

# NUMERYCZNA ANALIZA STANÓW POBIFURKACYJNYCH UKŁADÓW Z MATERIAŁÓW PODLEGAJĄCYCH OSŁABIENIU

TOMASZ Ł O D Y G O W S K I (POZNAŃ)

W pracy przedstawiono niektóre aspekty numerycznej analizy układów podlegających osłabieniu. Przedstawiono dwie propozycje: 1) w jaki sposób dokonać wyboru ścieżki pobifurkacyjnej oraz 2) jak ustabilizować proces iteracji stanów równowagi. Dyskutowane problemy wynikają z faktów niejednoznaczności rozwiązań w stanach pobifurkacyjnych oraz z osiągania stanów równowagi w punktach stacjonarnych, niekoniecznie w minimach lokalnych funkcjonalów energetycznych. Przedstawiona koncepcja prowadzi do wyznaczenia jednej z możliwych ścieżek pobifurkacyjnych. Polega ona na wymuszeniu formy pobifurkacyjnej, odpowiadającej najmniejszej wartości własnej macierzy sztywności. Opracowana procedura numeryczna jest załączana z chwilą pojawienia się ujemnych wyrazów w diagonalnej macierzy  $D$ , z rozkładu Choleskiego macierzy sztywności  $K = L^TDL$ . Koncepcja stabilizacji procesu iteracyjnego polega na użyciu macierzy przesunięcia wyprowadzonej na podstawie przyjęcia zmodyfikowanej postaci funkcjonalu całkowitej energii potencjalnej. Zamieszczone w pracy jednowymiarowe przykłady numeryczne służą przedstawieniu trudności numerycznych i efektywności proponowanych rozwiązań.

## 1. WSTĘP

Liczne badania eksperymentalne wykazują, że zniszczenie próbek z niektórych materiałów spowodowane jest powstawaniem wielkiej liczby mikropęknięć. Zwykle mikropęknięcia te mają tendencję do lokalizowania się w pewnym charakterystycznym obszarze. Kierunki propagacji tych mikrorys najczęściej mają charakter losowy i koncentrują się w miejscach o osłabionej strukturze; stąd można mówić o lokalnym osłabieniu się materiału. Zjawisko osłabienia materiałowego jest typowe



dla takich materiałów, jak: beton, skała, niektóre typy gruntów, lód, asfalt, kompozyty ceramiczne czy betony zbrojone (np. druto-beton, żelbet). Osłabienie materiału opisywane jest w przestrzeni  $\sigma - \varepsilon$  w postaci funkcji, która po osiągnięciu maksimum intensywności naprężeń  $\sigma_{\max}$ , wykazuje nadal znaczne przyrosty odkształceń  $\varepsilon$ . Mówimy, że mamy do czynienia z materiałem podlegającym osłabieniu gdy zachodzi, [19]:

$$(1.1) \quad \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} < 0,$$

gdzie przez "·" oznaczono pochodną względem czasu.

Zależność fizyczna w zlinearyzowanej formie przyrostowej ma postać związku

$$(1.2) \quad \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl},$$

w którym  $C_{ijkl}$  oznacza składowe tensora (czwartego rzędu) sztywności stycznej. Z prostego podstawienia (1.2) do (1.1) wynika, że

$$(1.3) \quad C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{kl} < 0,$$

czyli sztywność styczna  $C_{ijkl}$  przestaje być dodatnio określona.

Przyjmowanie związku konstytutywnego w postaci spełniającej zależność (1.3) powoduje częstokroć dyskusje, czy materiały mogą w ogóle wykazywać własności osłabiania się. Rzeczywiście, gdy analizuje się zachowanie infinytezymalnie małego otoczenia punktu materialnego, można dojść do wniosku, iż to co obserwujemy jest wynikiem niewiele odbiegającym od liniowego prawa konstytutywnego i skomplikowanej kinematyki związanej z procesem niszczenia. To przekonanie potwierdzić mogą również wyniki analiz, np. badań mikroskopowych materii. Z drugiej jednak strony, z punktu widzenia inżynierskiego, interesujące są własności materiału opisywane w skali makro. I tutaj wyniki eksperymentów, przytoczonych np. w [9], jednoznacznie wskazują na przydatność opisu wykazującego osłabienie. Między innymi badania betonu wykazały, iż zarówno w stanach ściskania jak i rozciągania materiał ten wykazuje osłabienie.

Należy zauważyć, że obserwowany w eksperymentach spadek naprężeń zależy od przyjęcia baz pomiarowych stosowanych tensometrów. Tak wyznaczony związek konstytutywny nie ma charakteru obiektywnego i nie dotyczy analizy ciała w punkcie, lecz raczej jest uśrednieniem odniesionym do pewnej skończonej objętości. Mimo tych niedogodności, przyjmowanie zależności fizycznej otrzymanej na drodze homogenizacji w postaci związku wyrażającego osłabienie, może prowadzić do



prawkłowej oceny zachowania się konstrukcji. Motywację do akceptacji takiego właśnie związku fizycznego wspiera również możliwość wykorzystania wielu wyrafinowanych kodów numerycznych, opierających się na technice elementów skończonych. Trzeba jednak wiedzieć, że przyjęcie do analizy zależności fizycznej z ujemnie określonymi współczynnikami tensora  $C_{ijkl}$  staje się przyczyną określonych trudności numerycznych. Wymieńmy kilka podstawowych problemów.

1. Wobec niejednoznaczności rozwiązań, po osiągnięciu stanu bifurkacji, należy podjąć decyzję o wyborze jednej z możliwych ścieżek równowagi. Problem jednoznaczności był dyskutowany w pracy [19], a kryteria pozwalające na dokonanie wyboru ścieżki przedstawiono między innymi w pracach [2,4,10].
2. W okolicach punktu bifurkacji, a także w stanach pokrytycznych często występuje słaba zbieżność procedur iteracyjnych. Należy więc zaproponować, w jaki sposób dokonać stabilizacji procesu iteracyjnego oraz o ile to możliwe, jak go przyspieszyć.
3. Znana jest wrażliwość końcowych rezultatów na przyjętą siatkę elementów [3,5,12,16]. Stąd potrzeba takiego sformułowania elementów skończonych, które ograniczałoby lub eliminowało tę niedogodność.

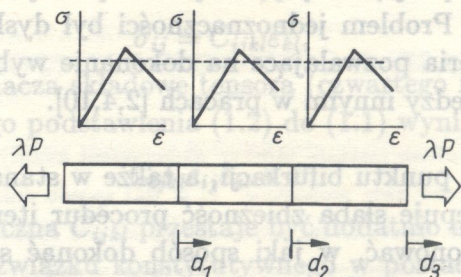
W niniejszej pracy skoncentrujemy się głównie na problemach numerycznych związanych z wyborem ścieżki pobifurkacyjnej oraz zapewnieniem stabilności i przyspieszeniem zbieżności stosowanych procedur iteracyjnych.

Rozwiązywane problemy o charakterze statycznym są fizycznie nieliniowe. Sterowanie procesem przyrostowym, ze względu na możliwość występowania zjawiska przeskoku zarówno przy monotonicznym wzroście wektora sił  $\Delta \mathbf{p}$ , jak i przy zwiększaniu wartości jednej ze składowych wektora przemieszczeń  $d_i$ , odbywa się za pomocą techniki parametru łuku. Sposób ten, zaproponowany na początku lat siedemdziesiątych w pracach RIKSA i WEMPNERA [18,20] i rozwinięty przez CRISFIELDA i RAMMA [6 i 17], był już stosowany do analizy konstrukcji osłabiających się, np. w pracach [5 i 11].



## 2. NIEJEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZAŃ

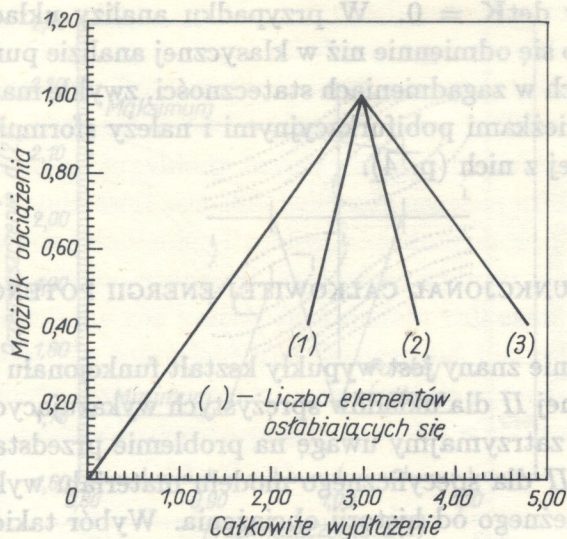
Formułując model matematyczny jakiegokolwiek procesu fizycznego próbujemy odpowiedzieć na następujące fundamentalne pytania: czy rozwiązanie istnieje i czy jest jednoznaczne. Dla rozważanych problemów, po przyjęciu zależności konstytutywnej w postaci spełniającej (1.3), nie można wykazać w ogólny sposób, że rozwiązanie jest jednoznaczne. Wręcz przeciwnie, na prostych przykładach da się zinterpretować na czym polega niejednoznaczność otrzymywanych rozwiązań.



Rys. 1. Schemat obciążenia pręta podlegającego osłabieniu. Dyskretyzacja układu i przyjęte prawo fizyczne dla każdego elementu

Weźmy na przykład prosty układ (Rys.1), składający się z trzech połączonych ze sobą szeregowo prętów i obciążony siłą  $\lambda P$  na obu końcach. Przyjmijmy prawo konstytutywne dla każdego z tych elementów w postaci zależności odcinkowo liniowej (Rys.1). Globalny obraz zachowania się konstrukcji przedstawiono na rysunku 2 w przestrzeni jednoparametrowego obciążenia  $\lambda P$  i przemieszczenia  $d_3$  (całkowite wydłużenie pręta). Aby uprościć ilustrację zjawiska niejednoznaczności przyjęto: moduł sprężystości  $E = 10,0$  jedn. naprężeń, moduł osłabienia  $E_s = -10,0$  jedn. naprężeń, odkształcenie dla maksimum naprężeń  $\epsilon_0 = 0,01$  oraz długość każdego z elementów  $l = 100,0$  jedn. długości. Jak łatwo zauważyć, po osiągnięciu obciążenia  $\lambda = 1,0$  (punkt bifurkacji), możliwe jest osiąganie stanów stacjonarnych na kilku ścieżkach. Najwyżej położona ścieżka (1.3) przyjmuje, że we wszystkich elementach konstrukcji następuje osłabienie, podczas gdy najniższej położona (1.1) jest związana z wystąpieniem osłabienia tylko w jednym elemencie (bez znaczenia, w którym). Stan równowagi może być osiągany także w procesie odciążania wszystkich elementów układu. Wówczas proces





Rys. 2. Obraz pobifurkacyjnego (niejednoznacznego) zachowania się konstrukcji podlegającej osłabieniu

obciążania i odciążania przebiegały po tej samej ścieżce. Obserwujemy więc typową niejednoznaczność zachowania się układu.

Zauważmy, że bez względu na to, czy sterowanie procesem przyrostowym odbywa się za pomocą zmian mnożnika obciążenia  $\Delta\lambda$ , czy też sterować będziemy przyrostami przemieszczenia  $\Delta d_3$  natrafimy na podobne trudności z wyborem ścieżki pobifurkacyjnej. I w tym drugim przypadku dla przyjętego przemieszczenia  $d_3$  mamy również mnogość możliwych stanów stacjonarnych.

Z punktu widzenia zapisu macierzowego, właściwego przyjętej technice numerycznej w punkcie bifurkacji, dla ustalonego poziomu przyrostu obciążenia  $\Delta\lambda P$ , możliwe są przynajmniej dwa stany przyrostów przemieszczeń układu  $\Delta d$ , przy tej samej macierzy sztywności  $K$ . Oznacza to, że

$$(2.1) \quad \begin{aligned} K\Delta d_1 &= \Delta\lambda P, \\ K\Delta d_2 &= \Delta\lambda P, \end{aligned}$$

czyli

$$(2.2) \quad K(\Delta d_2 - \Delta d_1) = 0.$$

Poszukiwanie rozwiązania nietrywialnego pociąga za sobą spełnienie



warunku, by  $\det \mathbf{K} = 0$ . W przypadku analizy układu, z materiału osłabiającego się odmiennie niż w klasycznej analizie punktów bifurkacji występujących w zagadnieniach stateczności, zwykle mamy do czynienia z wieloma ścieżkami pobifurkacyjnymi i należy sformułować kryterium wyboru jednej z nich (p. 4).

### 3. FUNKCJONAŁ CAŁKOWITEJ ENERGII POTENCJALNEJ

Powszechnie znany jest wypukły kształt funkcjonału całkowitej energii potencjalnej  $\Pi$  dla układów sprężystych wykazujących wzmocnienie. Przez chwilę zatrzymajmy uwagę na problemie przedstawienia kształtu powierzchni  $\Pi$  dla specyficznego modelu materiału wykazującego osłabienie, niezależnego od historii obciążenia. Wybór takiego właśnie materiału podyktowany jest możliwością łatwego sformułowania wyrażeń opisujących np. energię sprężystą elementów układu. Przyjmijmy, że będziemy rozważać przypadki jednowymiarowe. Dla każdego z elementów układu przyjmijmy prawo konstytutywne w następującej postaci:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon && \text{dla } \varepsilon \leq \varepsilon_0, \\ \sigma &= E_s\varepsilon + (E - E_s)\varepsilon_0 && \text{dla } \varepsilon \geq \varepsilon_0, \end{aligned}$$

gdzie  $E$  i  $E_s$  oznaczają moduły sprężystości i osłabienia. Energię odkształcenia elementu  $U^e = \int_{V_0}^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon dV$ , gdzie  $V_0$  oznacza objętość elementu, można wyrazić w postaci

$$(3.2)_1 \quad U^e = \frac{1}{2} E A l \varepsilon^2 \quad \text{dla } \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

$$(3.2)_2 \quad U^e = \left[ \frac{1}{2} E_s \varepsilon^2 + (E - E_s) \varepsilon \varepsilon_0 - \frac{1}{2} (E - E_s) \varepsilon_0^2 \right] A l \quad \text{dla } \varepsilon \geq \varepsilon_0,$$

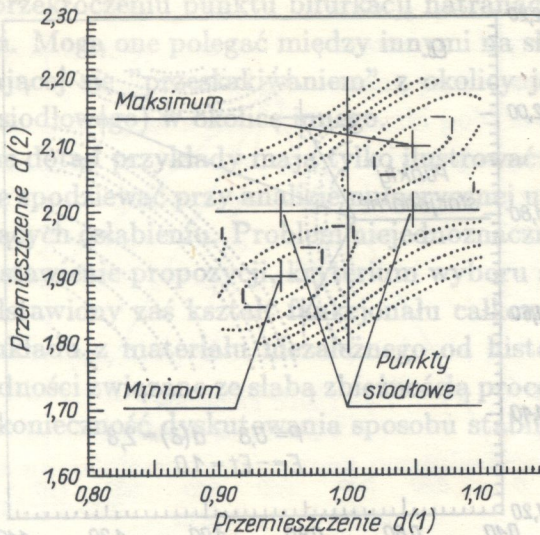
$A$  i  $l$  oznaczają pole powierzchni przekroju elementu i jego długość.

Funkcjonał całkowitej energii potencjalnej  $\Pi$  układu składającego się z  $N$  elementów wyrażony jest w postaci

$$(3.3) \quad \Pi = \sum_{e=1}^N U^e - \mathbf{W},$$

gdzie dla jednoparametrowego obciążenia praca sił zewnętrznych wynosi  $\mathbf{W} = \lambda \mathbf{P}^T \mathbf{d}$ ,  $\mathbf{P}$  jest porównawczym wektorem sił działających w węzłach,  $\mathbf{d}$  oznacza wektor przemieszczeń węzłów układu,  $T$  zaś jest symbolem transpozycji macierzy.



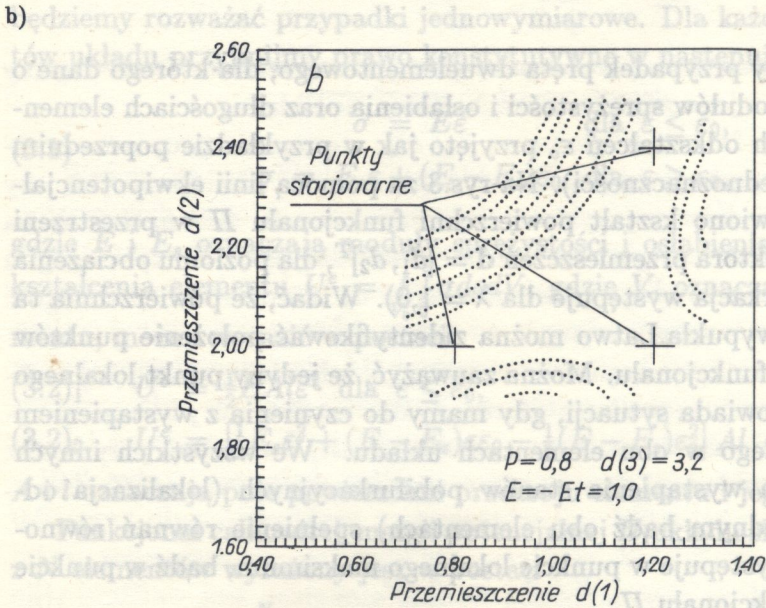
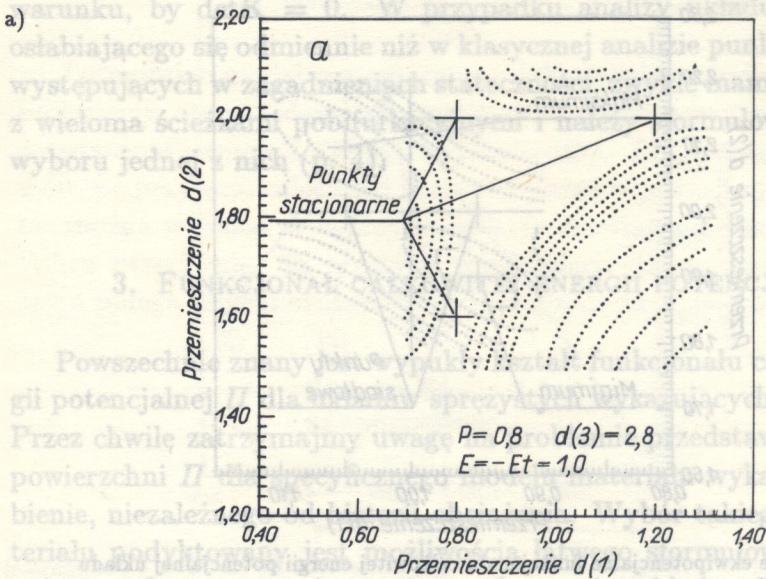


Rys. 3. Linie ekwipotencjalne funkcjonu całkowitej energii potencjalnej układu dwuelementowego w przestrzeni składowych wektora przemieszczeń  $d_1 - d_2$

Rozpatrzmy przypadek pręta dwuelementowego, dla którego dane o wartościach modułów sprężystości i osłabienia oraz długościach elementów i granicach odkształceń  $\varepsilon_0$  przyjęto jak w przykładzie poprzednim (dyskusja niejednoznaczności). Na rys.3 za pomocą linii ekwipotencjalnych przedstawiono kształt powierzchni funkcjonu  $\Pi$  w przestrzeni składowych wektora przemieszczeń  $\mathbf{d} = [d_1, d_2]^T$ , dla poziomego obciążenia  $\lambda = 0,95$  (bifurkacja występuje dla  $\lambda = 1,0$ ). Widać, że powierzchnia ta nie jest jednowypukła. Łatwo można zidentyfikować położenie punktów stacjonarnych funkcjonu. Można zauważyć, że jedyny punkt lokalnego minimum odpowiada sytuacji, gdy mamy do czynienia z wystąpieniem stanu sprężystego w obu elementach układu. We wszystkich innych okolicznościach wystąpienia stanów pobifurkacyjnych (lokalizacja odkształceń w jednym bądź obu elementach) spełnienie równań równowagi układu występuje w punkcie lokalnego maksimum, bądź w punkcie siodłowym funkcjonu  $\Pi$ .

Rysunek 4 przedstawia obraz izolinii, dla układu trójelementowego  $\mathbf{d} = [d_1, d_2, d_3]^T$ , po przyjęciu poziomego obciążenia  $\lambda = 0,95$  oraz założeniu całkowitego wydłużenia pręta  $d_2 = 2,8$  oraz  $d_3 = 3,2$ . Osiągane stany równowagi nie mają więc charakteru stabilnego. Wnioskujemy z tego i potwierdzają to także doświadczenia numeryczne, że osiągnięcie stanów





Rys. 4. Stacjonarność funkcjonału  $\Pi$  dla układu trójelementowego przy założonym całkowitym wydłużeniu  $d_3$  w przestrzeni  $d_1 - d_2$



równowagi po przekroczeniu punktu bifurkacji natrafiać może na zasadnicze trudności. Mogą one polegać między innymi na słabej zbieżności iteracji objawiającej się "przeskakiwaniem" z okolicy jednego punktu stacjonarnego (siodłowego) w okolicę innego.

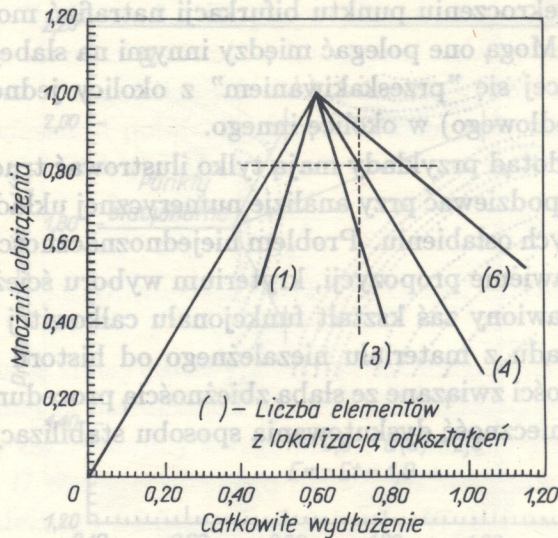
Dyskutowane dotąd przykłady mają tylko ilustrować trudności, których możemy się spodziewać przy analizie numerycznej układów z materiałów podlegających osłabieniu. Problem niejednoznaczności rozwiązań implikuje przedstawienie propozycji, kryterium wyboru ścieżki pobifurkacyjnej. Przedstawiony zaś kształt funkcjonu całkowitej energii potencjalnej dla układu z materiału niezależnego od historii obciążenia, uświadamia trudności związane ze słabą zbieżnością procedur numerycznych i pociąga konieczność dyskusowania sposobu stabilizacji procesów iteracyjnych.

#### 4. WYBÓR ŚCIEŻKI POBIFURKACYJNEJ I ZBIEŻNOŚĆ ITERACJI

Osiągnięcie w układzie ekstremalnej intensywności parametru sił  $\lambda$  dla przypadku jednoparametrowych obciążeń musi w analizie numerycznej układów wykazujących osłabienie budzić pytanie dotyczące wyboru ścieżki pobifurkacyjnej. W stanach pobifurkacyjnych, w szczególności w układach o dużej liczbie stopni swobody, istnieje możliwość poruszania się po jednej z możliwych ścieżek równowagi. Obok niej mogą przebiegać inne ścieżki, na których również spełnione zostają równania równowagi. Przyjęcie któregoś sposobu sterowania procesem przyrostowym, np. przez zmianę jednej ze składowych wektora przemieszczeń  $d_i$  [1] lub zaakceptowanie sterowania pośredniego [6], nie poparte analizą bifurkacyjną prowadzi do wyboru jednej z możliwych ścieżek. Zwykle zostaje osiągnięta równowaga na przypadkowo wybranej ścieżce, tej, która wynika z aktualnego stanu imperfekcji.

Możliwość niejednoznacznego wyboru ścieżki pobifurkacyjnej, przy sterowaniu procesem przyrostowym za pomocą jednej ze składowych wektora przemieszczeń ilustruje rys.5. Przy określonym poziomie przemieszczenia (linia pionowa przerywana) możliwe jest ustalenie położenia stacjonarnego na jednej ze ścieżek. Różnią się one w zasadniczy sposób liczbą elementów, w których lokalizują się odkształcenia. W przypadku gdy liczba stopni swobody jest duża, ścieżki te mogą leżeć blisko siebie.





Rys. 5. Niejednoznaczność pobifurkacyjnych zachowań układu przy sterowaniu przemieszczeniem. Przypadkowy wybór ścieżki może zależeć od aktualnych imperfekcji

W procesie przyrostowym, w którym dodatkowo nie analizuje się stanów pobifurkacyjnych, ani też nie stosuje się zabiegów stabilizujących iterację, można w sposób nieświadomy osiągać położenie stacjonarne kolejno na różnych ścieżkach.

W przedstawionych na rys.5 przykładach numerycznych wykorzystano 6-cio elementowy układ przy założeniu odcinkowo liniowego związku fizycznego.

#### 4.1. Wektor własny

Wybór jednej z możliwych dróg jest wyborem pobifurkacyjnej formy zniszczenia układu. Forma ta zależy od zasięgu strefy lokalizacji odkształceń. Problem ten był dyskutowany w pracy [15]. Ograniczając się do koncepcji tzw. elementów rozmytych, wybór formy zniszczenia jest jednocześnie odpowiedzią na pytanie, który z elementów ma się odciążyć, a który osłabić. Wybór ścieżki pobifurkacyjnej może być dokonany za pomocą analizy wektorów i wartości własnych macierzy sztywności konstrukcji  $K$ .

Procedura wykonująca to zadanie jest włączana z chwilą pojawienia



się w czasie dekompozycji globalnej macierzy sztywności  $K = L^TDL$  (np. met. Choleskiego), ujemnych wartości w diagonalnej macierzy  $D$ . Jedną z możliwych propozycji, stosowaną przez analogię do analizy zagadnień stateczności, jest wymuszenie ścieżki pobifurkacyjnej zgodnej z wektorem własnym, odpowiadającym najmniejszej wartości własnej [5]. W pracy [13] udowodniono, że takie właśnie wymuszenie odpowiada fizycznie koncepcji dyskutowanej przez BAŻANTA (np.[2]) polegającej na wyborze ścieżki odpowiadającej minimalnej wartości energii drugiego rzędu.

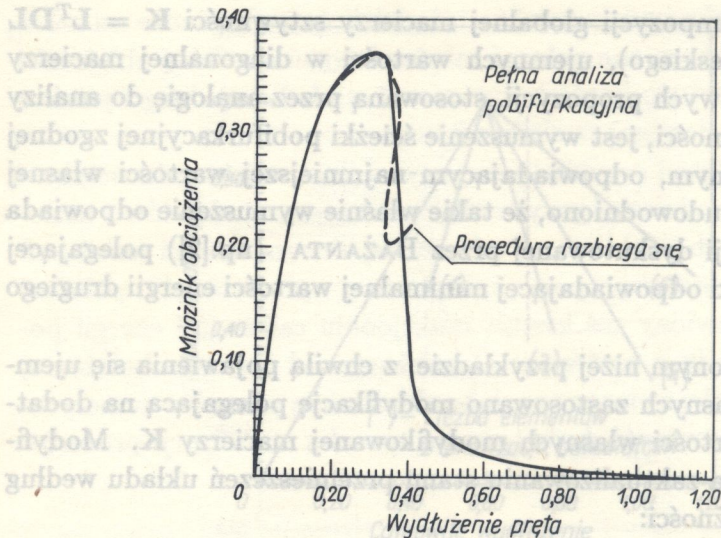
W przedstawionym niżej przykładzie, z chwilą pojawienia się ujemnych wartości własnych zastosowano modyfikację polegającą na dodatkowej iteracji wartości własnych modyfikowanej macierzy  $K$ . Modyfikacja ta polega na zaktualizowaniu stanu przemieszczeń układu według następującej zależności:

$$(4.1) \quad \mathbf{d}^{i+1} = \mathbf{d}^{(i)} + \kappa \hat{\mathbf{d}}_{\min},$$

gdzie  $\hat{\mathbf{d}}_{\min}$  jest wektorem własnym odpowiadającym najmniejszej (zwykle ujemnej) wartości własnej, zaś  $\kappa$  jest małym parametrem. Iteracja stanu przemieszczeń w okolicy punktu bifurkacji prowadzona jest do chwili, aż liczba ujemnych wartości własnych macierzy  $D$  nie ulega zmniejszeniu. Zastosowanie takiej procedury nawet w przypadkach materiałów zależnych od historii obciążenia okazuje się skutecznym zabiegiem i prowadzi do zlokalizowanych form zniszczenia.

Weźmy na przykład pręt podzielony na trzy równe elementy o identycznych prawach konstytutywnych wyrażonych w postaci  $\sigma = Ee^{-\gamma\epsilon}$  - dla procesu obciążania (proces aktywny) oraz w postaci zależności liniowej biegnącej do początku układu współrzędnych z każdego punktu powyższej krzywej - dla procesu odciążenia (proces pasywny). W zastosowanych oznaczeniach przez  $E$  rozumiemy początkowy moduł sprężystości; w przykładzie  $E = 10,0$  jedn. naprężeń,  $\gamma$  jest parametrem; w przykładzie  $\gamma = 10,0$ . Przyjęta tolerancja spełnienia iteracji  $\text{tol} \geq \|r_i\|$  nałożona jest na każdą ze składowych wektora sił rezidualnych  $r$ ; w przykładzie  $\text{tol} = 0,01$ . Przy zastosowaniu sterowania parametrem łuku według sposobu zaproponowanego przez CRISFIELDA [6,7], przyjmując początkowy parametr obciążenia  $\Delta\lambda_0 = 0,03$  oraz stosując w punkcie bifurkacji dodatkową iterację zgodnie z zaproponowaną koncepcją, otrzymano wyniki przedstawione na Rys.6 linią ciągłą. Linia przerywana





Rys. 6. Wybór ścieżki pobifurkacyjnej przez sterowanie wektorem własnym

przedstawia wyniki analizy numerycznej osiągnięte bez uwzględnienia w okolicach punktu bifurkacji dodatkowej iteracji wspomagającej wybór formy zniszczenia. Po kilku przyrostach nie można już osiągnąć równowagi w punkcie stacjonarnym i procedura rozbiega się.

#### 4.2. Macierz przesunięcia

Dokonajmy modyfikacji funkcjonału  $\Pi$  wzbogacając go o dodatkowy człon związany z formą kwadratową sił rezidualnych

$$(4.2) \quad \Pi^* = \alpha \Pi + \beta r_K r_K^T,$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są przyjętymi parametrami, zaś powtarzający się indeks  $K$  oznacza sumowanie. Wektor sił rezidualnych  $r = P_{wew} - \lambda P$ ,  $P_{wew}$  jest wektorem wewnętrznych sił węzłowych układu. Zauważmy, że dla  $\lambda = 1,0$  w stanach równowagi, dla których wartości sił niezerównoważonych są równe zero, wartość energii potencjalnej zmodyfikowanej  $\Pi^*$  jest równa wartości funkcjonału  $\Pi$ . Przypadek wykorzystania wyłącznie formy kwadratowej  $r^T r$  do stabilizacji procesu numerycznego związanego z przechodzeniem punktów bifurkacyjnych przy analizie konstrukcji z materiałów osłabiających się był rozważany w pracy [4].



Opierając się na funkcjonale całkowitej energii potencjalnej, niezrównoważone siły wyraża się za pomocą gradientu tegoż funkcjonau. Przyjmując (4.2), zmodyfikowane siły rezidualne można wyrazić w postaci

$$(4.3) \quad r_I^* = \frac{\partial \Pi^*}{\partial d_I} = (\alpha \delta_{IK} + 2\beta K_{IK}) r_K,$$

gdzie  $K_{IK}$  oznacza składowe globalnej macierzy sztywności układu, zaś  $\delta_{IK}$  jest symbolem Kroneckera. Biorąc pod uwagę przyrost wektora przemieszczenia  $\Delta \mathbf{d}$  oraz rozwijając w szereg Taylora wyrażenie na zmodyfikowane siły rezidualne otrzymujemy

$$(4.4) \quad r_I^*(d_J + \Delta d_J) = r_I^*(d_J) + \frac{\partial r_I^*}{\partial d_J} \Delta d_J + o(\Delta d_J^2) = 0,$$

jeśli w nowej konfiguracji również mają być spełnione równania równowagi. Korzystając z równania (4.3) możemy wyprowadzić wzór

$$(4.5) \quad \frac{\partial r_I^*}{\partial d_J} = 2\beta K_{KI,J} r_K + (\alpha \delta_{IK} + 2\beta K_{KI}) K_{KJ}.$$

Tak więc warunek równowagi powinien spełniać następujące równanie:

$$(4.6) \quad (\alpha \delta_{IK} + 2\beta K_{KI}) r_K + [2\beta K_{KI,J} r_K + \alpha \delta_{IK} + 2\beta K_{KI}] K_{KJ} \Delta d_J = 0.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy formę końcową równania przyrostowego w następującej postaci:

$$(4.7) \quad [2\beta(\alpha \delta_{IK} + 2\beta K_{KI})^{-1} K_{MI,J} r_M + K_{KJ}] \Delta d_J = -r_K,$$

gdzie klasycznie rozumiana macierz sztywności  $K_{KJ}$  jest wzbogacona o człon zwany macierzą przesunięcia, a wyrażający się jako

$$(4.8) \quad \Delta K_{KJ} = 2\beta(\alpha \delta_{IK} + 2\beta K_{KI})^{-1} K_{MI,J} r_M.$$

Zauważmy tylko, że macierz  $K_{MI,J}$  jest trójwymiarowa i może być kłopotliwe jej tworzenie i agregacja dla różnych elementów skończonych. Dla analizowanych prostych przypadków jednoosiowych stosowanie zależności (4.7) w okolicach punktów bifurkacji w miejsce klasycznie prowadzanych formuł  $\mathbf{K} \Delta \mathbf{d} = -\mathbf{r}$  zapewniało zbieżność procedur numerycznych.



Tablica 1.

$\alpha$	$\beta$	Liczba iteracji			Kod lokalizacji
		przed	po	razem	
0,050	0,950	12	20	32	111111110
0,075	0,925	12	18	30	111111101
0,100	0,900	12	52	64	111111100

1 - odciążenie w danym elemencie (proces pasywny)

0 - lokalizacja odkształceń w danym elemencie (proces aktywny)

Dla przykładu przeanalizujemy pręt zdyskretyzowany za pomocą 10 elementów. Przyjmijmy prawo fizyczne w znanej już postaci:

$\sigma = Ee^{-\gamma \epsilon}$ , po założeniu stosowanych parametrów w następujących wielkościach:  $\gamma = 10$ , moduł sprężystości  $E = 10,0$  jedn. naprężeń, dokładność iteracji  $\text{tol} = 0,01$ ,  $\text{tol} \geq |r_r|$ , zaś długość pierwszego kroku w wersji metody sterowania parametrem łuku zaproponowanej przez Crisfielda  $\Delta \lambda_0 = 0,03$ .

Wyniki ilustrujące liczbę iteracji potrzebną do osiągnięcia stanu równowagi oraz informujące o lokalizacji odkształceń jako funkcji przyjętych parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ , przedstawiono w Tablicy 1.

W analizowanych przypadkach przyjęto, że  $\alpha + \beta = 1,0$ . Jak widać, liczba iteracji potrzebna do osiągnięcia punktów stacjonarnych przed bifurkacją była taka sama i wynosiła 12. Zaś po osiągnięciu maksimum liczba ta była różna i prowadziła do różnych form zniszczenia (lokalizacja w jednym lub kilku elementach).

Warto podkreślić, że w przypadku przyjęcia  $\alpha = 1,0$  i  $\beta = 0,0$  (odpowiada to działaniu na funkcjonale całkowitej energii potencjalnej) nie otrzymano zbieżności w przyjętej dużej liczbie iteracji. Zaś dla wartości  $\alpha = 0,0$  i po uwzględnieniu wyłącznie członu związanego z reziduumi potrzebne są dodatkowe zabiegi stabilizujące [4].

Wypowiedzmy w tym miejscu kilka uwag na temat geometrycznej interpretacji funkcjonału (4.2), który jest podstawą przedstawionego tutaj sposobu stabilizacji procesu iteracyjnego. W punktach stacjonarnych funkcjonału  $\Pi^*$ , jak to już zauważono poprzednio, jego wartości są równe wartościom funkcjonału  $\Pi$ , gdyż człon  $\mathbf{r}^T \mathbf{r} = 0$ . Ze względu na to, że dodana kwadratowa forma reziduumów jest zawsze nieujemna, punkty stacjonarne zmodyfikowanego funkcjonału  $\Pi^*$  znajdują się w lokalnych



Tablica 2.

$\alpha$	$\beta$	l - iteracji
0,0250	0,0975	53
0,0500	0,0950	50
0,0750	0,0925	46
0,1000	0,9000	53

minimach. Tak więc, jeśli tylko iteracja przebiega w pobliżu jednego z punktów stacjonarnych, będzie się zbiegała właśnie do tego punktu. W ten sposób stosując macierz przesunięcia osiągamy stabilizację procesu iteracyjnego. Widać więc, że o ile tylko potrafimy wybrać właściwą ścieżkę pobifurkacyjną (np. posługując się kryterium p.4.1) użycie macierzy przesunięcia gwarantuje polepszenie zbieżności iteracji. Dodatkowych informacji o przyspieszeniu tej zbieżności dostarcza Tablica 2.

Dla przykładu przeanalizowano zadanie pręta podzielonego na 6 elementów o danych dotyczących prawa fizycznego, jak w przykładzie poprzednim i kroku  $\Delta\lambda_0 = 0,02$ .

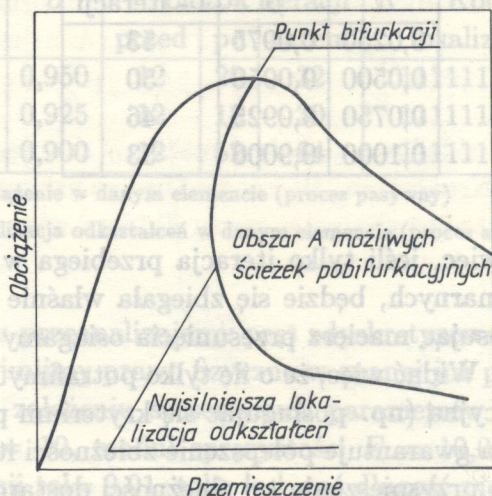
Wszystkie przypadki prowadzą do lokalizacji odkształceń w jednym tylko elemencie. Można zwrócić uwagę, że dla niektórych kombinacji  $\alpha$  i  $\beta$  osiąga się zbieżność w mniejszej liczbie iteracji. Nie sposób jednak sformułować ogólne kryterium optymalnego wyboru parametrów, by uzyskać najszybszą zbieżność procesu iteracyjnego. Stosowane wartości  $\alpha$  i  $\beta$ , z punktu widzenia tego wymagania, zależą od konkretnego zadania brzegowego. Cennym pozostaje jednak fakt, iż użycie macierzy przesunięcia zapewnia w ogóle zbieżność i stabilizuje proces iteracyjny.

## 5. WNIOSKI

Zaproponowana w pracy zmodyfikowana postać funkcjonału energii potencjalnej  $\Pi^*$  pozwoliła na wyprowadzenie macierzy przesunięcia  $\Delta K_{II}$ . Funkcjonał  $\Pi^*$  skonstruowany jest w taki sposób, by w punktach stacjonarnych klasycznego funkcjonału  $\Pi$  przypadały lokalne minima, co ma gwarantować zbieżność, o ile tylko w procesie iteracyjnym znajdziemy się w pobliżu tego punktu. Użycie macierzy  $\Delta K_{II}$  stabilizuje stosowane procedury numeryczne, a także pozwala utrzymać się na



ustalonej ścieżce pobifurkacyjnej.



Rys. 7. Obszar pobifurkacyjnych stanów stacjonarnych w zależności od stopnia lokalizacji odkształceń

Osobnej analizy wymaga wybór drogi pobifurkacyjnej. Tę dyskusję uważa się za szczególnie istotną, gdy bierze się pod uwagę układy podlegające osłabieniu. Na podstawie licznych eksperymentów numerycznych można dojść do przekonania, że w stanach pobifurkacyjnych istnieje wiele ścieżek równowagi. Stosowną ilustrację przedstawia Rys.7. Zaznaczono na nim obszar A, w którym mieszczą się pobifurkacyjne ścieżki równowagi. Ścieżki te różnią się np. liczbą elementów podlegających osłabieniu. Zaproponowana procedura iterowania wektorów własnych odpowiadających najmniejszej wartości własnej prowadzi do wyboru ścieżki związanej z najbardziej zlokalizowaną formą odkształceń (lokalizacja odkształceń w najmniejszej liczbie elementów). W celu kontrolowania, czy w stanach pobifurkacyjnych nie następują zmiany ścieżek równowagi, celowym okazuje się sprawdzenie liczby ujemnych wartości z diagonalą macierzy  $D$  powstającej w procesie triangularyzacji globalnej macierzy sztywności.

Przedstawione propozycje dotyczące zarówno wyboru ścieżki pobifurkacyjnej, jak i stabilizacji i przyspieszenia zbieżności procesów iteracyjnych są najbardziej wartościowe gdy używane są jednocześnie i włączane w okolicach punktu bifurkacji. Z kolei bez uwzględnienia za-



biegów tego typu, obliczenia konstrukcji podlegających osłabieniu wi-  
doczne z poziomu globalnej macierzy sztywności układu mogą prowadzić  
do całkowicie błędnych rezultatów.

Należy jednak pamiętać, że końcowe wyniki osiągnane poprzez analizę  
przyrostową, po przyjęciu koncepcji elementów rozmytych nadal zależą  
od przyjętej siatki elementów skończonych. Uniknąć tej zależności można  
za pomocą takiego sformułowania elementu skończonego, w którym w  
jawny sposób uwzględni się obszar lokalizacji odkształceń. Pierwsze  
próby tego typu były podjęte w pracy [16], a także w [14] i [3], lecz  
nadal wymagają one dalszych studiów.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J.L.BATOZ, G.S.DHATT, *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*,  
Int. J. Num. Meth. Eng., **14**, pp. 1262-1265, 1979.
2. Z.BAZANT, *Mechanics of distributed cracking*, Appl. Mech. Rev., **39**, 5, May 1986.
3. T.BELYTSCHKO, J.FISH, B.E.ENGELMAN, *A finite element with embedded localization  
zones*, Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng., 1987 (sub. for public.).
4. T.BELYTSCHKO, D.LASRY, T.LODYGOWSKI, *A modified Newton procedure for post-  
bifurcation analysis as in strain-softening*, (sub. for public. to Int. J. Num. Meth.  
Eng.).
5. R. de BORST, *Computation of post-bifurcation and post-failure behaviour of strain-  
softening solids*, Comp. and Struct., **25**, 2, pp. 211-224, 1987.
6. M.A.CRISFIELD, *A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-  
through"*, Comp. and Struct., **13**, pp.55-62, 1981.
7. M.A.CRISFIELD, *An arc-length method including line searches and accelerations*, Int.  
J. Num. Meth. Eng., **19**, pp. 1269-1289, 1983.
8. M.A.CRISFIELD, J.WILLS, *Solution strategies and softening materials*, Comp. Meth.  
Appl. Mech. Eng., **66**, pp. 267-289, 1988.
9. V.S.GOPALARATNAM, S.P.SHAH, *Softening response of plain concrete in direct tension*,  
ACI J., pp. 310/323, May-June 1985.
10. T.LODYGOWSKI, *On some problems of the numerical analysis of strain-softening struc-  
tures*, ZNPP, **31**, pp. 113-121, 1988.
11. T.LODYGOWSKI, *Numerical analysis of beams and frames with strain-softening mate-  
rials*, Rozpr. Inż., **36**, 3, pp. 471-486, 1988.
12. T.LODYGOWSKI, *Some aspects of localization in numerical calculations of strain-softening  
structures*, 27th Polish Solid Mech. Conf., pp.111, Rytró 1988.



13. T.LODYGOWSKI, *Numerical analysis of strain-softening structures*, Vth Int. Symp. on Numerical Methods in Eng., ed. by R.Grubler, J.PERIAUX, R.P.SHAW, Part I, pp.371-376, Lozanna 1989.
14. M.ORTIZ, Y.LEROY, A.NEEDLEMAN, *A finite element method for localized failure analysis*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 61, pp. 189-214, 1987.
15. N.S.OTTOSEN, *Thermodynamic consequences of strain softening in tension*, J. Eng.Mech., ASCE, 112, 11, pp. 1152-1164, 1986.
16. S.PIETRUSZCZAK, Z.MRÓZ, *Finite element analysis of deformation of strain-softening materials*, Int. J. Num. Meth. Eng., 17, pp. 327-334, 1981.
17. E.RAMM, *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points*, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, pp. 13-89, Ruhr.-Univ., Bochum Germany 1980.
18. E.RIKS, *The application of Newton's method to the problem of elastic stability*, J. Appl. Mech., ASCE, 39, pp. 1060-1065, 1972.
19. K.C.VALANIS, *On the uniqueness of the solution of the initial value problem in softening materials*, J. Appl. Mech., ASME, 52, pp. 649-653, 1985.
20. G.A.WEMPNER, *Discrete approximation related to nonlinear theories of solids*, Int. J. Solid and Struct., 7, pp. 1581-1599, 1971.

### Резюме

#### ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОСЛЕБИФУРКАЦИОННЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМ ИЗ МАТЕРИАЛОВ ПОДЛЕЖАЩИХ ОСЛАБЛЕНИЮ

В работе представлены некоторые аспекты численного анализа систем подлежащих ослаблению. Представлены два предположения: 1/каким образом произвести выбор послебифуркационной дорожки и 2/как стабилизировать процесс итераций состояний равновесия. Обсуждаемые проблемы вытекают из фактов неоднозначности решений в послебифуркационных состояниях, а также из достижения состояний равновесия в стационарных точках, не обязательно локальных минимумах, энергетических функционалов. Предложенная концепция приводит к определению одной из возможных послебифуркационных дорожек. Она заключается в вынуждении послебифуркационной формы, отвечающей наименьшему значению собственной матрицы жесткости. Разработанная численная процедура включается в момент появления отрицательных членов в диагональной матрицы  $D$  из распределения Холеского матрицы жесткости  $K = L^TDL$ . Концепция стабилизации итерационного процесса



заключается в использовании матрицы перемещения, выведенной на основе принятия модифицированного вида функционала полной потенциальной энергии. Помещенные одномерные численные примеры служат представлению численных трудностей и эффективности предлагаемых решений.

## ZASTOSOWANIE TEORII POŚLIZGÓW DO OPISU PELZANIA WSTECZNEGO

### NUMERICAL ANALYSIS OF POST-BIFURCATIONAL STATES IN MATERIALS SUBJECT TO SOFTENING

WALENTY OSIPIUK (BIAŁYSTOK)

Certain aspects of numerical analysis are presented concerning the systems subject to softening. Solutions to two following problems are proposed: (1) Selection of the proper post-bifurcational path, (2) Stabilization of the international procedure of the equilibrium states. The problems follows from the fact that in the post-bifurcational states the solutions are non-unique, and that the equilibrium states are reached at the stationary points (not necessarily corresponding to the local minima) of the energy functionals. The concept presented leads to the determination of one of several possible post-bifurcational states corresponding to the minimal eigenvalue of the stiffness matrix. The numerical procedure is switched on when negative terms appear in the diagonal matrix  $D$  corresponding to the Choleski stiffness matrix decomposition  $K = L^TDL$ . Stabilization of the iterational process consists in the application of the translation matrix derived from the modified form of the potential energy functional. The one-dimensional numerical examples presented demonstrate the numerical difficulties encountered in the procedure.

## POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Podczas trwania pełzania było opisywane między innymi przez BAILEY' A i OROWANA [1]. Praca została złożona w Redakcji dnia 19 stycznia 1989 r. koncepcje tych opisów są szczególnymi przypadkami hipotezy parametrów strukturalnych, przedstawionej później przez RABOTNOWA w pracy [5]. Równania ewolucji parametrów strukturalnych opisywane są za pomocą dwóch mechanizmów: umocnienia odkształceniowego i osłabienia czasowego.

Obszerne przegląd opisów efektów deformacyjnych zachodzących na skutek zmian wartości naprężenia podczas pełzania zawiera praca [6]. Wydaje się interesujące wykorzystanie koncepcji poślizgów do opisu wspomnianych deformacji plastycznych. Oparta na koncepcji poślizgów teoria BARDORFA-BUDLIANSKY'EGO [7], opublikowana w 1949 roku, miała początkowo znaczenie przede wszystkim poznawcze. Na skutek rozwoju badań fizyki ciała stałego oraz mechaniki makroskopowej nabiera ona coraz większego znaczenia praktycznego i staje się przydatna



и в частности в исследовании нелинейных систем, подверженных неустойчивости в процессе деформации. В работе рассмотрены вопросы численного анализа систем, подверженных неустойчивости в процессе деформации. В частности, рассмотрены вопросы численного анализа систем, подверженных неустойчивости в процессе деформации.

14. M. ORTIZ, Y. LEROY, A. NEEDLEMAN, *A finite element method for localized failure analysis*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 61, pp. 189-214, 1987.

15. N.S. OTTOSEN, *Thermodynamic consequences of strain softening in tension*, J. Eng. Mech., ASCE, 112, 11, pp. 1152-1164, 1986.

#### S U M M A R Y

16. S. PIETRUSZCZAK, Z. MRÓZ, *Finite element analysis of deformation of strain-softening materials*, Int. J. Num. Meth. Eng., 17, pp. 327-334, 1981.

17. R. DEBIE, *Stability of the iterative method for the solution of the post-bifurcation problem*, Finite Element Analysis in Structures, Vol. 1, pp. 13-89, Ruhr-Universität Bochum, Germany 1980.

18. E. RIKS, *The application of Newton's method to the problem of elastic stability*, J. Appl. Mech., 48, pp. 701-704, 1981.

Certain aspects of numerical analysis are presented concerning the post-bifurcation problem. The problems are divided into two following categories: (I) Selection of the proper post-bifurcation path; (II) Stabilization of the iterative process of the equilibrium equations. The problems follow from the fact that in the post-bifurcation states the solutions are non-unique and that the equilibrium states are reached at the stationary points (not necessarily corresponding to the local minima) of the total potential energy. The concept presented leads to the determination of one of several possible post-bifurcation states corresponding to the minimal eigenvalue of the stiffness matrix. The numerical procedure is switched on when negative terms appear in the diagonal matrix  $D$  corresponding to the Choleski stiffness matrix decomposition  $K = L^T D L$ . Stabilization of the iterative process consists in the application of the translation matrix derived from the modified form of the potential energy functional. The one-dimensional numerical examples presented demonstrate the numerical difficulties encountered in the procedure.

#### ПОСТБИФУРКАЦИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ

#### ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОСЛЕБИФУРКАЦИОННЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМ

Рассмотрены некоторые аспекты численного анализа систем, подверженных неустойчивости в процессе деформации. В частности, рассмотрены вопросы численного анализа систем, подверженных неустойчивости в процессе деформации.

В работе представлены некоторые аспекты численного анализа систем, подверженных неустойчивости в процессе деформации. Представлены две приложения: 1/ каким образом произвести выбор послебиуркационной дорожки и 2/ как стабилизировать процесс итераций состояний равновесия. Обсуждаются проблемы, вытекающие из фактов неоднозначности решений в послебиуркационных состояниях, а также из достижения состояний равновесия в стационарных точках, не обязательно локальных минимумах, энергетических функционалов. Предложенная концепция приводит к определению одной из возможных послебиуркационных дорожек. Она заключается в вынуждении послебиуркационной формы, отвечающей наименьшему значению собственной матрицы жесткости. Разработанная численная процедура заключается в момент появления отрицательных членов в диагональной матрицы  $D$  из распределения Колецкой матрицы жесткости  $K = L^T D L$ . Концепция стабилизации итерационного процесса