

JERZY NOWIŃSKI

O PEWNEJ PRZYBLIŻONEJ TEORII ZGINANIA I SKRĘCANIA
PRĘTÓW PROSTYCH O PRZEKROJU PEŁNYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XLVIII

JERZY NOWIŃSKI

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	327
2. Założenia i wzory podstawowe	330
3. Zginanie proste	335
4. Skręcanie proste	345
5. Skręcanie i zginanie prętów cienkościennych	345

ROZDZIAŁ
I
XIVIII

1. Wstęp

Dwa podstawowe zagadnienia elastomechaniki, o których tutaj jest mowa, mianowicie zginanie i skręcanie prętów prostych o przekroju pełnym, rozważane są, jak wiadomo, obszernie chociaż w sposób nie pozbawiony niedostatków, zarówno w nauce o wytrzymałości materiałów, jak i w teorii sprężystości. Sposób ujęcia obu tych zagadnień jest jednakże różny w każdej z wymienionych nauk, każda z nich bowiem ma, naturalnie, inne, dobrze znane cele na względzie.

W teorii sprężystości, przeprowadzającej swoje rozważania w sposób możliwie ścisły, to znaczy zgodnie z ogólnymi aksjomatami tej nauki, zakres tematyki uwarunkowany jest głównie formalno-matematycznymi trudnościami uzyskania rozwiązań. O ile chodzi o teorię skręcania i zginania, to trudności takie były zapewne powodem zahamowania rozwoju tego działu elastomechaniki, który niewielkim uległ zmianom w przeciągu lat stu, jakie minęły od prac *Saint-Venanta*. Uzyskane w tym okresie nieliczne nowe rozwiązania, w których to lub inne założenie teorii *Saint-Venanta*¹⁾ zostało zaniechane²⁾, nie układają się jeszcze dotychczas w jednolitą całość, która skłaniałaby do uznania nowego dorobku za uogólnienie teorii *Saint-Venanta*. Jako pewien krok naprzód — aczkolwiek głównie w kierunku formalnym — uważać można prace *A. C. Stevensona*³⁾. W rozważaniach *Stevensona* rozdzielane częstokroć zjawiska «prostego» zginania i «prostego» skręcania — czego wadliwość stwierdzono już dawniej w teorii prętów cienkościennych — przedstawione zostały w sposób wyraźny jako szczególne przypadki zjawiska ogólnego, czyli równoczesnego zginania i skręcania. Ujęcie takie ułatwiło dokładniejszy wgląd w pole przemieszczeń i odkształceń

¹⁾ Jak wiadomo, założenia teorii *Saint-Venanta* sprowadzają się do następujących trzech: (1) pobocznicą pręta jest wolna od sił zewnętrznych, (2) obciążenie podstaw pręta następuje przy pomocy napięć rozłożonych w sposób ściśle określony, (3) przekroje ulegają swobodnej deplanacji.

²⁾ Por. [2] - [5]; cyt. według [1]. Por. również rozwiązania *Föpplów*, [7], *Timoszenki*, [8], i ew. autora, [9], oraz opublikowaną niedawno pracę [2].

³⁾ Por. [10] i [11]; cyt. według [1].

pręta, szczególnie w tych przypadkach, w których przekrój pręta posiada jedną tylko lub w ogóle nie posiada osi symetrii, gdy zatem znajomość położenia środka ścinania staje się sprawą istotną⁴⁾.

Inne podejście, zasadniczo odmienne od dopiero co przedstawionego, cechuje elementarne teorie zginania, ścinania i skręcania, rozwijane w wytrzymałości materiałów. Na gruncie tej nauki — z natury rzeczy posiłkującej się mniej subtelnymi założeniami i rozważaniami, a dążącej do uzyskania rozwiązań, obojętne mniej czy więcej ścisłych, lecz prostych i zgodnych z doświadczeniem — każdy z wymienionych działów traktowany był jako oddzielna całość. Niezależnie od tego sztucznego — jak się wydaje — podziału u podstaw każdej z trzech teorii spoczywa jeszcze w wytrzymałości materiałów układ postulatów częściowo ze sobą sprzecznych; jest to, co prawda, dozwolone w teorii przybliżonej — szczególnie gdy uzyskane wyniki są zgodne z doświadczeniem — ale, oczywiście, nie może być pożądanym z punktu widzenia metodycznego. Znanym przykładem wewnętrznej sprzeczności założeń jest stosowanie hipotezy Bernoulliego w przypadkach, w których obecność naprężeń stycznych wywołuje siłą rzeczy deplanację przekrojów. Mimo podobnych koncesji na rzecz prostoty — a może po części dzięki nim — zakres rozwiązań używanych w wytrzymałości materiałów nie jest — z jednej strony — zbyt obszerny, z drugiej zaś strony klasyczny wykład tej nauki biegnie oddzielnymi, niekiedy zbyt słabo ze sobą powiązanymi nurtami. W interesujących nas tutaj dziedzinach zginania i skręcania wymienić można trudności w elementarnym określeniu naprężeń w przekrojach niesymetrycznych, w mało uzasadnionym rozdzieleniu teorii prętów pełnych i cienkościennych itd.

Z przedstawionego wyżej — znanego zresztą — obrazu zdaje się wynikać bezspornie potrzeba dalszych studiów nad poruszonymi zagadnieniami zginania, ścinania i skręcania, posiadającymi duże znaczenie praktyczne i teoretyczne, a które równocześnie są — jak się okazuje — tak trudne do uogólnienia poza swój obręb klasyczny. Potrzeba takich studiów zachodzi, oczywiście, nie tylko w dziedzinie matematycznej teorii sprężystości, ale w równej chyba mierze w zakresie elementarnej wytrzymałości materiałów⁵⁾.

Artykuł niniejszy ma właśnie tę ostatnią naukę na względzie. Formułuje on mianowicie pewną — jak się wydaje dość jednolitą — przybliżoną teorię zginania, ścinania i skręcania prętów prostych o przekroju

⁴⁾ O ile chodzi o pręty pełne, to wypada tu wspomnieć oryginalne studia L. S. Lejbienzona, por. [12] i [13]; por. również [1], [14] i [15].

⁵⁾ Ta ostatnia uległa zresztą ostatnio wzbogaceniu w nowe działy (jak chociażby teorię prętów cienkościennych).

stałym lecz dowolnym. Teoria ta obejmuje zatem zarówno pręty pełne, jak i cienkościenne⁶⁾ i to niezależnie od stopnia symetrii przekroju.

Z punktu widzenia ścisłości założeń rozwinięta teoria przybliżona stanowi ogniwo pośrednie pomiędzy elementarnymi teoriami wytrzymałości materiałów oraz matematyczną teorią *Stevensona*.

O ile chodzi o założenia teorii przybliżonej, to w pierwszym rzędzie ogranicza ona stosowalność hipotezy *Bernoulliego* do przypadków, w których przekroje pozostają istotnie płaskie, tzn. do przypadków czystego zginania. W ten sposób usunięta zostaje przyczyna, która, jak się wydaje, zaciążyła nad oddzieleniem teorii zginania od teorii skręcania w samym swym rozwoju historycznym. (Jak wiadomo, deplanacja przekrojów wywierająca niewielki wpływ na naprężenia normalne przy zginaniu prętów posiada istotne znaczenie przy ich skręcaniu; — znana wadliwa koncepcja skręcania *Naviera*). Uwzględnienie spaczenia pozwala nie tylko na unifikację teorii skręcania, ścinania i zginania, ale również na naturalne jak gdyby wyznaczenie np. środków ścinania i skręcania, dość kłopotliwe w teoriach elementarnych.

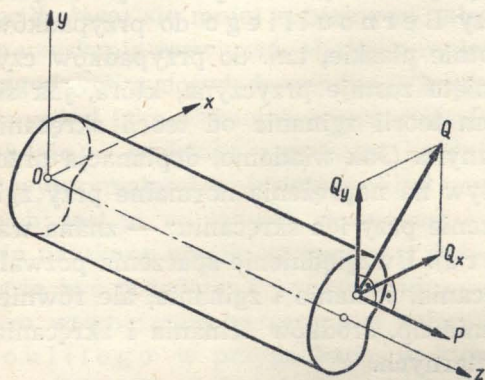
Nieścisłości teorii przybliżonej skupiają się natomiast głównie na dwóch założeniach upraszczających, według których (1) deplanacja przekrojów przebiega równomiernie w kierunku długości pręta, (2) przekroje poprzeczne zachowują się jak sztywne w swych płaszczyznach. Pierwsze z tych założeń oznacza, że zamiast zginania czystego — które dzięki hipotezie *Bernoulliego* wytrzymałość materiałów ekstrapoluje na zginanie ogólne — rozważa się zginanie nierównomierne, urzeczywistnione przez obciążenie pręta wspornikowego siłą działającą na jego końcu wolnym. Dochodzi się w ten sposób do pewnego stanowiska pośredniego pomiędzy brakiem deplanacji (teoria elementarna) oraz deplanacją dowolnie zmienną w kierunku osi pręta (nieistniejąca jeszcze teoria ścisła; por. m. in. [21]).

Drugie założenie upraszczające zapożyczone jest, jak się okazuje, z elementarnej teorii zginania, gdzie jest przyjmowane milcząco. Założenie to nie pozostaje, co prawda, w zgodzie ze (ściśłą) teorią zginania *Saint-Venanta*, natomiast zgodne jest z opracowaną przez niego teorią skręcania, z której, jak łatwo sprawdzić, wynika zachowanie się przekrojów poprzecznych takie, jakby przedstawiały one tarcze nieodkształcalne w swych płaszczyznach. W związku z tym, o ile chodzi o skręcanie, wnioski teorii przybliżonej są ściśle (w rozumieniu oczywiście teorii *Saint-Venanta*). Natomiast dla ścinania założenie, że liczba *Poissona* jest nader mała, prowadzi w niektórych przypadkach do dość znacznych rozbieżności z wynikami teorii ściślejszej i o tym należy pamiętać przy ocenie przydatności teorii przybliżonej w tym przypadku.

⁶⁾ Por. [16] i [17].

2. Założenia i wzory podstawowe

Rozpatrzmy pręt prosty o stałym, lecz dowolnym (a więc w ogóle niesymetrycznym) przekroju pełnym. Przyjmijmy, że jedna podstawa pręta zostaje przytwierdzona do ściany nieodkształcalnej w sposób swobodny⁷⁾, druga zaś jest obciążona naprężeniami stycznymi, które składają się



Rys. 1

na siłę prostopadłą do osi pręta, położoną zresztą dowolnie w płaszczyźnie tej podstawy (na końcu wolnym), oraz naprężeniami normalnymi równomiernie rozłożonymi. Zwiążmy z prętem układ prostokątnych współrzędnych kartezjańskich w ten sposób, aby osie x i y stanowiły główne środkowe osie bezwładności przekroju oporowego i aby oś z pokrywała się z osią pręta (rys. 1).

Oznaczmy składowe całkowitego przemieszczenia cząstek pręta przez u , v i w . Zakładając, że przekroje poprzeczne zachowują się tak, jakby były doskonale sztywne (nieodkształcalne) w swych płaszczyznach (ale tylko w tych płaszczyznach), mamy prawo przemieszczenia u i v przekroju przedstawić tymi samymi wzorami, co przemieszczenia bryły sztywnej płaskiej w ruchu płaskim. Jeżeli za biegun ruchu przyjmijemy środek ciężkości przekroju (leżący na osi z), to faktyczne przemieszczenie przekroju można zastąpić obrotem dokoła bieguna o kąt $\vartheta(z)$ oraz przesunięciem postępowym bieguna (czyli przesunięciem całego przekroju) o składowym $u_0(z)$ i $v_0(z)$. Ostatecznie mamy dla $u = u(y, z)$ i $v = v(x, z)$

$$(2.1.1) \quad u = u_0(z) - \vartheta(z) y,$$

$$(2.1.2) \quad v = v_0(z) + \vartheta(z) x.$$

Naturalnie, zależność funkcji u_0 , v_0 i ϑ wyłącznie od zmiennej z wypływa z podstawowego założenia o nieodkształcalności przekrojów w swych płaszczyznach. O ile chodzi o składową w przemieszczenia, to dla uzyskania odpowiedniego wzoru zginanie pręta dzielimy na dwie fazy. W pierw-

⁷⁾ Przy tym typie utwierdzenia przekrój pełny (lub cienkościenny zamknięty) styka się ze ścianą w trzech punktach. Warunek taki jest warunkiem czysto geometrycznym, gdyż oddziaływanie ściany na pręt zachodzi nie przez punkty zetknięcia, lecz przy pomocy napięć rozłożonych w sposób ciągły na podstawie utwierdzonej pręta. Bliższe uwagi na ten temat znaleźć można w pracach autora [16] i [18].

szej z nich przyjmujemy, że hipoteza Bernoulliego nie traci ważności, wobec czego otrzymujemy w ogólnym przypadku — przy zginaniu ukośnym — dla w wielkość

$$-\frac{du_0}{dz}x - \frac{du_0}{dz}y.$$

Wielkość tę uzupełniamy następnie funkcją przedstawiającą spaczenie $w_s = w_s(x, y)$ oraz wyrazem liniowo zależnym od zmiennej z (przemieszczenie przekrojów jako całości w kierunku osi podłużnej). Otrzymujemy w ten sposób ostatecznie

$$(2.1.3) \quad w = -\frac{du_0}{dz}x - \frac{du_0}{dz}y + w_s(x, y) + \varepsilon_0 z.$$

Tutaj, naturalnie, jest $w = w(x, y, z)$ funkcją wszystkich trzech współrzędnych, ale — zgodnie z naszym założeniem — samo spaczenie w_s jest jednakowe dla wszystkich przekrojów (tzn. nie zależy od zmiennej z). Na podstawie zasadniczych związków (2.1.1) - (2.1.3) łatwo obliczyć składowe stanu odkształcenia. Przedstawiają je następujące wzory Cauchy'ego obrazujące specyficzną w danym razie «strukturę» materiału pręta, przyjętą za podstawę rozwijanej teorii przybliżonej:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} - \frac{d\vartheta}{dz}y, \\ \varepsilon_z = -\frac{d^2 u_0}{dz^2}x - \frac{d^2 v_0}{dz^2}y + \varepsilon_0, & \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{d\vartheta}{dz}x. \end{cases}$$

Dla sformułowania związków Hooke'a pomiędzy składowymi stanu odkształcenia i naprężenia zaniechamy użycia odpowiednich zależności teorii ciał izotropowych, lecz uwzględnimy szczególną «strukturę» materiału pręta. Struktura ta odpowiada tzw. izotropii transwersalnej, której oś pokrywa się z osią z układu. Jak wiadomo, w ciele obdarzonym izotropią transwersalną wszystkie kierunki prostopadłe do pewnej osi (osi symetrii sprężystej rzędu nieskończonego) są równouprawnione pod względem sprężystym. W danym razie kierunki te leżą w płaszczyznach przekrojów poprzecznych. Jeżeli oznaczyć moduł Younga w kierunku osi z przez E , a w płaszczyznach izotropii przez E' , zaś liczbę Poissona dla przewężenia w płaszczyźnie izotropii przy wydłużeniu w kierunku osi z oraz w tejże płaszczyźnie odpowiednio przez ν oraz ν' , to związki

Hooke'a dla ciała transwersalnie izotropowego przybierają postać następującą⁸⁾:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E'}(\sigma_x - \nu' \sigma_y) - \frac{\nu}{E} \sigma_z, & \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu')}{E'} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E'}(\sigma_y - \nu' \sigma_x) - \frac{\nu}{E} \sigma_z, & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}, \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E} \sigma_z, & \gamma_{zy} = \frac{1}{G} \tau_{zy}; \end{cases}$$

tutaj G jest modułem odkształcenia postaciowego w płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny izotropii. Zgodnie z przyjętymi założeniami co do struktury materiału pręta należy odrzucić możliwość odkształceń w płaszczyznach przekrojów (które nabierają cech izotropii «adeformacyjnej», sama zaś izotropia transwersalna staje się izotropią transwersalną «adeformacyjną»). Odpowiada to przyjęciu, że w granicy $E' = \infty$ oraz $\nu = (\nu' =) 0$. W granicy zatem, przy uwzględnieniu (2.2), uzyskujemy tożsamościowe spełnienie pierwszego, drugiego i czwartego związku (2.3), a z pozostałych mamy

$$(2.4.1) \quad \sigma_z = E \left(-\frac{d^2 u_0}{dz^2} x - \frac{d^2 v_0}{dz^2} y + \varepsilon_0 \right),$$

$$(2.4.2) \quad \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} - \frac{d\vartheta}{dz} y \right),$$

$$(2.4.3) \quad \tau_{zy} = G \left(\frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{d\vartheta}{dz} x \right).$$

Przyjmijmy, że włókna podłużne nie oddziałują na siebie ani normalnie za pośrednictwem naprężeń σ_x i σ_y , ani za pośrednictwem naprężeń stycznych τ_{xy} . Założenie takie, równoznaczne przyjęciu

$$(2.5) \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0,$$

nie jest sprzeczne z wnioskami uzyskanymi dopiero co z dyskusji związków (2.3). Wobec tego z równań równowagi Naviera otrzymujemy kolejno

$$(2.6.1) \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0,$$

$$(2.6.2) \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0,$$

$$(2.6.3) \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

⁸⁾ Por. [19].

O ile uwzględnić (2.4.2) i (2.4.3), to pierwsze dwa z równań powyższych są spełnione, gdy przyjmiemy ponadto, że

$$(2.7) \quad \frac{d\vartheta}{dz} = \text{const},$$

albowiem założyliśmy już poprzednio, że w_s nie jest funkcją zmiennej z . Również (2.7) wskazuje, że jednostkowy kąt skręcania jest stały, co ma miejsce, jak wiadomo, dla skręcania stałym momentem skręcającym⁹⁾. Niezależnie od równowagi naprężeń, działających na element prostopadłościenny pręta, zespół naprężeń działających w przekrojach poprzecznych powinien zastępować działanie sił $Q(Q_x, Q_y)$ i P , przyłożonych na końcu pręta¹⁰⁾. Odpowiednie równania rzutów sił na osie układu współrzędnych oraz momentów sił względem osi środkowych równoległych do osi układu przybierają następującą postać:

$$(2.8.1) \quad \int_F \sigma_z dF = P, \quad \int_F \tau_{zx} dF = Q_x, \quad \int_F \tau_{zy} dF = Q_y,$$

$$(2.8.2) \quad \int_F \sigma_z y dF = M_x, \quad \int_F \sigma_z x dF = -M_y, \quad \int_F (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dF = M_z.$$

Tutaj Q_x i Q_y oznaczają, jak powiedzieliśmy, składowe siły poprzecznej, P siłę podłużną, a F pole przekroju pręta.

Pierwsze z równań (2.8.1) jest spełnione, gdyż za osie x i y obrano główne środkowe osie bezwładności przekroju; poza tym zaś przyjmujemy, że $\epsilon_0 = P/EF$. Dwa pozostałe warunki (2.8.1) można łatwo przekształcić do postaci

$$(2.9) \quad \begin{cases} \int_{y_a}^{y_b} \{w_s[y, x_2(y)] - w_s[y, x_1(y)]\} dy = Q_x, \\ \int_{x_a}^{x_b} \{w_s[x, y_2(x)] - w_s[x, y_1(x)]\} dx = Q_y. \end{cases}$$

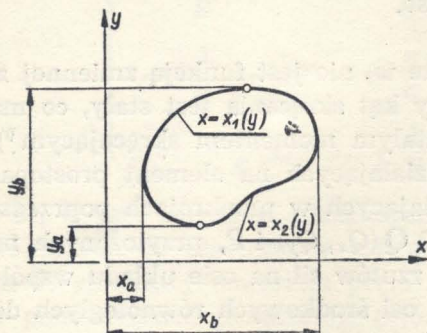
⁹⁾ Zauważmy, że ze wzoru na lokalny kąt obrotu w płaszczyźnie przekroju poprzecznego

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

przy uwzględnieniu wzorów (2.1) wynika, że $\omega_z = \vartheta$. Oznacza to, że — zgodnie z przyjętymi przez nas założeniami — przekrój pręta obraca się w swej płaszczyźnie jak sztywna całość.

¹⁰⁾ Założone istnienie podłużnej siły obciążającej uogólnia teorię przybliżoną również na zjawiska rozciągania i ściskania.

Znaczenie przyjętych tutaj symboli jest zrozumiałe z rys. 2. Warunki powyższe są nieistotne dla dalszych rozważań. Powinna je jednak spełniać w każdym szczególnym przypadku funkcja spaczenia w_s , wyznaczona z zagadnienia brzegowego, o którym dalej będzie mowa.



Rys. 2

Z pierwszych dwóch warunków (2.8.2) otrzymujemy po prostych przekształceniach (dla obranego układu współrzędnych)

$$(2.10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u_0}{dz^2} = \frac{M_y}{E I_y}, \\ \frac{d^2 v_0}{dz^2} = -\frac{M_x}{E I_x}. \end{cases}$$

Otrzyaliśmy w ten sposób znane wzory na przybliżone wartości krzywizny rzutów osi odkształconej na płaszczyzny układu xz i yz . Jak widać, wzory te obowiązują również wtedy, gdy uwzględnia się spaczenie przekrojów (jeżeli tylko jest ono niezależne od współrzędnej z). Oczywiście, na podstawie wzorów (2.10) możemy rozwinąć całą teorię zginania belek, tak jak to się czyni w wytrzymałości materiałów. Podobnie, podstawiając wyrażenia (2.10) do (2.4.1) i uwzględniając wartość ε_0 otrzymujemy znany wzór z elementarnej teorii zginania

$$(2.11) \quad \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{P}{F}.$$

W danym razie wzór ten zachowuje swą ważność również w przypadku zginania połączonego ze skręcaniem.

Z ostatniego ze wzorów (2.8.2) można obliczyć jednostkowy kąt skręcenia, jeżeli znane jest spaczenie:

$$(2.12) \quad \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{1}{I_x + I_y} \left[\frac{M_z}{G} - \int_F \left(\frac{\partial w_s}{\partial y} x - \frac{\partial w_s}{\partial x} y \right) dF \right].$$

Dla przekroju kołowego, na przykład, który, jak wiadomo, nie ulega spaczeniu przy czystym skręcaniu, jest z powyższego wzoru

$$(2.13) \quad \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{M_s}{G I_p},$$

gdzie I_p jest momentem bezwładności biegunowym, zaś M_z zastąpiliśmy przez M_s , gdyż, skoro mowa o czystym skręceniu, to może istnieć jedynie

moment pary sił, który oznaczamy przez M_s . [Wówczas, naturalnie, $M_{z_*} \equiv M_s$ dla każdej osi z_* równoległej do z , a z (2.9) wynika, że $Q_x = Q_y = 0$, jak być powinno].

Zastosujmy obecnie uzyskane wzory w podstawowych szczególnych przypadkach, jakie stanowią proste skręcanie i proste zginanie. Rozumiemy pod tymi nazwami takie przypadki, w których odpowiednio

$$(2.14.1) \quad Q_x = Q_y = 0 \quad \text{i} \quad M_z = M_s \neq 0$$

oraz

$$(2.14.2) \quad Q_x \neq 0 \quad \text{i (lub)} \quad Q_y \neq 0, \quad \text{zaś} \quad \theta = 0.$$

Zauważmy, że w przypadku (2.14.2) może być zarówno $M_z \neq 0$, jak i $M_z = 0$. Z drugiej zaś strony nie ma powodów do przypuszczenia, że jeżeli $M_z = 0$, to $d\theta/dz = 0$ [por. wzór (2.12)]; innymi słowy, gdy na koniec pręta działa siła Q (Q_x, Q_y), a nie działa para sił (m. in. gdy siła Q przebiega oś pręta), to nie należy wykluczać powstania skręcenia pręta.

3. Zginanie proste

W tym przypadku obowiązują, jak mówiliśmy, warunki (2.14.2). Zatem M_x i (lub) M_y są różne od zera i w przekrojach pręta pojawiają się naprężenia normalne według wzoru (2.11).

Równocześnie wzory dla składowych naprężeń ścinających (2.4.2) i (2.4.3) przybierają postać uproszczoną

$$(3.1) \quad \tau_{zx} = G \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad \tau_{zy} = G \frac{\partial w_s}{\partial y}.$$

Podstawmy powyższe wyrażenia dla naprężeń oraz (2.11) do niezużytkowanego dotychczas ostatniego ze wzorów (2.6). Ponieważ $Q_x = -dM_y/dz$ i $Q_y = dM_x/dz$, więc ostatecznie otrzymujemy

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = -\frac{Q_x}{GI_y} x - \frac{Q_y}{GI_x} y;$$

jest to równanie różniczkowe Poissona. Do zbliżonego równania Poissona dochodzi się w ścisłej teorii ścinania, [8], jednakże tutaj po prawej stronie występuje dodatkowa funkcja nie znana, którą wypada dobrać z warunku brzegowego. Równocześnie ze związków (3.1) wynika, że funkcję spaczenia w_s można uważać za *sui generis* funkcję naprężeń przy zginaniu. Funkcja ta powinna być dobrana w ten sposób, aby wewnątrz pola przekroju naprężenia ścinające (a więc i pochodne cząstkowe funkcji w_s) posiadały wartość skończoną i były funkcjami ciągłymi zmiennych x i y . Na konturze L przekroju wypadkowa naprężeń ścinających powin-

na być skierowana stycznie do konturu (gdyż pobocznica pręta jest z założenia nie obciążona). Otrzymujemy w ten sposób warunek brzegowy

$$(3.3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial w_s}{\partial y}}{\frac{\partial w_s}{\partial x}} \quad \text{na konturze } L.$$

Zauważmy, że ze wzorów (3.1) i (3.2) lub wprost z (2.6.3) można, naturalnie, przejść do znanego wzoru na naprężenia ścinające w przekroju prostokątnym według elementarnej teorii ścinania (wzór ten nazywają niekiedy wzorem Żurawskiego, [20]). Przyjmijmy w tym celu, że siła działa w kierunku osi y (że zatem $Q_x = 0$, a $Q_y \neq 0$). Przyjmijmy ponadto, że spaczenie jest funkcją samej tylko zmiennej y , to jest że $w_s = w_s(y)$. Z (3.2) otrzymujemy wobec tego

$$(3.4) \quad \frac{d^2 w_s}{dy^2} = -\frac{Q_y}{G I_x} y,$$

a po wykonaniu całkowania i uwzględnieniu (3.1)

$$(3.5) \quad \tau_{zy} = -\frac{Q_y}{I_x} \int_0^y y dy + C.$$

Stałą całkowania wyznaczamy ze zrozumiałego warunku brzegowego $[\tau_{zy}]_{y=h} = 0$ ($2h =$ wysokość przekroju), wobec czego ostatecznie (przy szerokości przekroju stałej i równej b)

$$(3.6) \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y}{b I_x} \int_y^h y b dy, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Niechaj siła Q przechodzi przez punkt przekroju o współrzędnych x_Q i y_Q ; mamy wówczas

$$(3.7) \quad M_z = Q_y x_Q - Q_x y_Q.$$

W przypadku zginania prostego M_z musi posiadać taką wartość

$$(3.8) \quad M_z = Q_y x_{SP} - Q_x y_{SP},$$

aby prawa strona (2.12) była równa zero. Oznacza to, że siła Q przechodzi przez pewien punkt o współrzędnych x_{SP} i y_{SP} ; punkt ten przedstawia tzw. środek ścinania (czyli środek sił poprzecznych; stąd oznaczenie symboliczne SP). Ponieważ zginanie rozpatruje się zwykle oddzielnie dla siły

obciążającej równoległej do osi x i oddzielnie dla równoległej do osi y , więc z równania (2.12) otrzymujemy współrzędne środka ścinania równe

dla siły zginającej Q_y (i $Q_x = 0$)

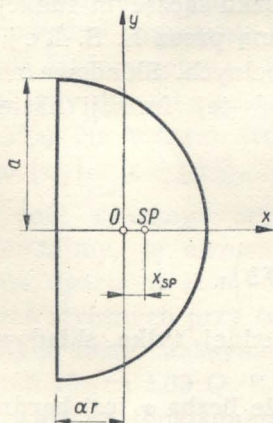
$$(3.9.1) \quad x_{SP} = \frac{\int_F \frac{\partial w_s}{\partial x} y dF + \int_F \frac{\partial w_s}{\partial y} x dF}{\int_F \frac{\partial w_s}{\partial y} dF},$$

a dla siły zginającej Q_x (i $Q_y = 0$)

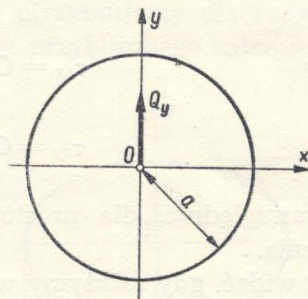
$$(3.9.2) \quad y_{SP} = - \frac{\int_F \frac{\partial w_s}{\partial x} y dF + \int_F \frac{\partial w_s}{\partial y} x dF}{\int_F \frac{\partial w_s}{\partial x} dF}.$$

Oczywiście, współrzędne te nie zależą od wielkości obciążenia.

Obliczmy obecnie współrzędne środka ścinania przekroju w kształcie połowy koła (rys. 3) wykorzystując dalej wprowadzoną dla przekroju kołowego (przykład 3.1) funkcję spazczenia (3.1.1). Wolno tak postąpić, gdyż o ile na przekrój kołowy działa siła Q_y w środku ciężkości O (rys. 4),



Rys. 3



Rys. 4

to pomiędzy obiema połowami koła nie ma wzajemnych oddziaływań ($\tau_{zx} = 0$ dla $x = 0$ z rys. 4). Wobec tego funkcja (3.1.1) spełnia warunek brzegowy (3.3) na obwodzie półkoła i naprężenia (3.1.2) przedstawiają naprężenia w przekroju rozpatrywanym (rys. 3), obciążonym siłą Q_y . Aby nie następowało skrócenie pręta, siła Q_y powinna przechodzić przez śro-

dek ścinania SP przekroju. Obliczmy współrzędną x_{SP} tego punktu ze wzoru (3.9.1) pamiętając, że ze względu na symetrię przekroju względem osi x jest $y_{SP} = 0$.

Otrzymujemy po uporządkowaniu

$$(3.10) \quad x_{SP} = \frac{\int_F x^3 dF + 5 \int_F x y^2 dF}{3 I_x + I_y - \frac{3}{2} \pi a^4}$$

Biorąc pod uwagę, że $x = r(\cos \varphi - a)$, $y = r \sin \varphi$ i $dF = r dr d\varphi$, a poza tym $I_x = 0,40 a^4$ i $I_y = 0,11 a^4$, otrzymujemy po wykonaniu prostego całkowania

$$(3.11) \quad x_{SP} = 0,12 a.$$

Wzór ścisły na odległość $e = ar + x_{SP}$ środka ścinania od średnicy pionowej rozpatrywanego przekroju, [8], uzależniony jest od liczby Poissona ν :

$$(3.12) \quad e = \frac{8}{15\pi} \frac{3 + 4\nu}{1 + \nu} a.$$

Dla $\nu = 0,25$ otrzymujemy z tego wzoru wartość x_{SP} równą (z dokładnością do dwóch znaków dziesiętnych) $0,12$, czyli taką samą jak obliczoną dopiero co wartość (3.11).

Wspomnijmy jeszcze o interesującym związku łączącym funkcję spaczenia $w_s(x, y)$ z funkcją $\Phi(x, y)$ wprowadzoną przez L. S. Lejbienzoną, [12], dla zagadnień zginania prętów pełnych. Składowe naprężenia ścinające przedstawiają w zależności od tej funkcji następujące wzory:

$$(3.13.1) \quad \tau_{zx} = G \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$(3.13.2) \quad \tau_{zy} = G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{2\nu Q_x}{EI_y} xy \right),$$

o ile uwzględnić, dla prostoty, działanie jednej tylko składowej Q_x obciążenia.

Jak widać, gdy założymy w przybliżeniu, że liczba ν jest bardzo mała i że ostatni wyraz w (2.13.2) może być pominięty, to funkcja Φ Lejbienzona przeobraża się w naszą funkcję spaczenia $w_s(x, y)$. Jest oczywiste, że wówczas pierwsza z tych funkcji spełnia równanie różniczkowe Poissona (3.2) zamiast właściwego jej równania ściślejszego

$$(3.14) \quad \nabla^2 \Phi = - \frac{2 Q_x}{EI_y} x,$$

które dla $\nu = 0$ (czyli $G = E/2$) przyjmuje właśnie postać (3.2).

Podamy obecnie rozwiązanie kilku przykładów i porównamy uzyskane wyniki z rozwiązaniem ścisłym.

Przykład 3.1. Pręt o przekroju kołowym zginany siłą Q_y (rys. 4). Równanie różniczkowe (3.2) spełnia w tym przypadku funkcja spaczenia

$$(3.1.1) \quad w_s = \frac{Q_y}{8GI} [(3a^2 - x^2)y - y^3].$$

Na konturze przekroju jest $x^2 + y^2 = a^2$ i $dy/dx = -x/y$. Ponieważ tę samą wartość otrzymuje się na konturze dla stosunku $\partial w_s / \partial y$ do $\partial w_s / \partial x$, zatem warunek brzegowy (3.3) jest spełniony.

Z (3.1) obliczamy składowe naprężenia styczne:

$$(3.1.2) \quad \tau_{zx} = -\frac{Q_y}{4I} xy, \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y}{8I} (3a^2 - x^2 - 3y^2).$$

Rozwiązanie ścisłe¹¹⁾ daje w tym przypadku

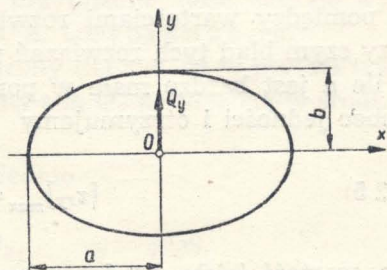
$$(3.1.3) \quad \begin{cases} \tau_{zx} = -\frac{(1+2\nu)Q_y}{4(1+\nu)I} xy, \\ \tau_{zy} = \frac{(3+2\nu)Q_y}{8(1+\nu)I} \left(a^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} x^2 - y^2 \right). \end{cases}$$

Otrzymaliśmy zatem wzory identyczne z rozwiązaniem ścisłym, o ile w tym ostatnim przyjąć $\nu = 0$.

Największe naprężenie ścinające wypada w środku koła. Tutaj z rozwiązania ścisłego (przy $\nu=0,25$) otrzymujemy wartość $[\tau_{zy}]_{x=y=0} = 1,4 Q_y/F$, podczas gdy dla rozwiązania przybliżonego jest $[\tau_{zy}]_{x=y=0} = 1,5 Q_y/F$ (błąd około 7%). Na końcach średnicy poziomej otrzymujemy dla rozwiązania ścisłego $[\tau_{zy}]_{x=\pm a, y=0} = 1,2 Q_y/F$, dla rozwiązania przybliżonego natomiast Q_y/F (błąd dość znaczny: przeszło 16%).

Przypomnijmy, że elementarna teoria zginania, oparta na znanym wzorze dla naprężeń stycznych przy ścinaniu, daje w danym razie maksymalną wartość naprężeń równą $1,33 Q_y/F$, a więc dość bliską wartości «dokładnej» (błąd nieco większy niż 5%).

Przykład 3.2. Pręt o przekroju eliptycznym zginany siłą Q_y (rys. 5). Szukamy w tym przypadku funkcji spaczenia w postaci wielomianu, który powinien zawierać parzyste potęgi zmiennej x , a nieparzyste zmiennej y (co odpowiada symetrii działania



Rys. 5

¹¹⁾ Por. np. [8], s. 320.

siły). Łatwo stwierdzić, że wielomian spełniający równanie (3.2) posiada w danym razie postać

$$(3.2.1) \quad w_s = -\frac{Q_y(a^2 + 2b^2)}{2G(a^2 + 3b^2)I_x} \left(\frac{b^2}{a^2 + 2b^2} x^2 y - b^2 y + \frac{y^3}{3} \right).$$

Wielomian ten spełnia warunek brzegowy (3.3) na konturze przekroju eliptycznego, dla którego jest $dy/dx = -b^2 x/a^2 y$.

Składowe naprężenia styczne są odpowiednio równe

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} \tau_{zx} = -\frac{Q_y b^2}{(a^2 + 3b^2)I_x} xy, \\ \tau_{zy} = -\frac{Q_y(a^2 + 2b^2)}{2(a^2 + 3b^2)I_x} \left(-b^2 + \frac{b^2}{a^2 + 2b^2} x^2 + y^2 \right). \end{cases}$$

Te same wyrażenia otrzymuje się ze wzorów ścisłych, jeżeli w nich założymy $\nu = 0$ ¹²⁾. Naprężenie maksymalne w środku przekroju jest równe

$$(3.2.3) \quad [\tau_{zy}]_{x=y=0} = \frac{Q_y(a^2 + 2b^2)b^2}{2(a^2 + 3b^2)I_x}$$

i dla przekroju kołowego przybiera wartość podaną w przykładzie 3.1. O ile b jest bardzo małe w porównaniu z a , to możemy pominąć b^2/a^2 wobec jedności i otrzymujemy

$$(3.2.4) \quad [\tau_{zy}]_{max} = \frac{Q_y b^2}{2I_x} = 2 \frac{Q_y}{F}$$

w porównaniu z wartością ścisłą równą $2Q_y/F(1 + \nu)$. Zatem dla $\nu = 0,25$ jest w ostatnim przypadku $\tau_{max} = 1,6 Q_y/F$ wobec $1,34 Q_y/F$ według teorii elementarnej. Jak widać, wartość rozwiązania ścisłego jest tutaj zawarta pomiędzy wartościami rozwiązania przybliżonego i elementarnej, przy czym błąd tych rozwiązań wynosi odpowiednio 25% i przeszło 16%. O ile a jest bardzo małe w porównaniu z b , to możemy pominąć a^2/b^2 wobec jedności i otrzymujemy

$$(3.2.5) \quad [\tau_{zy}]_{max} = \frac{Q_y b^2}{3I_x} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F},$$

tzn. wartość ścisłą, zgodną zresztą również z rozwiązaniem elementarnej teorii ścinania.

Przykład 3.3. Przekrój prostokątny o wysokości $2h$ w kierunku osi y zginany siłą Q_y . Funkcja spaczenia spełniająca równanie (3.2) i warunki brzegowe jest w danym razie równa

¹²⁾ Por. np. [8], s. 320.

$$(3.3.1) \quad w_s = \frac{Q_y}{2GI_x} \left(h^2 - \frac{y^2}{3} \right) y,$$

wobec czego dla naprężeń otrzymujemy następujące wzory:

$$(3.3.2) \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y}{2I_x} (h^2 - y^2).$$

Są to wzory znane z elementarnej teorii ścinania. Jak wiadomo, dla przekroju prostokątnego ścisła teoria ścinania prowadzi do wartości naprężeń zależnej od stosunku boków przekroju. Dla prostokątów wydłużonych w płaszczyźnie zginania największe naprężenie ścinające w środku przekroju nie różni się wiele¹³⁾ od wartości przybliżonej równej według (3.3.2)

$$[\tau_{zy}]_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F}.$$

Przykład 3.4. Przekrój symetryczny nader wydłużony zginany siłą Q_y prostopadłą do osi symetrii (rys. 6). To zadanie nie da się już, naturalnie, rozwiązać w sposób elementarny; również w teorii sprężystości nastęrcza ono poważne trudności i zostało rozwiązane metodą wariacyjną w [12]. Teoria

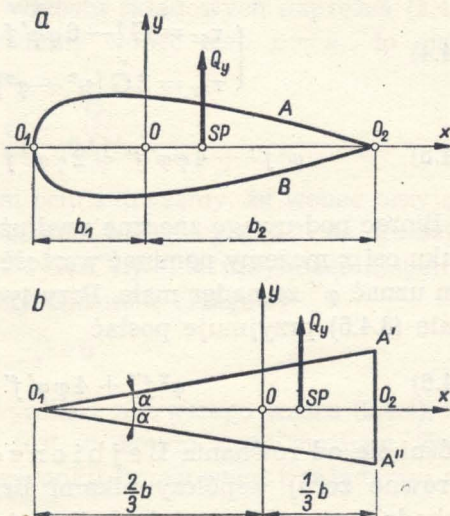
przybliżona daje również pewne wartości przybliżone, dość, jak się wydaje, bliskie wartości uzyskanych przez L. S. Lejbienzoną.

Rozważmy zatem przekrój nader wydłużony (na rys. 6a w postaci tzw. profilu lotniczego) o osi symetrii x , obciążony siłą Q_y przyłożoną w środku ścinania.

Niech równanie konturu będzie odpowiednio

$$(3.4.1) \quad \begin{cases} \text{dla części górnej } O_1 A O_2, & y = \varphi(x), \\ \text{dla części dolnej } O_1 B O_2, & y = -\varphi(x). \end{cases}$$

Przyjmiemy za Lejbienzoną, [12], że wobec znacznego wydłużenia przekroju w kierunku osi x normalna do konturu jest na większej



Rys. 6

¹³⁾ Por. [8], s. 326.

jego części prawie równoległa do osi y i że wobec tego można przyjąć w przybliżeniu na całym konturze

$$(3.4.2) \quad \tau_{zy} = 0 \quad \text{dla} \quad y = \pm \varphi(x).$$

Warunek powyższy będzie spełniony, jeżeli przyjąć funkcję spaczenia w postaci

$$(3.4.3) \quad w_s(x, y) = [y^2 - 3\varphi^2(x)] y f(x),$$

gdzie $f(x)$ jest na razie nie znaną funkcją.

Podstawiając (3.4.3) do (3.1) i (3.2) otrzymujemy

$$(3.4.4) \quad \begin{cases} \tau_{zx} = G [-6\varphi\varphi'f + (y^2 - 3\varphi^2)f'] y, \\ \tau_{zy} = 3G [y^2 - \varphi^2] f, \end{cases}$$

$$(3.4.5) \quad \varphi^2 f'' + 4\varphi\varphi'f' + 2\varphi\varphi''f + 2(\varphi'^2 - 1)f = \frac{Q_y}{3GI_x}.$$

Biorąc pod uwagę znaczne wydłużenie (spłaszczenie) przekroju w kierunku osi x możemy pominąć wartość kwadratu funkcji φ' wobec 1 i poza tym uznać φ'' za nader małe. Przy tych założeniach upraszczających równanie (3.4.5) przyjmuje postać

$$(3.4.6) \quad \varphi^2 f'' + 4\varphi\varphi'f' - 2f = \frac{Q_y}{3GI_x}$$

i różni się od równania L e j b i e n z o n a (o ile w tym ostatnim przyjąć ν równe zero) współczynnikami liczbowymi przy pierwszej i drugiej pochodnej poszukiwanej funkcji $f(x)$:

$$(3.4.7) \quad 0,81 \cdot \varphi^2 f'' + 1,42 \cdot 4\varphi\varphi'f' - 2f = \frac{Q_y}{3GI_x}.$$

Wypada zaznaczyć, że równanie L e j b i e n z o n a wyprowadzone zostało metodą wariacyjną.

Rozpatrzmy teraz dla skonkretyzowania rozważań przekrój w postaci wydłużonego trójkąta równobocznego (rys. 6b).

W tym przypadku mamy

$$(3.4.8) \quad \varphi(x) = \left(x + \frac{2b}{3}\right) \operatorname{tg} \alpha = kt,$$

o ile oznaczyć $\operatorname{tg} \alpha = k$ oraz $x + (2b/3) = t$. Wobec tego, że

$$(3.4.9) \quad \varphi' = k, \quad \varphi'' = 0,$$

to równanie różniczkowe zagadnienia (3.4.6) przyjmuje postać

$$(3.4.10) \quad t^2 f'' + 4tf' - \frac{2}{k^2}f = \frac{Q_y}{3GI_x k^2},$$

przy czym kreski oznaczają tutaj różniczkowanie względem nowej zmiennej t . Rozwiązaniem równania (3.4.10) typu E u l e r a jest

$$(3.4.11) \quad f(t) = C_1 t^{\mu_1} + C_2 t^{\mu_2} - \frac{Q_y}{6GI_x},$$

gdzie

$$(3.4.12) \quad \mu_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{2}{k^2}}.$$

Ponieważ $\mu_2 < 0$ (oczywiście, $\mu_1 > 0$), to dla $t \rightarrow 0$, czyli dla $x \rightarrow -2b/3$, odpowiedni wyraz w (3.4.11) dąży do nieskończoności. Aby uniknąć w tym przypadku nieograniczonego wzrostu składowych naprężeń (3.4.4), musimy przyjąć $C_2 = 0$. Jeżeli nazwiemy wobec tego $\mu = \mu_1$, to mamy w dalszym ciągu

$$(3.4.13) \quad f(t) = C_1 t^\mu - \frac{Q_y}{6GI_x}.$$

Pozostaje obliczenie stałej C_1 . W tym celu zauważmy, że wobec przyjęcia funkcji spaczenia w postaci (3.4.3) warunek brzegowy (3.4.2) na dłuższych bokach konturu (tzn. na bokach O_1A' i O_1A'') jest w przybliżeniu spełniony. Również w przybliżeniu spełnimy warunek brzegowy

$$(3.4.14) \quad [\tau_{zx}]_{x=b/3} = 0$$

na boku krótszym $A'A''$, gdyż, jak wynika z pierwszego wzoru (3.4.4), ścisłe spełnienie warunku (3.4.14) nie jest w danym razie możliwe. Zadowolimy się zatem «złagodzeniem» warunku brzegowego i zażądamy, aby

$$(3.4.15) \quad \int_0^k [\tau_{zx}]_{x=b/3} dy = 0.$$

Jeżeli do powyższego wzoru podstawimy (3.4.4) i wykonamy całkowanie, to po odpowiednich przekształceniach otrzymamy

$$(3.4.16) \quad C_1 = \frac{Q_y}{GI_x b^\mu \left(6 + \frac{5}{2} \mu\right)}.$$

Ostatecznie zatem z (3.4.13) i (3.4.16) otrzymujemy

$$(3.4.17) \quad f(t) = \frac{Q_y}{GI_x} \left[\frac{t^\mu}{b^\mu \left(6 + \frac{5}{2} \mu\right)} - \frac{1}{6} \right].$$

Zadanie jest tym samym rozwiązane, gdyż z (3.4.4) możemy już bez trudu obliczyć naprężenia. Spróbujmy zatem dla przykładu obliczyć moment skręcający, jaki przenieść może rozpatrywany przekrój trójkątny.

Z ostatniego ze wzorów (2.8.2) otrzymujemy po podstawieniu (3.4.4)

$$(3.4.17.1) \quad M_z = G \int_{-2b/3}^{b/3} dx \int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} [3(y^2 - \varphi^2)fx + 6\varphi\varphi'fy^2 - (y^3 - 3\varphi^2y)f'y] dy.$$

Uwzględnienie (3.4.9), zamiana zmiennej i jednokrotne całkowanie doprowadza do następującego wzoru:

$$(3.4.18) \quad M_z = 4G \int_0^b \left[k^5 t^4 \left(f + \frac{2}{5} f' \right) - k^3 t^3 \left(t - \frac{2b}{3} \right) f \right] dt.$$

Weźmy pod uwagę, że założone znaczne wydłużenie przekroju w kierunku osi x wymaga, aby stosunek największych wymiarów przekroju, $A'A'' : O_1O_2$, nie był większy niż np. 1/5. Wobec tego można przyjąć za Lejbienzonem, że

$$(3.4.19) \quad k \leq \frac{1}{10}.$$

Jeżeli tak jest, to wyrażenie zawierające czynnik k^5 w funkcji podcałkowej (3.4.18) można pominąć jako małe wobec wyrażenia zawierającego czynnik k^3 .

Ostatecznie zatem zamiast (3.4.18) otrzymujemy

$$(3.4.20) \quad M_z = -4k^3 G b^5 \left[C_1 b^\mu \frac{\mu + 2}{3(\mu + 4)(\mu + 5)} - \frac{Q_y}{180 G I_x} \right],$$

a po uwzględnieniu (3.4.16) ostatecznie

$$(3.4.21) \quad M_z = \frac{k^3 b^5 Q_y}{45 I_x} (1 - \varepsilon),$$

gdzie

$$(3.4.22) \quad \varepsilon = \frac{360(\mu + 2)}{3(\mu + 4)(\mu + 5)(5\mu + 12)}.$$

Wyrażenie występujące przed nawiasem okrągłym w (3.4.21) przedstawia wielkość M_z obliczoną przez Lejbienzona, [12], jeżeli pominąć w odpowiednim wzorze wyraz zależny od ν . [Wzór Lejbienzona zależy w dużym stopniu od wartości liczby Poissona i np. dla $\nu = 1/10$ trzeba by wprowadzić w tym wzorze dodatkowy współczynnik równy 0,8; dla ν większych współczynnik ten jest jeszcze mniejszy. Z tego względu nasz wzór przybliżony (3.4.21) uważać trzeba w danym razie za wzór raczej szacunkowy, o ile wzór Lejbienzona — mimo wielu poczynionych założeń upraszczających — uznać należy za wzór ściślejszy].

Dla przyjętej przez nas granicznej wartości $k = 0,1$ jest $\mu = 12,7$, wobec czego w tym przypadku $\varepsilon = 0,08$. W danym razie wartość M_z według (3.4.21) różni się więc od wartości obliczonej przez L e j b i e n z o n a (o ile, powtarzamy, przyjąć we wzorze tego autora $\nu = 0$) o około 8%.

4. Skręcanie proste

W tym przypadku szczególnym, jak mówiliśmy na wstępie, rozwinięta tutaj teoria przybliżona nie różni się niczym od klasycznej teorii S a i n t - V e n a n t a. Między innymi zamiast równania P o i s s o n a (3.2), które otrzymaliśmy dla funkcji spaczenia przy zginaniu prostym, otrzymujemy w danym przypadku znane równanie L a p l a c e' a

$$(4.1) \quad \nabla^2 w_s = 0,$$

które zwykle zapisuje się dla tzw. funkcji skręcenia $\varphi(x, y) = w_s(x, y)/(d\theta/dz)$ (tutaj, naturalnie, $d\theta/dz = \text{const}$).

Nie ma więc potrzeby przytaczania rozumowań, które znaleźć można w podręcznikach teorii sprężystości.

5. Skręcanie i zginanie prętów cienkościennych

Ponieważ założenie nieodkształcalności przekrojów w swych płaszczyznach, sformułowane przy pomocy wzorów (2.1.1) i (2.1.2), stanowi podstawowe założenie teorii prętów cienkościennych, więc posługując się wyrażeniami dla składowych przemieszczenia (2.1.1) - (2.1.3) można wyprowadzić całą teorię prętów cienkościennych, zarówno o przekroju zamkniętym, jak i o przekroju otwartym. Zważywszy, że odpowiednia teoria jest znana (por. chociażby [18] i [22]), nie będziemy jej tutaj rozwijali.

Literatura cytowana w tekście

- [1] I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, New York-Londyn 1946.
- [2] N. V. Zwoliński i P. M. Riz, *Torsion eines zylindrischen Stabes durch Kräfte die auf seiner Seitenfläche verteilt sind*, Izv. AN ZSRR 10 (1939), (ros.).
- [3] P. M. Riz, *Concerning the Torsion of a Prismatic Bar by Axial Forces Distributed along its Side Surfaces*, Prikl. Mat. Miec., t. 4, 2 (1940), (ros.).
- [4] N. I. Muschielisz wili, *K zadacze kruczenja i izgiba uprugich brusew sostawlennyh iz razlicznych matieriałow*, Izv. AN ZSSR 7 (1932).
- [5] S. G. Lechnicki, *Niekotoryje stuczai uprugowo rawnowiesja odnorodnowo cilindra s proizwolnoj anizotropiej*, Prikl. Mat. Miec., t. 2, 3, (1939).
- [6] C. F. F. Platrier, *Généralisations du problème de Saint-Venant*, Proc. Fifth Int. Congr. Appl. Mech. 1939.
- [7] A. i L. Föppl, *Drang und Zwang*, Monachium-Berlin, t. 2, 1944.

- [8] S. P. Timoshenko i J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, New York-Toronto-Londyn 1951.
- [9] J. Nowiński, *Skręcanie pręta prostopadłościennego, którego jeden przekrój pozostaje płaski*, Arch. Mech. Stos. 1 (1953).
- [10] A. C. Stevenson, *Flexure with Shear and Associated Torsion in Prisms of Uni-axial and Asymmetric Cross-Sections*, Phil. Trans. Roy. Soc., ser. A, t. 237, 1938-1939.
- [11] R. M. Morris, *Some General Solutions of St. Venant's Flexure and Torsion Problem (I)*, Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2, t. 46, 1940.
- [12] L. S. Lejbienzon, *Wariacyjonnyje metody rieszenja zadacz teorii uprugosti*, Sobr. trudow, t. 1, Moskwa 1951.
- [13] L. S. Lejbienzon, *Kurs teorii uprugosti*, Moskwa-Leningrad 1947.
- [14] J. Nowiński, *Oś skręcenia w przypadku czystego skręcania prętów prostych*, Arch. Mech. Stos. 1 (1950).
- [15] J. Nowiński, *O zginaniu nierównomiernym prętów prostych*, Arch. Mech. Stos. 2 (1950).
- [16] J. Nowiński, *O pewnej metodzie obliczenia cienkościennych dźwigarów wspornikowych osadzonych swobodnie*, Biul. Inst. Techn. Lotn. 4 (1947).
- [17] J. Nowiński, *Zginanie i skręcanie prętów o przekroju pełnym osadzonych swobodnie*, Biul. Inst. Techn. Lotn. 4 (1947).
- [18] J. Nowiński, *Teoria dźwigarów cienkościennych zbieżnych*, Prace Gł. Inst. Lotn. 1 (1951).
- [19] S. G. Lechnicki, *Teoria uprugosti anizotropnowo ciała*, Moskwa-Leningrad 1950.
- [20] N. M. Bielajew, *Wytrzymałość materiałów*, tłum. polsk. S. Kaliskiego, Warszawa 1954.
- [21] H. J. Plass, *An Approximate Nonuniform Bending Theory and Its Application to the Swept-Plate Problem*, Journ. Appl. Mech. 3 (1955).
- [22] J. Nowiński, *Z teorii dźwigarów cienkościennych o przekroju otwartym obciążonych równomiernie*, Rozpr. Matem. I (1952).

Резюме

О НЕКОТОРОЙ ПРИБЛИЖЕННОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ СПЛОШНОГО СЕЧЕНИЯ

В работе рассматривается приближенная теория изгиба, сдвига и кручения прямых стержней постоянного, но произвольного сечения. Таким образом она охватывает сплошные, равно как и тонкостенные стержни, независимо от степени симметрии сечения. Неточности теории сосредоточены, главным образом, в двух упрощающих предположениях: (1) депланация сечений протекает равномерно в осевом направлении стержня, (2) поперечные сечения ведут себя как будто жесткие в своих плоскостях. Первое из этих предположений обозначает, что вместо чистого изгиба (как в сопротивлении материалов) рассматривается неравномерный изгиб (изгиб силой на конце консоли). Второе упрощающее предположение принимается молчаливо в сопро-

тивлении материалов и приводит к несогласию с теорией изгиба Сен-Венана, но согласуется с теорией кручения того-же автора. Предположение, что при сдвиге число Пуассона равно нулю, вызывает довольно большие погрешности в некоторых случаях, о чем следует помнить, применяя рассматриваемую теорию.

Из основных формул (2.1), принимая структуру стержня трансверсально-изотропной [формулы (2.3)], получаются, предполагая, что $\nu = \nu' = 0$, формулы для напряжений (2.4).

Первую из этих формул легко привести к виду (2.11), а также получить формулу для единичного угла кручения (2.12). Затем рассматривается чистый изгиб ($\vartheta = 0$), функция депланации которого удовлетворяет уравнению Пуассона (3.2). Координаты центра изгиба, в общем случае, даны формулами (3.9). Можно проверить, что для $\nu = 0$ функция Φ , приводимая Лейбензоном в [12], преобразуется в нашу функцию депланации w_s . Решены следующие примеры для сдвига силой Q_y : стержень круглого сечения, стержень эллиптического сечения, стержень прямоугольного сечения и стержень очень удлиненного симметрического сечения (рис. 6).

S u m m a r y

AN APPROXIMATE THEORY OF BENDING AND TORSION OF STRAIGHT SOLID BARS

An approximate theory of bending, shear and torsion of straight bars of constant arbitrary cross-sections is developed, solid bars being discussed as well as thin-walled bars, independently of the degree of symmetry of the cross-section. The inaccuracies of the theory are chiefly due to the following two simplifying assumptions: (1) the warping of the cross-sections is uniform along the axis of the bar, (2) the cross-sections behave as rigid in their planes. The first assumption signifies that bending by terminal loads is considered instead of pure bending (treated in Strength of Materials). The second is the tacit assumption of Strength of Materials and leads to discrepancies with Saint-Venant's theory of bending, the accordance with his theory of torsion being preserved, however. The assumption that in the theory of shear Poisson's ratio is equal to zero results, in some cases, in considerable errors, which should be remembered when this theory is being applied.

Assuming the structure to be transversally-isotropic, Eqs. (2.3), we obtain, from the basic relations (2.1), the equations for stresses (2.4) under the assumption of $\nu = \nu' = 0$. The first of these equations can easily be transformed into (2.11). The equation (2.12) for unit angle of twist can be

obtained in an equally easy manner. Next, the problem of simple bending ($\vartheta = 0$) is discussed in the case where the warping function satisfies P o i s s o n's equation (3.2). The coordinates of the centre of shear are determined by the general equations (3.9). It can be verified that for $\nu = 0$, the function Φ proposed by L e i b e n z o n, [12], becomes our warping function w_s .

The cases of circular, elliptic and rectangular bars subjected to shear with the force Q_y are considered as well as a bar of narrow, symmetrical cross-section (Fig. 6).

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 stycznia 1956 r.