

KAZIMIERZ PISZCZEK

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA  
PRZY RÓŻNYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
XLIV

## SPIS TREŚCI

### Część I

	Str.
Wstęp	177
1.1. Rozwiązania parzyste typu pełnookresowego	179
1.2. Rozwiązania nieparzyste typu pełnookresowego	185
1.3. Rozwiązania parzyste typu półokresowego	190
1.4. Rozwiązania nieparzyste typu półokresowego	194
1.5. Obiekt stateczności dynamicznej dla równania (0.1)	198

### Część II

2.1. Przybliżone równania ruchu	202
2.2. Przybliżone określenie pierwszych obszarów niestatecznych dla brzegów utwierdzonych przegubowo	207
2.3. Inne warunki brzegowe	211
2.4. Określenie obszarów rezonansowych przy dowolnych warunkach brzegowych	220
2.5. Przykład	220



Praca dzieli się na dwie części. W pierwszej podajemy przybliżone wzory na wartości właściwe i funkcje właściwe dla równania (0.1) oraz dzielimy przestrzeń trójwymiarową  $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$ , tzw. obiekt stateczności dynamicznej, na obszary rozwiązań statecznych i niestatecznych. W części drugiej na podstawie podanej teorii rozwiązujemy zagadnienie stateczności dynamicznej płaskownika, skąd jako przypadek szczególny rozwiązania wynikają wnioski podane w pracy [7].

## C Z Ę Ś Ć I

### Wstęp

Rozważania stateczności dynamicznej pewnych elementów sprężystych, jak również wiele innych problemów fizyki, techniki i elektrotechniki, prowadzą do konieczności wyznaczenia obszarów statecznych i niestatecznych rozwiązań liniowego równania różniczkowego o okresowo zmiennym współczynniku typu

$$(0.1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + (\lambda + \gamma_1 \cos t + \gamma_2 \cos 2t) y = 0.$$

Jeśli dokonamy zmiany zmiennej niezależnej przyjmując

$$(0.2) \quad t = 2z$$

i oznaczymy

$$(0.3) \quad 4\lambda = \theta_0, \quad 2\gamma_1 = \theta_2, \quad 2\gamma_2 = \theta_4, \quad \theta_6 = \theta_8 = \dots = 0,$$

to równanie (0.1) można zapisać w postaci

$$(0.4) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + \left( \theta_0 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \theta_{2r} \cos 2rz \right) y = 0.$$

Jest to równanie Hilla, [4].

Dla dalszych celów dogodniej jest nadać równaniu (0.1) postać

$$(0.5) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + [a - 2q\psi(z)] y = 0,$$

gdzie

$$(0.6) \quad a = \theta_0, \quad q = -2\gamma_2, \quad \gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \psi(z) = \gamma \cos 2z + \cos 4z.$$



Funkcja  $\psi(z)$  jest parzysta o okresie  $\pi$ .

Dla równania (0.5) sformułujemy następujące zagadnienie brzegowe, [2]. Poszukujemy wartości rzeczywistych  $a(\gamma_1, \gamma_2)$  i odpowiadających im rozwiązań okresowych równania (0.5) takich, aby dla pewnych  $a$  rozwiązania  $y(z)$  spełniały równości

$$(I) \quad y(\pi; \gamma_1, \gamma_2) = y(0; \gamma_1, \gamma_2), \quad \dot{y}(\pi; \gamma_1, \gamma_2) = \dot{y}(0; \gamma_1, \gamma_2),$$

zaś dla innych  $a$  równości

$$(II) \quad y(\pi; \gamma_1, \gamma_2) = -y(0; \gamma_1, \gamma_2), \quad \dot{y}(\pi; \gamma_1, \gamma_2) = -\dot{y}(0; \gamma_1, \gamma_2),$$

gdzie  $\dot{y} = dy/dz$ .

Rozwiązania typu pierwszego nazywać będziemy funkcjami właściwymi odpowiadającymi przypadkowi pełnej okresowości, zaś rozwiązania typu drugiego funkcjami właściwymi odpowiadającymi przypadkowi półokresowości. Analogicznie odpowiednie wartości  $a$  nazwiemy wartościami właściwymi typu pełnej- lub półokresowości. Każdemu przypadkowi odpowiadają dwa rodzaje rozwiązań: parzyste i nieparzyste. Jak okaże się później, mieć będą one postać:

$$(0.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{2n}(z; \gamma_1, \gamma_2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos 2rz, \\ S_{2n+2}(z; \gamma_1, \gamma_2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin(2r+2)z, \\ C_{2n+1}(z; \gamma_1, \gamma_2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos(2r+1)z, \\ S_{2n+1}(z; \gamma_1, \gamma_2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin(2r+1)z \end{array} \right.$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

W powyższych szeregach współczynniki  $A_{2r}^{(2n)}$ ,  $B_{2r+2}^{(2n+2)}$ ,  $A_{2r+1}^{(2n+1)}$  i  $B_{2r+1}^{(2n+1)}$  zależą od parametrów  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ . Dwie pierwsze funkcje (0.7) mają okres  $\pi$  i są typu pierwszego, a dwie pozostałe  $2\pi$  i są typu drugiego. Kolejnym funkcjom (0.7), które przez analogię do funkcji *Mathieu* można nazwać dwuparametrowymi funkcjami *Hilla* rzędu  $m$ <sup>1)</sup> typu sinus lub cosinus, odpowiadać będą zależne od  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  wartości właściwe  $a_{2n}$ ,  $b_{2n+2}$ ,  $a_{2n+1}$ ,  $b_{2n+1}$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Niech w równaniu (0.5)  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . W tym przypadku przedstawia ono równanie ruchu harmonicznego

$$(0.8) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + ay = 0.$$

<sup>1)</sup> Liczba  $m$  przyjmuje wartości  $2n$ ,  $2n+2$ ,  $2n+1$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).



Gdy  $a = m^2$  mamy następujące pary rozwiązań:  $A \cos mz$ ,  $B \sin mz$ . Umówimy się, że będziemy uważali w dalszym ciągu współczynniki tych rozwiązań za równe jedności. Jeśli  $m = 0$ , to rozwiązanie przyjmujemy w postaci  $y \equiv 1$ . We wszystkich innych przypadkach rozwiązań równania (0.5) współczynniki przy  $\cos mz$  i  $\sin mz$  przyjmujemy także za równe jedności przy dowolnej wartości  $q$ . Umowa ta oznacza pewnego rodzaju normowanie.

### 1.1. Rozwiązania parzyste typu pełnookresowego

W celu otrzymania parzystych rozwiązań pierwszego typu (0.7) i odpowiadających im wartości właściwych przyjmujemy w równaniu (0.5)

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} a = a_{2n} = 4n^2 + \alpha_1^{(n)}q + \alpha_2^{(n)}q^2 + \alpha_3^{(n)}q^3 + \alpha_4^{(n)}q^4 + \dots, \\ y(z) = C_{2n} = \cos 2nz + qC_1^{(n)} + C_2^{(n)}q^2 + C_3^{(n)}q^3 + C_4^{(n)}q^4 + \dots, \end{cases}$$

gdzie  $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots$  przedstawiają nie znane na razie parametry (zależne od  $\gamma$ ), zaś  $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots$  są nie znanymi funkcjami zmiennej niezależnej  $z$  oraz parametru  $\gamma$ . Jeśli  $q = 0$ , to równanie (0.5) sprowadza się do równania (0.8), które także rozwiązują funkcje (1.1.1) przy  $q = 0$ . Po wstawieniu funkcji (1.1.1) w równanie (0.5) i uporządkowaniu według potęg  $q$  oraz przyrównaniu do zera współczynników przy równych potęgach otrzymujemy nieskończony układ równań różniczkowych dla wyznaczenia nieskończonej ilości nie znanych funkcji  $C_i^{(n)}(z)$  dla każdego  $n$ . Parametry  $\alpha_i^{(n)}$  wyznaczamy z warunku okresowości poszukiwanego rozwiązania przy każdym ustalonym  $n$ . W dalszych rozważaniach ograniczymy się do pierwszych czterech parametrów  $\alpha_i$  i pierwszych trzech funkcji  $C_i$ .

Wspomniany wyżej układ równań ma postać

$$(1.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4n^2 \cos 2nz - 4n^2 \cos 2nz = 0, \\ \ddot{C}_1^{(n)} + 4n^2 C_1^{(n)} + \alpha_1^{(n)} \cos 2nz - \gamma \cos 2(n+1)z - \gamma \cos 2(n-1)z - \\ \quad - \cos 2(n+2)z - \cos 2(n-2)z = 0, \\ \ddot{C}_2^{(n)} + 4n^2 C_2^{(n)} + \alpha_1^{(n)} C_1^{(n)} + \alpha_2^{(n)} \cos 2nz - 2\gamma C_1^{(n)} \cos 2z - \\ \quad - 2C_1^{(n)} \cos 4z = 0, \\ \ddot{C}_3^{(n)} + 4n^2 C_3^{(n)} + \alpha_1^{(n)} C_2^{(n)} + \alpha_2^{(n)} C_1^{(n)} + \alpha_3^{(n)} \cos 2nz - 2\gamma C_2^{(n)} \cos 2z - \\ \quad - 2C_2^{(n)} \cos 4z = 0, \\ \ddot{C}_4^{(n)} + 4n^2 C_4^{(n)} + \alpha_1^{(n)} C_3^{(n)} + \alpha_2^{(n)} C_2^{(n)} + \alpha_3^{(n)} C_1^{(n)} + \alpha_4^{(n)} \cos 2nz - \\ \quad - 2\gamma C_3^{(n)} \cos 2z - 2C_3^{(n)} \cos 4z = 0, \\ \dots \end{array} \right.$$



Pierwsze równanie jest spełnione tożsamościowo dla każdego  $n$ . Pozostałe równania można rozwiązać kolejno przy każdym  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  Ograniczymy się do  $n = 0, 1, 2, 3$  dla czterech równań odpowiadających  $C_1, C_2, C_3$  i  $C_4$ .

Dla  $n = 0$  pierwsze z nich daje

$$(1.1.3) \quad \ddot{C}_1^{(0)} + a_1^{(0)} - 2\gamma \cos 2z - 2 \cos 4z = 0.$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest

$$(1.1.4) \quad C_1^{(0)} = -\frac{1}{2} \gamma \cos 2z - \frac{1}{8} \cos 4z - \frac{1}{2} a_1^{(0)} t^2.$$

Ponieważ szukamy rozwiązania okresowego, więc w (1.1.4) należy przyjąć  $a_1^{(0)} = 0$ .

Rozwiązanie (1.1.4) można nazwać całą szczególną równania (1.1.3). Do tego rozwiązania powinien dojść jeszcze wyraz liniowy, który pomijamy z uwagi na to, że poszukujemy rozwiązania okresowego oraz że po wstawieniu tak otrzymanego rozwiązania do funkcji (1.1.1) powinniśmy otrzymać jako wyraz wolny jedność, a nie liczbę stałą zależną od  $q$ . Taką umowę przyjęliśmy we wstępie. Uwaga ta odnosi się również do dalszych równań. Po podstawieniu rozwiązania (1.1.4) w równanie różniczkowe dla  $C_2^{(0)}$  mamy warunek okresowości

$$a_2^{(0)} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \gamma^2.$$

Rozwiązanie ma postać

$$C_2^{(0)} = \frac{5}{32} \gamma \cos 2z + \frac{1}{32} \gamma^2 \cos 4z + \frac{5}{288} \gamma \cos 6z + \frac{1}{512} \cos 8z.$$

W podobny sposób otrzymujemy

$$a_3^{(0)} = \frac{3}{16} \gamma^2, \quad C_3^{(0)} = \frac{1}{4} \left( \frac{7}{32} \gamma^3 + \frac{1}{9} \gamma \right) \cos 2z + \frac{1}{16} \left( \frac{7}{512} - \frac{1}{9} \gamma^2 \right) \cos 4z - \\ - \frac{1}{128} \left( \frac{1}{9} \gamma^3 + \frac{9}{16} \gamma \right) \cos 6z - \frac{7}{9216} \gamma^2 \cos 8z - \frac{89}{460800} \gamma \cos 10z - \frac{1}{73728} \cos 12z.$$

Dla tego rozwiązania z następnego warunku okresowości jest

$$a_4^{(0)} = \frac{7}{8192} - \frac{5}{144} \gamma^2 + \frac{7}{128} \gamma^4.$$



Uwzględniając otrzymane związki w (1.1.1) i wykorzystując oznaczenia (0.6) mamy

$$(1.1.5) \quad a_0 = -\frac{1}{2} \gamma_2^2 - 2 \gamma_1^2 - \frac{3}{2} \gamma_1^2 \gamma_2 + \frac{7}{512} \gamma_2^4 - \frac{5}{9} \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \frac{7}{8} \gamma_1^4 + \dots,$$

$$(1.1.6) \quad C_0 = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(0)} \cos 2rz,$$

gdzie

$$(1.1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0^{(0)} = 1, \\ A_2^{(0)} = \gamma_1 + \frac{5}{8} \gamma_1 \gamma_2 - \frac{7}{16} \gamma_1^3 - \frac{2}{9} \gamma_1 \gamma_2^2 + \dots, \\ A_4^{(0)} = \frac{1}{4} \gamma_2 + \frac{1}{8} \gamma_1^2 - \frac{7}{1024} \gamma_2^3 + \frac{1}{18} \gamma_1^2 \gamma_2 + \dots, \\ A_6^{(0)} = \frac{5}{72} \gamma_1 \gamma_2 + \frac{1}{144} \gamma_1^3 + \frac{9}{256} \gamma_1 \gamma_2^2 + \dots, \\ A_8^{(0)} = \frac{1}{128} \gamma_2^2 + \frac{7}{1152} \gamma_1^2 \gamma_2 + \dots, \\ A_{10}^{(0)} = \frac{89}{57600} \gamma_1 \gamma_2^2 + \dots, \\ A_{12}^{(0)} = \frac{1}{9216} \gamma_2^3 + \dots \end{array} \right.$$

Łatwo zauważyć, że gdy w równaniu (0.5) przyjmiemy  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = -\frac{1}{2} q$ , to sprowadza się ono do równania *M a t h i e u*

$$(1.1.8) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z) y = 0$$

i wzory (1.1.5) oraz (1.1.6) pokrywają się z odpowiednimi związkami dla tegoż równania. Jeśli zaś przyjmiemy  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -2q$  i założymy, że  $x = 2z$  oraz  $a_0 = 4\bar{a}_0$ , to otrzymamy równanie różniczkowe *M a t h i e u* (1.1.8) o zmiennej niezależnej  $x$ . W rozwiązaniu (1.1.6) wypada  $A_{2n}^{(0)} = 0$  ( $n = 1, 3, \dots$ ), gdyż obecnie zmieniła się zmienna niezależna. Pozostałe kolejne współczynniki różne od zera pokrywają się z postacią jak w rozwiązaniach równania *M a t h i e u*. Wartość właściwa  $\bar{a}_0$  pokrywa się z otrzymaną poprzednio przy  $\gamma_2 = 0$ . Ze względu na trudności otrzymania ogólnych wyrazów szeregów (1.1.5) i (1.1.7) nie wiemy, czy ogólnie są one zbieżne. Można przypuszczać, że są one zbieżne dla każdej pary dostatecznie małych wartości  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ .



Niech w równaniach (1.1.2)  $n = 1$ . Pierwsze z nich przyjmie postać

$$(1.1.9) \quad \ddot{C}_1^{(1)} + 4C_1^{(1)} + a_1^{(1)} \cos 2z - \gamma \cos 4z - \gamma - \cos 6z - \cos 2z = 0.$$

Ażeby otrzymać rozwiązanie okresowe, powinno być  $a_1^{(1)} = 1$ . Całką szczególną powyższego równania jest

$$(1.1.10) \quad C_1^{(1)} = \frac{1}{4} \gamma - \frac{1}{12} \gamma \cos 4z - \frac{1}{32} \cos 6z,$$

gdyż rozwiązanie równania jednorodnego (podobnie jak w przypadku  $n = 0$ ) pomijamy ze względu na to, że po wstawieniu wyrażenia (1.1.10) do funkcji (1.1.1) mamy otrzymać współczynnik przy  $\cos 2z$  równy jedności (niezależny od  $q$ ). Warunkiem okresowości rozwiązania równania drugiego układu (1.1.2) podobnie jak poprzednio jest związek

$$a_2^{(1)} = \frac{5}{12} \gamma^2 - \frac{1}{32},$$

a rozwiązanie przyjmie postać

$$C_2^{(1)} = -\frac{1}{12} \gamma - \frac{53}{1152} \gamma \cos 4z - \frac{1}{128} \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \gamma^2 \right) \cos 6z + \\ + \frac{11}{5760} \gamma \cos 8z + \frac{1}{3072} \cos 10z.$$

Dla dwu równań następnych warunki okresowości rozwiązań mają odpowiednio postać

$$a_3^{(1)} = -\frac{121}{576} \gamma^2 - \frac{1}{1024}$$

oraz

$$a_4^{(1)} = -\frac{763}{13824} \gamma^4 + \frac{6233}{184320} \gamma^2 - \frac{1}{98304},$$

zaś rozwiązanie przyjmuje postać:

$$C_3^{(1)} = \frac{1}{192} \left( \frac{13}{6} \gamma - 5 \gamma^3 \right) - \frac{1}{4608} \left( \frac{43}{3} \gamma^3 - \frac{1879}{40} \gamma \right) \cos 4z + \\ + \frac{1}{6144} \left( \frac{97}{15} \gamma^2 - \frac{1}{16} \right) \cos 6z - \frac{1}{960} \left( \frac{1}{24} \gamma^3 - \frac{373}{480} \gamma \right) \cos 8z - \\ - \frac{1}{18432} \left( \frac{13}{15} \gamma^2 - \frac{1}{4} \right) \cos 10z - \frac{103}{6451200} \gamma \cos 12z - \frac{1}{589824} \cos 14z.$$



Przy oznaczeniach (0.6) związki (1.1.1) są następujące:

$$(1.1.11) \quad a_2 = 4 - 2\gamma_2 + \frac{5}{3}\gamma_1^2 - \frac{1}{8}\gamma_2^2 + \frac{121}{72}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{1}{128}\gamma_2^3 - \frac{763}{864}\gamma_1^4 + \\ + \frac{6233}{11520}\gamma_1^2\gamma_2^2 - \frac{1}{6144}\gamma_2^4 + \dots,$$

$$(1.1.12) \quad C_2 = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2)} \cos 2rz,$$

gdzie pierwszych kilka współczynników ma postać

$$(1.1.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0^{(2)} = -\frac{1}{2}\gamma_1 - \frac{1}{3}\gamma_1\gamma_2 - \frac{13}{144}\gamma_1\gamma_2^2 + \frac{5}{24}\gamma_1^3 + \dots, \\ A_2^{(2)} = 1, \\ A_4^{(2)} = \frac{1}{6}\gamma_1 - \frac{53}{288}\gamma_1\gamma_2 + \frac{43}{1728}\gamma_1^3 - \frac{1879}{23040}\gamma_1\gamma_2^2 + \dots, \\ A_6^{(2)} = \frac{1}{16}\gamma_2 - \frac{1}{256}\gamma_2^2 + \frac{1}{96}\gamma_1^2 - \frac{97}{11520}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{1}{12288}\gamma_2^3 + \dots, \\ A_8^{(2)} = \frac{11}{1440}\gamma_1\gamma_2 + \frac{1}{2880}\gamma_1^3 - \frac{373}{57600}\gamma_1\gamma_2^2 + \dots, \\ A_{10}^{(2)} = \frac{1}{768}\gamma_2^2 + \frac{13}{34560}\gamma_1^2\gamma_2 - \frac{1}{9216}\gamma_2^3 + \dots, \\ A_{12}^{(2)} = \frac{103}{806400}\gamma_1\gamma_2^2 + \dots. \end{array} \right.$$

Przyjmując w związkach (1.1.11) i (1.1.13)  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}q$ , otrzymamy wyrażenia odpowiadające równaniu Mathieu (1.1.8), które w wyniku powyższego założenia powstaje z równania (0.5). Jeśli w tym ostatnim przyjmiemy  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -2q$  i dokonamy zmiany zmiennej niezależnej  $x = 2z$  oraz przyjmiemy  $a_2 = 4\bar{a}_2$ , to otrzymamy ze wzoru (1.1.11)

$$(1.1.14) \quad \bar{a}_2 = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 - \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 + \dots,$$

co w równaniu Mathieu odpowiada wielkości  $a_1$ , [4]. Współczynniki szeregu (1.1.12) tym razem sprowadzają się do  $A_{2n}^{(2)} = 0$  dla  $n = 0, 2, 4, 6 \dots$ , a pozostałe są równe

$$A_2^{(2)} = 1, \quad A_6^{(2)} = -\frac{1}{8}q - \frac{1}{64}q^2 - \frac{1}{1536}q^3 + \dots,$$

$$A_{10}^{(2)} = \frac{1}{192}q^2 + \frac{1}{1152}q^3 + \dots.$$



Odpowiadają one pierwszym współczynnikiem rozwiązania  $C_1$  równania *M a t h i e u*.

Rozwiązanie to ma postać, [4],

$$C_1 = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_{2r+1}^{(1)} \cos(2r+1)z,$$

gdzie

$$\bar{A}_{2r+1}^{(1)} = A_{2(2r+1)}^{(2)} \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Podobne wyniki można otrzymać dla dalszych  $n$ , tj. dla  $n = 2, 3, \dots$ . W zagadnieniach stateczności istotne znaczenie mają wartości właściwe i z tego względu podamy jeszcze dwie następne. Odpowiednie funkcje właściwe mają znaczenie drugorzędne i dlatego je pomijamy. Należy tylko zauważyć, że zawsze, podobnie jak dla dwu poprzednich przypadków, gdy równanie (0.5) sprowadza się do równania *M a t h i e u*, to obecne funkcje właściwe sprowadzają się do odpowiednich rozwiązań dla tegoż równania. Wspomniane wartości właściwe są

$$(1.1.15) \quad a_4 = 16 + \frac{2}{15} \gamma_1^2 + \frac{5}{12} \gamma_2^2 - \frac{31}{180} \gamma_1^2 \gamma_2 - \frac{763}{55\,296} \gamma_2^4 - \frac{1997}{67\,200} \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \\ + \frac{433}{54\,000} \gamma_1^4 + \dots,$$

$$(1.1.16) \quad a_6 = 36 + \frac{2}{35} \gamma_1^2 + \frac{1}{16} \gamma_2^2 - \frac{1}{70} \gamma_1^2 \gamma_2 - \frac{1}{128} \gamma_2^3 + \frac{187}{2\,744\,000} \gamma_1^4 + \\ + \frac{43\,673}{8\,467\,200} \gamma_1^2 \gamma_2^2 - \frac{13}{81\,920} \gamma_2^4 + \dots.$$

Dla  $\gamma_2 = 0$  oraz  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}q$  mamy

$$(1.1.17) \quad a_4 = 16 + \frac{1}{30} q^2 + \frac{433}{864\,000} q^4 + \dots,$$

$$(1.1.18) \quad a_6 = 36 + \frac{1}{70} q^2 + \frac{187}{45\,660\,160} q^4 + \dots,$$

co istotnie odpowiada tym wartościom właściwym dla równania (1.1.8).

Jeśli  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -2q$  oraz  $a_4 = 4\bar{a}_4$ ,  $a_6 = 4\bar{a}_6$ , to

$$(1.1.19) \quad \bar{a}_4 = 4 + \frac{5}{12} q^2 - \frac{763}{13\,824} q^4 + \dots,$$

$$(1.1.20) \quad \bar{a}_6 = 9 + \frac{1}{16} q^2 + \frac{1}{64} q^3 - \frac{13}{20\,480} q^4 + \dots.$$

Są to również wartości właściwe równaniu *M a t h i e u* podobnie jak (1.1.14). Na tym zakończymy obliczanie wartości właściwych równania (0.5) odpowiadających drugiej postaci rozwiązania (0.7).



## 1.2. Rozwiązania nieparzyste typu pełnokresowego

Przechodząc do wyznaczenia kilku pierwszych wartości właściwych odpowiadających drugiej postaci rozwiązań (0.7) przyjmijmy w równaniu (0.5)

$$(1.2.1) \quad a = b_{2(n+1)} = 4(n+1)^2 + \beta_1^{(n)} q + \beta_2^{(n)} q^2 + \beta_3^{(n)} q^3 + \beta_4^{(n)} q^4 + \dots,$$

$$(1.2.2) \quad y(z) = S_{2(n+1)} = \sin 2(n+1)z + S_1^{(n)} q + S_2^{(n)} q^2 + S_3^{(n)} q^3 + S_4^{(n)} q^4 + \dots$$

Symbole  $S_i^{(n)}$  oznaczają funkcje zależne od zmiennej  $z$  jak również od parametru  $\gamma$  oraz  $\beta_i^{(n)}$  funkcje parametru  $\gamma$ . Po wstawieniu wyrażen (1.2.1) oraz (1.2.2) w równanie (0.5) i przyrównaniu do zera współczynników przy potęgach  $q^\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) otrzymamy nieskończony układ równań, którego pierwsze mają postać

$$(1.2.3) \quad \begin{cases} 4(n+1)^2 \sin 2(n+1)z - 4(n+1)^2 \sin 2(n+1)z = 0, \\ \ddot{S}_1^{(n)} + 4(n+1)^2 S_1^{(n)} + \beta_1^{(n)} \sin 2(n+1)z - \gamma \sin 2nz - \\ \quad - \gamma \sin 2(n+2)z - \sin 2(n+3)z - \sin 2(n-1)z = 0, \\ \ddot{S}_2^{(n)} + 4(n+1)^2 S_2^{(n)} + \beta_1^{(n)} S_1^{(n)} + \beta_2^{(n)} \sin 2(n+1)z - \\ \quad - 2\gamma S_1^{(n)} \cos 2z - 2S_1^{(n)} \cos 4z = 0 \end{cases}$$

( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Pierwsze z nich jest tożsamościowo spełnione dla każdego  $n$ . Z powyższego układu wyznaczmy  $\beta_i^{(n)}$  dla  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $n = 0, 1, 2$  oraz  $S_\nu^{(n)}$  dla  $n = 0, 1$  i  $\nu = 1, 2$ .

Dla  $n = 0$  mamy

$$(1.2.4) \quad \ddot{S}_1^{(0)} + 4S_1^{(0)} + \beta_1^{(0)} \sin 2z - \gamma \sin 4z - \sin 6z + \sin 2z = 0,$$

co z uwagi na żadaną okresowość daje  $\beta_1^{(0)} = -1$  oraz

$$S_1^{(0)} = -\frac{1}{12} \gamma \sin 4z - \frac{1}{32} \sin 6z.$$

Jest to całka szczególna równania niejednorodnego (1.2.4). Z tych samych względów jak poprzednio rozwiązanie równania jednorodnego pomijamy. Trzecie równanie układu (1.2.3) daje jako warunek okresowości

$$(1.2.5) \quad \beta_2^{(0)} = -\frac{1}{12} \gamma^2 - \frac{1}{32}$$

oraz rozwiązanie

$$(1.2.6) \quad S_2^{(0)} = \frac{11}{1200} \gamma \sin 4z + \frac{1}{128} \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \gamma^2 \right) \sin 6z + \frac{11}{5760} \gamma \sin 8z + \\ + \frac{1}{3072} \sin 10z.$$



Dalsze związki są:

$$(1.2.7) \quad \begin{cases} \beta_3^{(0)} = \frac{7}{576} \gamma^2 + \frac{1}{1024}, \\ S_3^{(0)} = \left( \frac{5}{13\,824} \gamma^3 - \frac{151}{184\,320} \gamma \right) \sin 4z - \left( \frac{1}{98\,304} + \frac{1}{11\,520} \gamma^2 \right) \sin 6z - \\ - \left( \frac{49}{230\,400} \gamma + \frac{1}{23\,040} \gamma^3 \right) \sin 8z - \left( \frac{13}{276\,480} \gamma^2 + \frac{1}{73\,728} \right) \sin 10z - \\ - \frac{103}{100\,800} \gamma \sin 12z - \frac{1}{589\,824} \sin 14z, \end{cases}$$

jak również

$$(1.2.8) \quad \beta_4^{(0)} = -\frac{1}{98\,304} - \frac{167}{184\,320} \gamma^2 + \frac{5}{13\,824} \gamma^4.$$

Dla  $n = 1$  odpowiednie związki są następujące:

$$(1.2.9) \quad \begin{cases} \beta_1^{(1)} = 0, \\ S_1^{(1)} = -\frac{1}{20} \gamma \sin 6z + \frac{1}{12} \gamma \sin 2z - \frac{1}{48} \sin 8z, \\ \beta_2^{(1)} = \frac{1}{30} \gamma^2 - \frac{1}{48}, \\ S_2^{(1)} = -\frac{1}{90} \gamma \sin 2z - \frac{1}{320} \gamma \sin 6z + \frac{1}{60} \gamma^2 \sin 8z + \\ + \frac{17}{20\,160} \gamma \sin 10z + \frac{1}{6144} \sin 12z, \\ \beta_3^{(1)} = -\frac{19}{1440} \gamma^3, \\ \beta_4^{(1)} = -\frac{317}{864\,000} \gamma^4 + \frac{551}{604\,800} \gamma^2 + \frac{5}{884\,736}. \end{cases}$$

Pominięto tu również  $S_3^{(1)}$  oraz  $S_4^{(1)}$ . Wstawiając powyższe wyrażenia do równań (1.2.1) i (1.2.2) mamy przy zachowaniu oznaczeń (0.6)

$$(1.2.10) \quad b_2 = 4 + 2\gamma_2 - \frac{1}{3} \gamma_1^2 - \frac{1}{8} \gamma_2^2 - \frac{7}{72} \gamma_1^2 \gamma_2 - \frac{1}{128} \gamma_2^3 - \\ - \frac{1}{6144} \gamma_2^4 - \frac{167}{11\,520} \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \frac{5}{864} \gamma_1^4 + \dots,$$

$$(1.2.11) \quad S_2 = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2)} \sin(2r+2)z,$$



gdzie

$$(1.2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_2^{(2)} = 1, \\ B_4^{(2)} = \frac{1}{6} \gamma_1 + \frac{11}{288} \gamma_1 \gamma_2 + \frac{151}{23\,040} \gamma_1 \gamma_2^2 - \frac{5}{1728} \gamma_1^3 + \dots, \\ B_6^{(2)} = \frac{1}{16} \gamma_2 + \frac{1}{256} \gamma_2^2 + \frac{1}{96} \gamma_1^2 + \frac{1}{12\,288} \gamma_2^3 + \frac{1}{1440} \gamma_1^2 \gamma_2 + \dots, \\ B_8^{(2)} = \frac{11}{1440} \gamma_1 \gamma_2 + \frac{49}{28\,800} \gamma_1 \gamma_2^2 + \frac{1}{2880} \gamma_1^3 + \dots, \\ B_{10}^{(2)} = \frac{1}{768} \gamma_2^2 + \frac{13}{34\,560} \gamma_1^2 \gamma_2 + \frac{1}{9216} \gamma_2^3 + \dots \end{array} \right.$$

Przyjmując w (1.2.10)  $\gamma_2 = 0$  oraz  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}q$  mamy

$$(1.2.13) \quad b_2 = 4 - \frac{1}{12}q^2 + \frac{5}{13\,824}q^4 + \dots,$$

zaś dla  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -2q$  i  $b_2 = 4\bar{b}_2$  znajdziemy

$$(1.2.14) \quad \bar{b}_2 = 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 + \dots$$

Jeśli we wzorach (1.2.12) przyjąć  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}q$ , to

$$(1.2.15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} B_2^{(2)} = 1, & B_6^{(2)} = \frac{1}{384}q^2 + \dots, \\ B_4^{(2)} = -\frac{1}{12}q + \frac{5}{13\,824}q^3 + \dots, & B_8^{(2)} = -\frac{1}{23\,040}q^3 + \dots \end{array} \right.$$

Współczynniki te odpowiadają pierwszym wyrazom pierwszych współczynników rozwiązania  $S_2$  równania *Mathieu*. Gdy przyjąć przeciwnie  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -2q$ , to znajdziemy

$$(1.2.16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} B_2^{(2)} = 1, & B_6^{(2)} = -\frac{1}{8}q + \frac{1}{64}q^2 - \frac{1}{1536}q^3 + \dots, \\ B_{10}^{(2)} = \frac{1}{192}q^2 - \frac{1}{1152}q^3 + \dots, & B_{4\nu}^{(2)} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3 \dots) \end{array} \right.$$

Są to pierwsze wyrazy początkowych współczynników rozwiązania równania *Mathieu*, któremu odpowiada wartość właściwa (1.2.14).



Dla  $n = 1$  znajdziemy, że

$$(1.2.17) \quad b_4 = 16 + \frac{2}{15} \gamma_1^2 - \frac{1}{12} \gamma_2^2 + \frac{19}{180} \gamma_1^2 \gamma_2 - \frac{317}{54\,000} \gamma_1^4 + \\ + \frac{551}{37\,800} \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \frac{5}{55\,296} \gamma_2^4 + \dots$$

Odpowiednia funkcja wynosi

$$(1.2.18) \quad S_4 = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(4)} \sin(2r+2)z,$$

gdzie

$$(1.2.19) \quad \begin{cases} B_2^{(4)} = -\frac{1}{6} \gamma_1 - \frac{2}{45} \gamma_1 \gamma_2 + \dots, & B_8^{(4)} = \frac{1}{24} \gamma_2 + \frac{1}{15} \gamma_1^2 + \dots, \\ B_4^{(4)} = 1, & B_{10}^{(4)} = \frac{17}{5040} \gamma_1 \gamma_2 + \dots, \\ B_6^{(4)} = \frac{1}{10} \gamma_1 - \frac{1}{80} \gamma_1 \gamma_2 + \dots, & B_{12}^{(4)} = \frac{1}{1536} \gamma_2^2 + \dots. \end{cases}$$

Dla  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}q$  otrzymamy

$$(1.2.20) \quad b_4 = 16 + \frac{1}{30} q^2 - \frac{317}{864\,000} q^4 + \dots,$$

zaś gdy  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -2q$ ,  $b_4 = 4\bar{b}_4$ , to

$$\bar{b}_4 = 4 - \frac{1}{12} q^2 + \frac{5}{13\,824} q^4 + \dots$$

Współczynniki (1.2.19) przyjmują również przy powyższych założeniach wartości odpowiadające rozwiązaniu równania *M a t h i e u*. Do podobnych wyników dojdziemy, gdy w układzie (1.2.3) przyjmiemy  $n = 2, 3, \dots$ . Ograniczymy się do  $n = 2$ . W tym przypadku podamy jedynie postać wartości właściwej

$$(1.2.21) \quad b_6 = 36 + \frac{2}{35} \gamma_1^2 + \frac{1}{16} \gamma_2^2 - \frac{3}{560} \gamma_1^2 \gamma_2 + \frac{1}{128} \gamma_2^3 + \frac{13}{81\,920} \gamma_1^4 - \\ - \frac{43\,561}{8\,467\,200} \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \frac{187}{2\,744\,000} \gamma_1^4 + \dots$$

Jeśli  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}q$ , to

$$(1.2.22) \quad b_6 = 36 + \frac{1}{70} q^2 + \frac{187}{43\,904\,000} q^4 + \dots,$$



gdy zaś  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -2q$ ,  $b_6 = 4\bar{b}_6$ , to

$$(1.2.23) \quad \bar{b}_6 = 9 + \frac{1}{16}q^2 - \frac{1}{64}q^3 + \frac{13}{20480}q^4 + \dots$$

Wracając do równania wyjściowego (0.1) przy uwzględnieniu oznaczeń (0.2), (0.3) i (0.6) otrzymamy z (0.7) postacie rozwiązań dwuparametrowych funkcji Hilla

$$(1.2.24) \quad \begin{cases} C_{2n}(t; \gamma_1, \gamma_2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos rt, \\ S_{2n+2}(t; \gamma_1, \gamma_2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin(r+1)t. \end{cases}$$

Podane uprzednio wartości właściwe (1.1.5), (1.1.11), (1.1.15) i (1.1.16) obecnie przyjmą postać

$$(1.2.25) \quad \lambda_{C_0}(\gamma_1, \gamma_2) = -\frac{1}{2}\gamma_1^2 - \frac{1}{8}\gamma_2^2 - \frac{3}{8}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{7}{2048}\gamma_2^4 - \frac{5}{36}\gamma_1^2\gamma_2^2 + \frac{7}{32}\gamma_1^4 + \dots,$$

$$(1.2.26) \quad \lambda_{C_1}(\gamma_1, \gamma_2) = 1 - \frac{1}{2}\gamma_2 + \frac{5}{12}\gamma_1^2 - \frac{1}{32}\gamma_2^2 - \frac{121}{288}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{1}{512}\gamma_2^3 - \frac{763}{3456}\gamma_1^4 + \frac{6233}{46080}\gamma_1^2\gamma_2^2 - \frac{1}{24576}\gamma_2^4 + \dots,$$

$$(1.2.27) \quad \lambda_{C_2}(\gamma_1, \gamma_2) = 4 + \frac{1}{30}\gamma_1^2 + \frac{5}{48}\gamma_2^2 - \frac{31}{720}\gamma_1^2\gamma_2 - \frac{763}{221184}\gamma_2^4 - \frac{1997}{268800}\gamma_1^2\gamma_2^2 + \frac{433}{216000}\gamma_1^4 + \dots,$$

$$(1.2.28) \quad \lambda_{C_3}(\gamma_1, \gamma_2) = 9 + \frac{1}{70}\gamma_1^2 + \frac{1}{64}\gamma_2^2 - \frac{1}{280}\gamma_1^2\gamma_2 - \frac{1}{512}\gamma_2^3 + \dots$$

Ze wzorów (1.2.10), (1.2.17) i (1.2.21) mamy

$$(1.2.29) \quad \lambda_{S_1}(\gamma_1, \gamma_2) = 1 + \frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{1}{12}\gamma_1^2 - \frac{1}{32}\gamma_2^2 - \frac{7}{288}\gamma_1^2\gamma_2 - \frac{1}{512}\gamma_2^3 - \frac{1}{24576}\gamma_2^4 - \frac{167}{46080}\gamma_1^2\gamma_2^2 + \frac{5}{3456}\gamma_1^4 + \dots,$$



$$(1.2.30) \quad \lambda_{S_2}(\gamma_1, \gamma_2) = 4 + \frac{1}{30} \gamma_1^2 - \frac{1}{48} \gamma_2^2 + \frac{19}{720} \gamma_1^2 \gamma_2 - \frac{317}{216\,000} \gamma_1^4 + \\ + \frac{551}{151\,200} \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \frac{5}{221\,184} \gamma_2^4 + \dots,$$

$$(1.2.31) \quad \gamma_{S_3}(\gamma_1, \gamma_2) = 9 + \frac{1}{70} \gamma_1^2 + \frac{1}{64} \gamma_2^2 - \frac{3}{2240} \gamma_1^2 \gamma_2 + \frac{1}{512} \gamma_2^3 + \dots$$

Jak wspomniano na początku, zbieżność szeregów (1.2.24) - (1.2.31) jest prawdopodobna dla dostatecznie małych  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ .

Z podanych wyżej związków wynika parzystość wartości właściwych ze względu na parametr  $\gamma_1$ ; mamy więc:

$$(1.2.32) \quad \begin{cases} \lambda_{S_1}(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_{S_1}(-\gamma_1, \gamma_2), & \lambda_{C_1}(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_{C_1}(-\gamma_1, \gamma_2), \\ \lambda_{S_2}(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_{S_2}(-\gamma_1, \gamma_2), & \lambda_{C_2}(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_{C_2}(-\gamma_1, \gamma_2), \\ \lambda_{S_3}(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_{S_3}(-\gamma_1, \gamma_2), & \lambda_{C_3}(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_{C_3}(-\gamma_1, \gamma_2). \end{cases}$$

### 1.3. Rozwiązania parzyste typu półokresowego

Przechodzimy obecnie do trzeciej postaci rozwiązań (0.7). W celu otrzymania ich podstawmy do równania (0.5)

$$(1.3.1) \quad a = a_{2n+1} = (2n+1)^2 + a_1^{(n)} q + a_2^{(n)} q^2 + a_3^{(n)} q^3 + a_4^{(n)} q^4 + \dots,$$

$$(1.3.2) \quad y = C_{2n+1} = \cos(2n+1)z + C_1^{(n)} q + C_2^{(n)} q^2 + C_3^{(n)} q^3 + C_4^{(n)} q^4 + \dots$$

Stałe (zależne od parametru)  $a_1^{(n)}$ ,  $a_2^{(n)}$ , ... oraz funkcje zmiennej niezależnej  $z$   $C_1^{(n)}$ ,  $C_2^{(n)}$ , ... wyznaczmy podobnie jak w dwu poprzednich punktach z warunku okresowości rozwiązania. Po podstawieniu funkcji (1.3.1) i (1.3.2) do równania (0.5) i przyrównaniu odpowiednich współczynników do zera mamy nieskończony układ równań:

$$(1.3.3) \quad \begin{cases} -(2n+1)^2 \cos(2n+1)z + (2n+1)^2 \cos(2n+1)z = 0, \\ \ddot{C}_1^{(n)} + (2n+1)^2 C_1^{(n)} + a_1^{(n)} \cos(2n+1)z - \gamma \cos(2n+3)z - \\ - \gamma \cos(2n-1)z - \cos(2n+5)z - \cos(2n-3)z = 0, \\ \ddot{C}_2^{(n)} + (2n+1)^2 C_2^{(n)} + a_1^{(n)} C_1^{(n)} + a_2^{(n)} \cos(2n+1)z - \\ - 2\gamma C_1^{(n)} \cos 2z - 2C_1^{(n)} \cos 4z = 0, \\ \ddot{C}_3^{(n)} + (2n+1)^2 C_3^{(n)} + a_1^{(n)} C_2^{(n)} + a_2^{(n)} C_1^{(n)} + a_3^{(n)} \cos(2n+1)z - \\ - 4\gamma C_2^{(n)} \cos 2z - 4C_2^{(n)} \cos 4z = 0, \\ \ddot{C}_4^{(n)} + (2n+1)^2 C_4^{(n)} + a_1^{(n)} C_3^{(n)} + a_2^{(n)} C_2^{(n)} + a_3^{(n)} C_1^{(n)} + \\ + a_4^{(n)} \cos(2n+1)z - 2\gamma C_3^{(n)} \cos 2z - 2C_3^{(n)} \cos 4z = 0, \\ \dots \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$



W dalszym ciągu zajmiemy się rozwiązaniami układu (1.3.3) dla  $n = 0, 1, 2$ .

Jeśli  $n = 0$ , to

$$(1.3.4) \quad \ddot{C}_1^{(0)} + C_1^{(0)} + a_1^{(0)} \cos z - \gamma \cos 3z - \gamma \cos z - \cos 5z - \cos 3z = 0.$$

Warunek rozwiązania okresowego daje

$$(1.3.5) \quad a_1^{(0)} = \gamma.$$

Z równania (1.3.4) dla (1.3.5) mamy

$$(1.3.6) \quad C_1^{(0)} = -\frac{1}{8}(1 + \gamma) \cos 3z - \frac{1}{24} \cos 5z.$$

Z drugiego równania układu (1.3.3) znajdziemy

$$(1.3.7) \quad a_2^{(0)} = -\frac{1}{24} - \frac{1}{8}(\gamma + 1)^2$$

oraz

$$(1.3.8) \quad C_2^{(0)} = -\frac{1}{64} \left( \gamma^2 + \frac{2}{3} \gamma \right) \cos 3z + \frac{1}{96} \left( \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{1}{3} \gamma \right) \cos 5z + \\ + \frac{1}{96} \left( \frac{1}{3} \gamma + \frac{1}{4} \right) \cos 7z + \frac{1}{1920} \cos 9z.$$

Z rozwiązania równania trzeciego układu (1.3.3) otrzymamy

$$(1.3.9) \quad a_3^{(0)} = -\frac{1}{144} \gamma - \frac{1}{48} \gamma^2 - \frac{1}{64} \gamma^3$$

oraz

$$(1.3.10) \quad C_3^{(0)} = \frac{1}{1536} \left( \frac{19}{3} \gamma^2 - \gamma^3 + \frac{28}{3} \gamma + \frac{7}{2} \right) \cos 3z + \frac{1}{1536} \left( \frac{4}{3} \gamma^3 + \gamma^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \gamma + \frac{37}{90} \right) \cos 5z - \frac{1}{3072} \left( \frac{1}{3} \gamma^3 - \gamma^2 - \frac{4}{5} \gamma \right) \cos 7z - \\ - \frac{1}{46080} \left( 5 \gamma^2 + \frac{16}{5} \gamma \right) \cos 9z - \frac{1}{46080} \left( \frac{23}{15} \gamma + 1 \right) \cos 11z - \frac{1}{322560} \cos 13z.$$

Analogicznie mamy

$$(1.3.11) \quad a_4^{(0)} = -\frac{1}{1536} \gamma^4 + \frac{5}{1152} \gamma^3 + \frac{75}{6912} \gamma^2 + \frac{5}{576} \gamma + \frac{11}{4320}.$$



Po podstawieniu znalezionych wartości do szeregów (1.3.1) i (1.3.2) i uwzględniając oznaczenia (0.6) mamy

$$(1.3.12) \quad \alpha_1 = 1 - 2\gamma_1 - \frac{2}{3}\gamma_2^2 - \frac{1}{2}\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2 + \frac{1}{18}\gamma_1\gamma_2^2 + \frac{1}{6}\gamma_1^2\gamma_2 + \\ + \frac{1}{8}\gamma_1^3 - \frac{1}{96}\gamma_1^4 + \frac{5}{72}\gamma_1^3\gamma_2 + \frac{25}{144}\gamma_1^2\gamma_2^2 + \frac{5}{36}\gamma_1\gamma_2^3 + \frac{11}{270}\gamma_2^4 + \dots,$$

$$(1.3.13) \quad C_1 = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(1)} \cos(2r+1)z,$$

gdzie

$$(1.3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1^{(1)} = 1, \\ A_3^{(1)} = \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_2 - \frac{1}{16}\gamma_1^2 - \frac{1}{24}\gamma_1\gamma_2 - \frac{19}{576}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{1}{192}\gamma_1^3 - \\ \quad - \frac{7}{144}\gamma_1\gamma_2^2 - \frac{7}{384}\gamma_2^3 + \dots, \\ A_5^{(1)} = \frac{1}{12}\gamma_2 + \frac{1}{48}\gamma_1^2 + \frac{1}{72}\gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{144}\gamma_1^3 - \frac{1}{192}\gamma_1^2\gamma_2 - \\ \quad - \frac{1}{384}\gamma_1\gamma_2^2 - \frac{37}{17280}\gamma_2^3 + \dots, \\ A_7^{(1)} = \frac{1}{72}\gamma_1\gamma_2 + \frac{1}{96}\gamma_2^2 + \frac{1}{1152}\gamma_1^3 - \frac{1}{384}\gamma_1^2\gamma_2 - \frac{1}{480}\gamma_1\gamma_2^2 + \dots. \end{array} \right.$$

Jeśli przyjmiemy we wzorach (1.3.12) i (1.3.14)  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}q$ , to

$$(1.3.15) \quad \alpha_1 = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 - \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 + \dots$$

oraz

$$(1.3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1^{(1)} = 1, \\ A_3^{(1)} = -\frac{1}{8}q - \frac{1}{64}q^2 - \frac{1}{1536}q^3 + \dots, \\ A_5^{(1)} = \frac{1}{192}q^2 + \frac{1}{1152}q^3 + \dots, \\ A_7^{(1)} = -\frac{1}{9216}q^3 + \dots. \end{array} \right.$$



Łatwo się przekonać, że wzory (1.3.15) i (1.3.16) pokrywają się z odpowiednimi wzorami dla równania *M a t h i e u*. Jeśli zaś w (1.3.12) i (1.3.14) przyjmiemy  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -2q$  i  $a_1 = 4\bar{a}_1$ , to mamy

$$(1.3.17) \quad \bar{a}_1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}q^2 + \frac{22}{135}q^4 + \dots$$

oraz

$$(1.3.18) \quad \begin{cases} A_1^{(1)} = 1, & A_5^{(1)} = -\frac{1}{6}q + \frac{37}{2160}q^3 + \dots, \\ A_3^{(1)} = -\frac{1}{2}q + \frac{7}{48}q^3 + \dots, & A_7^{(1)} = \frac{1}{24}q^2 + \dots. \end{cases}$$

Dla przypadków  $n = 1, 2$  (do których się ograniczamy), podamy tylko wyrażenia dla wartości właściwych. I tak, gdy  $n = 1$ , to z układu (1.3.3) znajdziemy

$$(1.3.19) \quad a_3 = 9 + \frac{1}{4}\gamma_1^2 + \gamma_1\gamma_2 + \frac{2}{5}\gamma_2^2 - \frac{1}{8}\gamma_1^3 - \frac{3}{20}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{13}{1280}\gamma_1^4 - \\ - \frac{5}{64}\gamma_1^3\gamma_2 - \frac{127}{720}\gamma_1^2\gamma_2^2 - \frac{7}{50}\gamma_1\gamma_2^3 - \frac{73}{1750}\gamma_2^4 + \dots,$$

a dla  $n = 2$  znajdziemy

$$(1.3.20) \quad a_5 = 25 + \frac{1}{12}\gamma_1^2 + \frac{2}{21}\gamma_2^2 - \frac{1}{84}\gamma_1^2\gamma_2 - \frac{1}{18}\gamma_1\gamma_2^2 + \frac{11}{48384}\gamma_1^4 + \\ + \frac{5}{576}\gamma_1^3\gamma_2 + \frac{5}{2016}\gamma_1^2\gamma_2^2 + \frac{17}{18522}\gamma_2^4 + \dots.$$

Dla  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}q$  wzory powyższe przyjmą postać

$$(1.3.21) \quad a_3 = 9 + \frac{1}{16}q^2 + \frac{1}{64}q^3 + \frac{13}{20480}q^4 + \dots$$

oraz

$$(1.3.22) \quad a_5 = 25 + \frac{1}{48}q^2 + \frac{11}{774144}q^4 + \dots,$$

co istotnie pokrywa się z odpowiednimi wartościami dla równania *M a t h i e u*. Jeśli zaś  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -2q$  oraz  $a_3 = 4\bar{a}_3$  lub  $a_5 = 4\bar{a}_5$ , to

$$(1.3.23) \quad \bar{a}_3 = \frac{9}{4} + \frac{2}{5}q^2 - \frac{146}{876}q^4 + \dots,$$

$$(1.3.24) \quad \bar{a}_5 = \frac{25}{4} + \frac{2}{21}q^2 + \frac{34}{9261}q^4 + \dots.$$



1.4. Rozwiązania nieparzyste typu półkresowego

W celu obliczenia czwartej postaci rozwiązań (0.7) niech

$$(1.4.1) \quad a = b_{2n+1} = (2n+1)^2 + \beta_1^{(n)}q + \beta_2^{(n)}q^2 + \beta_3^{(n)}q^3 + \beta_4^{(n)}q^4 + \dots,$$

$$(1.4.2) \quad y = S_{2n+1} = \sin(2n+1)z + S_1^{(n)}q + S_2^{(n)}q^2 + S_3^{(n)}q^3 + S_4^{(n)}q^4 + \dots$$

Odpowiedni układ równań jest następujący:

$$(1.4.3) \quad \begin{cases} -(2n+1)^2 \sin(2n+1)z + (2n+1)^2 \sin(2n+1)z = 0, \\ \ddot{S}_1^{(n)} + (2n+1)^2 S_1^{(n)} + \beta_1^{(n)} \sin(2n+1)z - \gamma \sin(2n+3)z - \\ \quad - \gamma \sin(2n-1)z - \sin(2n+5)z - \sin(2n-3)z = 0, \\ \ddot{S}_2^{(n)} + (2n+1)^2 S_2^{(n)} + \beta_1^{(n)} S_1^{(n)} + \beta_2^{(n)} \sin(2n+1)z - \\ \quad - 2\gamma S_1^{(n)} \cos 2z - 2S_1^{(n)} \cos 4z = 0, \\ \ddot{S}_3^{(n)} + (2n+1)^2 S_3^{(n)} + \beta_1^{(n)} S_2^{(n)} + \beta_2^{(n)} S_1^{(n)} + \beta_3^{(n)} \sin(2n+1)z - \\ \quad - 2\gamma S_2^{(n)} \cos 2z - 2S_2^{(n)} \cos 4z = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Dla  $n = 0$  otrzymujemy:

$$(1.4.4) \quad \beta_1^{(0)} = -\gamma,$$

$$(1.4.5) \quad S_1^{(0)} = \frac{1}{8} (1 - \gamma) \sin 3z - \frac{1}{24} \sin 5z,$$

$$(1.4.6) \quad \beta_2^{(0)} = -\frac{1}{8} (1 - \gamma)^2 - \frac{1}{24},$$

$$(1.4.7) \quad S_2^{(0)} = \frac{1}{32} \left( \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{3} \gamma \right) \sin 3z + \frac{1}{96} \left( \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{3} \gamma \right) \sin 5z + \\ + \frac{1}{96} \left( \frac{1}{3} \gamma - \frac{1}{4} \right) \sin 7z + \frac{1}{1920} \sin 9z,$$

$$(1.4.8) \quad \beta_3^{(0)} = \frac{1}{64} \gamma^3 - \frac{1}{48} \gamma^2 + \frac{1}{144} \gamma,$$

$$(1.4.9) \quad S_3^{(0)} = \frac{1}{768} \left( \frac{14}{3} \gamma - \frac{19}{6} \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma^3 - \frac{7}{4} \right) \sin 3z + \\ + \frac{1}{384} \left( \frac{1}{4} \gamma^2 - \frac{1}{3} \gamma^3 - \frac{1}{8} \gamma + \frac{37}{4} \right) \sin 5z + \frac{1}{768} \left( \frac{1}{5} \gamma - \frac{1}{4} \gamma^2 - \frac{1}{4} \gamma^3 \right) \sin 7z + \\ + \frac{1}{576} \left( \frac{1}{25} \gamma - \frac{1}{16} \gamma^3 \right) \sin 9z + \frac{1}{46080} \left( 1 - \frac{23}{15} \gamma \right) \sin 11z - \frac{1}{322560} \sin 13z$$



oraz

$$(1.4.10) \quad \beta_4^{(0)} = -\frac{1}{1536}\gamma^4 - \frac{5}{1152}\gamma^3 + \frac{25}{2304}\gamma^2 - \frac{5}{576}\gamma + \frac{11}{4320}.$$

Ze wzorów (1.4.1) i (1.4.2) uwzględniając oznaczenia (0.6) mamy

$$(1.4.11) \quad b_1 = 1 + 2\gamma_1 - \frac{2}{3}\gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1^2 - \frac{1}{8}\gamma_1^3 + \frac{1}{6}\gamma_1^2\gamma_2 - \frac{1}{18}\gamma_1\gamma_2^2 - \\ - \frac{1}{96}\gamma_1^4 - \frac{5}{72}\gamma_1^3\gamma_2 + \frac{25}{144}\gamma_1^2\gamma_2^2 - \frac{5}{36}\gamma_1\gamma_2^3 + \frac{11}{270}\gamma_2^4 + \dots$$

oraz

$$(1.4.12) \quad S_1 = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(1)} \sin(2r+1)z,$$

gdzie

$$(1.4.13) \quad \left\{ \begin{aligned} B_1^{(1)} &= 1, \\ B_3^{(1)} &= \frac{1}{4}\gamma_1 - \frac{1}{4}\gamma_2 + \frac{1}{16}\gamma_1^2 - \frac{1}{24}\gamma_1\gamma_2 - \frac{7}{144}\gamma_1\gamma_2^2 + \frac{19}{576}\gamma_1^2\gamma_2 + \\ &\quad + \frac{1}{192}\gamma_1^3 + \frac{7}{384}\gamma_2^3 + \dots, \\ B_5^{(1)} &= \frac{1}{12}\gamma_2 + \frac{1}{48}\gamma_1^2 - \frac{1}{72}\gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{192}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{1}{144}\gamma_1^3 + \frac{1}{384}\gamma_1\gamma_2^2 - \\ &\quad - \frac{37}{17280}\gamma_2^3 + \dots, \\ B_7^{(1)} &= \frac{1}{72}\gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{96}\gamma_2^2 - \frac{1}{480}\gamma_1\gamma_2^2 + \frac{1}{384}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{1}{1152}\gamma_1^3 + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Jeśli we wzorach (1.4.11) i (1.4.13) przyjmiemy  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}q$ ,  $\gamma_2 = 0$ , to

$$(1.4.14) \quad b_1 = 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 + \dots$$

oraz

$$(1.4.15) \quad \left\{ \begin{aligned} B_1^{(1)} &= 1, \\ B_3^{(1)} &= -\frac{1}{8}q + \frac{1}{64}q^2 - \frac{1}{1536}q^3 + \dots, \\ B_5^{(1)} &= \frac{1}{192}q^2 - \frac{1}{1152}q^3 + \dots, \\ B_7^{(1)} &= -\frac{1}{9216}q^3 + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$



Wzory te pokrywają się z odpowiednimi wzorami dla równania Mathieu. Jeśli zaś przyjmiemy  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -2q$ ,  $b_1 = 4\bar{b}_1$ , to otrzymamy

$$(1.4.16) \quad \bar{b}_1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}q^2 + \frac{22}{135}q^4 + \dots$$

oraz

$$(1.4.17) \quad \begin{cases} B_1^{(1)} = 1, & B_5^{(1)} = -\frac{1}{6}q + \frac{37}{2160}q^3 + \dots, \\ B_3^{(1)} = \frac{1}{2}q - \frac{7}{48}q^3 + \dots, & B_7^{(1)} = -\frac{1}{24}q^2 + \dots. \end{cases}$$

Zauważmy, że  $\bar{a}_1 = \bar{b}_1$  oraz że

$$A_{4r+1}^{(1)} = B_{4r+1}^{(1)}, \quad A_{4r+3}^{(1)} = -B_{4r+3}^{(1)} \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Rozwiązania (1.3.13) i (1.4.12) różnią się więc fazą dla  $\gamma_1 = 0$ . Mamy mianowicie  $S_1(\pi/2 \pm z; 0, \gamma_2) = C_1(\pm z; 0, \gamma_2)$ . Uwaga ta odnosi się również do dalszych wartości  $n$ .

Dla  $n = 1, 2$  podamy tylko wyrażenia wartości właściwych, mianowicie

$$(1.4.18) \quad b_3 = 9 + \frac{1}{4}\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2 + \frac{2}{5}\gamma_2^2 + \frac{1}{8}\gamma_1^3 - \frac{3}{20}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{13}{1280}\gamma_1^4 + \\ + \frac{5}{64}\gamma_1^3\gamma_2 - \frac{127}{720}\gamma_1^2\gamma_2^2 + \frac{7}{50}\gamma_1^2\gamma_2 - \frac{73}{1750}\gamma_2^4 + \dots,$$

$$(1.4.19) \quad b_5 = 25 + \frac{1}{12}\gamma_1^2 + \frac{2}{21}\gamma_2^2 - \frac{1}{84}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{1}{18}\gamma_1\gamma_2^2 + \frac{11}{48384}\gamma_1^4 - \\ - \frac{5}{576}\gamma_1^3\gamma_2 + \frac{5}{2016}\gamma_1^2\gamma_2^2 + \frac{17}{18522}\gamma_2^4 + \dots.$$

Jeśli  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}q$ , to

$$(1.4.20) \quad b_3 = 9 + \frac{1}{16}q^2 - \frac{1}{64}q^3 + \frac{13}{20480}q^4 + \dots,$$

$$(1.4.21) \quad b_5 = 25 + \frac{1}{48}q^2 + \frac{11}{774144}q^4 + \dots.$$

Wzory te istotnie pokrywają się z odpowiednimi wzorami dla wartości właściwych równania Mathieu. Gdy  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -2q$  oraz  $b_3 = 4\bar{b}_3$  i  $b_5 = 4\bar{b}_5$ , to

$$(1.4.22) \quad \bar{b}_3 = \frac{9}{4} + \frac{2}{5}q^2 - \frac{146}{875}q^4 + \dots,$$

$$(1.4.23) \quad \bar{b}_5 = \frac{25}{4} + \frac{2}{21}q^2 + \frac{34}{9261}q^4 + \dots.$$



Wracając do równania wyjściowego (0.1) i uwzględniając oznaczenia (0.2), (0.3) i (0.6) otrzymamy ostatnie dwie postaci dwuparametrowych funkcji Hilla.

$$(1.4.24) \quad \begin{cases} C_{2n+1}(t; \gamma_1, \gamma_2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos \frac{2r+1}{2} t, \\ S_{2n+1}(t; \gamma_1, \gamma_2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin \frac{2r+1}{2} t. \end{cases}$$

Podane w p. 3 i 4 wartości właściwe (1.3.12), (1.3.19), (1.3.20), (1.4.11), (1.4.18) i (1.4.19) odpowiadają równaniu (0.1) w postaci następującej:

$$(1.4.25) \quad \lambda_{C_{3/2}}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \gamma_1 - \frac{1}{6} \gamma_2^2 - \frac{1}{8} \gamma_1^2 - \frac{1}{4} \gamma_1 \gamma_2 + \frac{1}{72} \gamma_1 \gamma_2^2 + \\ + \frac{1}{24} \gamma_1^2 \gamma_2 + \frac{1}{32} \gamma_1^3 - \frac{1}{384} \gamma_1^4 + \frac{5}{288} \gamma_1^3 \gamma_2 + \frac{25}{576} \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \frac{5}{144} \gamma_1 \gamma_2^3 + \frac{11}{1080} \gamma_2^4 + \dots,$$

$$(1.4.26) \quad \lambda_{C_{5/2}}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \gamma_1^2 + \frac{1}{4} \gamma_1 \gamma_2 + \frac{1}{10} \gamma_2^2 - \frac{1}{32} \gamma_1^3 - \frac{3}{80} \gamma_1^2 \gamma_2 + \\ + \frac{13}{5120} \gamma_1^4 - \frac{5}{256} \gamma_1^3 \gamma_2 - \frac{127}{2880} \gamma_1^2 \gamma_2^2 - \frac{7}{200} \gamma_1 \gamma_2^3 - \frac{73}{7000} \gamma_2^4 + \dots,$$

$$(1.4.27) \quad \lambda_{C_{7/2}}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{25}{4} + \frac{1}{48} \gamma_1^2 + \frac{1}{42} \gamma_2^2 - \frac{1}{336} \gamma_1^2 \gamma_2 - \frac{1}{72} \gamma_1 \gamma_2^2 + \\ + \frac{11}{193\,536} \gamma_1^4 + \frac{5}{2304} \gamma_1^3 \gamma_2 + \frac{5}{8064} \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \frac{17}{74\,088} \gamma_2^4 + \dots,$$

$$(1.4.28) \quad \lambda_{S_{3/2}}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \gamma_1 - \frac{1}{6} \gamma_2^2 + \frac{1}{4} \gamma_1 \gamma_2 - \frac{1}{8} \gamma_1^2 - \frac{1}{32} \gamma_1^3 + \frac{1}{24} \gamma_1^2 \gamma_2 - \\ - \frac{1}{72} \gamma_1 \gamma_2^2 - \frac{1}{384} \gamma_1^4 - \frac{5}{288} \gamma_1^3 \gamma_2 + \frac{25}{576} \gamma_1^2 \gamma_2^2 - \frac{5}{144} \gamma_1 \gamma_2^3 + \frac{11}{1080} \gamma_2^4 + \dots,$$

$$(1.4.29) \quad \lambda_{S_{5/2}}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \gamma_1^2 - \frac{1}{4} \gamma_1 \gamma_2 + \frac{1}{10} \gamma_2^2 + \frac{1}{32} \gamma_1^3 - \frac{3}{80} \gamma_1^2 \gamma_2 + \\ + \frac{13}{5120} \gamma_1^4 + \frac{5}{256} \gamma_1^3 \gamma_2 - \frac{127}{2880} \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \frac{7}{200} \gamma_1 \gamma_2^3 - \frac{73}{7000} \gamma_2^4 + \dots,$$

$$(1.4.30) \quad \lambda_{S_{7/2}}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{25}{4} + \frac{1}{48} \gamma_1^2 + \frac{1}{42} \gamma_2^2 - \frac{1}{336} \gamma_1^2 \gamma_2 + \frac{1}{72} \gamma_1 \gamma_2^2 + \\ + \frac{11}{193\,536} \gamma_1^4 - \frac{5}{2304} \gamma_1^3 \gamma_2 + \frac{5}{8064} \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \frac{17}{74\,088} \gamma_2^4 + \dots.$$



Z powyższych związków widać, że

$$(1.4.31) \quad \begin{cases} \lambda_{C_{1/2}}(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_{S_{1/2}}(-\gamma_1, \gamma_2), \\ \lambda_{C_{3/2}}(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_{S_{3/2}}(-\gamma_1, \gamma_2), \\ \lambda_{C_{5/2}}(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_{S_{5/2}}(-\gamma_1, \gamma_2) \end{cases}$$

oraz

$$(1.4.32) \quad \begin{cases} \lambda_{C_{1/2}}(0, \gamma_2) = \lambda_{S_{1/2}}(0, \gamma_2), \\ \lambda_{C_{3/2}}(0, \gamma_2) = \lambda_{S_{3/2}}(0, \gamma_2), \\ \lambda_{C_{5/2}}(0, \gamma_2) = \lambda_{S_{5/2}}(0, \gamma_2). \end{cases}$$

Związki (1.4.31) są słuszne bez względu na znak  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ . Do tych samych wyników dojdziemy, gdy w równaniu (0.5) przyjmiemy

$$q = -2\gamma_1, \quad \gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad \psi(z) = \cos 2z + \gamma \cos 4z$$

i rozwiążemy je metodami zastosowanymi w całej obecnej części.

### 15. Obiekt stateczności dynamicznej dla równania (0.1)

Z teorii liniowych jednorodnych równań różniczkowych wiadomo, że równanie (0.1) przy pewnych ustalonych wartościach  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  i  $\lambda$  posiada dwa rozwiązania liniowo niezależne, tożsamościowo nierówne zeru i takie, że każde inne rozwiązanie jest ich liniową kombinacją. Jeśli wszystkie rozwiązania równania (0.1) dla  $t > 0$  są ograniczone, to mówimy, że równanie to określa ruch stateczny. Jeśli istnieją rozwiązania nieograniczone, to powiemy, że równanie określa ruch niestateczny.

Obierzmy prostokątny układ odniesienia  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\lambda$ . W układzie tym związki (1.2.25) - (1.2.31) oraz (1.4.25) - (1.4.30) przedstawiają powierzchnie  $\lambda_{Cm}(\gamma_1, \gamma_2)$  i  $\lambda_{Sm}(\gamma_1, \gamma_2)$ . Jeśli w równaniu (0.1) przyjmiemy  $\gamma_2 = 0$ , to wspomniane wyżej powierzchnie na płaszczyźnie  $(\gamma_1, \lambda)$  wyznaczają linie krzywe, które przedstawiają tzw. kartę stateczności *I n c e - S t r u t t a* dla równania

$$(1.5.1) \quad \ddot{y} + (\lambda + \gamma_1 \cos t)y = 0.$$

Gdy zaś w równaniu (0.1) przyjmiemy  $\gamma_1 = 0$ , tzn. na rys. 1 rozpatrujemy punkty płaszczyzny  $\gamma_2, \lambda$ , to na niej otrzymamy kartę stateczności *I n c e - S t r u t t a* dla równania

$$(1.5.2) \quad \ddot{y} + (\lambda + \gamma_2 \cos 2t)y = 0.$$



Linie odpowiadające wskaźnikom ułamkowym pokrywają się w tym przypadku [por. (1.4.32)]. W przypadku  $\gamma_1 \neq 0$ ,  $\gamma_2 \neq 0$  otrzymane powierzchnie dzielą przestrzeń odniesioną do układu  $(\gamma_1, \gamma_2, \lambda)$  na przestrzenne obszary stateczne i niestateczne. Parametry  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  mogą być związane zależnością funkcyjną

$$(1.5.3) \quad \gamma_1 = f(\gamma_2).$$

Otrzymane związki i w tym przypadku dają kartę obszarów statecznych i niestatecznych. Gdy w szczególności zależność (1.5.3) jest liniowa,

$$(1.5.4) \quad \gamma_1 = \alpha \gamma_2,$$

znaczy to, że obiekt stateczności zostaje przecięty płaszczyzną, którą powierzchnie graniczne dzielą na płaskie obszary stateczne i niestateczne, które określimy w oparciu o twierdzenie O. Haupta, [2].

Ustalmy parametry  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  dla uprzednio otrzymanych wartości właściwych.

Dla każdej pary tych wartości można wartości właściwe ustawić w dwa ciągi niemalejące:

dla rozwiązań typu pełnokresowego

$$(1.5.5) \quad \lambda_{C_0} < \lambda_{C_1} \leq \lambda_{S_1} < \lambda_{C_2} \leq \lambda_{S_2} < \lambda_{C_3} \leq \lambda_{S_3} < \dots$$

oraz dla rozwiązań typu półokresowego

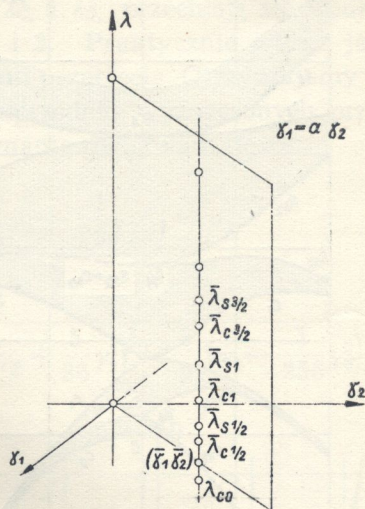
$$(1.5.6) \quad \lambda_{C_{1/2}} \leq \lambda_{S_{1/2}} < \lambda_{C_{3/2}} \leq \lambda_{S_{3/2}} < \lambda_{C_{5/2}} \leq \lambda_{S_{5/2}} < \dots,$$

przy czym kolejność  $\lambda_{S_i}$  oraz  $\lambda_{C_i}$  dla tego samego  $i$  zależy od  $\gamma_1$  lub  $\gamma_2$ .

Z twierdzenia oscylacyjnego wiadomo, że zawsze ma miejsce rozkład

$$(1.5.7) \quad \lambda_{C_0} < \lambda_{C_{1/2}} \leq \lambda_{S_{1/2}} < \lambda_{C_1} \leq \lambda_{S_1} < \lambda_{C_{3/2}} \leq \lambda_{S_{3/2}} < \dots$$

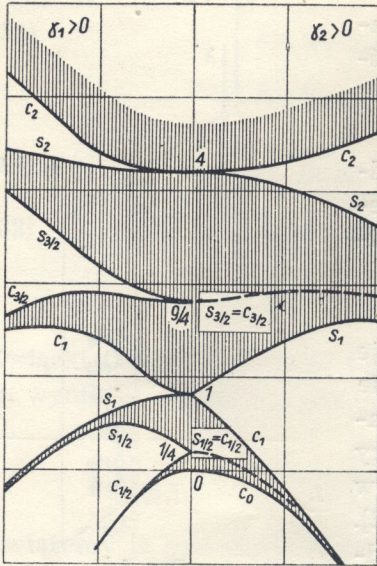
Powiedzieć można inaczej, że posuwając się w dodatnim kierunku osi  $\lambda$  (przy ustalonych  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ ) natrafiamy na dwie wartości właściwe (z wyjątkiem pierwszej  $\lambda_{C_0}$ ) typu półokresowego i następnie na dwie typu pełnokresowego. Twierdzenie Haupta w zastosowaniu do naszego przypadku ma sens następujący. Przy ustalonych  $\bar{\gamma}_1$  i  $\bar{\gamma}_2$  prosta równoległa do osi  $\lambda$  i przechodząca przez punkt  $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2)$  przebiega powierzchnie graniczne w nieskończonym ciągu punktów  $\lambda_i$  występujących w ciągu (1.5.7). Wartości  $\lambda$  leżące między punktami, należącymi do różnych typów wartości właściwych, dają rozwiązania stateczne, zaś pozostałe wartości  $\lambda$  dają rozwiązania niestateczne. Wartości  $\lambda$  z przedziału od  $-\infty$



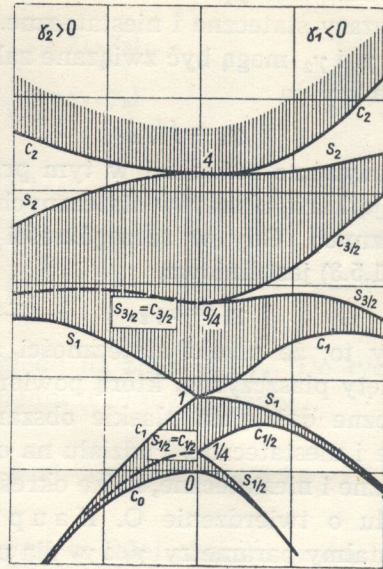
Rys. 1



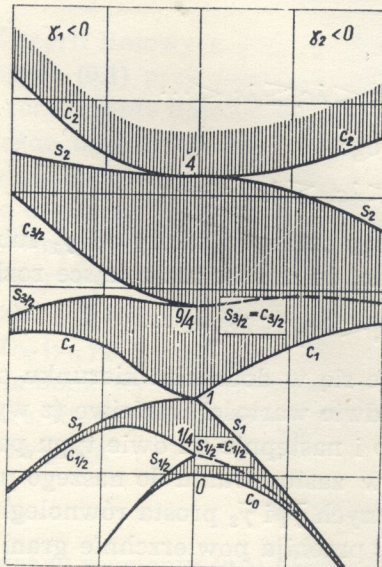
do  $\lambda_{c_0}$  dają rozwiązania niestateczne. Jeśli  $\lambda_i$  jest podwójną wartością właściwą (co odpowiada punktowi przecięcia się dwu powierzchni gra-



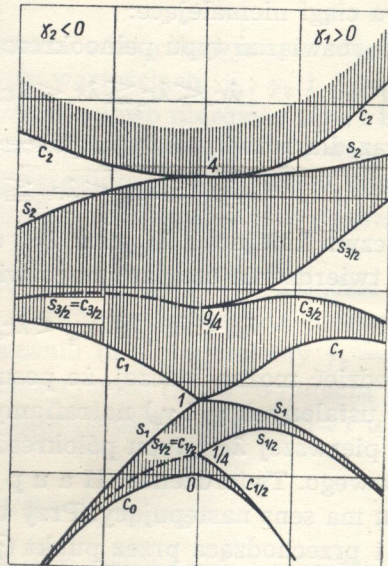
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

nicznych), to rozwiązanie jej odpowiadające jest stateczne. Inne punkty powierzchni granicznych dają na ogół rozwiązania niestateczne.



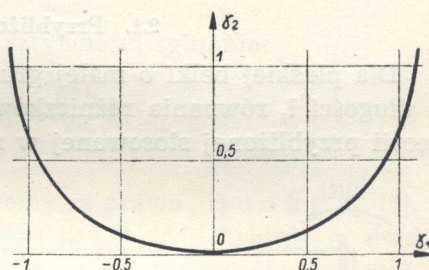
Rysunki 2-5 przedstawiają części rozłożonych półpłaszczyzn dzielących przestrzeni  $\gamma_1, \gamma_2, \lambda$  na ćwiartki. W pierwszej ćwiartce  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ , w drugiej  $\gamma_2 > 0, \gamma_1 < 0$ , w trzeciej  $\gamma_1 < 0, \gamma_2 < 0$ , w czwartej  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 < 0$ . Z rysunków 2 i 3 widać, że powierzchnie  $\lambda_{C_1}$  i  $\lambda_{S_1}$  przecinają się wzdłuż pewnej krzywej położonej w ćwiartkach 1 i 2. Praktycznie ważne jest podanie wartości  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  odpowiadających linii przecięcia. Otrzymujemy je z równania  $\lambda_{C_1} = \lambda_{S_1}$ . Ograniczając się do uprzednio wyznaczonych przybliżonych wartości właściwych mamy równanie dwukwadratowe

$$\frac{2}{9} \gamma_1^4 - \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \gamma_2 + \frac{5}{36} \gamma_2^2 \right) \gamma_1^2 + \left( \gamma_2 - \frac{1}{256} \gamma_2^3 \right) = 0,$$

a stąd

$$\gamma_1^2 = \frac{9}{4} \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \gamma_2 + \frac{5}{36} \gamma_2^2 \right) \pm \sqrt{\left( \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \gamma_2 + \frac{5}{36} \gamma_2^2 \right)^2 - \frac{8}{9} \left( \gamma_2 - \frac{1}{256} \gamma_2^3 \right)} \right].$$

Obieramy znak dolny, gdyż dla  $\gamma_2 = 0$  powierzchnie  $\lambda_{C_1}$  i  $\lambda_{S_1}$  nie przecinają się poza przypadkiem  $\gamma_1 = 0$ . Dla znaku minus powinno być  $\gamma_2 > 0$ , gdyż dla  $\gamma_2 < 0$  przy małych  $|\gamma_2|$  mamy  $\gamma_1^2 < 0$ , więc  $\gamma_1$  byłoby urojone. Zależność  $\gamma_1$  od  $\gamma_2$  podaje tablica 1, na podstawie której sporządzono wykres przedstawiony na rys. 6. Na rys. 2-5 obszary stateczne zakreskowano.



Rys. 6

Dość obszerne omówienie zagadnienia miało na celu z jednej strony nawiązać do wyników metody stosowanej w teorii funkcji *M a t h i e u*, z drugiej zaś — umożliwić zwiększenie dokładności obliczeń w zastosowaniach.

Tablica 1

$\gamma_1 = \pm 0,62$	$\gamma_2 = 0,2$
$\gamma_1 = \pm 0,86$	$\gamma_2 = 0,4$
$\gamma_1 = \pm 1,00$	$\gamma_2 = 0,6$
$\gamma_1 = \pm 1,07$	$\gamma_2 = 0,8$
$\gamma_1 = \pm 1,1$	$\gamma_2 = 1,0$

Rozważania te mogą również stanowić uzasadnioną wskazówkę dotyczącą przyjmowania postaci rozwiązań typu (0.7) przy postępowaniu pośrednim w przypadku, gdy funkcja  $\psi(z)$  w równaniu (0.5) będzie miała okres różny od  $\pi$ .

Przedstawiona pierwsza część niniejszej pracy rozpatrywana być może jako oddzielna całość.

## C Z Ę Ś C II

Otrzymane w części pierwszej wyniki zastosujemy do rozważenia stateczności dynamicznej płaskownika. Stateczność statyczna takich elementów konstrukcyjnych została już dość gruntownie opracowana, [5], natomiast problemy stateczności dynamicznej tych ustrojów są opraco-



wane słabo. W pracy [7] autor zajmuje się przypadkiem, gdy płaskownik obciążony jest na podporach momentem

$$(2.0.1) \quad M(t) = M_1 \cos \omega t.$$

Dla takiego obciążenia i dla warunków brzegowych wolnego podparcia zagadnienie sprowadza się do dyskusji równania Mathieu. Praktycznie ważne znaczenie przedstawiają zagadnienia stateczności dynamicznej przy dowolnych warunkach brzegowych, jeśli obciążenie stanowi moment określony wzorem

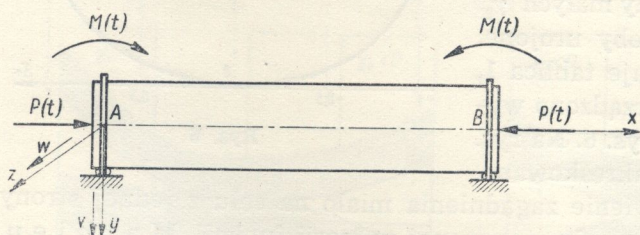
$$(2.0.2) \quad M(t) = M_0 + M_1 \cos \omega t.$$

Stały składnik momentu  $M_0$  w sposób istotny zmienia zagadnienie. Rozpatrywać będziemy również siłę osiową

$$(2.0.3) \quad P = P_0 + P_1 \cos \omega t.$$

### 2.1. Przybliżone równania ruchu

Dla płaskiej belki o małej grubości  $b$  w porównaniu z wysokością  $h$ , o długości  $l$ , równania różniczkowe ruchu wyprowadzimy na podstawie teorii przybliżonej stosowanej w zagadnieniach statycznych, [1].



Rys. 7

Niech belka będzie utwierdzona tak, że końce jej mogą swobodnie obracać się w płaszczyźnie poziomej  $xz$  i pionowej  $xy$  przy niemożliwym obrocie około osi  $x$  belki (rys. 7). Obierzmy dwa ukła-

dy: stały  $x, y, z$  oraz ruchomy (lokalny) związany z poprzecznym przekrojem belki  $x = \text{const } \xi, \eta, \zeta$ . Osie  $\eta$  i  $\zeta$  pokrywają się z kierunkiem osi głównych bezwładności przekrojów. W stanie nieodkształconym osie główne bezwładności przekrojów leżą w płaszczyznach  $xy$  i  $xz$ , a środki tych przekrojów leżą na osi  $x$ . Niech  $v$  i  $w$  oznaczają przemieszczenia punktów osi belki po odkształceniu. Pomijamy przemieszczenia  $u$  w kierunku osi  $x$ . Równania równowagi statycznej odkształconej osi belki zostały wyprowadzone w pracy [1] i podane są również w [5] (s. 210). W przypadku obciążenia siłą osiową

$$(2.1.1) \quad P = P_0 = \text{const}$$

i momentem

$$(2.1.2) \quad M = M_0 = \text{const},$$



odpowiednie równania różniczkowe są następujące:

$$(2.1.3) \quad \begin{cases} C \frac{d\varphi}{dx} + M_0 \frac{dw}{dx} = 0, \\ B_z \frac{d^2 v}{dx^2} + M_0 + P_0 v = 0, \\ B_y \frac{d^2 w}{dx^2} - M_0 \varphi + P_0 w = 0. \end{cases}$$

W równaniach tych  $C = GF^4/40 (J_y + J_z)$  oznacza sztywność na skręcanie,  $F$  pole przekroju,  $J_y$  i  $J_z$  odpowiednie momenty bezwładności. W przybliżeniu

$$C = \frac{hb^3}{3} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h}\right) G \quad \left(0 < \frac{b}{h} \leq 0,5\right).$$

Symbole  $B_y$  i  $B_z$  oznaczają odpowiednie sztywności zginania:

$$(2.1.4) \quad B_y = \frac{hb^3}{12} E, \quad B_z = \frac{h^3 b}{12} E.$$

Pierwszy związek (2.1.3) uważać będziemy za prawo Hooke'a, [6], (tabl. 12). Różniczkując pierwsze z równań (2.1.3) jednokrotnie, a dwa następne dwukrotnie względem  $x$  i rugując z ostatniego  $d^2\varphi/dx^2$  znajdziemy

$$(2.1.5) \quad \begin{cases} B_z \frac{d^4 v}{dx^4} + P_0 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \\ B_y \frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{M_0^2}{C} + P_0\right) \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \end{cases}$$

Dołączając do powyższych równań siły bezwładności pochodzące tylko od ruchu postępowego (pomijamy bezwładność pochodząca od obrotu) i zastępując  $M_0$  i  $P_0$  odpowiednio przez funkcje (2.0.2) i (2.0.3) mamy

$$(2.1.6) \quad B_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\frac{M^2}{C} + P\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$(2.1.7) \quad B_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Dla równania (2.1.6) przyjmujemy warunki brzegowe

$$(2.1.8) \quad w(0, t) = w(l, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(l, t) = 0,$$



zaś dla równania (2.1.7) warunki

$$(2.1.9) \quad v(0, t) = v(l, t) = 0$$

oraz z drugiego równania (2.1.3)

$$(2.1.10) \quad \left[ B_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]_{x=0, l} = -M.$$

Przyjmując

$$(2.1.11) \quad v(x, t) = v_1(x, t) + \frac{1}{2B_z} x(l-x)M(t)$$

doprowadzimy równanie (2.1.7) do postaci

$$(2.1.12) \quad B_z \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = f(x, t),$$

gdzie

$$(2.1.13) \quad f(x, t) = \frac{1}{B_z} \left[ PM - \frac{m}{2} x(l-x) \frac{d^2 M}{dt^2} \right],$$

z warunkiem brzegowym (2.1.8) dla funkcji  $v_1(x, t)$ . Mamy więc do dyskusji dwa niezależne równania różniczkowe; jedno (2.1.6) jednorodne oraz drugie niejednorodne (2.1.12) przy tych samych warunkach brzegowych typu (2.1.8).

Z postaci  $P(t)$  i  $M(t)$  i ze względu na to, że

$$(2.1.14) \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (0 < x < l),$$

mamy

$$(2.1.15) \quad f(x, t) = a_0 + a_1(x) \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t,$$

gdzie

$$(2.1.16) \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= a_0 \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{P_0 M_0 + \frac{1}{2} P_1 M_1}{B_z}, \\ a_1(x) &= \frac{P_0 M_1 + M_0 P_1}{B_z} + \frac{m M_1 \omega^2}{2 B_z} x(l-x) = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n} [1 - (-1)^n] \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ a_2 &= \frac{P_1 M_1}{2 B_z} = a_2 \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ a_n &= \frac{P_0 M_1 + P_1 M_0}{B_z} + \frac{m M_1 \omega^2 l^2}{n^2 \pi^2 B_z}. \end{aligned} \right.$$



Rozwiązania równań (2.1.6) oraz (2.1.12) szukać będziemy w postaci szeregów

$$(2.1.17) \quad w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$(2.1.18) \quad v_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

które spełniają podane warunki brzegowe.

Podstawiając szeregi (2.1.17) do równania (2.1.6), zaś (2.1.18) do (2.1.12) otrzymamy dla każdego  $n = 1, 2, 3, \dots$  odpowiednie równania zwyczajne. Jeśli przyjąć  $\omega t = \tau$ , to mamy

$$(2.1.19) \quad \ddot{z}_n + \frac{\Theta_n^2}{\omega^2} [\mu_0^{(n)} + \mu_1^{(n)} \cos \tau + \mu_2^{(n)} \cos 2\tau] z_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$\Theta_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{m l^2} \left[ \frac{B_y n^2 \pi^2}{l^2} - \left( \frac{M_0^2}{C} + P_0 \right) \right]$$

przedstawia kwadrat częstości drgań własnych oraz gdzie

$$(2.1.20) \quad \begin{cases} \mu_0 = 1 + \mu_2, \\ \mu_1 = -\frac{2 M_0 M_1 + P_1 C}{M_k^{2(n)} - M_0^2}, \quad \mu_2 = -\frac{M_1^2}{2(M_k^{2(n)} - M_0^2)}. \end{cases}$$

Kwadrat momentu krytycznego przy ustalonym  $P_0$  wynosi

$$(2.1.21) \quad M_k^{2(n)} = C \left( \frac{n^2 \pi^2}{l^2} B_y - P_0 \right).$$

Parametry  $\mu_1$  i  $\mu_2$  nazywamy odpowiednio pierwszym i drugim współczynnikami pulsacji.

Równanie zwyczajne odpowiadające równaniu (2.1.12) jest następujące:

$$(2.1.22) \quad \ddot{y}_n + \frac{\bar{\Theta}_n^2}{\omega^2} [1 + \bar{\mu}_1^{(n)} \cos \tau] y_n = \frac{2 [1 - (-1)^n]}{m \pi \omega^2 n} [a_0 + a_n \cos \tau + a_2 \cos 2\tau]$$

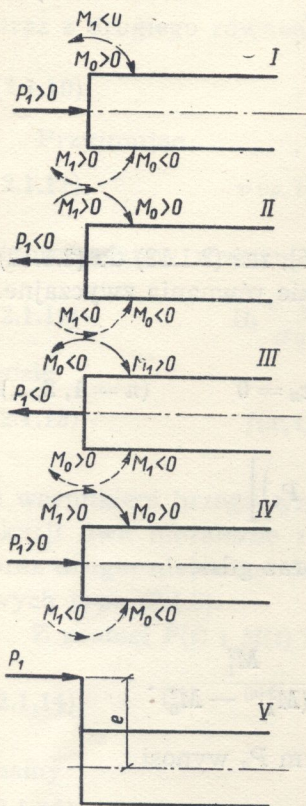
$$(n = 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$(2.1.23) \quad \begin{cases} \bar{\mu}_1^{(n)} = -\frac{P_1}{P_k^{(n)} - P_0}, \quad P_k^{(n)} = \frac{B_z n^2 \pi^2}{l^2}, \\ \bar{\Theta}_n^2 = \frac{1}{m} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \left( B_z \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - P_0 \right), \end{cases}$$



zaś  $a_0$ ,  $a_n$  i  $a_2$  mają znaczenia podane przez wzory (2.1.16). Dla  $P_1 = M_1 = 0$  równania (2.1.19) i (2.1.22) określają drgania własne. Zauważmy również,



Rys. 8

że prawa strona w równaniu (2.1.22) jest różna od zera dla nieparzystych  $n$ . Wtedy przedstawia ono niejednorodne równanie Mathieu. Ograniczamy się do przypadku, gdy  $B_z \gg B_y$ , a więc biorąc pod uwagę wzory (2.1.4), gdy  $(b/h)^2 \ll 1$ . Jeśli dodatkowo  $P_0$  i  $P_1$  są bardzo małe wobec  $P_k^{(n)}$ , to współczynnik pulsacji  $\bar{\mu}_1^{(n)}$  jest bardzo mały i ze względu na zawsze występujące tłumienie nie ma praktycznego znaczenia ([8], s. 273). Przy  $\bar{\mu}_1^{(n)} = 0$  możliwy jest rezonans w sensie zwykłym, gdy  $\bar{\Theta}_n/\omega = 1, 2$ . Ponieważ jednak ze wzorów (2.1.20) i (2.1.23) wynika nierówność

$$\Theta_n \ll \bar{\Theta}_n,$$

przeto przy niższych częstościach kątowych  $\omega$  może mieć miejsce jedynie ruch niestacyczny określony równaniem (2.1.19). Z tego względu w dalszym ciągu zajmiemy się tylko równaniem (2.1.19).

Rysunek 8 przedstawia różne rodzaje wzajemnego działania na belkę siły  $P(t)$  i momentu  $M(t)$  przy ustalonym zwrocie  $P_0$ . Znaki przerywane (dolne) odpowiadają znakom ciągłym (górnym), gdyż w równaniu jest  $M^2$ . Zjawisko zresztą musi być symetryczne. Zawsze jest spełniona nierówność  $\mu_2 < 0$ .

W przypadkach I i II (por. rys. 8) mamy odpowiednio

$$\mu_1^I = - \frac{P_1 C - 2 M_0 M_1}{M_k^2 - M_0^2}$$

oraz

$$\mu_1^{II} = - \frac{2 M_0 M_1 - P_1 C}{M_k^2 - M_0^2}.$$

Stąd  $\mu_1^I = -\mu_1^{II}$ .

W przypadkach III i IV znajdziemy

$$\mu_1^{III} = + \frac{2 M_0 M_1 + P_1 C}{M_k^2 - M_0^2}$$

oraz

$$\mu_1^{IV} = - \frac{2 M_0 M_1 + P_1 C}{M_k^2 - M_0^2};$$

stad wynika  $\mu_1^{III} = -\mu_1^{IV}$ .



Z powodu symetrii obszarów statecznych i niestatecznych względem płaszczyzny  $(\lambda, \gamma_2)$  (rys. 2 i 4) dwa pierwsze przypadki oddzielnie jak również dwa drugie oddzielnie są równoważne. Jeśli  $P_1 = 0$  lub  $M_0 = 0$ , albo też  $M_1 = 0$ , to wszystkie cztery przypadki są równoważne. Przypadek V sprowadza się do III lub IV z tym zastrzeżeniem, że  $M_0 = P_0 e$ ,  $M_1 = P_1 e$ .

## 2.2. Przybliżone określenie pierwszych obszarów niestatecznych dla brzegów utwierdzonych przegubowo

Jeśli przyjąć oznaczenia

$$(2.2.1) \quad \frac{\Theta^2}{\omega^2} \mu_0 = \lambda, \quad \frac{\Theta^2}{\omega^2} \mu_1 = \gamma_1, \quad \frac{\Theta^2}{\omega^2} \mu_2 = \gamma_2,$$

to równanie (2.1.19) ma postać

$$(2.2.2) \quad \ddot{z} + (\lambda + \gamma_1 \cos \tau + \gamma_2 \cos 2\tau) z = 0.$$

W zagadnieniach stateczności dynamicznej nie chodzi o postać rozwiązania danego równania różniczkowego, lecz o podanie zakresu zmiany odpowiednich parametrów w przypadku ruchu statecznego albo niestatecznego. Na wstępie stwierdzamy, że równanie (2.1.19) sprowadza się do równania Mathieu, jeśli  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 \neq 0$  lub  $\gamma_1 \neq 0$ ,  $\gamma_2 = 0$ . Przypadek pierwszy ma miejsce, gdy  $M_0 = P_1 = 0$  lub gdy  $2M_0M_1 + P_1C = 0$ .

Pierwszy warunek przy dodatkowym założeniu  $P_0 = 0$  jest przedmiotem pracy [7]<sup>2)</sup>.

Spełnienie warunku drugiego podobnie jak i pierwszego prowadzi do wniosku, że obszary niestateczności występują tylko w pobliżu wartości  $\Theta/\omega = 1, 2, 3, \dots$

Jeśli więc w przypadku I lub II (rys. 8) dobierzemy odpowiednio  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $P_1$  i  $C$ , to nie otrzymamy pełnego ciągu obszarów niestatecznych. Jeśli  $M_1 = 0$ , to mamy klasyczne zjawisko stateczności dynamicznej pręta przy sile pulsującej osiowo z dodatkowym obciążeniem w postaci stałego momentu  $M_0 \neq 0$ . Są tu już wszystkie obszary niestateczności występujące w pobliżu wartości  $\Theta/\omega = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$

**2.2.1. Pierwszy obszar rezonansowy.** Dla  $\gamma_2 < 0$ ,  $\gamma_1 < 0$  z rys. 4 widać, że pierwszy obszar rezonansowy jest zawarty między powierzchniami  $\lambda_{C_{1/2}}$  oraz  $\lambda_{S_{1/2}}$ . Mamy więc następującą nierówność dla parametru  $\lambda$ :

$$(2.2.1.1) \quad \lambda_{S_{1/2}} \leq \lambda \leq \lambda_{C_{1/2}}.$$

<sup>2)</sup> W pracy tej podano, że  $\omega/\Theta = 1, 2, \dots$  zamiast  $\Theta/\omega = 1, 2, \dots$ . Niewłaściwy wydaje się również warunek (9) określający drugi obszar rezonansowy.



Ograniczymy się do tak małych  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ , by powyższe powierzchnie można było zastąpić powierzchniami drugiego stopnia. Z nierówności (2.2.1.1) otrzymamy

$$(2.2.1.2) \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \gamma_1 - \frac{1}{6} \gamma_2^2 + \frac{1}{4} \gamma_1 \gamma_2 - \frac{1}{8} \gamma_1^2 \leq \lambda \leq \\ \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \gamma_1 - \frac{1}{6} \gamma_2^2 - \frac{1}{8} \gamma_1^2 - \frac{1}{4} \gamma_1 \gamma_2.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń (2.2.1) i przyjęciu dalszych następujących:

$$(2.2.1.3) \quad \varrho = \frac{\omega^2}{\Theta^2}, \quad B = \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_1, \quad C = \frac{1}{8} (\mu_1 + \mu_2)^2 + \frac{1}{24} \mu_2^2,$$

prawą stronę nierówności zapiszemy w postaci

$$(2.2.1.4) \quad \varphi_1(\varrho) = \frac{1}{4} \varrho^2 - B \varrho - C \geq 0.$$

Lewa strona (2.2.1.4) przyrównana do zera zawsze ma pierwiastki rzeczywiste, gdyż zawsze  $\Delta = B^2 + C > 0$ . Wśród dwu pierwiastków  $\varrho_1$  i  $\varrho_2$  drugi jest dodatni, a pierwszy ujemny, który odrzucamy jako nie mający sensu. Nierówność (2.2.1.4) jest spełniona dla

$$(2.2.1.5) \quad \varrho = \frac{\omega^2}{\Theta^2} \geq 2B \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{C}{B^2}} \right) = \varrho_2.$$

Lewa strona nierówności (2.2.1.2) przy oznaczeniach

$$(2.2.1.6) \quad B_1 = \mu_0 - \frac{1}{2} \mu_1, \quad C_1 = \frac{1}{8} (\mu_1 - \mu_2)^2 + \frac{1}{21} \mu_2^2$$

ma postać

$$(2.2.1.7) \quad \psi_1(\varrho) = \frac{1}{4} \varrho^2 - B_1 \varrho - C_1 \leq 0.$$

Podobnie jak poprzednio mamy

$$(2.2.1.8) \quad \varrho = \frac{\omega^2}{\Theta^2} \leq 2B_1 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{C_1}{B_1^2}} \right) = \bar{\varrho}_2,$$

gdzie  $\bar{\varrho}_2$  jest pierwiastkiem dodatnim z dwu pierwiastków równania odpowiadającego nierówności (2.2.1.7). Łącząc nierówności (2.2.1.5) oraz (2.2.1.8) mamy pierwszy zakres częstości kątovej  $\omega$  rozwiązań niestacnych dla każdej harmonicznej  $n$ :

$$(2.2.1.9) \quad \varrho_2 \leq \frac{\omega^2}{\Theta^2} \leq \bar{\varrho}_2.$$



Gdy  $M_0 = P_1 = 0$ , to  $\gamma_1 = 0$ , czyli  $\varrho_2 = \bar{\varrho}_2$  i nierówność (2.2.1.9) jest spełniona przez jedyną wartość  $\omega^2/\Theta^2 = \varrho_2$ , która, jak wynika z twierdzenia, daje rozwiązanie stateczne. Odpowiada ona podwójnej wartości właściwej (na rysunku linia przerywana  $C_{1/2} = S_{1/2}$ ). W przypadku tym pierwszy obszar rezonansowy nie istnieje. Przyjmując w poprzednich oznaczeniach  $M_1 = 0$  nierówność (2.2.1.9) określa pierwszy obszar rezonansowy dla pręta przy sile osiowo pulsującej z dodatkowym obciążeniem stałym momentem  $M_0 \neq 0$ .

**2.2.2. Drugi obszar rezonansowy.** Dla wartości  $\gamma_1 < 0$ ,  $\gamma_2 < 0$  z rys. 4 odczytujemy zakres zmiany  $\lambda$  w drugim obszarze rezonansowym:

$$(2.2.2.1) \quad \lambda_{S_1} \leq \lambda \leq \lambda_{C_1}.$$

Nierówność tę — wobec (1.2.26) i (1.2.29) — zapiszemy w postaci

$$(2.2.2.2) \quad 1 + \frac{1}{2} \gamma_2 - \frac{1}{12} \gamma_1^2 \leq \lambda \leq 1 - \frac{1}{2} \gamma_2 + \frac{15}{12} \gamma_1^2.$$

Wprowadzając oznaczenia (2.2.1) i przyjmując

$$(2.2.2.3) \quad \varrho = \frac{\omega^2}{\Theta^2}, \quad A = \mu_0 - \frac{1}{2} \mu_2, \quad B = \frac{1}{3} \mu_1^2$$

lewą stronę (2.2.2.2) można zapisać w sposób następujący:

$$(2.2.2.4) \quad \varrho^2 = A\varrho - \frac{1}{4} B \leq 0.$$

Wobec tego, że zawsze  $\Delta = A^2 + B > 0$ , nierówność powyższą spełniają wartości

$$(2.2.2.5) \quad \varrho \leq \frac{1}{2} (A + \sqrt{A^2 + B}).$$

Prawa strona nierówności (2.2.2.2) prowadzi do warunku

$$(2.2.2.6) \quad \varrho^2 - A_1 \varrho + \frac{1}{4} B_1 \geq 0,$$

gdzie

$$(2.2.2.7) \quad A_1 = \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_2, \quad B_1 = \frac{5}{3} \mu_1^2.$$

Zakładamy tu, że  $\Delta = A_1^2 - B_1 > 0$ . Nierówność (2.2.2.6) jest spełniona przez  $\varrho$  z obszaru

$$(2.2.2.8) \quad \varrho \geq \frac{1}{2} (A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1}).$$



Łącząc (2.2.2.5) oraz (2.2.2.8) mamy

$$(2.2.2.9) \quad \frac{1}{2}(A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1}) \leq \varrho \leq \frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 + B})$$

lub

$$(2.2.2.10) \quad \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{2} \mu_2 \right) \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{20}{3} \frac{\mu_1^2}{(2 + 3\mu_2)^2}} \right] \leq \\ \leq \frac{\omega^2}{\Theta^2} \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \mu_2 \right) \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\mu_1^2}{(2 + \mu_2)^2}} \right].$$

Przyjmując w (2.2.2.10)  $\mu_1 = 0$ , otrzymujemy związek podany dla pierwszego obszaru w pracy [7]. Z rys. 5 jak również z samej postaci nierówności (2.2.2.10) widać, że nierówność ta jest słuszna także w przypadku, gdy  $\mu_1 > 0$  i  $\mu_2 < 0$ .

2.2.3. Podamy jeszcze zakresy dla dwu dalszych obszarów rezonansowych w pobliżu wartości  $\Theta/\omega = 3/2$  i  $\Theta/\omega = 2$ . W przypadku pierwszym ze wzorów (1.4.26) i (1.4.29) wynika

$$(2.2.3.1) \quad \begin{cases} \frac{2}{9} (1 + \mu_2 + \sqrt{\Delta_1}) \leq \frac{\omega^2}{\Theta^2} \leq \frac{2}{9} (1 + \mu_2 + \sqrt{\Delta_2}), \\ \Delta_{1,2} = 1 + 2\mu_2 - \frac{43}{20} \mu_2^2 - \left( \frac{3}{4} \mu_1 \pm \frac{2}{3} \mu_2 \right)^2, \end{cases}$$

przy czym znak górny odnosi się do  $\Delta_1$ , a dolny do  $\Delta_2$ . Zakładamy przy tym, że  $\Delta_{1,2} > 0$ , co jest możliwe dla dostatecznie małych  $\mu_1$  i  $\mu_2$ .

Jeśli  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 < 0$ , to znaki nierówności (2.2.3.1) należy zmienić na przeciwne. Nierówność powyższa daje bardzo wąski obszar niestacynny (zależnie od wielkości  $\mu_1$ ) i przy  $\mu_1 = 0$  odpada podobnie jak w przypadku 2.1. Ruch jest stacynny dla wartości bliskich  $\omega^2/\Theta^2 = 4/9$  przy każdym  $\mu_2$ .

Dla czwartego obszaru rezonansowego z (1.2.27) i (1.2.30) mamy

$$(2.2.3.2) \quad \begin{cases} \frac{1}{8} (1 + \mu_2 + \sqrt{\Delta_1}) \leq \frac{\omega^2}{\Theta^2} \leq \frac{1}{8} (1 + \mu_2 + \sqrt{\Delta_2}), \\ \Delta_{1,2} = 1 + 2\mu_2 \mp \frac{2}{3} \mu_2^2 - \frac{8}{15} \mu_1^2. \end{cases}$$

Znak górny odnosi się do  $\Delta_1$ , a dolny do  $\Delta_2$ . Nierówność (2.2.3.2) jest słuszna bez względu na znak  $\mu_1$ . Otrzymane warunki (2.2.2.10) - (2.2.3.2) mają zastosowanie dla każdej harmonicznej ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Znaczenie praktyczne mają one dla kilku pierwszych harmonicznych. Z tego względu nie podajemy dalszych nierówności.



### 2.3. Inne warunki brzegowe

W celu określenia obszarów ruchu niestatecznego przy dowolnych warunkach brzegowych zastosujemy metodę K. Klottera, [3], z pewną modyfikacją polegającą na tym, że podobnie jak w przypadku poprzednich warunków brzegowych częstości kąto- obciążenia wymuszających drgania odnosić będziemy do częstości drgań własnych, występujących rzeczywiście przy obciążeniach stałych  $P_0$  i  $M_0$ , a nie jak w pracy [3] do częstości własnych bez tych obciążeń. Takie postępowanie nawiązuje do rezonansu w sensie zwykłym. Wymaga to wprowadzenia innych funkcji belkowych, różnych od przyjętych przez K. Klottera, które nazwiemy uogólnionymi funkcjami belkowymi.

**2.3.1. Uogólnione funkcje belkowe.** Wiadomo, że drgania własne belki o stałej sztywności zginania określa równanie

$$(2.3.1.1) \quad EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie  $EJ$  jest sztywnością zginania,  $m$  oznacza masę na jednostkę długości. Stosując metodę F o u r i e r a przyjmujemy rozwiązanie w postaci  $u = X(x) T(t)$ , przez co równanie powyższe można sprowadzić do dwu zwyczajnych:

$$(2.3.1.2) \quad X^{IV} - k^4 X = 0,$$

$$(2.3.1.3) \quad T^{II} + k^4 \frac{EJ}{m} T = 0,$$

gdzie  $X(x)$  i  $T(t)$  są funkcjami tylko jednej zmiennej niezależnej, a wartość stałą  $k$  wyznacza się w zależności od warunków brzegowych. Ogólną postacią rozwiązania równania (2.3.1.2) jest funkcja

$$(2.3.1.4) \quad X(x) = A \cos kx + B \sin kx + C \cosh kx + D \sinh kx$$

przy dowolnych stałych  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ . Widoczne jest, że każda z funkcji  $\cos kx$ ,  $\sin kx$ ,  $\cosh kx$  i  $\sinh kx$  pomnożona przez dowolną stałą spełnia równanie (2.3.1.2). Funkcje powyższe zostały zastosowane w pracy [3]. Poza tym funkcje te wykorzystuje się w licznych zagadnieniach tak statycznych jak i dynamicznych.

Rozważmy równanie ogólniejsze od równania (2.3.1.1), a mianowicie

$$(2.3.1.5) \quad EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie  $a = \text{const}$ . Ma ono postać równania (2.1.6) lub (2.1.7) przy stałych współczynnikach. Jeśli w równaniu (2.3.1.5) przyjmiemy  $\partial^2 u / \partial t^2 = 0$ , to otrzymane równanie pozwala wyznaczyć obciążenia krytyczne z zagad-



nień stateczności statycznej przy dowolnych warunkach brzegowych. W równaniu (2.3.1.5) można dokonać podobnie jak w równaniu (2.3.1.1) rozdziału na dwa równania następujące:

$$(2.3.1.6) \quad X^{IV} + \frac{a}{EJ} X^{II} - k^4 X = 0$$

oraz

$$(2.3.1.7) \quad T^{II} + k^4 \frac{EJ}{m} T = 0.$$

Jeśli oznaczyć nie znaną częstość drgań własnych przez  $\Theta$ , to  $\Theta^2 = k^4 EJ/m$  i równanie (2.3.1.6) zapiszemy w postaci

$$(2.3.1.8) \quad X^{IV} + \frac{a}{EJ} X^{II} - \frac{m}{EJ} \Theta^2 X = 0.$$

Równania typu (2.3.1.8) rozwiązuje się zwykle za pomocą równania charakterystycznego, które jest dwukwadratowe. Otrzymane cztery pierwiastki odpowiadają czterem niezależnym rozwiązaniom. Obecnie zastosujemy inną, dogodniejszą postać rozwiązania. Równanie (2.3.1.8) można przedstawić w postaci dwu równań

$$(2.3.1.9) \quad X_1^{II} + \left( \frac{a}{EJ} - \varepsilon \right) X_1 = 0, \quad X_1^{II} + \varepsilon X = X_1 \quad (\varepsilon > 0),$$

przy czym zawsze powinien być spełniony warunek

$$(2.3.1.10) \quad \varepsilon^2 - \frac{a}{EJ} \varepsilon = \frac{m}{EJ} \Theta^2.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy rozwiązanie będące liniową kombinacją funkcji

$$(2.3.1.11) \quad \cos \sqrt{\varepsilon} x, \quad \sin \sqrt{\varepsilon} x, \quad \cosh \sqrt{\varepsilon - a} x, \quad \sinh \sqrt{\varepsilon - a} x,$$

gdzie  $a = a/EJ$ .

Z postaci (2.3.1.10) widać, że w przypadku drgań jest spełniony warunek

$$(2.3.1.12) \quad \varepsilon > a.$$

Ogólne rozwiązanie równania (2.3.1.8) jest więc

$$(2.3.1.13) \quad X = A \cos \sqrt{\varepsilon} x + B \sin \sqrt{\varepsilon} x + C \cosh \sqrt{\varepsilon - a} x + D \sinh \sqrt{\varepsilon - a} x,$$

gdzie  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  są dowolnymi stałymi. Funkcje (2.3.1.11) nazwiemy uogólnionymi funkcjami belkowymi.



2.3.2. Równania charakterystyczne dla różnych warunków brzegowych. Rozważymy drgania własne belki określone równaniem (2.3.1.5) przy trzech następujących rodzajach warunków brzegowych:

przy przegubowym utwierdzeniu obydwu końców

$$(2.3.2.1) \quad u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0,$$

gdy obydwa końce są utwierdzone zupełnie

$$(2.3.2.2) \quad u(0, t) = u_x(0, t) = u(l, t) = u_x(l, t) = 0,$$

gdy jeden koniec belki utwierdzony jest przegubowo, a drugi zupełnie

$$(2.3.2.3) \quad u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(l, t) = u_x(l, t) = 0.$$

Długość belki oznaczono przez literę  $l$ . W przypadku (2.3.2.1) rozwiązanie ogólne (2.3.1.13) prowadzi sposobem znanym do równania charakterystycznego

$$(2.3.2.4) \quad \sin \sqrt{\varepsilon} l = 0,$$

skąd

$$(2.3.2.5) \quad \varepsilon = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Kwadraty częstości drgań własnych z warunku (2.3.1.10) są następujące:

$$(2.3.2.6) \quad \omega_n^2 = \frac{EJ}{m} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \left( \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \frac{P_0}{EJ} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Symbol  $P_0 = a$  oznacza tu siłę osiową ściskającą. Jeśli siła  $P_0$  działa rozciągająco, to we wzorach (2.3.2.6) wystąpi znak dodatni i częstości drgań wzrosną. Rozwiązanie (2.3.1.13) przy warunkach brzegowych (2.3.2.2) daje równanie charakterystyczne

$$(2.3.2.7) \quad 1 - \cosh \sqrt{\varepsilon - a} l \cos \sqrt{\varepsilon} l - \frac{a}{2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon - a)}} \sin \sqrt{\varepsilon} l \sinh \sqrt{\varepsilon - a} l = 0.$$

Przyjmując oznaczenia

$$(2.3.2.8) \quad a l^2 = \beta, \quad \varepsilon l^2 = \chi,$$

równanie (2.3.2.7) zapiszemy w postaci

$$(2.3.2.9) \quad 1 - \cosh \sqrt{\chi - \beta} \cos \sqrt{\chi} - \frac{\beta}{2\sqrt{\chi(\chi - \beta)}} \sin \sqrt{\chi} \sinh \sqrt{\chi - \beta} = 0.$$



Przy ustalonym  $\beta$  przybliżone wartości pierwiastków powyższego równania można szukać sposobem graficznym; pierwiastki będą odcięty-  
mi punktów przecięcia się krzywych

$$(2.3.2.10) \quad \begin{cases} y_1 = \cos \sqrt{\chi}, \\ y_2 = \frac{1}{\cosh \sqrt{\chi - \beta}} - \frac{\beta}{2\sqrt{\chi(\chi - \beta)}} \sin \sqrt{\chi} \operatorname{tgh} \sqrt{\chi - \beta}. \end{cases}$$

Widoczne jest również, że gdy  $\beta = 0$ , to równanie charakterystyczne (2.3.2.9) pokrywa się z odpowiednim równaniem dla drgań (2.3.1.1) przy tych samych warunkach brzegowych.

W przypadku warunków brzegowych (2.3.2.3) równanie charakterystyczne ma postać

$$(2.3.2.11) \quad \sqrt{\chi - \beta} \sin \sqrt{\chi} \cosh \sqrt{\chi - \beta} - \sqrt{\chi} \cos \sqrt{\chi} \sinh \sqrt{\chi - \beta} = 0$$

lub

$$(2.3.2.12) \quad \frac{\operatorname{tg} \sqrt{\chi}}{\sqrt{\chi}} = \frac{\operatorname{tgh} \sqrt{\chi - \beta}}{\sqrt{\chi - \beta}}.$$

Przybliżone wartości pierwiastków można również wyznaczyć graficznie (przy ustalonym  $\beta$ ). W obydwu powyższych przypadkach kwadraty częstości drgań własnych mamy ze wzorów (2.3.1.10)

$$(2.3.2.13) \quad \Theta_n^2 = \frac{EJ}{m} \frac{\chi_n}{l^2} \left( \frac{\chi_n}{l^2} - a \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

**2.3.3. Obciążenia krytyczne.** Otrzymane w poprzednich punktach związki dają również równania charakterystyczne dla obciążeń krytycznych. Jak podano we wstępie dla  $\partial^2 u / \partial t^2 = 0$  równanie (2.3.1.5) można uważać za związek pozwalający wyznaczyć obciążenia krytyczne. Ze wzoru (2.3.1.10) widać, że w przypadku tym powinno być  $\varepsilon = a$  lub biorąc pod uwagę oznaczenia z (2.3.2.8) znajdziemy

$$(2.3.3.1) \quad \beta = \chi.$$

Równanie (2.3.2.4) daje obecnie pierwiastki

$$\beta_n = n^2 \pi^2.$$

Z (2.3.2.8) i oznaczenia  $a = P_0/EJ$  mamy

$$(2.3.3.2) \quad P_k^{(n)} = EJ \frac{n^2 \pi^2}{l^2},$$

co istotnie przedstawia  $n$ -tą siłę krytyczną E u l e r a. W celu obliczenia obciążeń krytycznych przy warunkach brzegowych (2.3.2.2) w rów-



naniu charakterystycznym dla tego przypadku zastosujemy regułę L'Hospitala, gdy  $\chi \rightarrow \beta$ .

Ponieważ

$$\lim_{\chi \rightarrow \beta} \sqrt{\beta} \frac{\sinh \sqrt{\chi - \beta}}{\sqrt{\chi}(\chi - \beta)} = 1,$$

to równanie (2.3.2.9) przyjmie postać

$$\sin \frac{\sqrt{\beta}}{2} \left( \sin \frac{\sqrt{\beta}}{2} - \frac{\sqrt{\beta}}{2} \cos \frac{\sqrt{\beta}}{2} \right) = 0.$$

Równanie ostatnie rozpada się na dwa niezależne równania

$$(2.3.3.3) \quad \sin \frac{\sqrt{\beta}}{2} = 0$$

oraz

$$(2.3.3.4) \quad \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\beta}}{2} = \frac{\sqrt{\beta}}{2}.$$

Pierwsze z nich daje

$$\beta_m = 4 m^2 \pi^2 \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

a drugie można rozwiązać sposobem graficznym lub analitycznym. Otrzymane pierwiastki obydwu równań ustawiamy w ciąg rosnący  $\{\beta_n\}$ , przy czym wyraz pierwszy  $\beta_1 = 4\pi^2$ . Siły krytyczne są więc następujące:

$$(2.3.3.5) \quad P_k^{(n)} = EJ \frac{\beta_n}{l^2} \quad \left( P_k^{(1)} = EJ \frac{4\pi^2}{l^2} \right).$$

W podobny sposób dla trzeciego rodzaju warunków brzegowych (2.3.2.3) z równania (2.3.2.11) mamy, gdy  $\chi \rightarrow \beta$ ,

$$(2.3.3.6) \quad \operatorname{tg} \sqrt{\beta} = \sqrt{\beta},$$

gdź

$$\lim_{\chi \rightarrow \beta} \frac{\sinh \sqrt{\chi - \beta}}{\sqrt{\chi} - \beta} = 1.$$

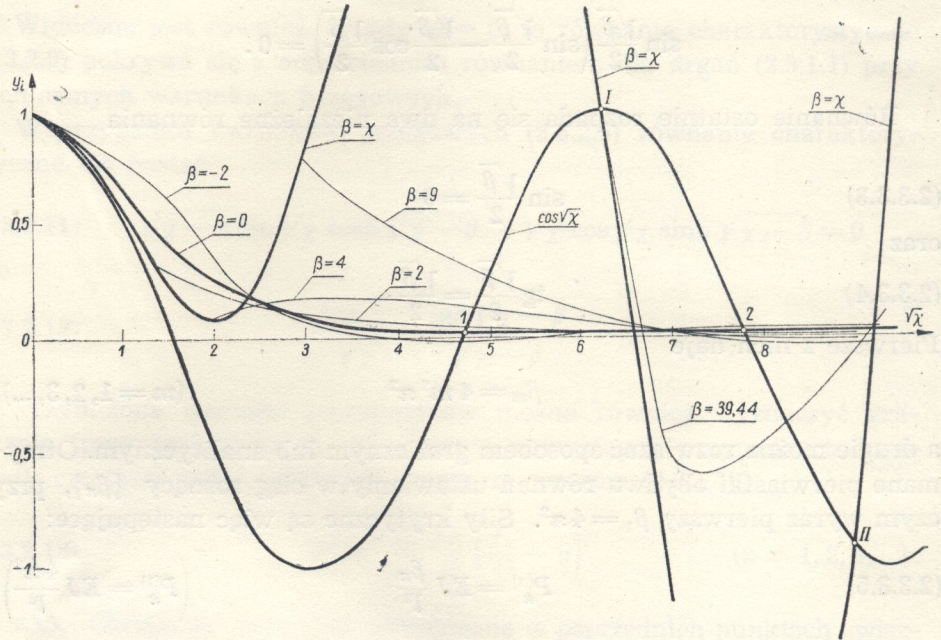
Równanie (2.3.3.6) jest typu (2.3.3.4) i daje ciąg pierwiastków  $\{\beta_n\}$  oraz siły krytyczne

$$(2.3.3.7) \quad P_k^{(n)} = EJ \frac{\beta_n}{l^2}.$$

Rysunek 9 przedstawia wykresy funkcji (2.3.2.10) dla parametru  $\beta = 0, 2, 4, 9, 39, 44, -2$  oraz dla  $\chi = \beta$ . Odcięte punktów 1 i 2 dają dwie pierwsze częstości drgań własnych dla  $\beta = 0$ . Odcięte punktów przecięcia



sąsiednich krzywych (dla  $\beta \neq 0$ ) wstawione do wzoru (2.3.1.10) dają pierwsze częstości drgań własnych przy odpowiednim  $\beta$ . Punkty I i II odpowiadają dwóm pierwszym wartościom obciążeń krytycznych. Mogą istnieć punkty przecięcia krzywej  $y_1$  z krzywą  $y_2$  dla  $0 < \chi < \beta$ . Nie mają one jednak znaczenia, gdyż w tym przypadku równanie (2.3.1.10) daje urojone częstości drgań. Dlatego też krzywe  $y_2(\chi, \beta)$  wychodzą z punktów leżących na krzywej  $y_2(\chi, \chi)$ , która w punktach przecięcia z krzywą



Rys. 9

$y_1(\chi)$  wyznacza obciążenia krytyczne. Jeśli oznaczyć pierwiastki równania charakterystycznego  $\chi(\beta)$ , to z rysunku widać, że

$$\chi(\beta) > \chi(0), \quad \beta > 0, \quad \chi(\beta) < \chi(0), \quad \beta < 0.$$

Na rysunku 10 podano odpowiednie wykresy dla równania charakterystycznego (2.3.2.12). Odcięte punktów przecięcia krzywych

$$(2.3.3.8) \quad y_1 = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{\chi}}{\sqrt{\chi}}, \quad y_2 = \frac{\operatorname{tgh} \sqrt{\chi - \beta}}{\sqrt{\chi - \beta}},$$

dają wartości  $\chi(\beta)$ . Na powyższych wykresach krzywe odpowiadające  $\beta = 39,44$  oraz  $\beta = 20,16$  odpowiadają pierwszym obciążeniom krytycznym. Wychodzą one z punktów I.

2.3.4. Otrzymane w poprzednich punktach wyniki zastosujemy do określenia obszarów niestatecznych płaskownika przy warunkach brze-



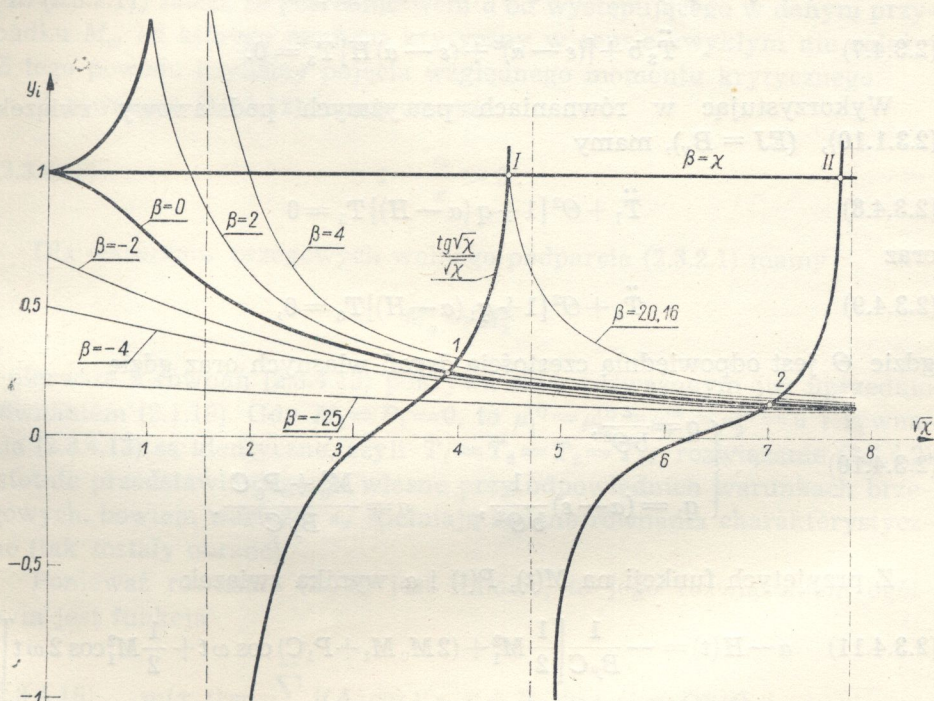
gowych (2.3.2.2) i (2.3.2.3). Przypadek (2.3.2.1) rozważono uprzednio (punkty 1 i 2). Obecnie mamy

$$(2.3.4.1) \quad a = \frac{M_0^2}{C} + P_0.$$

Stosując zmienioną metodę K. Klottera przyjmujemy rozwiązanie równania (2.1.6) w postaci (dla  $n$ -tej harmonicznej)

$$(2.3.4.2) \quad w_n(x, t) = A_n \cos \sqrt{\varepsilon_n} x T_1^{(n)}(t) + B_n \sin \sqrt{\varepsilon_n} x T_2^{(n)}(t) + \\ + C_n \cosh \sqrt{\varepsilon_n - a} x T_3^{(n)}(t) + D_n \sinh \sqrt{\varepsilon_n - a} x T_4^{(n)}(t),$$

gdzie  $A_n, B_n, C_n$  i  $D_n$  są dowolnymi stałymi,  $T_1^{(n)}(t), T_2^{(n)}(t), T_3^{(n)}(t)$  i  $T_4^{(n)}(t)$  są nie znanymi funkcjami czasu. Przyjęcie rozwiązania w postaci (2.3.4.2)



Rys. 10

odpowiada przyjęciu (2.1.17) w przypadku brzegów wolnopodpartych. W (2.3.4.2)  $\varepsilon_n$  oznacza ciąg pierwiastków równania charakterystycznego drgań własnych ( $P_1 = M_1 = 0$ ) przy odpowiednich warunkach brzegowych. Wstawiając powyższą postać rozwiązania w równanie (2.1.6) i oznaczając

$$(2.3.4.3) \quad H(t) = \frac{1}{B_y} \left( \frac{M^2}{C} + P \right), \quad \frac{m}{B_y} = b,$$



mamy (opuszczamy w dalszym ciągu wskaźnik  $n$ )

$$(2.3.4.5) \quad A \cos \sqrt{\varepsilon} x [\ddot{T}_1 b + (\varepsilon^2 - \varepsilon H) T_1] + B \sin \sqrt{\varepsilon} x [\ddot{T}_2 b + (\varepsilon^2 - \varepsilon H) T_2] + C \sinh \sqrt{\varepsilon - a} x \{\ddot{T}_3 b + [(\varepsilon - a)^2 + (\varepsilon - a) H] T_3\} + D \cosh \sqrt{\varepsilon - a} x \{\ddot{T}_4 b + [(\varepsilon - a)^2 + (\varepsilon - a) H] T_4\} = 0.$$

Równanie powyższe będzie spełnione wtedy, gdy funkcje  $T_1$  i  $T_2$  oczywiście zadość jednemu równaniu

$$(2.3.4.6) \quad \ddot{T}_1 b + (\varepsilon^2 - \varepsilon H) T_1 = 0,$$

zaś funkcje  $T_3$  i  $T_4$  spełniać będą równanie wspólne

$$(2.3.4.7) \quad \ddot{T}_3 b + [(\varepsilon - a)^2 + (\varepsilon - a) H] T_3 = 0.$$

Wykorzystując w równaniach powyższych podstawowy związek (2.3.1.10), ( $EJ = B_y$ ), mamy

$$(2.3.4.8) \quad \ddot{T}_1 + \Theta^2 [1 + q(a - H)] T_1 = 0$$

oraz

$$(2.3.4.9) \quad \ddot{T}_3 + \Theta^2 [1 + q_1(a - H)] T_3 = 0,$$

gdzie  $\Theta$  jest odpowiednią częstotliwością drgań własnych oraz gdzie

$$(2.3.4.10) \quad \begin{cases} q = \frac{\varepsilon}{b\Theta^2}, \\ q_1 = (a - \varepsilon) \frac{1}{b\Theta^2}, \quad \alpha = \frac{M_0^2 + P_0 C}{B_y C}. \end{cases}$$

Z przyjętych funkcji na  $M(t)$ ,  $P(t)$  i  $a$  wynika związek

$$(2.3.4.11) \quad \alpha - H(t) = -\frac{1}{B_y C} \left[ \frac{1}{2} M_1^2 + (2M_0 M_1 + P_1 C) \cos \omega t + \frac{1}{2} M_1^2 \cos 2\omega t \right].$$

Wprowadzając oznaczenie względnego momentu krytycznego przy odpowiednich warunkach brzegowych

$$(2.3.4.12) \quad \bar{M}_k^{(n)2} = C(\varepsilon_n B_y - P_0)$$

i wykorzystując znowu związek (2.3.1.10) mamy równania:

$$(2.3.4.13) \quad \begin{cases} \ddot{T}_1 + \frac{\Theta^2}{\omega^2} [\mu_0^{(1)} + \mu_1^{(1)} \cos \tau + \mu_2^{(1)} \cos 2\tau] T_1 = 0, \\ \ddot{T}_3 + \frac{\Theta^2}{\omega^2} [\mu_0^{(3)} + \mu_1^{(3)} \cos \tau + \mu_2^{(3)} \cos 2\tau] T_3 = 0, \end{cases}$$



gdzie

$$(2.3.4.14) \quad \begin{cases} \mu_0^{(1)} = 1 + \mu_2^{(1)}, & \mu_0^{(3)} = 1 + \mu_2^{(3)}, \\ \mu_1^{(1)} = -\frac{2 M_0 M_1 + P_1 C}{M_k^2 - M_0^2}, & \mu_1^{(3)} = \left(1 - \frac{\alpha}{\varepsilon}\right) \frac{2 M_0 M_1 + P_1 C}{M_k^2 - M_0^2}, \\ \mu_2^{(1)} = -\frac{M_1^2}{2(M_k^2 - M_0^2)}, & \mu_2^{(3)} = \left(1 - \frac{\alpha}{\varepsilon}\right) \frac{M_1^2}{2(M_k^2 - M_0^2)}. \end{cases}$$

Wprowadzono tu również zmianę zmiennej niezależnej  $\omega t = \tau$ . Wartości  $\bar{M}_k$  nie pokrywają się na ogół z rzeczywistym momentem krytycznym, gdyż liczby  $\varepsilon_n$  obliczone z równań charakterystycznych (2.3.2.7) lub (2.3.2.11) zależą za pośrednictwem  $\alpha$  od występującego w danym przypadku  $M_0$ , od którego moment krytyczny w sensie zwykłym nie zależy. Z tego powodu użyliśmy pojęcia względnego momentu krytycznego.

Z równania (2.3.1.12) mamy zawsze

$$(2.3.4.15) \quad 1 - \frac{\alpha}{\varepsilon} > 0.$$

Dla warunków brzegowych wolnego podparcia (2.3.2.1) mamy

$$\bar{M}_k^2 = M_k^2$$

i pierwsze z równań (2.3.4.13) pokrywa się z rozważonym już uprzednio równaniem (2.1.19). Gdy  $M_1 = P_1 = 0$ , to  $\mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)} = \mu_1^{(3)} = \mu_2^{(3)} = 0$  i równania (2.3.4.13) są identyczne, czyli  $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$ ; rozwiązanie (2.3.4.2) istotnie przedstawia drgania własne przy odpowiednich warunkach brzegowych, bowiem wartości  $\varepsilon_n$  spełniają żądane równania charakterystyczne (tak zostały obrane).

Ponieważ równanie (2.1.6) jest liniowe, to jego rozwiązaniem ogólnym jest funkcja

$$(2.3.4.16) \quad w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [(A_n \cos \sqrt{\varepsilon_n} x + B_n \sin \sqrt{\varepsilon_n} x) T_1^{(n)}(t) + (C_n \cosh \sqrt{\varepsilon_n - \alpha} x + D_n \sinh \sqrt{\varepsilon_n - \alpha} x) T_3^{(n)}(t)]$$

Drgania będą stateczne, jeśli takimi będą rozwiązania równań (2.3.4.13). Rozwiązanie (2.3.4.16) nie spełnia jeszcze żądanych warunków brzegowych. Stałe  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  i  $D_n$  (jest ich łącznie  $\infty^4$ ) można wyznaczyć z czterech warunków brzegowych dla każdej chwili  $t$ . Wyznaczeniem stałych zajmować się nie będziemy. W związku z tym mają tu również zastosowanie uwagi podane w pracy [3].



## 2.4. Określenie obszarów rezonansowych przy dowolnych warunkach brzegowych

Obydwa równania (2.3.4.13) są typu (0.1), które było przedmiotem rozważań w części pierwszej niniejszej pracy. Równanie pierwsze jest identyczne z rozważonym już równaniem (2.1.19) z tą jednak różnicą, że zamiast  $\Theta_n^2$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  i  $\mu_2$  z warunku (2.1.10) należy przyjąć  $\Theta_n^2$  z warunku (2.3.1.10) oraz  $\mu_0^{(1)}$ ,  $\mu_1^{(1)}$  i  $\mu_2^{(1)}$  ze wzoru (2.3.4.14). Otrzymamy je po wyznaczeniu  $\varepsilon$ . Podane uprzednio warunki (2.2.1.9), (2.2.2.10), (2.2.3.1) oraz (2.2.3.2) są ważne i w tym przypadku.

W równaniu drugim (2.3.4.13) zawsze  $\mu_2^{(3)} > 0$  ( $M_1 \neq 0$ ), zaś

$$\operatorname{sgn} \mu_1^{(3)} = - \operatorname{sgn} \mu_1^{(1)}.$$

Oznaczmy

$$(2.4.1) \quad \frac{\Theta^2}{\omega^2} \mu_0^{(3)} = \lambda^{(3)}, \quad \frac{\Theta^2}{\omega^2} \mu_1^{(3)} = \gamma_1^{(3)}, \quad \frac{\Theta^2}{\omega^2} \mu_2^{(3)} = \gamma_2^{(3)}.$$

Z porównania rys. 2 i 3 z rys. 4 i 5 widać, że obszary rezonansowe rozwiązań tegoż równania określają również nierówności otrzymane uprzednio (2.2.1.9), (2.2.2.10) (2.2.3.1) i (2.2.3.2), jeśli wstawimy do nich  $\mu_0^{(3)}$ ,  $\mu_1^{(3)}$  i  $\mu_2^{(3)}$  ze wzorów (2.3.4.14) i odpowiednio dobierzemy znaki nierówności tak, by nie były sprzeczne. Wyjątek stanowi drugi obszar rezonansowy. Granice tego obszaru zależą od wzajemnego stosunku  $\gamma_1^{(3)}$  i  $\gamma_2^{(3)}$ . Powierzchnie bowiem  $\lambda_c$  i  $\lambda_s$ , dla  $\gamma_2^{(3)} > 0$  przecinają się wzdłuż krzywej, dla której wartości parametrów  $\gamma_1^{(3)}$  i  $\gamma_2^{(3)}$  podano w tablicy 1, której odpowiada rys. 6. Jeśli  $\gamma_1^{(3)}$  i  $\gamma_2^{(3)}$  leżą na podanej krzywej, to drugi obszar rezonansowy równania drugiego (2.3.4.13) nie istnieje. Decydują wtedy parametry równania pierwszego. Stwierdzenie to jest słuszne dla każdej harmonicznej.

W rozwiązywaniu zagadnienia pominięto tłumienie. Wyznaczone obszary rezonansowe dają więc ograniczenie parametrów z zapasem, bowiem na skutek tłumienia obszary się zwązają i oddalają się od osi  $\lambda$ .

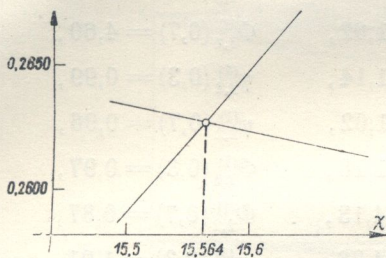
## 2.5. Przykład

W celu zilustrowania otrzymanych wyników rozwiązano następujący przykład.

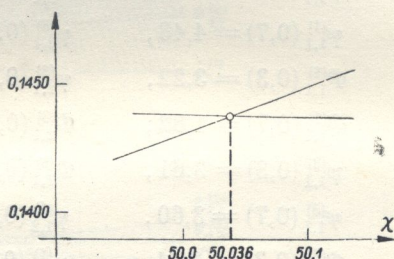
Dla płaskownika o długości  $l = 500$  cm, wysokości  $h = 70$  cm i grubości  $b = 7$  cm przyjęto  $E = 2 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup> oraz  $G = 7,7 \cdot 10^5$  kG/cm<sup>2</sup>. Sztywności wynoszą:  $B_y = 4 \cdot 10^9$  kG/cm<sup>2</sup> oraz  $C = 5,774 \cdot 10^9$  kG/cm<sup>2</sup>. Przyjęto również masę na jednostkę długości  $m = 0,001198$  kG sek<sup>2</sup> cm<sup>-2</sup>. Przy warunkach przegubowego utwierdzenia na obydwu końcach pierwsza siła krytyczna (E u l e r a)  $P_k = 16 \cdot 10^4$  kG. Przyjmujemy  $P_0 = 1/10 P_k = 16 \cdot 10^3$  kG. Pierwszy moment krytyczny przy sile osiowej  $P_0$  jest



$M_k = 2883 \cdot 10^4$  kG cm również przy warunkach wolnego podparcia. Obie-  
 ramy  $M_0 = 1/10 M_k = 2883 \cdot 10^3$  kG cm. Jako warunki brzegowe przyj-  
 miemy (2.3.2.3). Obciążenie zmieniające się w czasie określimy tak, jak  
 to wskazuje rys. 8, przypadek V. Wtedy  $M_0 = eP_0$  oraz  $M_1 = eP_1$ , gdzie  
 mimośród  $e = 180,1$  cm. Ze wzoru (2.3.2.8) mamy  $\beta = 1,1$ . Dwa pierwsze  
 pierwiastki równania charakterystycznego (2.3.2.12) odczytujemy z rys.  
 11 i 12. Wynoszą one (w przybliżeniu):  $\chi_1 = 15,564$ ,  $\chi_2 = 50,036$ , a odpow-  
 wiednie częstotliwości drgań własnych mamy obliczone ze wzoru (2.3.1.10):



Rys. 11



Rys. 12

$\Theta_1 = 109,6$  1/sek,  $\Theta_2 = 361,6$  1/sek. Wprowadzone przez nas względne  
 momenty krytyczne wyliczyliśmy ze wzoru (2.3.4.12):  $\bar{M}_k^{(1)} = 3668,0 \cdot 10^4$ ,  
 $\bar{M}_k^{(2)} = 6730,6 \cdot 10^4$ . Znajdziemy następujące wartości stosunków:

$$\frac{M_0^2}{\bar{M}_k^{(1)2}} = 0,00617, \quad \frac{M_0^2}{\bar{M}_k^{(2)2}} = 0,00183.$$

Potrzebna jest również wartość

$$2 M_0 + \frac{C}{e} = 37,825 \cdot 10^6 \text{ kG cm.}$$

Przy powyższych danych współczynniki pulsacji występujące w rów-  
 naniach (2.3.4.13) dla pierwszych dwu harmonicznych są następujące:

$$\begin{aligned} \mu_{1,1}^{(1)} &= -1,037 \eta_1, & \mu_{2,1}^{(1)} &= -0,503 \eta_1^2, \\ \mu_{1,2}^{(1)} &= -0,563 \eta_2, & \mu_{2,2}^{(1)} &= -0,501 \eta_2^2, \\ \mu_{1,1}^{(3)} &= 0,963 \eta_1, & \mu_{2,1}^{(3)} &= 0,467 \eta_1^2, \\ \mu_{1,2}^{(3)} &= 0,550 \eta_2, & \mu_{2,2}^{(3)} &= 0,489 \eta_2^2, \\ \eta_1 &= \frac{M_1}{M_k^{(1)}}, & \eta_2 &= \frac{M_1}{M_k^{(2)}} = 0,544 \eta_1. \end{aligned}$$

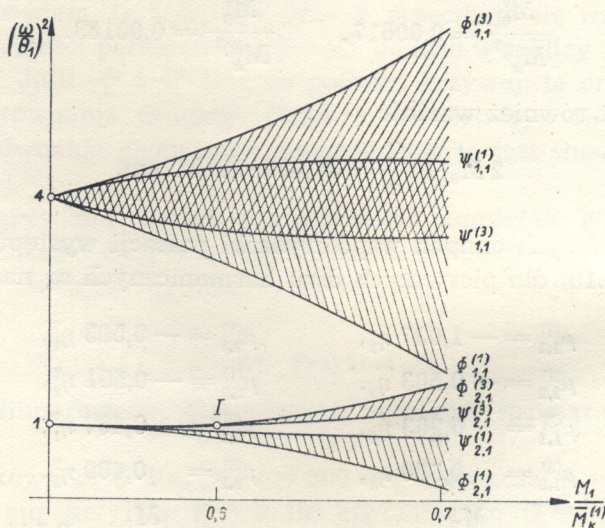
Indeks górny (w nawiasie) podaje odpowiednie równanie (2.3.4.13), pierw-  
 szy indeks dolny oznacza kolejny współczynnik pulsacji w danym rów-



naniu, a wskaźnik dolny drugi — rząd harmonicznej. Zmiennym będzie stosunek  $\eta_1$ , w zależności od którego wyznaczamy obszary rezonansowe.

Oznaczmy lewe strony warunków (2.2.1.9) oraz (2.2.2.10) symbolami  $\Phi_{i,k}^{(j)}$  a ich prawe strony symbolami  $\psi_{i,k}^{(j)}$ , gdzie wskaźnik  $j$  oznacza równanie ruchu (2.3.4.13),  $i$  rozważany obszar rezonansowy, a  $k$  rząd harmonicznej. Obliczając wartości współczynników pulsacji dla  $\eta_1 = 0,3, 0,7$  otrzymamy następujące wartości:

$\psi_{1,1}^{(1)}(0,3) = 4,44,$	$\Phi_{2,1}^{(1)}(0,6) = 0,36,$	$\Phi_{1,2}^{(3)}(0,3) = 4,15,$
$\psi_{1,1}^{(1)}(0,7) = 4,48,$	$\psi_{2,1}^{(3)}(0,3) = 1,02,$	$\Phi_{1,2}^{(3)}(0,7) = 4,60,$
$\Phi_{1,1}^{(1)}(0,3) = 3,22,$	$\psi_{2,1}^{(3)}(0,7) = 1,14,$	$\psi_{2,2}^{(1)}(0,3) = 0,99,$
$\Phi_{1,1}^{(1)}(0,7) = 1,82,$	$\Phi_{2,1}^{(3)}(0,3) = 1,02,$	$\psi_{2,2}^{(1)}(0,7) = 0,96,$
$\psi_{1,1}^{(3)}(0,3) = 3,61,$	$\Phi_{2,1}^{(3)}(0,7) = 1,18,$	$\Phi_{2,2}^{(1)}(0,3) = 0,97,$
$\psi_{1,1}^{(3)}(0,7) = 3,60,$	$\psi_{1,2}^{(1)}(0,3) = 4,13,$	$\Phi_{2,2}^{(1)}(0,7) = 0,87,$
$\Phi_{1,1}^{(3)}(0,3) = 4,74,$	$\psi_{1,2}^{(1)}(0,7) = 4,28,$	$\psi_{2,2}^{(3)}(0,3) = 1,01,$
$\Phi_{1,1}^{(3)}(0,7) = 6,32,$	$\Phi_{1,2}^{(1)}(0,3) = 3,76,$	$\psi_{2,2}^{(3)}(0,7) = 1,03,$
$\psi_{2,1}^{(1)}(0,3) = 0,98,$	$\Phi_{1,2}^{(1)}(0,7) = 3,29,$	$\Phi_{2,2}^{(3)}(0,3) = 1,01,$
$\psi_{2,1}^{(1)}(0,7) = 0,92,$	$\psi_{1,2}^{(3)}(0,3) = 3,87,$	$\Phi_{2,2}^{(3)}(0,7) = 1,09.$
$\Phi_{2,1}^{(1)}(0,3) = 0,92,$	$\psi_{1,2}^{(3)}(0,7) = 3,96,$	

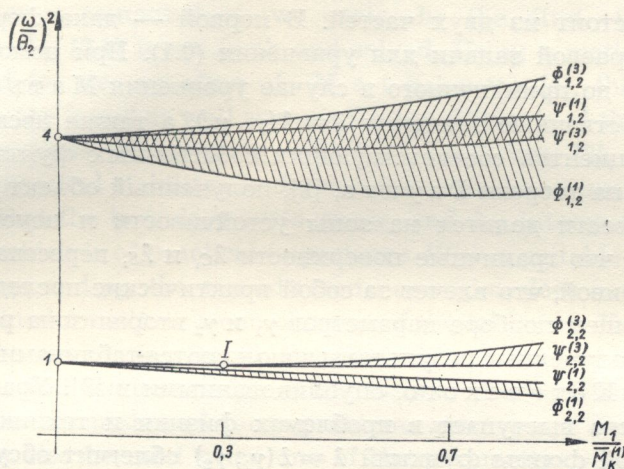


Rys. 13

Jedynie wartość funkcji  $\Phi_{2,1}^{(1)}$  została wyliczona dla  $\eta_1 = 0,6$  ze względu na to, że przy naszych przybliżeniach pierwiastek dla bliższych wartości



przyjmuje wartość urojoną. Funkcje  $\Phi_{i,k}^{(j)}$  i  $\psi_{i,k}^{(j)}$  podano na wykresach (rys. 13 i 14). Zauważmy, że w drugim obszarze rezonansowym funkcje  $\psi_{2,1}^{(3)}$  i  $\Phi_{2,1}^{(3)}$  przecinają się w punkcie  $\approx 0,3$ . Na osi odciętych rys. 14 przyjmowano wartości  $\eta_1$  obliczone z zależności  $\eta_2 = 0,544\eta_1$ .



Rys. 14

Wartości współrzędnych punktu leżącego w którymkolwiek z obszarów niestatecznych (dla równania pierwszego lub drugiego) odpowiadają drgania niestateczne.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] A. Grzędzielski i J. Nowiński, *Obliczanie ostrostupów trójprętowych*, Sprawozd. I.T.L., 4,26 (1938), s. 5-66.
- [2] O. Haupt, *Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten*, Math. Annalen, t. 79, 278 (1919).
- [3] K. Klotter, *Die Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Achsialkraft bei beliebigen Randbedingungen*, Ing. Arch. 18 (1950), s. 363.
- [4] N. W. McLachlan, *Teorja i priloženja funkcji Mathieu*, Moskwa 1953 (tłum. z jęz. ang.).
- [5] J. Naleszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, Warszawa 1953.
- [6] J. A. Pratusiewicz, *Wariacjonnyje metody w stroitielnoj miechanikie*, Moskwa-Leningrad 1948.
- [7] W. E. Sałion, *Dinamiczeskaja ustojcziwost' płoskiej formy izgiba*, Dokł. AN ZSSR, t. 78, 5 (1951).
- [8] N. K. Snitko, *Metody rasczota sooruzenij na wibracju i udar*, Leningrad 1953.
- [9] K. Klotter i G. Kotowski, *Zeitschr. Angew. Math. Mech.*, t. 23, 3 (1943).



## ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Работа состоит из двух частей. В первой — дана формулировка и решение краевой задачи для уравнения (0.1). При помощи метода, аналогичного до примененного в случае уравнения М а т ь е, [4], определяются собственные значения  $\lambda = \lambda(\gamma_1, \gamma_2)$ , а также несколько первых коэффициентов соответствующих собственных функций. Далее, основываясь на теореме Г а у п т а, [2], полученный объект динамической устойчивости делится на зоны устойчивости и неустойчивости. Обнаружено, что граничные поверхности  $\lambda_c$  и  $\lambda_s$  пересекаются вдоль некоторой кривой, что влечет за собой практические последствия. При соответствующем подборе параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  вторая зона резонанса не выступает. Полученные результаты дополняются таблицами К. К л о т т е р а и Г. К о т о в с к о г о, опубликованными в [9]. Уравнение (0.1) довольно часто выступает в проблемах физики и техники и знание аналитической формы функций  $\lambda = \lambda(\gamma_1, \gamma_2)$  облегчит обсуждение соответственных вопросов. Полученное аналитическое представление можно применить также в случае, когда один из параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  является известной функцией второго.

Во второй части работы рассматривается динамическая устойчивость полосы, нагруженной на концах моментом  $M(t)$  и осевой силой  $P(t)$ , при той же угловой частоте  $\omega$ . Рассмотрены также краевые условия свободного опирания и другие. Оказывается, что для краевых условий свободного опирания можно подобрать  $M_0, M_1, P_0$  и  $C$  так, чтобы получить неполную последовательность зон резонанса. В особенности исключается основная резонансная зона. При других краевых условиях применяется метод К. К л о т т е р а в измененном виде, доводя вопрос до рассмотрения двух независимых уравнений типа (0.1). Аналитический вид зон резонанса, полученных в случае свободно опертых краев, формально является таким же, как и при других краевых условиях, при соответственно вычисленных значениях корней характеристических уравнений собственных колебаний. Зоны резонанса при различных краевых условиях являются суммой зон резонанса для каждого уравнения системы (2.3.4.13).



DYNAMICAL STABILITY OF PLANE FORM OF BENDING WITH VARIOUS  
BOUNDARY CONDITIONS

The paper is composed of two parts. In the first, the boundary problem for Eq. (0.1) is set forth and solved. Using a method analogous to that used for the equation of M a t h i e u, [4], the eigenvalues  $\lambda = \lambda(\gamma_1, \gamma_2)$  are found as well as some first coefficients of the corresponding eigenfunctions. Next, using H a u p t theorem, [2], the obtained «body of dynamical stability» is divided into stable and unstable regions. It is found that the boundary surfaces  $\lambda_{C_i}$  and  $\lambda_{S_i}$  intersect along a certain curve, which is of practical importance. With a suitable choice of the parameters  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$ , the second resonance region does not appear. The results obtained constitute a complement of the tables of K. K l o t t e r and G. K o t o w s k i, [9]. Eq. (0.1) is often met in physical and engineering problems and the knowledge of the form of the function  $\lambda = \lambda(\gamma_1, \gamma_2)$  will make the discussion of these problems more easy. The expressions obtained can also be used when one of the parameters  $\gamma_1, \gamma_2$  is a known function of the other.

The investigation of the stability of a bar of narrow rectangular cross-section loaded at the extremities with a moment  $M(t)$  and an axial force  $P(t)$ , of the same angular frequency  $\omega$ , forms the subject of the second part of the paper. Boundary conditions of simple support and other types are considered. It is found that in the case of free support,  $M_0, M_1, P_0$  and  $C$  can be chosen in such a way as to obtain an incomplete sequence of resonance regions. In particular the basic resonance region is lacking. With other boundary conditions the method of K. K l o t t e r is used in a modified form, reducing the problem to the investigation of two independent equations of the type (0.1). The analytical representation of resonance regions obtained in the case of simply supported extremities is formally the same as in the case of other boundary conditions, with suitably calculated roots of the characteristic equations of free vibration. The resonance regions for various boundary conditions are sums of resonance regions for each equation of the system (2.3.4.13).

*Praca została złożona w Redakcji dnia 11 maja 1955 r.*