

MAREK SOKOŁOWSKI

## DWUSTOPNIOWY SPOSÓB OBLICZANIA PEWNEGO TYPU PŁYT ORTOTROPOWYCH

Wyznaczyć w płycie ortotropowej, w której współczynniki  $\nu$  (por. wyś. 2.1) nie zmieniają się od jednostki. Wzrosty  $\nu$  (2.1) i (2.2) wyprowadzić z równań (2.1) i (2.2) z uwzględnieniem warunków brzożnych.

Otrzymane z równań (2.1) i (2.2) przy pomocy zasad rachunku różniczkowego, przy równaniach algebraicznych liniowych z współczynnikiem  $\nu$ , wyznaczyć można drogą iteracji, w przybliżeniu, przy pomocy iteracji, mogące służyć temu celowi.

2. Równania różniczkowe dla płyty ortotropowej, obciążonej prostokątnie do swych brzożnych, można przedstawić w postaci [1]

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{p(x, y)}{D_x}$$

W równaniu (2.1)  $w$  oznacza przemieszczenie.

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Ponieważ  $D_x$  i  $D_y$  oznaczają sztywności płyty na zgięcie związane z kierunkami  $x$  i  $y$ .

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

a przez  $H$  wielkość związaną ze sztywnością płyty na skręcenie

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{D_x}{E_x} + \frac{D_y}{E_y} \right) + \nu C \quad C = \frac{G h^3}{12}$$

$G$  jest modułem ścisłości,  $E_x$  i  $E_y$  są modułami Younga w kierunkach  $x$  i  $y$ ,  $\nu$  i  $\nu_y$  odwrótnością współczynnika Poissona w kierunkach  $x$  i  $y$ ,  $h$  jest grubością płyty,  $\nu$  jest odwrótnością współczynnika Poissona w kierunku  $x$ .

## ROZPRAWY INŻYNIERSKIE





1. W pracy niniejszej zajmiemy się zagadnieniem numerycznego wyznaczenia wielkości statycznych (tj. momentów zginających i sił tnących) dla zginanej płyty ortotropowej. W szczególności interesować nas będą te przypadki ortotropii, w których współczynnik  $\rho$  [por. wzór (2.1)] jest mniejszy od jedności. Wtedy w równaniach (2.4) i (2.5) występują współczynniki  $\beta^2$  i  $\lambda^2$  zespolone, co w pewnym stopniu komplikuje zadanie.

Otrzymane z równań różniczkowych (2.4) i (2.5) (przy pomocy zasad rachunku różnic skończonych) układy równań algebraicznych liniowych o współczynnikach zespolonych rozwiązywać można drogą iteracji; w pracy przytoczono dwa schematy iteracyjne mogące służyć temu celowi.

2. Równanie różniczkowe ugięcia płyty ortotropowej, obciążonej prostopadle do swej płaszczyzny, można przedstawić w postaci, [1],

$$(2.1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\rho \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p(x, y)}{D_y}.$$

W równaniu tym wprowadzono oznaczenia

$$\rho = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}, \quad \varepsilon = \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}.$$

Poza tym przez  $D_x$  i  $D_y$  oznaczono sztywności płyty na zginanie związane z kierunkami  $x$  i  $y$ :

$$D_x = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_x \frac{h^3}{12}, \quad D_y = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_y \frac{h^3}{12},$$

a przez  $H$  wielkość związaną ze sztywnością płyty na skręcanie:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{D_x}{m_y} + \frac{D_y}{m_x} \right) + 2C, \quad C = \frac{h^3}{12} G_0.$$

$G_0$  jest modułem odkształcenia postaciowego materiału ortotropowej płyty,  $E_x$  i  $E_y$  są modułami sprężystości w kierunkach osi  $x$  i  $y$ ,  $m_x$  i  $m_y$  odwrotnościami współczynników Poissona  $\nu_x$  i  $\nu_y$  w tych kierunkach,  $h$  jest grubością płyty,  $p(x, y)$  obciążeniem oraz  $w$  ugięciem płyty.

Równanie (2.1) przedstawić można w postaci operatorowej

$$(2.2) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w = \frac{p(x, y)}{D_y}.$$

Tutaj

$$(2.3) \quad \begin{cases} \beta^2 = \varepsilon^2(\varrho + \sqrt{\varrho^2 - 1}), \\ \lambda^2 = \varepsilon^2(\varrho - \sqrt{\varrho^2 - 1}). \end{cases}$$

Jak wynika z równań (2.3), rozpatrzyć można trzy przypadki w zależności od wielkości parametru  $\varrho$ .

*Przypadek 1.*  $\varrho > 1$ .  $\beta^2$  i  $\lambda^2$  są liczbami rzeczywistymi i wyrażają się bezpośrednio wzorami (2.3).

*Przypadek 2.*  $\varrho = 1$ . Wtedy  $\beta^2 = \lambda^2 = \varepsilon^2$ , a równanie (2.1) przez podstawienie  $x = \varepsilon \xi$  przekształcić można w sposób następujący:

$$\Delta \Delta w = \frac{p(\varepsilon \xi, y)}{D_y}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Jest to równanie płyty izotropowej.

*Przypadek 3.*  $\varrho < 1$ .  $\beta^2$  i  $\lambda^2$  są liczbami zespolonymi i wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \kappa_1 + i\kappa_2, \\ \lambda^2 &= \kappa_1 - i\kappa_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie

$$\kappa_1 = \varepsilon^2 \varrho, \quad \kappa_2 = \varepsilon^2 \sqrt{1 - \varrho^2}.$$

W granicy, przy  $\varrho = 0$ , co odpowiada zagadnieniu płyty ortotropowej posiadającej charakter gęstożebrowego rusztu,

$$\beta^2 = -\lambda^2 = i\varepsilon^2,$$

a równanie (2.1) przybiera postać

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p(x, y)}{D_y}.$$

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy wyłącznie płyty na obwodzie swobodnie podparte. Warunki brzegowe są w tym przypadku

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$$

na wszystkich krawędziach płyty, przy czym  $n$  oznacza kierunek normalnej do tych krawędzi.

Równanie (2.1) można za pomocą związku (2.2) zastąpić układem równań rzędu drugiego przez wprowadzenie pomocniczych funkcji  $\varphi(x, y)$  i  $\psi(x, y)$ . Takie przekształcenie może być dokonane dwoma sposobami:



$$(2.4.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{p(x, y)}{D_y},$$

$$(2.4.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varphi(x, y),$$

lub

$$(2.5.1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p(x, y)}{D_y},$$

$$(2.5.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \psi(x, y).$$

Na podstawie równań (2.4.2) i (2.5.2) łatwo wyrazić można pochodne  $w_{xx}$  i  $w_{yy}$  za pomocą funkcji  $\varphi(x, y)$  oraz  $\psi(x, y)$ :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\psi - \varphi}{\beta^2 - \lambda^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\beta^2 \varphi - \lambda^2 \psi}{\beta^2 - \lambda^2}. \end{cases}$$

Momenty i siły tnące w płycie ortotropowej obliczymy z następujących wzorów (por. [1]):

$$M_x = -D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = -D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$T_{xz} = -D_x \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (D_x \nu_y + 2C) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right],$$

$$T_{yz} = -D_y \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (D_y \nu_x + 2C) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right].$$

Widać stąd, że zadanie sprowadzić można do wyznaczenia z równań (2.4.1) i (2.5.1) funkcji  $\varphi(x, y)$  i  $\psi(x, y)$ , przy ich bowiem pomocy nie trudno już na podstawie zależności (2.6) i (2.7) obliczyć poszukiwane wielkości  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $T_{xz}$  i  $T_{yz}$ .

**3.** Obecnie zajmiemy się kwestią rozwiązania równań różniczkowych (2.4.1) i (2.5.1).

Nie będziemy się zatrzymywać nad przypadkami  $\varrho > 1$  i  $\varrho = 1$ , gdyż rozwiązanie równań różniczkowych dla  $\varphi(x, y)$  i  $\psi(x, y)$  uzyskać można wieloma znanymi sposobami. Interesuje nas natomiast przypadek, gdy  $\varrho < 1$ , a równania (2.4) i (2.5) przybierają postać

$$(3.1.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (\kappa_1 + i\kappa_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{p}{D_y},$$

$$(3.1.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\kappa_1 - i\kappa_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varphi,$$

$$(3.2.1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (\kappa_1 - i\kappa_2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p}{D_y},$$

$$(3.2.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\kappa_1 + i\kappa_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \psi.$$

Ponieważ  $w(x, y)$  (ugięcie płyty) przybierać może tylko wartości rzeczywiste, to z równań (3.1.2) i (3.2.2), napisanych w postaci

$$\varphi = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - i\kappa_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\psi = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + i\kappa_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

widać, że  $\varphi(x, y)$  i  $\psi(x, y)$  są funkcjami zespolonymi sprzężonymi. Wprowadzając więc dwie nowe funkcje rzeczywiste  $\Phi(x, y)$  i  $\Psi(x, y)$  możemy napisać

$$(3.3) \quad \begin{cases} \varphi = \Phi + i\Psi, \\ \psi = \Phi - i\Psi. \end{cases}$$

Widać stąd, że dla wyznaczenia poszukiwanych funkcji  $\varphi$  i  $\psi$  wystarczy znaleźć jedną z nich [np.  $\varphi$  z równania (3.1.1)]; druga funkcja — w danym przypadku  $\psi$  — określona jest już w ten sposób jednoznacznie przez prostą zależność (3.3). Podstawiając zatem zależność (3.3) do równań (3.1.2) i (3.2.2) otrzymujemy wzory analogiczne do (2.6), które przedstawiają pochodne funkcji ugięcia płyty przez funkcje  $\Phi(x, y)$  i  $\Psi(x, y)$ :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\Psi}{\varepsilon^2 \sqrt{1 - \varrho^2}}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Phi + \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}} \Psi. \end{cases}$$

Wzory powyższe upraszczają się jeszcze bardziej w przypadku szczególnym  $\varrho = 0$  (ortotropowy ruszt gęstożebrowy). Otrzymamy wtedy

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\Psi}{\varepsilon^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Phi.$$

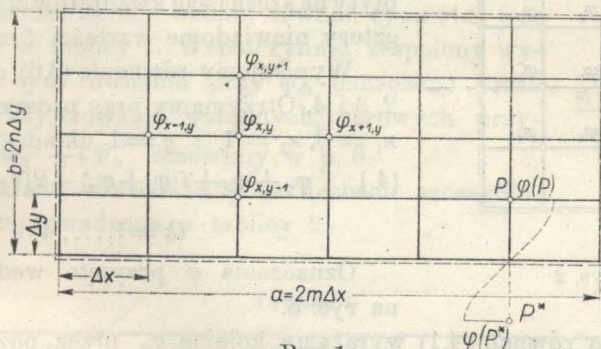
Obecnie rozpatrzmy sposoby wyznaczania wartości  $\Phi(x, y)$  i  $\Psi(x, y)$  z równań różniczkowych (3.1.1) i (3.2.1). Zastąpimy te ostatnie układami równań algebraicznych liniowych posługując się znanymi zasadami rachunku różnic skończonych (por. [2]):

$$(3.5.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{\Delta^2 \varphi(x, y)}{\Delta y^2} = \frac{1}{\Delta^2 y} (\varphi_{x, y+1} - 2\varphi_{x, y} + \varphi_{x, y-1}), \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta^2 \varphi(x, y)}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta^2 x} (\varphi_{x+1, y} - 2\varphi_{x, y} + \varphi_{x-1, y}). \end{cases}$$



Znaczenie użytych tutaj symboli wyjaśnia rys. 1.

Warunkiem brzegowym dla  $\varphi$  będzie — ze względu na swobodne podparcie brzegów płyty —  $\varphi = 0$  na całym obwodzie. Z tego samego warunku wynika dalej równość  $\varphi(P) = -\varphi(P^*)$ , gdzie  $P$  i  $P^*$  są punktami zwierciadlanego odbicia względem dowolnej krawędzi płyty (por. rys. 1).



Rys. 1

Przy większej ilości oczek siatki rozpostartej na płycie — dla zwiększenia dokładności obliczeń — możemy posłużyć się wzorami ściślejszymi

$$(3.5.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{12 \Delta^2 x} (-\varphi_{x+2, y} + 16\varphi_{x+1, y} - 30\varphi_{x, y} + 16\varphi_{x-1, y} - \varphi_{x-2, y}), \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{12 \Delta^2 y} (-\varphi_{x, y+2} + 16\varphi_{x, y+1} - 30\varphi_{x, y} + 16\varphi_{x, y-1} - \varphi_{x, y-2}). \end{cases}$$

Podstawiamy teraz wyrażenia (3.5), na przykład (3.5.1), do równania (3.1.1). Otrzymamy w ten sposób

$$(3.6) \quad (\varphi_{x, y+1} + \varphi_{x, y-1}) + r^2(\kappa_1 + i\kappa_2)(\varphi_{x+1, y} + \varphi_{x-1, y}) + [-2 - 2r^2(\kappa_1 + i\kappa_2)]\varphi_{x, y} = q_{x, y}$$

Tutaj

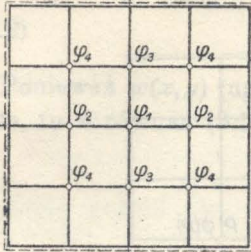
$$q_{x, y} = \frac{p(x, y)}{D_y} \Delta^2 y, \quad r = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dla płyty prostokątnej o bokach  $a$  i  $b$ , o ilości oczek siatki  $4mn$  (por. rys. 1), będzie

$$q_{x, y} = \frac{p(x, y)}{D_y} \left(\frac{b}{2n}\right)^2, \quad r = \frac{b}{a} \frac{m}{n}$$

Dla tak podzielonej płyty napisać możemy  $(2m-1)(2n-1)$  równań typu (3.6), tj. tyle, ile jest niewiadomych wartości  $\varphi_{x, y}$ .

4. Przedstawimy obecnie pierwszy sposób iteracji układu równań pięcioczołowych typu (3.6) nie różniący się zasadniczo od sposobu iteracji układów ze współczynnikami rzeczywistymi.



Rys. 2

Posłużymy się prostym przykładem płyty kwadratowej obciążonej równomiernie. Ze względu na symetrię zagadnienia przy podziale płyty na szesnaście kwadratów otrzymamy tylko cztery niewiadome wartości funkcji  $\varphi$  (rys. 2).

Wypisujemy równania (3.6) dla punktów 1, 2, 3 i 4. Otrzymamy przy prostych założeniach  $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = 1$  i  $q = 1$  układ

$$(4.1) \quad \varphi_q + \varphi_d + i(\varphi_l + \varphi_p) - 2(1+i)\varphi_k = 1$$

$$(k = 1, \dots, 4).$$

Oznaczenia  $\varphi$  przyjęto według schematu na rys. 3.

W układzie równań (4.1) wyrażamy kolejne  $\varphi_k$  przez pozostałe niewiadome. Otrzymamy w ten sposób

Tablica 1

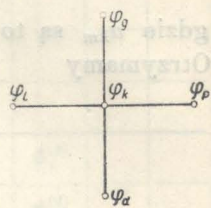
								2 iteracja
$\Phi_1^{(1)}$	$i\Psi_1^{(1)}$							1 iteracja
$\Phi_1^{(0)}$	$i\Psi_1^{(0)}$	$\Phi_2^{(0)}$	$i\Psi_2^{(0)}$	$\Phi_3^{(0)}$	$i\Psi_3^{(0)}$	$\Phi_4^{(0)}$	$i\Psi_4^{(0)}$	przybl. wstępne
$\varphi_1$		$\varphi_2$		$\varphi_3$		$\varphi_4$		
—	—	$\beta_{12}$	$i\gamma_{12}$	$\beta_{13}$	$i\gamma_{13}$	$\beta_{14}$	$i\gamma_{14}$	układ równań
$\beta_{21}$	$i\gamma_{21}$	—	—	$\beta_{23}$	$i\gamma_{23}$	$\beta_{24}$	$i\gamma_{24}$	
$\beta_{31}$	$i\gamma_{31}$	$\beta_{32}$	$i\gamma_{32}$	—	—	$\beta_{34}$	$i\gamma_{34}$	
$\beta_{41}$	$i\gamma_{41}$	$\beta_{42}$	$i\gamma_{42}$	$\beta_{43}$	$i\gamma_{43}$	—	—	
$\beta_{12} \Phi_2^{(0)}$	$i\gamma_{12} \Phi_2^{(0)}$							
$-\gamma_{12} \Psi_2^{(0)}$	$i\beta_{12} \Psi_2^{(0)}$							1 iteracja
$\beta_{13} \Phi_3^{(0)}$	$i\gamma_{13} \Phi_3^{(0)}$							
$-\gamma_{13} \Psi_3^{(0)}$	$i\beta_{13} \Psi_3^{(0)}$							
$\beta_{14} \Phi_4^{(0)}$	$i\gamma_{14} \Phi_4^{(0)}$							
$-\gamma_{14} \Psi_4^{(0)}$	$i\beta_{14} \Psi_4^{(0)}$							
+	$\beta_{10}$	$i\gamma_{10}$						
$\Phi_1^{(1)}$	$i\Psi_1^{(1)}$							2 iteracja



$$(4.2) \begin{cases} \varphi_1 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)\varphi_2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)\varphi_3 + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)q, \\ \varphi_2 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)\varphi_1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)\varphi_4 + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)q, \\ \varphi_3 = (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i)\varphi_1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)\varphi_4 + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)q, \\ \varphi_4 = (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i)\varphi_2 + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)\varphi_3 + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)q. \end{cases}$$

Ogólny schemat iteracji układu równań typu (4.2) jest przedstawiony w tabelicy 1. Współczynnik zespolony występujący w  $k$ -tym równaniu przy  $\varphi_m$  oznaczono przez  $\beta_{km} + i\gamma_{km}$ . Przyjmowanie wstępnych, zerowych przybliżeń  $\varphi_k^{(0)} = \Phi_k^{(0)} + i\Psi_k^{(0)}$  omówimy w p. 6.

Iteracja układu równań (4.2) na liczbach szczególnych jest przeprowadzona w tabelicy 2.



Rys. 3

Tablica 2

0,3%/	0,3% <i>i</i>	0,2%/	0,2% <i>i</i>	0,2% <sub>o</sub>	0,2% <i>i</i>	0,1%/	0,1% <i>i</i>	błąd
-1,17	+1,17 <i>i</i>	-0,835	+0,915 <i>i</i>	-0,915	+0,835 <i>i</i>	-0,6675	+0,6675 <i>i</i>	3 iteracja
-1,16	+1,16 <i>i</i>	-0,83	+0,92 <i>i</i>	-0,92	+0,83 <i>i</i>	-0,665	+0,665 <i>i</i>	2 iteracja
-1,18	+1,18 <i>i</i>	-0,84	+0,91 <i>i</i>	-0,91	+0,84 <i>i</i>	-0,67	+0,67 <i>i</i>	1 iteracja
-1,31	+1,31 <i>i</i>	-0,93	+0,93 <i>i</i>	-0,93	+0,93 <i>i</i>	-0,66	+0,66 <i>i</i>	Przybliżenie wstępne
$\varphi_1$		$\varphi_2$		$\varphi_3$		$\varphi_4$		
		0,5	0,5 <i>i</i>	0,5	-0,5 <i>i</i>			
0,25	0,25 <i>i</i>					0,5	-0,5 <i>i</i>	układ równań
0,25	-0,25 <i>i</i>					0,5	0,5 <i>i</i>	
		0,25	-0,25 <i>i</i>	0,25	0,25 <i>i</i>			
-0,465	-0,465	-0,295	+0,295	-0,295	+0,295	-0,21	+0,21	1 iteracja
-0,465	+0,465	-0,295	-0,295	+0,295	+0,295	+0,227	+0,227	
-0,465	+0,465	-0,33	+0,33	-0,33	-0,33	-0,227	-0,227	
+0,465	+0,465	+0,33	+0,33	-0,33	+0,33	-0,21	+0,21	
+0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	
-1,18	+1,18	-0,84	+0,91	-0,91	+0,84	-0,67	+0,67	2 iteracja
-0,42	-0,42	-0,29	+0,29	-0,29	+0,29	-0,2075	+0,2075	
-0,455	+0,455	-0,29	-0,29	+0,29	+0,29	+0,23	+0,23	
-0,455	+0,455	-0,335	+0,335	-0,335	-0,335	-0,23	-0,23	
+0,42	+0,42	+0,335	+0,335	-0,335	+0,335	-0,2075	+0,2075	
+0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	
-1,16	+1,16	-0,83	+0,92	-0,92	+0,83	-0,665	+0,665	3 iteracja
-0,415	-0,415	-0,2925	+0,2925	-0,2925	+0,2925	-0,2087	+0,2087	
-0,46	+0,46	-0,2925	-0,2925	+0,2925	+0,2925	+0,2287	+0,2287	
-0,46	+0,46	-0,3325	+0,3325	-0,3325	-0,3325	-0,2287	-0,2287	
+0,415	+0,415	+0,3325	+0,3325	-0,3325	+0,3325	-0,2087	+0,2087	
+0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	
-1,17	+1,17	-0,835	+0,915	-0,915	+0,835	-0,6675	+0,6675	

5. Omówimy teraz drugi sposób iteracji układu równań typu (3.6). W tym celu, podobnie jak poprzednio, przekształcimy układ równań

$$\sum_{m=1}^n a_{km} \varphi_m = q_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie  $a_{km}$  są to współczynniki zespolone, na układ analogiczny do (4.2). Otrzymamy

$$\varphi_k = \frac{1}{a_{kk}} \left( q_k - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n a_{km} \varphi_m \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Oznaczając

$$\frac{q_k}{a_{kk}} = \beta_{k0} + i\gamma_{k0},$$

$$\frac{a_{km}}{a_{kk}} = \beta_{km} + i\gamma_{km},$$

otrzymujemy

$$\Phi_k + i\Psi_k = \beta_{k0} + i\gamma_{k0} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (\beta_{km} \Phi_m - \gamma_{km} \Psi_m) + i(\beta_{km} \Psi_m + \gamma_{km} \Phi_m) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Rozdzielając teraz w powyższych równaniach część rzeczywistą i urojoną otrzymamy dwa układy równań w następującej postaci

$$(5.1) \quad \Phi_k = \beta_{k0} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \beta_{km} \Phi_m - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \gamma_{km} \Psi_m, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

$$(5.2) \quad \Psi_k = \gamma_{k0} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \beta_{km} \Psi_m + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \gamma_{km} \Phi_m,$$

Po ustaleniu początkowych wartości  $\Phi_m^{(0)}$  i  $\Psi_m^{(0)}$  przeprowadzamy iterację na przemian przy pomocy układu (5.1) i (5.2).

W zestawieniu ze sposobem opisanym poprzednio sposób dopiero co przedstawiony ma tę zaletę, że pozwala uniknąć mnożenia przez siebie liczb zespolonych. W związku z tym stwarza on mniej okazji do popełnienia pomyłek liczbowych i upraszcza postępowanie rachunkowe.

Przykład iteracji na liczbach ogólnych podaje tablica 3, zaś szczegółowe obliczenia dla sześciu niewiadomych tablica 4.

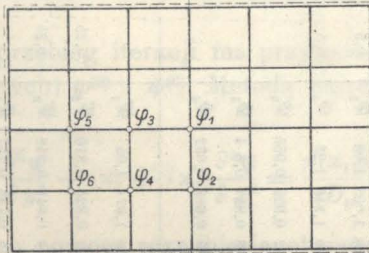


Tablica 3

$\Phi$								$\Psi$					
$\Phi^{(3)}$	$\Phi^{(2)}$	$\Phi^{(1)}$	$\Phi^{(0)}$		1	2	3	4		$\Psi^{(0)}$	$\Psi^{(1)}$	$\Psi^{(2)}$	$\Psi^{(3)}$
		$\Phi_1^{(1)}$	$\Phi_1^{(0)}$	$\Phi_1$	$\gamma_{10}$	$\gamma_{20}$	$\gamma_{30}$	$\gamma_{40}$		$\Psi_1^{(0)}$			
		$\Phi_2^{(1)}$	$\Phi_2^{(0)}$	$\Phi_2$	$\beta_{12}$		$\beta_{32}$	$\beta_{42}$		$\Psi_2^{(0)}$			
		$\Phi_3^{(1)}$	$\Phi_3^{(0)}$	$\Phi_3$	$\beta_{13}$	$\beta_{23}$		$\beta_{43}$		$\Psi_3^{(0)}$			
		$\Phi_4^{(1)}$	$\Phi_4^{(0)}$	$\Phi_4$	$\beta_{14}$	$\beta_{24}$	$\beta_{34}$			$\Psi_4^{(0)}$			
			$-\Psi_1^{(0)}$	$-\Phi_1$		$\gamma_{21}$	$\gamma_{31}$	$\gamma_{41}$	$\Phi_1$	$\Phi_1^{(0)}$	$\Phi_1^{(1)}$		
			$-\Psi_2^{(0)}$	$-\Phi_2$	$\gamma_{12}$		$\gamma_{32}$	$\gamma_{42}$	$\Phi_2$	$\Phi_2^{(0)}$	$\Phi_1^{(2)}$		
			$-\Psi_3^{(0)}$	$-\Phi_3$	$\gamma_{13}$	$\gamma_{23}$		$\gamma_{43}$	$\Phi_3$	$\Phi_3^{(0)}$	$\Phi_1^{(3)}$		
			$-\Psi_4^{(0)}$	$-\Phi_4$	$\gamma_{14}$	$\gamma_{24}$	$\gamma_{34}$		$\Phi_4$	$\Phi_4^{(0)}$	$\Phi_1^{(4)}$		
$-\Psi^{(3)}$	$-\Psi^{(2)}$	$-\Psi^{(1)}$	$-\Psi^{(0)}$		$\beta_{10}$	$\beta_{20}$	$\beta_{30}$	$\beta_{40}$		$\Phi^{(0)}$	$\Phi^{(1)}$	$\Phi^{(2)}$	$\Phi^{(3)}$

W przykładzie liczbowym przyjęto płytę w kształcie prostokąta o stosunku boków 4:6 (rys. 4), zaś wszelkie stałe przyjęto w ten sposób, że równanie (3.1.1) przybiera postać

$$(5.3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (0,6 + 0,8 \eta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{p}{D_y}$$



Rys. 4

Dla ułatwienia podajemy gotowe wzory na obliczanie współczynników  $\beta_{km}$  i  $\gamma_{km}$  (tablica 5).

Przy układzie punktów według rys. 3 równania (5.1) i (5.2) przybierają postać

$$\Phi_k = \beta_{k0} + \beta_{kh}(\Phi_l + \Phi_p) + \beta_{kv}(\Phi_g + \Phi_d) - \gamma_{kh}(\Psi_l + \Psi_p) - \gamma_{kv}(\Psi_g + \Psi_d),$$

$$\Psi_k = \gamma_{k0} + \beta_{kh}(\Psi_l + \Psi_p) + \beta_{kv}(\Psi_g + \Psi_d) + \gamma_{kh}(\Phi_l + \Phi_p) + \gamma_{kv}(\Phi_g + \Phi_d),$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Tablica 4

										1	2	3	4	5	6											
$\Phi(9)$	$\Phi(8)$	$\Phi(7)$	$\Phi(6)$	$\Phi(5)$	$\Phi(4)$	$\Phi(3)$	$\Phi(2)$	$\Phi(1)$	$\Phi(0)$		-0,125	-0,125	-0,125	-0,125	-0,125	-0,125		$\Psi(0)$	$\Psi(1)$	$\Psi(2)$	$\Psi(3)$	$\Psi(4)$	$\Psi(5)$	$\Psi(6)$		
1,364	1,363	1,362	1,360	1,358	1,352	1,342	1,351	1,362	1,37	$\Phi_1$		0,25	0,25					$\Psi_1$	-1,05	-1,071	-1,070	-1,088	-1,088	-1,088	-1,089	
	1,017	1,016	1,015	1,014	1,009	1,004	1,000	1,005	1,06	$\Phi_2$	0,5			0,25				$\Psi_2$	-0,776	-0,824	-0,830	-0,838	-0,839	-0,838	-0,838	
	1,272	1,272	1,270	1,267	1,268	1,262	1,250	1,246	1,23	$\Phi_3$	0,5			0,25	0,25			$\Psi_3$	-0,948	-0,942	-0,958	-0,958	-0,961	-0,962	-0,961	
		0,953	0,952	0,957	0,949	0,947	0,942	0,929	0,955	$\Phi_4$		0,5	0,5			0,25		$\Psi_4$	-0,787	-0,743	-0,745	-0,748	-0,746	-0,746	-0,745	
		0,910	0,910	0,908	0,910	0,907	0,903	0,881	0,84	$\Phi_5$				0,25		0,25		$\Psi_5$	-0,628	-0,590	-0,580	-0,577	-0,583	-0,581	-0,581	
		0,695	0,692	0,695	0,693	0,693	0,693	0,688	0,632	$\Phi_6$				0,25	0,5			$\Psi_6$	-0,488	-0,465	-0,461	-0,466	-0,462	-0,462	-0,461	
			1,089	1,088	1,088	1,083	1,070	1,071	1,05	$\Psi_1$		0,125	-0,125					$\Phi_1$	1,37	1,362	1,351	1,342	1,352	1,358	1,360	1,362
			0,838	0,838	0,839	0,838	0,830	0,824	0,816	$\Psi_2$	0,25			-0,125				$\Phi_2$	1,06	1,005	1,000	1,004	1,009	1,014	1,015	1,016
			0,961	0,962	0,961	0,958	0,959	0,942	0,948	$\Psi_3$	-0,25			0,125	-0,125			$\Phi_3$	1,23	1,246	1,250	1,262	1,268	1,267	1,270	1,272
			0,745	0,746	0,746	0,748	0,745	0,743	0,737	$\Psi_4$		0,25	0,25			-0,125		$\Phi_4$	0,955	0,928	0,942	0,947	0,949	0,951	0,952	0,953
			0,581	0,581	0,583	0,577	0,580	0,590	0,628	$\Psi_5$				-0,125		0,125		$\Phi_5$	0,814	0,881	0,905	0,907	0,910	0,908	0,910	0,910
			0,461	0,462	0,462	0,466	0,461	0,465	0,488	$\Psi_6$				-0,125	0,25			$\Phi_6$	0,632	0,688	0,693	0,693	0,693	0,695	0,694	0,695
																		$\Phi(0)$	$\Phi(1)$	$\Phi(2)$	$\Phi(3)$	$\Phi(4)$	$\Phi(5)$	$\Phi(6)$	$\Phi(7)$	
											0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25										

1226]



Tutaj oznaczyliśmy

$$\beta_{kl} = \beta_{kp} = \beta_{kh},$$

$$\gamma_{kl} = \gamma_{kp} = \gamma_{kh},$$

$$\beta_{ky} = \beta_{ka} = \beta_{kv},$$

$$\gamma_{ky} = \gamma_{ka} = \gamma_{kv}.$$

Tablica 3 pozwala na obliczenie wielkości  $\beta$  i  $\gamma$  dla równania

$$(5.4) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (\kappa_1 + i\kappa_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = q$$

lub

$$(5.5) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (\kappa_1 + i\kappa_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = q.$$

Tablica 5

dla (5.4)	$\beta$	$\gamma$	dla (5.5)
$kh$	$\frac{1}{2} \frac{1 + \kappa_1}{2[(1 + \kappa_1)^2 + \kappa_2^2]}$	$\frac{\kappa_2}{2[(1 + \kappa_1)^2 + \kappa_2^2]}$	$kv$
$kv$	$\frac{1 + \kappa_1}{2[(1 + \kappa_1)^2 + \kappa_2^2]}$	$\frac{1}{2} \frac{\kappa_2}{2[(1 + \kappa_1)^2 + \kappa_2^2]}$	$kh$
$k0$	$-q \frac{1 + \kappa_1}{2[(1 + \kappa_1)^2 + \kappa_2^2]}$	$q \frac{\kappa_2}{2[(1 + \kappa_1)^2 + \kappa_2^2]}$	$k0$

6. Duży wpływ na przebieg iteracji ma przyjęcie «zerowych przybliżeń» (czyli wielkości wstępnych)  $\varphi^{(0)}$  i  $\psi^{(0)}$ . Metodą najprostszą będzie tutaj rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (\kappa_1 + i\kappa_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{p(x, y)}{D_y}$$

w sposób przybliżony za pomocą rozwinięcia obciążenia  $p(x, y)$  w podwójny szereg trygonometryczny i uwzględnienie tylko pierwszego wyrazu tego rozwinięcia.

Na przykład, zakładając dla obciążenia  $p(x, y)$  postać przybliżoną

$$A \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b},$$

ustalimy współczynnik  $A$  z warunku

$$\frac{\partial}{\partial A} \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left[ \frac{p(x, y)}{D_y} - A \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \right]^2 dx dy = 0.$$

Otrzymamy stąd

$$A = \frac{1}{abD_y} \int_0^{2a} \int_0^{2b} p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} dx dy.$$

Teraz równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (\kappa_1 + i\kappa_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{p(x, y)}{D_y} \approx A \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b}$$

rozwiążemy już łatwo, przyjmując dla  $\varphi(x, y)$  następującą postać:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1 \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b}.$$

Otrzymamy wtedy po prostych przekształceniach

$$\varphi_1 = \frac{4A a^2 b^2}{\pi^2} \frac{n^2 a^2 + \kappa_1 m^2 b^2 - i\kappa_2 m^2 b^2}{(n^2 a^2 + \kappa_1 m^2 b^2)^2 + \kappa_2^2 m^4 b^4},$$

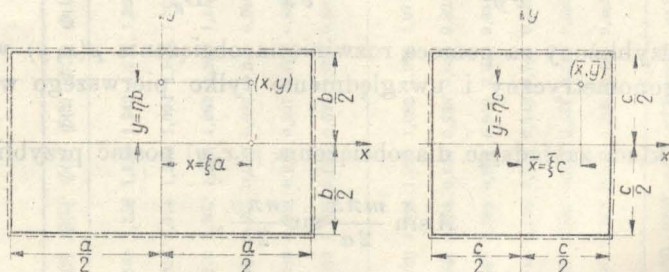
a w końcu

$$\varphi^{(0)}(x, y) = \varphi_1 \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b}.$$

Obliczenia wielkości  $\varphi_k^{(0)}$  dla płyty prostokątnej obciążonej równomiernie można dokonać także w inny sposób. Przy pomocy tablicy 6, podającej stosunki  $\bar{\varphi}_k/\bar{\varphi}_1$  dla izotropowej kwadratowej płyty obciążonej równomiernie, możemy wyznaczyć przybliżenia wstępne stosunków  $\varphi_k/\varphi_1$  rozpatrywanej prostokątnej ortotropowej płyty, zakładając w mało dokładnym przybliżeniu równość

$$\frac{\varphi(\xi, \eta)}{\varphi_1} \approx \frac{\bar{\varphi}(\xi, \eta)}{\bar{\varphi}_1}.$$

Oznaczenia  $\xi$  i  $\eta$  wyjaśnione są na rys. 5.



Rys. 5

Wartość  $\varphi_1$  (w środku płyty) ustalić można wstawiając do któregośkolwiek z pięcioczłonowych równań typu (4.2) zamiast  $\varphi_k$  wyrażenia  $\varphi_1 \lambda$  ( $\lambda$  jest



tu odpowiednim współczynnikiem wziętym z tabelicy 6). Z powstałego w ten sposób równania o jednej niewiadomej obliczymy bez trudu  $\varphi_1 = \varphi_1^{(0)}$ .

Tablica 6

$\lambda = \frac{\bar{\varphi}}{\varphi_1}$	$x/a$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	1,000	0,966	0,860	0,675	0,394	0
0,1	0,966	0,934	0,833	0,653	0,383	0
0,2	0,860	0,833	0,744	0,588	0,348	0
0,3	0,675	0,653	0,588	0,469	0,283	0
0,4	0,394	0,383	0,348	0,283	0,176	0
0,5	0	0	0	0	0	0

$\lambda = \frac{\bar{\varphi}}{\varphi_1}$	$x/a$				
	0	0,125	0,25	0,375	0,5
0	1,000	0,946	0,778	0,474	0
0,125	0,946	0,896	0,738	0,452	0
0,25	0,778	0,738	0,612	0,381	0
0,375	0,474	0,452	0,381	0,244	0
0,5	0	0	0	0	0

$\lambda = \frac{\bar{\varphi}}{\varphi_1}$	$x/a$			
	0	1/6	1/3	1/2
0	1,000	0,904	0,592	0
1/6	0,904	0,818	0,541	0
1/3	0,592	0,541	0,365	0
1/2	0	0	0	0

Formuła interpolacyjna

$$y = \frac{1}{16} [9(\bar{a} + a) - (b + \bar{b})].$$

Okazuje się, że praktycznie do tego celu nadaje się najlepiej pierwsze równanie, wypisane dla punktu środkowego płyty.

W podanych wyżej przykładach iteracji przybliżenia zerowe,  $\varphi_{(0)}^k$ , obliczone zostały właśnie opisaną metodą.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Nowacki, *Pasma płytowe ortotropowe*, Arch. Mech. Stos., 1951.  
 [2] D. J. Панов, *Sprawocznik po czislennomu rieszenju differencjalnych urawnień w czastnych proizwodnych*, Moskwa-Leningrad 1951.

#### Резюме

#### ДУСТАДИАЛЬНЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА НЕКОТОРОГО ТИПА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

В работе рассмотрено проблему численного расчета статических величин — изгибающих моментов и срезающих сил — в изгибаемой ортотропной пла-

стинке. Особое внимание обращено на те случаи ортотропии, в которых коэффициент  $\rho$  [ср. формулу (2.1)] меньше единицы. Тогда в уравнениях (2.4) и (2.5) выступают комплексные коэффициенты  $\beta^2$  и  $\lambda^2$ , что, в некоторой степени, усложняет задачу.

Полученные при помощи основ исчисления конечных разностей системы линейных алгебраических уравнений, соответствующие дифференциальным уравнениям (2.4) и (2.5), решаются в работе методом итерации. Для этой цели приведены две итерационные схемы (п. 4 и 5), приспособленные для решения уравнений с комплексными коэффициентами.

#### Summary

#### A TWO STAGE METHOD OF SOLVING ORTHOTROPIC PLATE PROBLEMS

The problem of numerical calculation of statical quantities (bending moments and shearing forces) for an orthotropic plate subjected to bending is discussed, particular attention being paid to cases where the coefficient  $\rho$  [Eq. (2.1)] is less than one.

In such cases the coefficients  $\beta^2$  and  $\lambda^2$ , appearing in Eqs. (2.4) and (2.5), are complex numbers, which renders the problem a little more complicated.

The systems of linear algebraic equations obtained by means of the calculus of finite differences, which correspond to the differential equations (2.4) and (2.5), are solved by using the iteration method, for which two iteration procedures (Arts. 4 and 5) are described for solving problems with complex coefficients.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 grudnia 1953 r.*