

OPTYMALNE KONFIGURACJE WIELOELEMENTOWYCH ROZGAŁĘZIEN PŁASKICH

STANISŁAW TOKARZEWSKI (WARSZAWA)

Na podstawie funkcji celu przeprowadzona została teoretyczna analiza optymalnych kątów dla wieloelementowych rozgałęzień płaskich, reprezentujących połączenia elektryczne, rurociągowo, chirurgiczne i inne. Wyniki teoretyczne zostały zilustrowane praktycznymi przykładami obliczeń optymalnych kątów dla kilku wybranych rozgałęzień płaskich.

1. WSTĘP

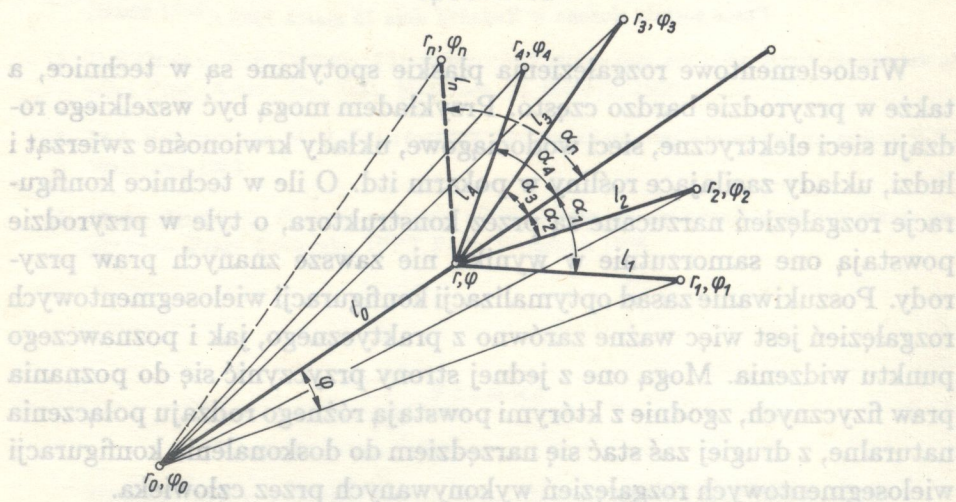
Wieloelementowe rozgałęzienia płaskie spotykane są w technice, a także w przyrodzie bardzo często. Przykładem mogą być wszelkiego rodzaju sieci elektryczne, sieci wodociągowe, układy krwionośne zwierząt i ludzi, układy zasilające rośliny w pokarm itd. O ile w technice konfiguracje rozgałęzień narzucane są przez konstruktora, o tyle w przyrodzie powstają one samorzutnie w wyniku nie zawsze znanych praw przyrody. Poszukiwanie zasad optymalizacji konfiguracji wielosegmentowych rozgałęzień jest więc ważne zarówno z praktycznego, jak i poznawczego punktu widzenia. Mogą one z jednej strony przyczynić się do poznania praw fizycznych, zgodnie z którymi powstają różnego rodzaju połączenia naturalne, z drugiej zaś stać się narzędziem do doskonalenia konfiguracji wielosegmentowych rozgałęzień wykonywanych przez człowieka.

Powyższa tematyka ma bogatą literaturę [2,4,1,5,6]. W pracach tych sformułowano zasady wariacyjne służące do optymalizacji konfiguracji jedno, dwu i trójelementowych prostych rozgałęzień płaskich. Wyniki testowano na przykładzie połączeń odpowiednio wybranych z układu krwionośnego człowieka.

Niniejsza praca formułuje zasady optymalizacji konfiguracji rozgałęzień składających się z dowolnej, ale skończonej ilości elementów. Jednocześnie, w przeciwieństwie do wyżej wymienionych prac, nie ogranicza rozważań do stałego na pojedynczym elemencie rozkładu gęstości składowych funkcji celu, dopuszczając występowanie różnego rodzaju zaburzeń powstających w okolicy punktu, z którego biorą początek segmenty tworzące rozgałęzienie.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozważmy wieloelementowe rozgałęzienie płaskie, biorące swój początek w punkcie przecięcia (r, φ) i kończące się w punktach zewnętrznych (r_i, φ_i) , (rys.1). Załóżmy, że każdy segment rozgałęzienia jest odcinkiem prostym o długości l_i liczonej od punktu przecięcia rozgałęzienia (r, φ) . Przyporządkowujemy $n + 1$ - elementowemu rozgałęzieniu płaskiemu pewną, na razie nie określoną, dowolną funkcję celu $G(r, \varphi)$, jak następuje:



Rys. 1. Schemat wieloelementowego rozgałęzienia płaskiego w układzie biegunowym

$$(2.1) \quad G(r, \varphi) = \sum_{i=0}^n G_i[l_i(r, \varphi)].$$

Funkcje $G_i(l_i)$ występujące w (2.1) nazywać będziemy i -tymi składowymi funkcji celu $G(r, \varphi)$. Ponieważ punkty zewnętrzne (r_i, φ_i) są ustalone (rys.1), wartości funkcji celu (2.1) zależą wyłącznie od położenia punktu wspólnego (r, φ) . Celem pracy jest wyznaczenie takiego położenia punktu przecięcia (r, φ) , dla którego funkcja celu $G(r, \varphi)$ osiągnie wartość minimalną. Należy zauważyć, że przy ustalonych położeniach punktów (r_i, φ_i) współrzędne punktu przecięcia (r, φ) są jednoznacznie funkcją kątów α_i (rys.1). Poszukiwanie optymalnego położenia (r, φ) jest więc równoważne poszukiwaniu optymalnych kątów α_i (rys.1), określających optymalną konfigurację $n + 1$ - elementowego rozgałęzienia płaskiego. Dotychczas nie narzucaliśmy żadnych więzów na ruch punktów przecięcia segmentów rozgałęzienia (r, φ) , (rys.1). Można jednak zauważyć, że punkt (r, φ) porusza się wyłącznie wzdłuż ustalonego kierunku $\varphi = \text{const}$, albo wyłącznie po okręgu o promieniu $r = \text{const}$ (rys.1). Te dwa przypadki rozważymy dodatkowo w niniejszej pracy. Otrzymane wyniki teoretyczne zilustrowane zostaną przykładami praktycznych obliczeń.

3. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Istnienie dla funkcji celu $G(r, \varphi)$ lokalnego minimum, określają następujące zależności:

$$(3.1) \quad \frac{\partial G}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 > 0.$$

Podstawiając (2.1) do (3.1) otrzymujemy

$$(3.2) \quad \sum_{i=0}^n g_i(l_i) \frac{\partial l_i}{\partial r} = 0, \quad \sum_{i=0}^n g_i(l_i) \frac{\partial l_i}{\partial \varphi} = 0$$

oraz

$$(3.3) \quad \sum_{i=0}^n S_i(l_i) \left(\frac{\partial l_i}{\partial r} \right)^2 + g_i(l_i) \frac{\partial^2 l_i}{\partial \varphi^2} > 0,$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left\{ \left[S_i(l_i) \left(\frac{\partial l_i}{\partial r} \right)^2 + g_i(l_i) \frac{\partial^2 l_i}{\partial r^2} \right] \left[S_j(l_j) \left(\frac{\partial l_j}{\partial r} \right)^2 + g_j(l_j) \left(\frac{\partial^2 l_j}{\partial r^2} \right) \right] - \left[S_i(l_i) \frac{\partial l_i}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial l_i}{\partial r} + g_i(l_i) \frac{\partial^2 l_i}{\partial r \partial \varphi} \right] \left[S_j(l_j) \frac{\partial l_j}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial l_j}{\partial r} + g_j(l_j) \frac{\partial^2 l_j}{\partial r \partial \varphi} \right] \right\} > 0,$$

gdzie

$$(3.4) \quad l_i = \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\varphi - \varphi_i)}$$

jest długością pojedynczego segmentu (rys.1), zaś

$$(3.5) \quad g_i(l_i) = \frac{\partial G_i(l_i)}{\partial l_i}, \quad S_i(l_i) = \frac{\partial^2 G_i(l_i)}{\partial l_i^2}$$

zostały wprowadzone dla wygody oznaczeń. Ze związku (3.4) wynikają następujące zależności:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial l_i}{\partial r} &= \frac{r - r_i \cos(\varphi - \varphi_i)}{l_i}, \\ \frac{\partial l_i}{\partial \varphi} &= \frac{r \cdot r_i \sin(\varphi - \varphi_i)}{l_i}, \\ \frac{\partial^2 l_i}{\partial r^2} &= \frac{1}{l_i} \left(\frac{r_i \sin(\varphi - \varphi_i)}{l_i} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 l_i}{\partial \varphi^2} &= r \frac{r_i \cos(\varphi - \varphi_i) - r}{l_i} + \frac{r^2}{l_i} \left(\frac{r - r_i \cos(\varphi - \varphi_i)}{l_i} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 l_i}{\partial r \partial \varphi} &= \frac{r_i \sin(\varphi - \varphi_i)}{l_i} + \frac{r}{l_i} \cdot \left(\frac{r_i \sin(\varphi - \varphi_i)}{l_i} \right) \cdot \left(\frac{r_i \cos(\varphi - \varphi_i - r)}{l_i} \right) \end{aligned}$$

wchodzące w skład układu równań (3.2) i relacji (3.3). Punktem wyjścia do wyznaczania optymalnego położenia węzła rozgałęzienia (r, φ) są znane składowe funkcje celu $G_i(l_i)$ dwukrotnie różniczkowalne względem długości elementu l_i . Opierając się na nich można wyznaczyć ze wzoru (3.5) $g_i(l_i)$ i $s_i(l_i)$, a następnie podstawić do zależności (3.2). W ten sposób otrzymuje się układ dwóch równań określających wraz z równaniami (3.4) i (3.6) dwie poszukiwane współrzędne (r, φ) . Współrzędne te będą określać optymalne położenie węzła rozgałęzienia, jeśli podstawione do zależności (3.3) spełnią je. Analiza układu równań danych w postaci (3.2) - (3.6) jest niezwykle trudna i pracochłonna. Staje się znacznie łatwiejsza, gdy do (3.2) - (3.6) wprowadzimy kąty α_i , określające konfigurację wieloelementowego rozgałęzienia płaskiego (rys.1).

4. WARUNKI OPTYMALNYCH KONFIGURACJI ROZGAŁĘZIŃ

Zarówno w technice jak i w przyrodzie składowe wybieranych do rozważań funkcji celu $G_i(l_i)$ posiadają najczęściej asymptoty, to znaczy, że po przekroczeniu pewnej długości charakterystycznej l_i^c niewiele się różnią od funkcji liniowej. Stąd przy założeniu, że elementy wielosegmentowego rozgałęzienia są większe od długości charakterystycznych l_i^c , składowe funkcji celu $G_i(l_i)$ można przedstawić w postaci

$$(4.1) \quad G_i(l_i) = a_i l_i + b_i, \quad l_i > l_i^c, \quad (4.1)$$

gdzie a_i i b_i są stałymi. Stąd pierwsze i drugie pochodne funkcji $G_i(l_i)$ są równe

$$(4.2) \quad \frac{\partial G(l_i)}{\partial l_i} = g_i(l_i) = a_i, \quad \frac{\partial^2 G(l_i)}{\partial l_i^2} = S_i(l_i) = 0.$$

Ze wzorów (3.6) oraz z rysunku 1 wynika, że słuszne są następujące zależności:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial l_i}{\partial r} &= -\cos \alpha_i, & \frac{\partial l_i}{\partial \varphi} &= r \sin \alpha_i, \\ \frac{\partial^2 l_i}{\partial r^2} &= \frac{1}{l_i} \sin^2 \alpha_i, & \frac{\partial^2 l_i}{\partial \varphi^2} &= r \cos \alpha_i + \frac{r^2}{l_i} \cos^2 \alpha_i, \\ \frac{\partial^2 l_i}{\partial r \partial \varphi} &= \sin \alpha_i + \frac{r}{l_i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i, \end{aligned}$$

gdzie α_i są kątami określającymi konfigurację rozważanego wieloelementowego rozgałęzienia (rys.1). Podstawiając (4.2) - (4.3) do (3.2) - (3.3) otrzymujemy po uciążliwych rachunkach następujące warunki konieczne:

$$(4.4) \quad \sum_{i=0}^n a_i \cos \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n a_i \sin \alpha_i = 0,$$

i dostateczne:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{l_i} \sin^2 \alpha_i &> 0, \\ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{a_i a_j}{l_i l_j} \sin^2(\alpha_i - \alpha_j) &> 0, \end{aligned}$$

istnienia minimum funkcji celu (4.1). Ponieważ a_i i l_i są większe od zera, warunki dostateczne istnienia minimum (4.5) spełnione są tożsamościowo.

Stąd wynika, że dla wieloelementowego rozgałęzienia płaskiego o elementach większych od długości charakterystycznych, funkcja celu (4.1) osiąga minimum wtedy, gdy kąty rozgałęzienia α_i spełniają związki (4.4). Należy zauważyć, że warunki istnienia minimum (4.4) nie zależą od położenia punktów zewnętrznych rozgałęzienia (r_i, φ_i) . Oznacza to, że nie zależą od długości elementów tworzących rozgałęzienie, a więc związane są wyłącznie z konfiguracją wieloelementowego rozgałęzienia płaskiego. Należy również zauważyć, że następujące zależności:

$$(4.6) \quad \sum_{i=0}^n a_i \cos \alpha_i = 0, \quad \varphi = \text{const}$$

oraz

$$(4.7) \quad \sum_{i=0}^n a_i \sin \alpha_i = 0, \quad r = \text{const}$$

określają warunki dla optymalnej konfiguracji wieloelementowego rozgałęzienia płaskiego przy założeniu, że punkt węzłowy połączenia porusza się wyłącznie wzdłuż z góry ustalonego kierunku oraz po okręgu o ustalonym promieniu.

5. WIĘZY GEOMETRYCZNE

Analiza rysunku 1 prowadzi do wniosku, że słuszne są następujące zależności:

$$(5.1) \quad \alpha_0 = 180^\circ, \\ r_i \cos(\varphi - \varphi_i) - \frac{r_i \sin(\varphi - \varphi_i)}{\text{tg} \alpha_i} = r, \quad i = 1, n.$$

Nietrudno zauważyć, że związki (5.1) są więzami geometrycznymi wynikającymi z faktu, że wieloelementowe rozgałęzienie płaskie posiada punkt centralny (r, φ) , gałęzie jego przechodzą przez ustalone z góry punkty zewnętrzne (r_i, φ_i) oraz jeden z jego elementów jest promieniem bieżącym układu biegunowego. Równania (5.1) wraz z równaniami (4.4), bądź (4.6), bądź (4.7) stanowią układ $n+3$ równań z $n+3$ niewiadomymi parametrami $r, \varphi, \alpha_i (i = 0, 1, \dots, n)$. Równania te określają optymalną konfigurację wieloelementowego rozgałęzienia płaskiego przechodzącego przez z góry dane punkty zewnętrzne (r_i, φ_i) , (rys.1). Układy (5.1) i (4.4), (5.1) i (4.6), (5.1) i (4.7) dotyczą przypadków, gdy na ruch punktu centralnego rozgałęzienia nie nakłada się żadnych więzów, gdy porusza

się on wzdłuż z góry ustalonego kierunku, gdy porusza się po okręgu. Do równań (5.1) warto dołączyć, wynikający z rysunku 1, związek

$$(5.2) \quad l_i = \frac{\sin(\varphi - \varphi_i)}{\sin \alpha_i}$$

określający długości poszczególnych elementów rozgałęzienia płaskiego.

6. PRZYKŁADY OPTYMALNYCH KONFIGURACJI ROZGAŁEŻEŃ PŁASKICH

Optymalizacja konfiguracji rozgałęzień w warunkach poruszania się punktu centralnego po okręgu nie będzie analizowana. Skoncentrujemy uwagę wyłącznie na równaniach (4.6) i (4.4). Dodatkowo ograniczymy rozważania tylko do przypadków, w których optymalne wartości kątów rozgałęzień nie będą zależały w sposób jawny od położenia punktów zewnętrznych (r_i, φ_i) , (rys.1). Z ogólnego wzoru (4.6) wynikają następujące formuły:

dla $n = 1$ (rys.2a)

$$(6.1) \quad a_0 - a_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

stąd

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_0}{a_1};$$

dla $n = 2$ i po przyjęciu $\alpha_2 = 0$ (rys.2b)

$$(6.2) \quad a_0 - a_1 \cos \alpha_1 - a_2 = 0,$$

stąd

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_0 - a_2}{a_1};$$

dla $n = 3$ i przy założeniu symetrii $\alpha_1 = \alpha_2$ (rys.2c)

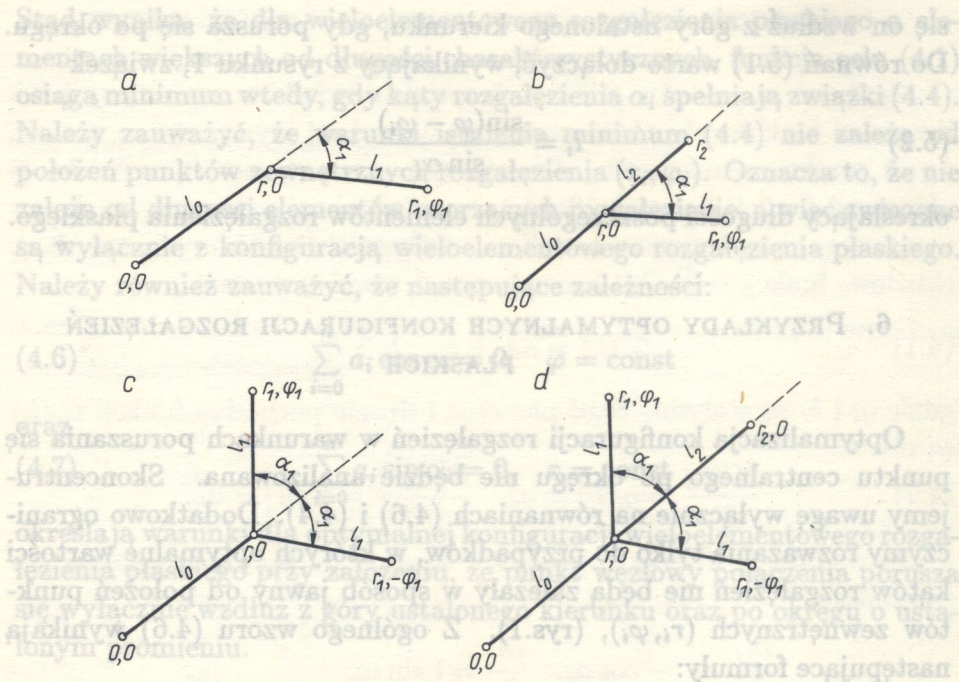
$$(6.3) \quad a_0 - a_1 \cos \alpha_1 - a_2 \cos \alpha_1 = 0,$$

stąd

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_0}{a_1 + a_2};$$

dla $n = 4$, po założeniu symetrii $\alpha_1 = \alpha_3$ i przyjęciu $\alpha_2 = 0$ (rys.2d)

$$(6.4) \quad a_0 - a_1 \cos \alpha_1 - a_2 - a_3 \cos \alpha_1 = 0,$$



Rys. 2. Przykłady typowych rozgałęzień płaskich poddawanych optymalizacji wzdłuż ustalonego kierunku (linia przerywana)

stad

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_0 - a_2}{a_1 + a_3}$$

Formuły (6.1) - (6.4) określają wartości optymalnych kątów dla typów rozgałęzień pokazanych na rysunku 2. Formuły te obowiązują w warunkach poruszania się punktu centralnego rozgałęzienia wzdłuż ustalonego kierunku (rys.2, linia przerywana). Biorąc pod uwagę wzory (4.4) otrzymujemy:

dla $n = 2$ (rys.3a)

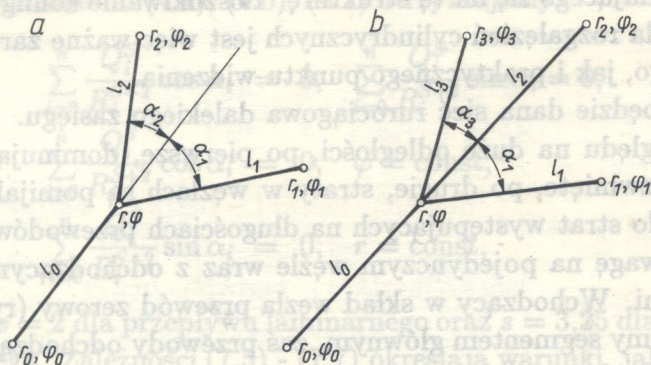
$$(6.5) \quad a_0 - a_1 \cos \alpha_1 - a_2 \cos \alpha_2 = 0, \quad a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 = 0,$$

stad

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_0^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_0a_1}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{a_0^2 + a_2^2 - a_1^2}{2a_0a_2};$$

dla $n = 3$ i $\alpha_2 = 0$ (rys.3b)

$$(6.6) \quad a_0 - a_1 \cos \alpha_1 - a_2 - a_3 \cos \alpha_3 = 0, \quad a_1 \sin \alpha_1 + a_3 \sin \alpha_3 = 0,$$



Rys. 3. Przykłady rozgałęzień płaskich poddanych optymalizacji w warunkach całkowitej swobody poruszania się punktu węzłowego

stąd

$$\cos \alpha_1 = \frac{(a_0 - a_2)^2 + a_1^2 - a_2^2}{2(a_0 - a_2)a_1}, \quad \cos \alpha_3 = \frac{(a_0 - a_2)^2 + a_3^2 - a_1^2}{2(a_0 - a_3)a_3}$$

Formuły (6.5) - (6.6) określają wartości optymalnych kątów dla typów rozgałęzień pokazanych na rys.3. Formuły te otrzymano w warunkach całkowitej swobody w zajmowaniu położenia przez punkt centralny rozgałęzienia. Należy zauważyć, że funkcja celu postawionego dla badanego rozgałęzienia może nie osiągać minimum. Taka sytuacja zaistnieje w przypadku, gdy prawe strony formuł (6.1) - (6.6) dadzą wynik większy od jedności lub mniejszy od minus jedności.

7. OPTYMALNE KONFIGURACJE ROZGALEZIEN CYLINDRYCZNYCH DLA PRZEPLYWÓW USTALONYCH

W Polsce, a także w wielu innych krajach, spotkać można rurociągi dalekiego zasięgu służące do przesyłania ropy naftowej, gazu ziemnego, wody, a także wielu innych materiałów ciekłych i gazowych. W najbliższym czasie rurociągi te ulegną dalszemu powiększeniu. Jednym z podstawowych problemów transportu systemem rurociągów jest minimalizacja strat energii przepływu. Straty te przy z góry zaprojektowanych wydatkach i wymiarach przewodów zależą głównie od struktury geometrycznej sieci rurociągowej, a dokładniej, od konfiguracji każdego

węzła składającego się na tę strukturę. Poszukiwanie konfiguracji optymalnych dla rozgałęzień cylindrycznych jest więc ważne zarówno z teoretycznego, jak i praktycznego punktu widzenia.

Niech będzie dana sieć rurociągową dalekiego zasięgu. W sieci takiej ze względu na duże odległości, po pierwsze, dominują przepływy w pełni rozwinięte, po drugie, straty w węzłach są pomijalnie małe w stosunku do strat występujących na długościach przewodów. Skoncentrujemy uwagę na pojedynczym węźle wraz z odchodzącymi od niego przewodami. Wchodzący w skład węzła przewód zerowy (rys.1), nazywać będziemy segmentem głównym, zaś przewody odchodzące od niego - segmentami bocznymi (rys.1).

Niech w punkcie (r_0, φ_0) wpływa ciecz z wydatkiem Q_0 i niech wypływa w punktach $(r_1, \varphi_1 : r_2, \varphi_2 : \dots : r_n, \varphi_n)$ z wydatkami odpowiednio Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Dla w pełni rozwiniętego przepływu gradient ciśnienia $\Delta p/l$ zależy od wydatku cieczy przez rurę następująco:

dla przepływu laminarnego

$$(7.1) \quad \frac{\Delta p}{l} = \frac{8\eta Q}{\pi R^4},$$

dla przepływu turbulentnego

$$(7.2) \quad \frac{\Delta p}{l} = \frac{0,791 \cdot \rho}{\pi^2} \sqrt[4]{\frac{2 Q^{2,25}}{\nu R^{5,25}}},$$

gdzie η, ν, R oznaczają odpowiednio współczynnik lepkości, lepkość kinematyczną, promień cylindra. Stąd składowe gęstości strat energii przepływu odniesione do jednostki długości cylindra i jednostki czasu równają się:

dla przepływu laminarnego

$$(7.3) \quad a = Q \cdot \frac{\Delta p}{l} = \frac{8\eta Q^2}{\pi R^4};$$

dla przepływu turbulentnego

$$(7.4) \quad a = Q \cdot \frac{\Delta p}{l} = \frac{0,791 \cdot \rho}{\pi^2} \sqrt[4]{\frac{2 Q^{3,25}}{\nu R^{5,25}}}.$$

Potraktujemy węzeł rurociągowy jako wielosegmentowe rozgałęzienie płaskie. Założmy, że straty energii będą funkcją celu. Gęstości składowych funkcji celu określają związki (7.3) i (7.4). Podstawiając (7.3) i

(7.4) odpowiednio do (4.4), (4.6), (4.7) otrzymujemy

$$(7.5) \quad \sum_{i=0}^n \frac{Q_i^S}{R_i^{S+2}} \cos \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n \frac{Q_i^S}{R_i^{S+2}} \sin \alpha_i = 0,$$

$$(7.6) \quad \sum_{i=0}^n \frac{Q_i^S}{R_i^{S+2}} \cos \alpha_i = 0, \quad \varphi = \text{const},$$

$$(7.7) \quad \sum_{i=0}^n \frac{Q_i^S}{R_i^{S+2}} \sin \alpha_i = 0, \quad r = \text{const},$$

przy czym $s = 2$ dla przepływu laminarnego oraz $s = 3,25$ dla przepływu turbulentnego. Zależności (7.5) - (7.7) określają warunki, jakie konfiguracja rozgałęzienia rurowego powinna spełniać, aby być konfiguracją optymalną. Warunki (7.5), (7.6) i (7.7) dotyczą kolejno: osiągania przez funkcję strat energii bezwzględnego minimum, minimum wzdłuż kierunku segmentu głównego. Należy zwrócić uwagę, że optymalne kąty rozgałęzienia rurowego nie zależą od długości przewodów, a jedynie od wydatków i promieni rur. Związki (7.5) - (7.7) są bardzo ważne z punktu widzenia ekonomiki transportu materiałów ciekłych w systemie rurowym dalekiego zasięgu. Jeśli na przykład w każdym węzle sieci rurowej spełnione są związki (7.5), to ilość energii zużywanej na transport cieczy tą siecią jest przy ustalonych wydatkach i promieniach przewodów minimalna. Szczegółową analizę strat energii w optymalnych i nieoptymalnych rozgałęzieniach sieci rurowych dalekiego zasięgu przedstawia praca [12].

8. OPTYMALNE KONFIGURACJE ROZGAŁĘZIEN CYLINDRYCZNYCH DLA PRZEPLÝWÓW PULSUJĄCYCH

Rozważmy wielosegmentowe rozgałęzienie cylindryczne. Niech rys.1 przedstawia schemat tego rozgałęzienia. Załóżmy, że w każdym cylindrze wydatek cieczy zmienia się w czasie w sposób harmoniczny

$$(8.1) \quad Q(t) = Q[1 + \cos(\omega t - \gamma)],$$

gdzie kąt γ jest kątem przesunięcia fazowego. Jednocześnie gradient ciśnienia pulsuje jak następuje:

$$(8.2) \quad -\frac{\Delta p}{l} = \rho(\bar{A} + A \cos \omega t).$$

W cylindrze o stałym przekroju powstaje pod wpływem gradientu ciśnienia (8.2) następujący profil prędkości [9]:

$$\begin{aligned}
 u(r, t) &= \frac{\bar{A}}{4v} f(r) + \frac{A}{\omega} [f_s(r) \sin \omega t + f_c(r) \cos \omega t], \\
 f(r) &= R^2 - r^2, \\
 f_s(r) &= 1 - \frac{\text{bei}(kR) \cdot \text{bei}(kr) - \text{ber}(kR) \cdot \text{ber}(kr)}{\text{ber}^2(kR) + \text{bei}^2(kR)}, \\
 f_c(r) &= \frac{\text{bei}(kR)\text{ber}(kr) - \text{ber}(kR) \cdot \text{bei}(kr)}{\text{ber}^2(kR) + \text{bei}^2(kR)}, \\
 k &= R\sqrt{\frac{\omega}{\nu}},
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

gdzie r, ω, ν, ρ oraz $\text{ber}(kR)$ i $\text{bei}(kR)$ oznaczają odpowiednio współrzedną promieniową, częstość pulsacji, lepkość kinematyczną, gęstość cieczy oraz funkcje KELVINA [10]. Stąd wydatek równa się

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= \frac{\pi R^4}{8\nu} + \frac{2\pi A}{\omega} \cdot \sqrt{F_s^2(R) + F_c^2(R)} \cdot \cos(\omega t - \gamma), \\
 \text{tg } \gamma &= \frac{F_s(R)}{F_c(R)}, \\
 F_s(R) &= \frac{R^2}{2} + \frac{R}{k} \cdot \frac{\text{bei}(kR)\text{ber}'(kR) - \text{ber}(kR) \cdot \text{bei}(kR)}{\text{ber}^2(kR) + \text{bei}^2(kR)}, \\
 F_c(R) &= \frac{R}{k} \cdot \frac{\text{bei}(kR) \cdot \text{bei}'(kR) + \text{ber}(kR) \cdot \text{ber}'(kR)}{\text{ber}^2(kR) + \text{bei}^2(kR)}.
 \end{aligned}
 \tag{8.4}$$

Wydatek (8.4) musi się równać wydatkowi (8.1). Otrzymujemy wówczas związki

$$\bar{A} = \frac{8\nu Q}{\pi R^4}; \quad A = \frac{Q\omega}{2\pi \cdot \sqrt{F_s^2(R) + F_c^2(R)}},
 \tag{8.5}$$

określające gradient ciśnienia (8.2) w zależności od wydatku (8.1). Gęstość energii dysypowanej w odniesieniu do jednostki długości naczynia i jednostki czasu określa następująca zależność:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\Delta p}{l} \cdot Q = \rho \cdot Q \left(1 + \frac{F_s(R) \sin \omega t + F_c(R) \cos \omega t}{\sqrt{F_s^2(R) + F_c^2(R)}} \right) \times \\
 &\quad \times \left(\frac{8\nu Q}{\pi R^4} + \frac{Q\omega \cos \omega t}{2\pi \cdot \sqrt{F_s^2(R) + F_c^2(R)}} \right).
 \end{aligned}
 \tag{8.6}$$

Uśredniając po czasie funkcję opisywaną zależnością (8.6) otrzymujemy wyrażenie

$$(8.7) \quad a = \frac{\rho Q^2}{\pi} \left(\frac{8v}{R^4} + \frac{\omega}{4} \cdot \frac{F_c(R)}{F_S^2(R) + F_c^2(R)} \right)$$

określające średnie w cyklu straty energii przepływu, przypadające na jednostkę długości naczyń wchodzących w skład badanego rozgałęzienia cylindrycznego (rys.1). Potraktujmy rozgałęzienie cylindryczne jako wielosegmentowe rozgałęzienie płaskie. Za funkcję celu przyjmijmy straty energii. Gęstości składowych funkcji celu określają związki (8.7). Podstawiając (8.7) do (4.4), (4.6) i (4.7) otrzymujemy:

$$(8.8) \quad \sum_{i=0}^n \frac{S(R_i) \cdot Q_0^2}{R_i^4} \cos \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n \frac{S(R_i) \cdot Q_0^2}{R_i^4} \sin \alpha_i = 0,$$

$$(8.9) \quad \sum_{i=0}^n \frac{S(R_i) \cdot Q_0^2}{R_i^4} \cos \alpha_i = 0, \quad \varphi = \text{const},$$

$$(8.10) \quad \sum_{i=0}^n \frac{S(R_i) \cdot Q_0^2}{R_i^4} \sin \alpha_i = 0, \quad r = \text{const},$$

$$S(R_i) = 1 + \frac{\omega R^4}{32v} \cdot \frac{F_c(R)}{F_S^2(R) + F_c^2(R)}.$$

Zależności (8.8), (8.9), (8.10) określają warunki, jakie konfiguracje rozgałęzienia cylindrycznego musi spełniać, aby być konfiguracją optymalną dla pulsującego przepływu cieczy niutonowskiej. Warunki (8.8), (8.9), (8.10) dotyczą kolejno minimum bezwzględnego, minimum wzdłuż kierunku segmentu głównego, minimum wzdłuż kierunku prostopadłego do kierunku głównego. Ze wzorów (8.8) - (8.10) wynika, że optymalne kąty rozgałęzienia cylindrycznego zależą w przypadku przepływu pulsującego od czterech parametrów: od promieni cylindrów, wydatków, lepkości kinematycznej oraz od częstości pulsacji. Należy zauważyć, że dla częstości pulsacji $\omega = 0$ warunki (8.8) - (8.10) przyjmują postać związków (7.5) - (7.7) obowiązujących dla przepływów ustalonych. W technice nie występują bądź występują bardzo rzadko sieci rurociągowe, w których ciecz pulsowałaby harmonicznym. Do nich, na przykład, należą układy krwionośne. Interesujące wydaje się sprawdzenie, czy rozgałęzienia układów krwionośnych są optymalne z punktu widzenia związków (8.8) - (8.10). Temat ten podejmuje praca [13], będąca kolejnym przykładem praktycznych zastosowań wieloelementowych rozgałęzień płaskich.

9. CAŁKOWITA POWIERZCHNIA, OBJĘTOŚĆ ORAZ NAPRĘŻENIA STYCZNE JAKO FUNKCJE CELU DLA KONFIGURACJI ROZGAŁĘZIENŃ CYLINDRYCZNYCH

Schemat wielosegmentowego połączenia cylindrycznego przedstawia rysunek 1. Przyjmijmy dla tego połączenia całkowitą powierzchnię S , całkowitą objętość V oraz całkowite naprężenie styczne T jako funkcje celu. Stąd możemy napisać

$$(9.1) \quad S = 2 \sum_{i=0}^n \pi R_i l_i, \quad V = \sum_{i=0}^n \pi R_i^2 l_i, \quad T = \frac{8\eta Q_i}{R_i^2} \cdot l_i.$$

Należy zauważyć, że naprężenia styczne (9.1)₁ zostały wyznaczone po przyjęciu ustalonego przepływu Poiseuille'a. Składowe funkcje celu wynikające ze związków (9.1) wynoszą

$$(9.2) \quad a_i = \pi R_i, \quad a_i = \pi R_i^2, \quad a_i = \frac{8\eta Q_i}{R_i^2}.$$

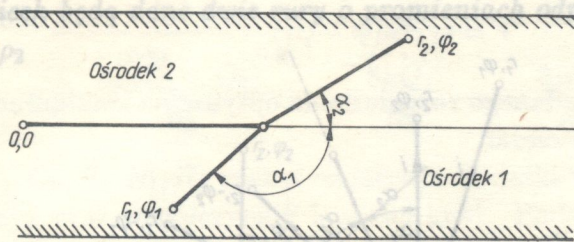
Podstawiając (9.2) do (4.4), (4.6) i (4.7) otrzymamy warunki optymalnych konfiguracji minimalizujące całkowitą powierzchnię rozgałęzienia, całkowitą objętość rozgałęzienia oraz całkowite naprężenia styczne w rozgałęzieniu. Analizę optymalnych konfiguracji rozgałęzień cylindrycznych ze względu na funkcje celu (9.1) przedstawiają w odniesieniu do wybranych połączeń naczyń krwionośnych prace [5,14].

10. PROSTE PRZYKŁADY PRAKTYCZNYCH ZASTOSOWAŃ

10.1. Niech będą dane dwa różne ośrodki sąsiadujące ze sobą

Niech z punktu r_1, φ_1 zostanie wysłany sygnał świetlny. Po jakimś czasie T sygnał ten dotrze do punktu r_2, φ_2 (rys.4). Zakładamy, że prędkości światła w ośrodkach 1 i 2 są różne i wynoszą odpowiednio v_1 i v_2 . Należy zauważyć (rys.4), że droga światła wraz z granicą między ośrodkami tworzą trójelementowe rozgałęzienie płaskie, dla którego funkcja celu jest czas T . Stąd składowe funkcje celu wynoszą

$$(10.1) \quad G(l_0) = 0, \quad G_1(l_1) = \frac{l_1}{v_1}, \quad G_2(l_2) = \frac{l_2}{v_2}.$$



Rys. 4. Droga sygnału świetlnego

Gęstości składowych funkcji celu równają się (patrz (4.2))

$$(10.2) \quad a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{v_1}, \quad a_2 = \frac{1}{v_2}.$$

Podstawiając (10.2) do (4.6) oraz korzystając z (5.1), (5.2) i z faktu, że $\varphi = 0$ otrzymujemy następujący układ równań:

$$(10.3) \quad \begin{aligned} & \frac{\cos \alpha_1}{v_1} + \frac{\cos \alpha_2}{v_2} = 0, \\ & r_2 \cos \varphi_1 + \frac{r_2 \sin \varphi_2}{\operatorname{tg} \alpha_2} = r_1 \cos \varphi_1 + \frac{r_1 \sin \varphi_1}{\operatorname{tg} \alpha_1}, \\ & T = - \left(\frac{r_1 \sin \varphi_1}{v_1 \sin \alpha_1} + \frac{r_2 \sin \varphi_2}{v_2 \sin \alpha_2} \right) \end{aligned}$$

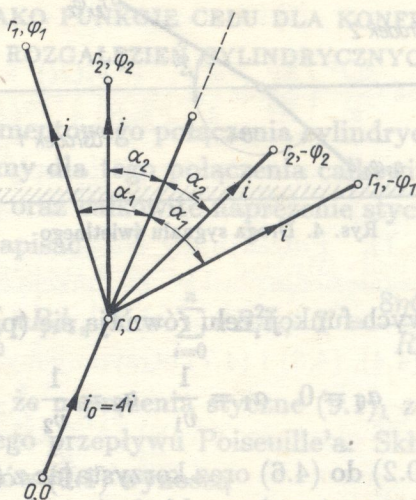
określający poszukiwany czas T .

10.2. Niech będzie dane pięcioelementowe symetryczne rozgałęzienie elektryczne dostarczające prąd z punktu o współrzędnych $0,0$ do punktów $(r_i, -\varphi_i), (r_2, -\varphi_2), (r_2, \varphi_2), (r_1, \varphi_1)$ (rys.5)

Założmy, że przewód l_0 ma niewielką oporność właściwą ρ_0 .

Pozostałe przewody mają oporność znacznie większą, równą ρ . Należy wykonać połączenie w taki sposób, aby straty energii były minimalne. Oznacza to przyjęcie za funkcję celu strat energii. Stąd składowe funkcje celu równają się

$$(10.4) \quad \begin{aligned} G_0(l_0) &= 4\rho_0 i^2 \cdot l_0, \quad G_1(l_1) = \rho i^2 l_1, \\ G_2(l_2) &= \rho i^2 l_2, \quad G_3(l_3) = \rho i^2 l_3, \\ G_4(l_4) &= \rho i^2 l_4. \end{aligned}$$



Rys. 5. Schemat symetrycznego rozgałazienia elektrycznego

Z (10.4) wynikają następujące gęstości funkcji celu (patrz (4.2)):

$$(10.5) \quad \begin{aligned} a_0 &= 4\rho_0 i^2, & a_1 &= \rho i^2, & a_2 &= \rho i^2, \\ a_3 &= \rho i^2, & a_4 &= \rho i^2, \end{aligned}$$

Zgodnie z założeniem o symetrii rozgałazienia mamy

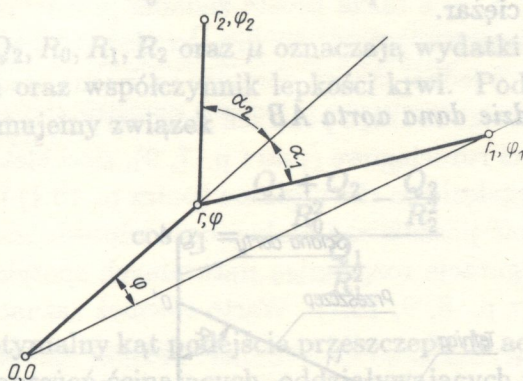
$$(10.6) \quad \alpha_1 = -\alpha_4, \quad \alpha_2 = -\alpha_3.$$

Podstawiając (10.5) i (10.6) do (4.4) oraz korzystając z (5.1) otrzymujemy następujący układ równań:

$$(10.7) \quad \begin{aligned} \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 &= \frac{8\rho_0}{\rho}, \\ r_2 \cos \varphi_2 + \frac{r_2 \sin \varphi_2}{\operatorname{tg} \alpha_2} &= r_1 \cos \varphi_1 + \frac{r_1 \sin \varphi_1}{\operatorname{tg} \alpha_1}, \\ r &= r \cos \varphi_1 + \frac{r_1 \sin \varphi_1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \end{aligned}$$

określający optymalną konfigurację rozważanego rozgałazienia, zapewniającą minimalne straty energii.

10.3. Niech będą dane dwie rury o promieniach odpowiednio R_1, ρ_1 i R_2, ρ_2



Rys. 6. Schemat rozgałęzienia rur

Rury te należy przyłączyć do rury centralnej o promieniach R_0, ρ_0 w taki sposób, aby ciężar powstałego rozgałęzienia (rys.6) był minimalny. Niech ciężary właściwe materiałów, z których zbudowane są rury, są równe s_0, s_1, s_2 . W tym zadaniu funkcją celu jest ciężar rozgałęzienia. Stąd składowe funkcji celu wynoszą

$$(10.8) \quad \begin{aligned} G_0(l_0) &= S_0\pi(R_0^2 - \rho_0^2)l_0, \\ G_1(l_1) &= S_1\pi(R_1^2 - \rho_1^2)l_1, \\ G_2(l_2) &= S_2\pi(R_2^2 - \rho_2^2)l_2. \end{aligned}$$

Gęstości składowych funkcji celu równają się (patrz (4.2))

$$(10.9) \quad a_0 = S_0\pi(R_0^2 - \rho_0^2), \quad a_1 = S_1\pi(R_1^2 - \rho_1^2), \quad a_2 = S_2\pi(R_2^2 - \rho_2^2).$$

Podstawiając (10.9) do (6.5) oraz korzystając z (5.1) otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{[S_0(R_0^2 - \rho_0^2)]^2 + [S_1(R_1^2 - \rho_1^2)]^2 - [S_2(R_2^2 - \rho_2^2)]^2}{2\rho_0\rho_1(R_0^2 - \rho_0^2)(R_1^2 - \rho_1^2)}, \\ \cos \alpha_2 &= \frac{[S_0(R_0^2 - \rho_0^2)]^2 + [S_2(R_2^2 - \rho_2^2)]^2 - [S_1(R_1^2 - \rho_1^2)]^2}{2\rho_0\rho_2(R_0^2 - \rho_0^2)(R_2^2 - \rho_2^2)}, \end{aligned}$$

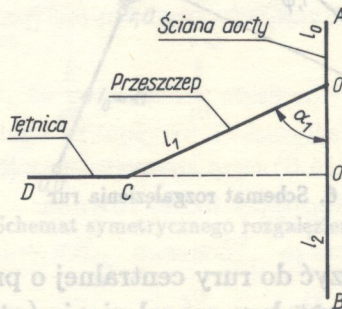
$$(10.10) \quad r_2 \cos(\varphi - \varphi_2) - \frac{r_2 \sin(\varphi - \varphi_2)}{\operatorname{tg} \alpha_2} = r_1 \cos(\varphi - \varphi_1) - \frac{r_1 \sin(\varphi - \varphi_1)}{\operatorname{tg} \alpha_1}$$

$$(10.10) \quad r = r_1 \cos(\varphi - \varphi_1) - \frac{r_1 \sin(\varphi - \varphi_1)}{\operatorname{tg} \alpha_1}$$

[cd.]

określający dla badanego rozgałęzienia optymalną konfigurację gwarantującą minimalny ciężar.

10.4. Niech będzie dana aorta AB



Rys. 7. Schemat przeszczepu odchodzącego od aorty

Niech z punktu 0 odchodzi od niej tętnica niedrożna na odcinku CO . Załóżmy, że zwężony segment tętnicy został wycięty. Z punktu C należy więc wykonać przeszczep łączący tętnicę DC z aortą AB (rys.7). Zakładamy, że przeszczep jest prosty. Należy wyznaczyć optymalny kąt podejścia przeszczepu do aorty taki, przy którym wypadkowa siła ścinająca, oddziaływająca na gałęzie połączenia $ABCO'$ osiągnie wartość minimalną. W ten sposób skłonność do powstawania aterosklerozy w przeszczepie zostanie zminimalizowana. Funkcją celu jest więc suma uśrednionych w czasie wypadkowych sił ścinających, oddziaływających na ścianki badanego rozgałęzienia. Załadając, że mamy do czynienia z w pełni rozwiniętymi przepływami, możemy składowe funkcje celu napisać w postaci

$$(10.11) \quad G_0(l_0) = \frac{8\mu Q_0}{R_0^2} \cdot l_0, \quad G_1(l_1) = \frac{8\mu Q_1}{R_1^2} \cdot l_1, \quad G_2(l_2) = \frac{8\mu Q_2}{R_2^2} \cdot l_2.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$(10.12) \quad Q_0 = Q_1 + Q_2$$

gęstości składowych funkcji celu równają się (patrz (4.2))

$$(10.13) \quad a_0 = \frac{8\mu(Q_1 + Q_2)}{R_0^2}, \quad a_1 = \frac{8\mu Q_1}{R_1^2}, \quad a_2 = \frac{8\mu Q_2}{R_2^2},$$

gdzie $Q_0, Q_1, Q_2, R_0, R_1, R_2$ oraz μ oznaczają wydatki w gałęziach, promienie naczyń oraz współczynnik lepkości krwi. Podstawiając (10.13) do (6.2) otrzymujemy związek

$$(10.14) \quad \cos \alpha_1 = \frac{\frac{Q_1 + Q_2}{R_0^2} - \frac{Q_2}{R_2^2}}{\frac{Q_1}{R_1^2}}$$

określający optymalny kąt podejścia przeszczepu do aorty ze względu na wypadkową naprężeń ścinających, oddziaływających na ścianki naczyń tworzących rozgałęzienie. Prosty przykład ilustrujący zastosowanie uzyskanych w tej pracy wyników można podać znacznie więcej. Jednak już te cztery świadczą o szerokich możliwościach praktycznego wykorzystania formuł (4.4), (4.6), (4.7).

11. UWAGI KOŃCOWE

W niniejszej pracy zbadano warunki konieczne i dostateczne istnienia minimum funkcji celu określonej na wieloelementowym rozgałęzieniu płaskim, o której założono, że jest prostą sumą tak zwanych składowych funkcji celu przyporządkowanych wyłącznie pojedynczym elementom rozgałęzienia. Dodatkowo przyjęto, że składowe funkcje celu po przekroczeniu pewnej długości charakterystycznej dają się opisać za pomocą funkcji liniowej, a także, że wszystkie elementy rozgałęzienia są większe od długości charakterystycznych.

W tych warunkach uzyskano:

1. Funkcja celu osiąga bezwzględne minimum dla kątów rozgałęzienia płaskiego, spełniających związek (4.4)
2. Jeśli kąty rozgałęzienia spełniają związek (4.6), to funkcja celu osiąga minimum wzdłuż kierunku, od którego odmierzone są kąty rozgałęzienia

3. Spełnienie zależności (4.7) oznacza osiągnięcie przez funkcję celu minimum wzdłuż kierunku prostopadłego do kierunku, od którego są odmierzane kąty rozgałęzienia płaskiego. Problemy rozwiązane w punktach 7, 8, 9, a także proste zadania przedstawione w punkcie 10 wskazują na szerokie możliwości zastosowania formuł (4.4), (4.6), (4.7). Z jednej strony, formuły te można stosować do optymalizacji różnego rodzaju połączeń stosowanych w technice, jak na przykład sieci rurociągowo (patrz p. 7, 9), sieci elektryczne (patrz p. 10.2), rozgałęzienia chirurgiczne (patrz p. 10.4) i inne, jak również próbować poszukiwać funkcji celu odpowiedzialnych za konkretne konfiguracje rozgałęzień naturalnych spotykanych w przyrodzie (patrz p. 8, 9, 10.1). Warto również zaznaczyć, że przedstawione w p. 7 i 8 wyniki są oryginalne jeśli chodzi o mechanikę płynów, a w szczególności o jej dział - hydraulikę. Wykorzystanie tych wyników do prac projektowych nad sieciami rurociągów może przyczynić się do znacznych oszczędności energii zużywanej do rurociągowego transportu materiałów ciekłych, takich jak ropa naftowa, woda i inne.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A.KAMIYA and T.TOGAWA, *Optimal branching structures of the vascular tree*, Bull. Math. Bioph., **34**, 1972.
2. C.D.MURRAY, *The physiological principle of minimum work*, Proc. Natn. Acad. Sci. U.S.A., **12**, 1926.
3. C.M.RODKIEWICZ and D.H.HOWELL, *Fluid dynamics in large arterial bifurcation*, AIAA J., **9**, 1971.
4. W.D'ARCY THOMPSON, *On growth and form*, Cambridge University Press, Cambridge 1942.
5. M.ZAMIR, *Optimality principles in arterial branching*, J. Theor. Biol., **62**, 1976.
6. M.ZAMIR, *Cost analysis of arterial branching*, J. Theor. Biol., **62**, 120, 1986.
7. В.В.Грачев, С.Т.Щербаков, Е.И.Яковлев, *Динамика трубопроводных систем*, Наука, Москва 1987.
8. М.Б.Кирсанов, *Экономический расчет водопроводных сетей*, Москва 1949.
9. Л.Г.Лоцянский, *Механика жидкости и газа*, 1978.
10. N.W.McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, Warszawa 1964.

11. D.STEPHENSON, *Pipeline design for water engineers*, Elsev. P. Comp., Amsterdam 1976.
12. S.TOKARZEWSKI, *Optymalne konfiguracje rozgałęzień rurociągowych*, Arch. Hydrotech., (w druku).
13. S.TOKARZEWSKI, S.ZAJĄC, C.M.RODKIEWICZ, *Optymalne konfiguracje rozgałęzień cylindrycznych dla przepływów pulsujących*, Rozpr.Inżyn.,
14. S.TOKARZEWSKI, *Optimality principles in arterial multifurcations*, Biocyb. and Biom. Eng., (w druku).

E. R O G A L S K A (POZNAŃ)

Резюме

ОПТИМАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ ПЛОСКИХ
РАЗВЕТВЛЕНИЙ

На основе некоторых целевых функции проведен теоретический анализ оптимальных углов для плоских разветвлений, представляющих электрические, трубопроводные, хирургические и другие соединения. Теоретические результаты проиллюстрированы практическими примерами вычислений оптимальных углов для некоторых разветвлений.

1. INTRODUCTION

SUMMARY

OPTIMUM CONFIGURATION OF MULTIPLE FLAT BIFURCATIONS

The theoretical analysis of optimum branching angles based on minimizing the cost function has been carried out for multiple flat bifurcations representing electrical, pipeline, surgical and other junctions. A few examples of practical calculations of optimum branching angles have been presented.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 kwietnia 1989 r.

