rezonansowych ich umowną «szerokość» określoną jako bezwzględna wartość współczynnika $\theta^{(1)}$ występującego przy ε w wyrażeniach (3.14) do (3.17), to możemy zależność szerokości $|\theta^{(1)}|$ od parametru η przedstawić graficznie jak na rys. 7.



Rys. 7

Rozważmy teraz układ równań ruchu (2.10), który po wykorzystaniu (2.13), podstawieniu $P = P_0 + P_t \cos \theta t$ oraz wprowadzeniu oznaczeń

$$\tau = \theta t, \quad v = \frac{\theta}{\theta_0}, \quad \vartheta = \frac{c}{ml^2 \theta_0^2}, \quad p = \frac{P_0 l}{\sqrt{ck}}, \quad \varepsilon = \frac{P_t l}{\sqrt{ck}}
 \tag{3.18}$$

możemy przedstawić w postaci

$$(3.19) \quad \nu^2 \ddot{\bar{x}} + \vartheta [C - (p + \varepsilon \cos \tau) D] \bar{x} = 0.$$

Wartości własne λ_i ($i = 1, 2$) macierzy $C - pD$ określone są przez (2.15) i dla $p = 0$ otrzymujemy $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \mu^2$. Jak widać na podstawie (2.13) i (3.9) mamy w tym przypadku

$$(3.20) \quad \vartheta C = \vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{bmatrix} = \vartheta \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1^2 & 0 \\ 0 & \nu_1^2 \end{bmatrix} = N,$$

$$\vartheta D = U = \vartheta \begin{bmatrix} 0 & n(1 - \eta) \\ \frac{\mu^2}{n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ze wzorów (3.12) i (3.20) wynika, że szerokości podstawowych stref rezonansowych pierwszego rodzaju (strefa 1 i 2) są co najwyżej rzędu ε^2 , gdyż $u_{11} = u_{22} = 0$. Dla stref drugiego rodzaju otrzymujemy, co następuje:

dla strefy 3

$$\theta_0 = \omega_1 + \omega_2 = (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}) \sqrt{\frac{c}{ml^2}} = (1 + \mu) \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, \quad \vartheta = \frac{1}{(1 + \mu)^2},$$

$$u_{12} u_{21} = \frac{\mu^2 (1 - \eta)}{(1 + \mu)^4}, \quad \nu_1 = \frac{\omega_1}{\theta_0} = \frac{1}{1 + \mu},$$

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{\theta_0} = \frac{\mu}{1 + \mu}, \quad \nu = 1 \pm \frac{\sqrt{\mu}}{2(1 + \mu)} \sqrt{1 - \eta} \cdot \varepsilon + \dots,$$

$$(3.21) \quad \theta = \theta_0 \nu = (1 + \mu \pm 0,5 \sqrt{\mu} \sqrt{1 - \eta} \cdot \varepsilon + \dots) \sqrt{\frac{c}{ml^2}};$$

dla strefy 4

$$\theta_0 = |\omega_1 - \omega_2| = |\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}| \sqrt{\frac{c}{ml^2}} = |1 - \mu| \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, \quad \vartheta = \frac{1}{(1 - \mu)^2},$$

$$u_{12} u_{21} = \frac{\mu^2 (1 - \eta)}{(1 - \mu)^4},$$

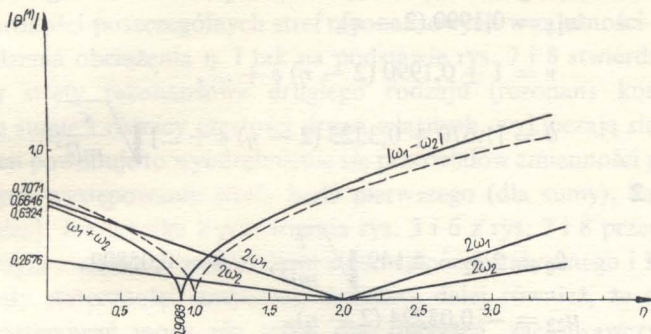
$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{\theta_0} = \frac{1}{|1 - \mu|}, \quad \nu_2 = \frac{\omega_2}{\theta_0} = \frac{\mu}{|1 - \mu|},$$

$$\nu = 1 \pm \frac{\sqrt{\mu}}{2|1 - \mu|} \sqrt{\eta - 1} \cdot \varepsilon + \dots,$$

$$(3.22) \quad \theta = \theta_0 \nu = (|1 - \mu| \pm 0,5 \sqrt{\mu} \sqrt{\eta - 1} \cdot \varepsilon + \dots) \sqrt{\frac{c}{ml^2}}.$$

Zależność szerokości $|\theta^{(1)}|$ stref (3.21) i (3.22) od parametru η przedstawiono liniami przerywanymi na rys. 8 przy ustalonej jak w przypadku statycznym wartości $\mu = 2$.

Pełniejszy obraz rozmieszczenia stref rezonansowych otrzymujemy dla przypadku, gdy stała składowa obciążenia $p \neq 0$. Załóżmy, że składowa ta nie zmienia swego kierunku ($\eta = 0$). Wówczas oznaczając przez D_0 macierz D przy $\eta = 0$ otrzymamy



Rys. 8

$$(3.23) \quad \nu^2 \ddot{\bar{x}} + (C - pD_0 - \varepsilon D \cos \tau) \bar{x} = 0.$$

Ze względu na dość zawiłe zależności występujące w przypadku ogólnym dalsze obliczenia przeprowadzimy przy dotychczasowym założeniu $\mu = 2$ oraz dodatkowym przyjęciu ustalonej wartości dla p , np. $p = 0,5$. Na podstawie (2.15) przy $\eta = 0$ otrzymujemy wartości własne macierzy $C - pD_0$: $\lambda_1 = 0,6972$; $\lambda_2 = 4,3028$. Współrzędne wektorów własnych \bar{r}_i ($i = 1, 2$) obliczamy z równania

$$(C - pD_0 - \lambda_i E) \bar{r}_i = 0, \quad i = 1, 2$$

i otrzymujemy następującą macierz własną

$$V = \begin{bmatrix} \frac{pn}{1 - \lambda_1} & \frac{pn}{1 - \lambda_2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,651n & -0,1514n \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stosując w (3.23) transformację $\bar{x} = V\bar{w}$ dochodzimy po przekształceniach do równania

$$\nu^2 \ddot{\bar{w}} + (N - \varepsilon U \cos \tau) \bar{w} = 0,$$

gdzie

$$N = \vartheta V^{-1} (C - pD_0) V = \vartheta \begin{bmatrix} 0,6972 & 0 \\ 0 & 4,303 \end{bmatrix},$$

$$U = \vartheta V^{-1} D V = \vartheta \begin{bmatrix} 0,5549(2 - \eta) & 0,5549(1 - \eta) - 0,05088 \\ 6,051 - 0,5549(1 - \eta) & -0,5549(2 - \eta) \end{bmatrix}.$$

Częstości drgań własnych w rozważanym przypadku wynoszą

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1 \frac{c}{ml^2}} = 0,8350 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2 \frac{c}{ml^2}} = 2,0743 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}.$$

Mamy więc dla strefy 1

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 2\omega_1 = 1,670 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, & \vartheta &= 0,3586, \\ u_{11} &= 0,1990 (2 - \eta), \\ v &= 1 \pm 0,1990 (2 - \eta) \varepsilon + \dots, \\ (3.24) \quad \theta &= [1,670 \pm 0,3323 (2 - \eta) \varepsilon + \dots] \sqrt{\frac{c}{ml^2}}; \end{aligned}$$

dla strefy 2

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 2\omega_2 = 4,149 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, & \vartheta &= 0,05809, \\ u_{22} &= -0,03224 (2 - \eta), \\ v &= 1 \pm 0,03224 (2 - \eta) \varepsilon + \dots, \\ (3.25) \quad \theta &= [4,149 \pm 0,1338 (2 - \eta) \varepsilon + \dots] \sqrt{\frac{c}{ml^2}}; \end{aligned}$$

dla strefy 3

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \omega_1 + \omega_2 = 2,909 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, & \vartheta &= 0,1182, \\ u_{12} &= 0,06558 (1 - \eta) - 0,006013, & u_{21} &= 0,7151 - 0,06558 (1 - \eta), \\ v_1 &= \frac{\omega_1}{\theta_0} = 0,2870, & v_2 &= \frac{\omega_2}{\theta_0} = 0,7131, \\ v &= 1 \pm 0,2174 \sqrt{-0,1112 \eta^2 - \eta + 1} \cdot \varepsilon + \dots, \\ (3.26) \quad \theta &= [2,909 \pm 0,6324 \sqrt{-0,1112 \eta^2 - \eta + 1} \cdot \varepsilon + \dots] \sqrt{\frac{c}{ml^2}}; \end{aligned}$$

dla strefy 4

$$\begin{aligned} \theta_0 &= |\omega_1 - \omega_2| = 1,239 \sqrt{\frac{c}{ml^2}}, & \vartheta &= 0,6514, \\ u_{12} &= 0,3615 (1 - \eta) - 0,03315, & u_{21} &= 3,942 - 0,3615 (1 - \eta), \\ v_1 &= \frac{\omega_1}{\theta_0} = 0,6739, & v_2 &= \frac{\omega_2}{\theta_0} = 1,6742, \\ v &= 1 \pm 0,5104 \sqrt{0,1111 \eta^2 + \eta - 1} \cdot \varepsilon + \dots, \\ (3.27) \quad \theta &= [1,239 \pm 0,6324 \sqrt{0,1111 \eta^2 + \eta - 1} \cdot \varepsilon + \dots] \sqrt{\frac{c}{ml^2}}. \end{aligned}$$

Zależność szerokości $|\theta^{(1)}|$ stref rezonansowych od parametru η przedstawiono na rys. 8.

4. Wnioski

Przeprowadzona powyżej na podstawie teorii Mettlera analiza podstawowych stref rezonansowych dwóch niezachowawczych układów mechanicznych, pomimo swego przybliżonego charakteru, pozwala wysnuć pewne ogólne wnioski odnośnie położenia i szerokości poszczególnych stref rezonansowych w zależności od wartości parametru śledzenia obciążenia η . I tak na podstawie rys. 7 i 8 stwierdzamy przede wszystkim, że strefy rezonansowe drugiego rodzaju (rezonans kombinacyjny), odpowiadające sumie i różnicy częstości drgań własnych, wykluczają się wzajemnie. W konsekwencji powoduje to wyodrębnienie się przedziałów zmienności parametru η , odpowiadających występowaniu strefy bądź pierwszego (dla sumy), bądź drugiego typu (dla różnicy). Jak wynika z porównania rys. 3 i 6 z rys. 7 i 8 przedziały te pozostają w pewnym związku z przedziałami stosowności statycznego i kinetycznego kryterium utraty stateczności statycznej. Widzimy dalej również, że strefy pierwszego typu występować mogą nie tylko dla obciążeń zachowawczych ($\eta = 0$, E. METTLER [7]), lecz także dla pewnych typów obciążeń niezachowawczych. Strefy drugiego typu występują tylko dla obciążeń niezachowawczych, w szczególności dla $\eta = 1$ (K. PISZCZEK [10]). Z rysunków 7 i 8 wynika także, że szerokości poszczególnych stref rezonansowych zależą w sposób istotny od parametru η . W szczególności szerokość może być równa zeru z dokładnością do wyrazów rzędu nie większego niż ε^2 .

Literatura cytowana w tekście

1. В. В. Болотин, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Гостехиздат, Москва 1956.
2. В. В. Болотин, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Физматгиз, Москва 1961.
3. К. С. Дейнеко, М. Я. Леонов, *Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня*, Прикл. Мат. Мех., 6, 19 (1955).
4. Г. Ю. Джаниелидзе, *Об устойчивости стержня под действием следящей силы*, Труды Ленинградского Политехнического Института им. М. И. Калинина, нр. 192, 1958.
5. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Analiza dokładności metody energetycznej przy kinetycznym kryterium stateczności*, Czasopismo Techniczne, 9, 65 (1960).
6. H. LEIPOLZ, *Über das statische Kriterium bei nichtkonservativen Stabilitätsproblemen der Elastomechanik*, Ing. Arch., 3, 32 (1963); *Über ein Kriterium für die Gültigkeit der statischen Methode zur Bestimmung der Knicklast von elastischen Stäben unter nichtkonservativer Belastung*, Ing. Arch., 4, 32 (1963); *Anwendung des Galerkinschen Verfahrens auf nichtkonservative Stabilitätsprobleme des elastischen Stabes*, Zeitschr. angew. Math. Phys., 4, 13 (1962); *Über die Konvergenz des Galerkinschen Verfahrens bei nichtselbstadjungierten und nichtkonservativen Eigenwertproblemen*, Zeitschr. angew. Math. Phys., 1, 14 (1963).
7. E. METTLER, *Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper*, Ing.-Arch., 17 (1949).
8. Б. Николая, *О критерии устойчивости упругих систем*, Труды Одесского Института инженеров гражданского и коммунального строительства, 1, 1939.
9. B. OLSZOWSKI, *Pewne zagadnienia stateczności dynamicznej elementów konstrukcyjnych przy obciążeniu śledzącym*, Praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 1964.
10. K. PISZCZEK, *Obszary rezonansowe drugiego rodzaju przy obciążeniu śledzącym*, Rozpr. Inżyn., 2, 9 (1961).
11. H. ZIEGLER, *Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik*, Ing.-Arch., 20 (1952).

Резюме

ОБ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

В работе обсуждаются явления потери статической и динамической устойчивости двух неконсервативных механических систем с двумя степенями свободы. Эти системы должны представлять упрощенные модели: продольного изгиба односторонне защемленного стержня, а также потери устойчивости плоской формы изгиба консольной балки, изгибаемой в плоскости большей жесткости. Проводится анализ явлений для случая нагрузки так наз. следящей сосредоточенной силой, действующей с произвольным коэффициентом слежки.

В части, касающейся вопросов статической устойчивости исследуется зависимости критических нагрузок от параметра «слежки». Наибольшее внимание посвящается вопросам динамической устойчивости, а именно влиянию значения параметра «слежки» на положения и ширину основных зон параметрического резонанса первого и второго рода. Анализ проводится используя метод Э. Меттлера.

Сформулированные в заключение выводы касаются вопросов связанных с существованием двух типов зон второго рода (комбинационный для суммы и разности частот собственных колебаний).

В тексте статьи приводятся восемь рисунков.

Summary

ELASTIC STABILITY OF NON-CONSERVATIVE SYSTEMS

The phenomenon of the static and dynamic of loss stability is discussed for two non-conservative mechanical systems with two degrees of freedom. These systems enable simplified description of the buckling of an axially compressed bar clamped at one end and the loss of stability of plane bending of a cantilever beam subjected to bending in the plane of greater rigidity. These phenomena are analysed, assuming that the loading force is of a «follow-up» type with every one value of the coefficient of «following-up».

The part devoted to problems of static stability is concerned with the relations between the critical load and the «follow-up» coefficient. Most attention is paid to problems of dynamic stability that is the influence of the value of the «follow-up» coefficient on the location and the width of the principal regions of parametric resonance of the first and second kind. The analysis is done by means of E. Mettler's method. The conclusions concern questions of occurrence of two types of regions of the second kind (combination resonance for the sum and the difference of natural frequencies).

The paper contains eight figures.

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 marca 1965 r.