

WŁADYSŁAW BOGUSZ

W przypadku płyt kwadratowej kształtu obciążonej obciążeniem ciągłym (rys. 1) **Z TEORII PŁYT ORTOTROPOWYCH**

$$(1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q}{D}$$

gdzie $w(x, y)$ ugięcie płyty, $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$, E moduł sprężystości, h grubość płyty, ν współczynnik Poissona. Dla płyty ortotropowej moduł sprężystości wzdłuż dwóch osi prostokądnicy jest różny, np. wzdłuż osi x jest E_1 , a wzdłuż osi y E_2 ($E_1 \neq E_2$), odpowiednio współczynnik Poissona ν_1 i ν_2 ($\nu_1 \neq \nu_2$).

Dla takiej płyty równanie powierzchni ugięcia jest

$$(2) \quad A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + C \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q}{K}$$

gdzie

$$(3) \quad \begin{cases} A = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}, & C = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2}, & K = \frac{h^3}{12} \\ B = -\left[\frac{1}{1 - \nu_1^2} (\nu_1 \nu_2 + \nu_2 \nu_1) + 4\nu_1 \nu_2 \right] \end{cases}$$

Tutaj q jest rozkładem obciążenia postaciowej. W przypadku gdy $B = -\sqrt{AC}$, można równanie (2) sprowadzić do postaci (1) (por. [1]).

Naszym celem jest, aby można było równanie (2) w ogólnym przypadku przedstawić albo w postaci (1), albo w takiej postaci, aby obliczenia płyty nie nastąpiły dwóch trudności rachunkowych.

Wynikiem sposobu obliczenia płyt jest metoda dwusłupowa, podana przez H. Marcusa (por. [2]).

Zastosowanie tej metody wymaga rozkładu powierzchni ugięcia płyty, np. w postaci (1) na dwa równania

$$L^2 \Delta w = -p$$

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE**

Aby więc móc zastosować metodę dwusłupową, równanie (2) przedstawić w postaci modułowej (1) lub w postaci (3) z dwoma równaniami

W przypadku płyty izotropowej cienkiej, obciążonej obciążeniem ciągłym $p(x, y)$, równanie powierzchni ugięcia ma postać

$$(1) \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = -\frac{p}{N},$$

gdzie $z(x, y)$ ugięcie płyty, $p(x, y)$ obciążenie, $N = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E moduł sprężystości, h grubość płyty oraz ν liczba Poissona. Dla płyty ortotropowej moduł sprężystości wzdłuż dwóch osi prostopadłych jest różny, np. wzdłuż osi x jest E_1 , a wzdłuż osi y E_2 ($E_1 \neq E_2$); odpowiednie liczby Poissona są ν_1 i ν_2 ($\nu_1 \neq \nu_2$).

Dla takiej płyty równanie powierzchni ugięcia jest

$$(2) \quad A \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + C \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = -\frac{p}{K},$$

gdzie

$$(3) \quad \begin{cases} A = -\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, & C = -\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}, & K = \frac{h^3}{12}, \\ 2B = -\left[\frac{1}{1-\nu_1\nu_2} (E_1\nu_2 + E_2\nu_1) + 4G_0 \right]. \end{cases}$$

Tutaj G_0 jest modulem sprężystości postaciowej. W przypadku gdy $B = -\sqrt{AC}$, można równanie (2) sprowadzić do postaci (1) (por. [1]).

Nasuwa się pytanie, czy można równanie (2) w ogólnym przypadku przedstawić albo w postaci (1), albo w takiej postaci, aby obliczenie płyty nie nastęrczało dużych trudności rachunkowych.

Wygodnym sposobem obliczania płyt jest metoda dwustopniowa, podana przez H. Marcusa (por. [2]).

Zastosowanie tej metody wymaga rozłożenia równania powierzchni ugięcia płyty, np. w postaci (1), na dwa równania

$$V^2 M = -p,$$

$$V^2 z = -\frac{M}{N}.$$

Aby więc zastosować metodę Marcusa, należy równanie (2) przedstawić w postaci możliwej do rozłożenia na takie lub podobne równania.

W szczególnym przypadku, mianowicie dla $p=0$, równanie (2) zostało przedstawione w postaci (por. [3]).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) z = 0 \quad (\beta, \lambda = \text{const}).$$

Okazuje się, że równanie (2) można w ogólnym przypadku przedstawić w postaci

$$(2.1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) z = -\frac{p}{\gamma},$$

gdzie α , β i γ są stałe.

Należy w tym celu rozróżnić trzy przypadki:

$$(I) \quad \sqrt{E_1 E_2} = \frac{1}{2}[E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1 + 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2)],$$

$$(II) \quad \sqrt{E_1 E_2} > \frac{1}{2}[E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1 + 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2)],$$

$$(III) \quad \sqrt{E_1 E_2} < \frac{1}{2}[E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1 + 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2)].$$

W przypadku I dzieląc obie strony przez $(1 - \nu_1 \nu_2)$ otrzymamy

$$\sqrt{\frac{E_1}{(1 - \nu_1 \nu_2)} \frac{E_2}{(1 - \nu_1 \nu_2)}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2} (E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1) + 4G_0 \right],$$

czyli zgodnie z oznaczeniami (3) mamy $B = -\sqrt{AC}$.

W tym przypadku równanie (2) sprowadza się do równania (1) przez zastosowanie transformacji podanej przez M. T. Hubera, [1].

Rozpatrzmy *przypadek II*. Oznaczmy

$$(4) \quad \begin{cases} \sqrt{E_1} = k_1, & \sqrt{E_2} = k_2, & N = \frac{h^3}{12} \frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2}, \\ \sqrt{2\sqrt{E_1 E_2} - E_1 \nu_2 - E_2 \nu_1 - 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2)} = k_3. \end{cases}$$

Rozważmy równanie następujące:

$$(5) \quad -\frac{N}{k_1 k_3} \left(E_1 k_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_1 k_2 k_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + E_2 k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \times \\ \times \left(k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z = f(x, y).$$

Po wykonaniu działań otrzymamy równanie w postaci

$$(6) \quad N \left\{ -E_1 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - [E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1 + 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2)] \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - E_2 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right\} = f(x, y).$$

Wstawiając za N wartość (4) otrzymamy, porównując równanie (6) z równaniem (2), że $f(x, y) = -p(x, y)$, czyli (2) można napisać w postaci (5)

$$(7) \quad -\frac{N}{k_1 k_3} \left(E_1 k_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_1 k_2 k_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + E_2 k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \times \\ \times \left(k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z = -p(x, y).$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$(8) \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2k_1} \sqrt{k_3} + k_2 \sqrt{k_1}} \quad \text{i} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{2k_1} \sqrt{k_3} - k_2 \sqrt{k_1}}.$$

Jeżeli zastosujemy transformacje

$$(9) \quad \xi = \lambda \left(y - x \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right), \quad \eta = \mu \left(y + x \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right),$$

to równanie (7) przyjmie postać

$$(10) \quad -\frac{N\sqrt{k_3}}{k_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left[\lambda^2 \left(2k_3 - k_2 \sqrt{\frac{k_3}{k_1}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \mu^2 \left(2k_3 + k_2 \sqrt{\frac{k_3}{k_1}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] z = -p.$$

Jeżeli oznaczymy

$$(11) \quad \alpha = \lambda^2 \left(2k_3 - k_2 \sqrt{\frac{k_3}{k_1}} \right), \quad \beta = \mu^2 \left(2k_3 + k_2 \sqrt{\frac{k_3}{k_1}} \right), \quad \gamma = -\frac{N\sqrt{k_3}}{k_1},$$

to równanie (10) można napisać w postaci

$$(12) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) z = -\frac{p}{\gamma}.$$

W przypadku III przyjmijmy oznaczenie

$$(13) \quad L = \frac{1}{2} \{ E_1 v_2 + E_2 v_1 + 4G_0(1 - v_1 v_2) + \\ + \sqrt{[E_1 v_2 + E_2 v_1 + 4G_0(1 - v_1 v_2)]^2 - 4E_1 E_2} \}.$$

Weźmy pod uwagę równanie

$$(14) \quad -\frac{N}{L} \left(L \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(E_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z = f(x, y).$$

Wykonując działania po lewej stronie (14) sprawdzimy, że równanie to przechodzi w równanie

$$(15) \quad -\frac{N}{L} \left(L \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(E_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z = -p(x, y).$$

Wprowadzimy zmianę zmiennej:

$$(16) \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{E_1}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{L}}.$$

Po zastosowaniu transformacji (16) otrzymamy równanie

$$-\frac{N}{L} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{L}{E_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{E_2}{L} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) z = -p.$$

Oznaczając

$$\alpha = \frac{L}{E_1}, \quad \beta = \frac{E_2}{L}, \quad \gamma = -\frac{N}{L},$$

otrzymamy równanie

$$(17) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) z = -\frac{p}{\gamma}.$$

W każdym więc przypadku można równanie (2) napisać w postaci (2.1).

Jeżeli teraz oznaczymy

$$M = \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) z,$$

to otrzymamy układ równań

$$(18) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) M = -\frac{p}{\gamma}, \quad M = \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) z.$$

Przy rozpatrywaniu momentów zginających i skręcających okazuje się, że funkcja M jest liniową kombinacją tych momentów; mianowicie momenty zginające i moment skręcający wyrażają się wzorami (por. [1])

$$M_{gx} = -\frac{1}{1-\nu_1\nu_2} E_1 \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right),$$

$$M_{gy} = -\frac{1}{1-\nu_1\nu_2} E_2 \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \nu_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right),$$

$$M_{skr} = -2G_0 \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Rozważmy funkcję M określoną wzorem (18):

$$M = \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}, \quad \alpha = \frac{L}{E_1}, \quad \beta = \frac{E_2}{L}.$$

Po zastosowaniu transformacji odwrotnej (16) otrzymamy

$$M = L \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Jeżeli pomnożymy M_{gx} przez $12(L\nu_2 - E_2)/E_2 h^3$, a M_{gy} przez $12(E_2\nu_1 - L)/E_1 h^3$, to otrzymamy

$$M_{gx} \frac{12 L \nu_2 - E_2}{E_2 h^3} + M_{gy} \frac{12 E_2 \nu_1 - L}{E_1 h^3} = M.$$

W przypadku II funkcja M jest określona wzorem

$$M = \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2},$$

gdzie α i β są określone wzorami (11), (8) i (4). Po zastosowaniu transformacji odwrotnej (9) otrzymamy na M

$$M = k_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + k_3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Jeżeli pomnożymy M_{gx} przez $12(k_2\nu_1 - k_1)/E_2 h^3$, M_{gy} przez $12(k_1\nu_2 - k_2)/E_1 h^3$, a M_{skr} przez $-12k_2/2G_0 h^3$, to otrzymamy

$$M_{gx} \frac{12 k_2 \nu_1 - k_1}{E_2 h^3} + M_{skr} \left(-\frac{12 k_2}{h^3 2G_0} \right) + M_{gy} \frac{12 k_1 \nu_2 - k_2}{E_1 h^3} = M.$$

Mamy więc analogię do równania belki obciążonej obciążeniem ciągłym q , tj. do równania

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

Na tej analogii oparł swoje rozumowanie H. Marcus. Podał on metodę rozwiązywania płyt izotropowych, polegającą na rozwiązaniu stopniowym dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu metodą kolejnych przybliżeń.

Jak zastosować metodę H. Marcusa do płyt ortotropowych w przypadku III, wyjaśnimy na przykładzie płyty prostokątnej o brzegach swobodnie podpartych, obciążonej równomiernie na całej powierzchni.

Przykład. Obliczenie płyty prostokątnej o brzegach swobodnie podpartych, obciążonej równomiernie na całej powierzchni.

Wymiary płyty są $2a \times 2b$ (rys. 1). Moduł sprężystości wzdłuż osi x jest E_1 , a wzdłuż osi y jest E_2 .

Obierzmy siatkę sprężystą o wymiarach oczek $\lambda_x = a/2$ i $\lambda_y = b/2$.

Aby wykorzystać równanie (17), należy wprowadzić transformację $x = \xi \sqrt{E_1}$ i $y = \eta \sqrt{L}$, gdzie L jest określone wzorem (13). Wprowadzenie powyższych transformacji oznacza zmianę jednostki miary wzdłuż osi x i y .

Jeżeli j_0 jest jednostką miary w układzie x, y (rys. 1), to nowe jednostki będą $j_\xi = j_0 \sqrt{E_1}$ i $j_\eta = j_0 \sqrt{L}$.

Weźmy pod uwagę płytę zastępczą o wymiarach $2\bar{a} = 2a/\sqrt{E_1}$ i $2\bar{b} = 2b/\sqrt{L}$ (rys. 2) i obierzmy siatkę sprężystą o wymiarach oczek $\lambda_\xi = \lambda_x/\sqrt{E_1}$ i $\lambda_\eta = \lambda_y/\sqrt{L}$.

Rozpatrzmy pierwsze z równań (18) oraz równanie różnic skończonych dla dowolnego węzła siatki II (rys. 2) obciążonej w węzłach obciążeniem p/γ . Równanie to ma postać

$$\frac{(\Delta^2 w_k)_\xi}{\lambda_\xi^2} + \frac{(\Delta^2 w_k)_\eta}{\lambda_\eta^2} = -\frac{p}{S\gamma},$$

gdzie w_k oznacza przesunięcie pionowe (wzdłuż osi ξ) węzła k , a S jest pewną stałą. Przy tych samych warunkach brzegowych dla równania na M i w_k otrzymujemy $M_k = Sw_k$.

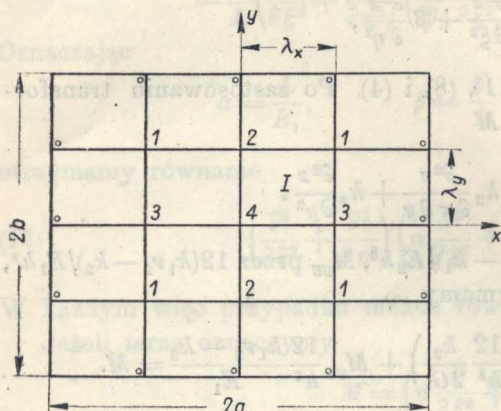
Wyznamy w_k dla siatki II w węzłach 1, 2, 3 i 4.

Równanie różnic skończonych można napisać w postaci

$$(\Delta^2 w_k)_\xi + \frac{\lambda_\xi^2}{\lambda_\eta^2} (\Delta^2 w_k)_\eta = -\frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma},$$

albo oznaczając $\lambda_\xi^2/\lambda_\eta^2$ przez κ^2 w postaci

$$(\Delta^2 w_k)_\xi + \kappa^2 (\Delta^2 w_k)_\eta = -\frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma}.$$

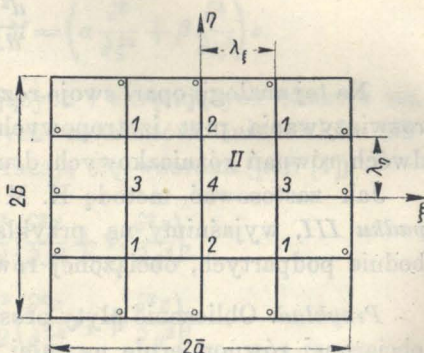


Rys. 1

Dla węzłów 1, 2, 3 i 4 otrzymamy układ równań algebraicznych

$$\begin{aligned} 2w_1(1 + \kappa^2) - w_2 - \kappa^2 w_3 &= \frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma}, \\ -2w_1 + 2w_2(1 + \kappa^2) - \kappa^2 w_4 &= \frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma}, \\ -2\kappa^2 w_1 + 2w_3(1 + \kappa^2) - w_4 &= \frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma}, \\ -2\kappa^2 w_2 - 2w_3 + 2w_4(1 + \kappa^2) &= \frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma}. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy



Rys. 2

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} M_1 = Sw_1 &= \frac{p\lambda_\xi^2(3 + 16\kappa^2 + 3\kappa^4)}{2\gamma(1 + \kappa^2)(1 + 6\kappa^2 + \kappa^4)}, \\ M_2 = Sw_2 &= \frac{p\lambda_\xi^2(4 + 21\kappa^2 + 7\kappa^4)}{2\gamma(1 + \kappa^2)(1 + 6\kappa^2 + \kappa^4)}, \\ M_3 = Sw_3 &= \frac{p\lambda_\xi^2(3 + 21\kappa^2 + 4\kappa^4)}{2\gamma(1 + \kappa^2)(1 + 6\kappa^2 + \kappa^4)}, \\ M_4 = Sw_4 &= \frac{2p\lambda_\xi^2(1 + 7\kappa^2 + \kappa^4)}{\gamma(1 + \kappa^2)(1 + 6\kappa^2 + \kappa^4)}. \end{aligned} \right.$$

Wyznamy ugięcie płyty I (rys. 1) w punktach 1, 2, 3 i 4. W tym celu weźmiemy siatkę II i zmienimy jednostkę długości wzdłuż osi ξ i η tak, aby $\bar{\lambda}_\xi = \lambda_\xi \sqrt{E_1/L}$ i $\bar{\lambda}_\eta = \lambda_\eta \sqrt{L/E_2}$.

Obciążmy tak otrzymaną siatkę w węzłach 1, 2, 3 i 4 obciążeniami w_1, w_2, w_3 i w_4 , obliczonymi ze wzorów (19) po podstawieniu za λ_ξ i κ^2 odpowiednio $\bar{\lambda}_\xi \sqrt{L/E_1}$ i $\bar{\lambda}_\xi^2 L^2 / \bar{\lambda}_\eta^2 E_1 E_2$.

Na przesunięcie węzłów 1, 2, 3 i 4 otrzymamy równanie różnicowe

$$(20) \quad \frac{(\Delta^2 \zeta_k)_\xi}{\bar{\lambda}_\xi^2} + \frac{(\Delta^2 \zeta_k)_\eta}{\bar{\lambda}_\eta^2} = -\frac{w_k}{S_2} = -\frac{M_k}{S_1 S_2},$$

gdzie S_1 i S_2 są stałe.

Weźmy pod uwagę równanie

$$M = \frac{L}{E_1} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{E_2}{L} \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

oraz równanie różnicowe (20).

Podstawmy

$$\bar{\lambda}_\xi = \lambda_\xi \sqrt{\frac{E_1}{L}} \quad \text{i} \quad \bar{\lambda}_\eta = \lambda_\eta \sqrt{\frac{L}{E_2}}.$$

Otrzymamy z równania (20) równanie

$$(21) \quad \frac{(\Delta^2 \zeta_k)_\xi}{\bar{\lambda}_\xi^2} \frac{L}{E_1} + \frac{(\Delta^2 \zeta_k)_\eta}{\bar{\lambda}_\eta^2} \frac{E_2}{L} = -\frac{w_k}{S_1} = -\frac{M_k}{S_1 S_2}.$$

Porównując równanie (21) z równaniem na M przy tych samych warunkach brzegowych otrzymamy

$$(22) \quad z_k = \zeta_k S_1 S_2.$$

Należy więc wyznaczyć ζ_k z równania (21). Możemy uprościć obliczenie i rozwiązać równanie (20), a następnie do wyniku podstawić za $\bar{\lambda}_\xi$ i $\bar{\lambda}_\eta$ odpowiednio $\lambda_\xi \sqrt{E_1/L}$ i $\lambda_\eta \sqrt{L/E_2}$.

Dla węzłów 1, 2, 3 i 4 otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} 2\zeta_1(1 + \bar{\kappa}^2) - \zeta_2 - \bar{\kappa}^2 \zeta_3 &= \frac{M_1 \bar{\lambda}_\xi^2}{S_1 S_2}, & -2\bar{\kappa}^2 \zeta_1 + 2\zeta_3(1 + \bar{\kappa}^2) - \zeta_4 &= \frac{M_3 \bar{\lambda}_\xi^2}{S_1 S_2}, \\ -2\zeta_1 + 2\zeta_2(1 + \bar{\kappa}^2) - \bar{\kappa}^2 \zeta_4 &= \frac{M_2 \bar{\lambda}_\xi^2}{S_1 S_2}, & -2\bar{\kappa}^2 \zeta_2 - 2\zeta_3 + 2\zeta_4(1 + \bar{\kappa}^2) &= \frac{M_4 \bar{\lambda}_\xi^2}{S_1 S_2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{\kappa}^2 = \frac{\bar{\lambda}_\xi^2}{\bar{\lambda}_\eta^2}.$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ i ζ_4 , a po podstawieniu do (22) odpowiednio z_1, z_2, z_3 i z_4 . W ten sposób otrzymamy pierwsze

przybliżenie ugięcia płyty I w punktach 1, 2, 3 i 4. Dalsze przybliżenia otrzymamy zagęszczając siatkę I przez przyjęcie wymiarów oczek ($a/4$, $b/4$), ($a/8$, $b/8$) itd.

Obliczenie uprości się, jeżeli będzie wykonane na szczególnych wartościach E_1 , E_2 i L .

Literatura cytowana w tekście

- [1] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, t. 2, Kraków 1950.
- [2] H. Marcus, *Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten*, Wrocław 1924.
- [3] W. Nowacki, *Pasma płytowe ortotropowe*, Arch. Mech. Stos., t. 3, 3-4, Gdańsk 1951.
- [4] H. Marcus, *Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten*, Berlin 1929.

Резюме

ИЗ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

В работе приведено трансформацию, сводящую квази-бигармоническое уравнение поверхности прогиба ортотропной пластинки к двум уравнениям с частными производными второго порядка, из которых одно является гармоническим. Такое представление уравнения поверхности прогиба ортотропной пластинки позволяет использовать двухступенный метод, применяемый в расчетах изотропных пластинок, также и к расчетам ортотропных пластинок. Этот метод состоит в последующих решениях двух уравнений с частными производными второго порядка, вместо одного уравнения четвертого порядка.

Summary

FROM THE THEORY OF ORTHOTROPIC PLATES

The paper brings a transformation reducing the quasi-biharmonic equation of the surface of deflection of an orthotropic plate to two partial differential equations of the second order, one of which is harmonic. Such a way of expressing the equation of the surface of deflection of an orthotropic plate permits the use of the two-stage method as used for isotropic plates, and which consists in a successive solution of two partial differential equations of the second order instead of one equation of the fourth order.

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 października 1953 r.