

BADANIE WŁASNOŚCI UOGÓLNIIONEGO RÓWNANIA VAN DER POLA

JERZY BARZYKOWSKI, WOJCIECH ŻAKOWSKI (WARSZAWA)

Wstęp

Celem pracy jest zbadanie pewnych własności uogólnionego równania Van der Pola

$$(1) \quad \ddot{x} - \varepsilon(1 - |x|^{n-1})\dot{x} + x = 0,$$

przy czym $x = x(t)$ oznacza funkcję niewiadomą, $\varepsilon > 0$ jest parametrem, zaś $n \geq 2$ liczbą rzeczywistą. W przypadku $n = 3$ równanie (1) przyjmuje postać

$$(2) \quad \ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

dobrze znaną z teorii generatorów samowzбудnych pod nazwą równania Van der Pola, [1]. Równaniu (2) poświęcono wiele prac, uzyskując interesujące rezultaty; syntetyczne opracowanie wyników otrzymanych w tym zakresie znajduje się w monografiach [2, 3, 4 i 5]. Postać (2) równania Van der Pola uzyskuje się zakładając nieliniową charakterystykę lampy w postaci

$$(3) \quad i = S_1 u_s - S_3 u_s^3.$$

W pracy [6] rozpatrzono przypadek ogólniejszy, przyjmując następujące równanie charakterystyki lampy:

$$(4) \quad i = \begin{cases} S_1 u_s - S_n u_s^n & \text{dla } n = 3, 5, 7, \dots; \\ S_1 u_s - S_n |u_s| u_s^{n-1} & \text{dla } n = 2, 4, 6, \dots, \end{cases}$$

$S_n > 0$, ograniczając się jednakże do naturalnych wartości n . W konsekwencji otrzymano różne postacie równania Van der Pola dla n parzystych i nieparzystych, a mianowicie

$$(5) \quad \begin{cases} \ddot{x} - \varepsilon(1 - x^{n-1})\dot{x} + x = 0 & \text{dla } n = 3, 5, 7, \dots; \\ \ddot{x} - \varepsilon(1 - |x| \cdot x^{n-2})\dot{x} + x = 0 & \text{dla } n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases}$$

(por. [6], str. 400). Uogólnione równanie Van der Pola w sensie (1) jest także przedmiotem wzmianki w monografii N. Minorskiego ([3], str. 557-559), który zapisuje je w postaci

$$(6) \quad \ddot{x} + \mu(x^{2n} - 1)\dot{x} + x = 0$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$, komentując, że w przypadku ogólnym ($n > 0$) należy brać pod uwagę wartość bezwzględną wyrażenia x^{2n} ; tamże wyprowadzono wzór na

amplitudę drgań w cyklu granicznym dla $n = 1, 2, \dots$, który dla oznaczeń przyjętych w równaniu (6) ma postać

$$(7) \quad r_0 = \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi} \sin^2 \Psi d\Psi}{\int_0^{2\pi} \sin^2 \Psi \cos^{2n} \Psi d\Psi}}$$

[por [3], str. 558, wz. (8.4)].

Równanie w postaci (1) uzyskali autorzy tej pracy przyjmując następujące równania charakterystyki lampy

$$(8) \quad i_a = S_1 u_s - S_n |u_s|^n \operatorname{sgn} u_s.$$

$S_1 > 0$, $S_n > 0$, przy czym n może być dowolną liczbą rzeczywistą co najmniej równą 2. Zauważymy, że opis (4) jest szczególnym przypadkiem opisu (8); w konsekwencji, równania (5), [a także równanie (6)], są szczególnymi przypadkami równania (1), które będzie niżej przedmiotem badań.

Wyznaczenie amplitudy drgań dla małej wartości parametru. Na mocy twierdzenia Levinsona i Smitha, [7], równanie (1) posiada dokładnie jeden cykl graniczny, będący jedynym jego rozwiązaniem okresowym.

Niech $0 < \varepsilon \ll 1$. Poszukujemy rozwiązania równania (1) w postaci

$$(9) \quad x = A(t) \cos \Psi, \quad \text{gdzie} \quad \Psi = t + \theta(t),$$

przy czym $A(t)$ i $\theta(t)$ są to wolnozmiennne funkcje czasu, $A(t) > 0$. Różniczkując (9), pomijając w pierwszej pochodnej składniki zawierające dA/dt oraz $d\theta/dt$, tzn. przyjmując

$$(10) \quad \frac{dA}{dt} \cos \Psi - A \frac{d\theta}{dt} \sin \Psi = 0,$$

a następnie, podstawiając tak otrzymane wyrażenie do równania (1), otrzymamy

$$(11) \quad \frac{dA}{dt} \sin \Psi + A \frac{d\theta}{dt} \cos \Psi = \varepsilon A (1 - A^{n-1} |\cos^{n-1} \Psi|) \sin \Psi.$$

Rozwiązując układ równań (10) i (11) względem dA/dt i $d\theta/dt$, dostajemy

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \varepsilon A \sin^2 \Psi (1 - A^{n-1} |\cos^{n-1} \Psi|), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon \cos \Psi \sin \Psi (1 - A^{n-1} |\cos^{n-1} \Psi|). \end{aligned}$$

Korzystając ze znanego wzoru

$$(13) \quad \int_0^{\pi/2} |\cos^\alpha x| dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}, \quad \alpha \geq 0,$$

gdzie Γ oznacza funkcję gamma Eulera, wyznaczmy następnie wartość średnią pochodnej dA/dt w okresie zmienności

$$(14) \quad \left(\frac{dA}{dt}\right)_{sr} = \frac{\varepsilon A}{2} \left[1 - \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) A^{n-1}}{\sqrt{\pi}(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right].$$

Ponadto mamy

$$(15) \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{sr} = 0,$$

co wskazuje, że w pierwszym przybliżeniu można przyjąć $\theta = \text{const.}$

Zależność (14) pozwoli nam wyznaczyć amplitudę $A(t)$; w tym celu rozwiążemy równanie

$$(16) \quad \frac{dA}{dt} - \frac{\varepsilon}{2} A = - \frac{\varepsilon \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) A^n}{\sqrt{\pi}(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

przyjmując warunek początkowy $A(0) = A_0 > 0$. Równanie (16) jest równaniem różniczkowym Bernoulliego, można je więc rozwiązać efektywnie przez kwadratury, sprowadzając w znany sposób do równania liniowego.

Po wykonaniu odpowiednich rachunków otrzymamy

$$(17) \quad A(t) = \left[\frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} + \left(A_0^{1-n} - \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right) e^{-\frac{\varepsilon}{2}(n-1)t} \right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

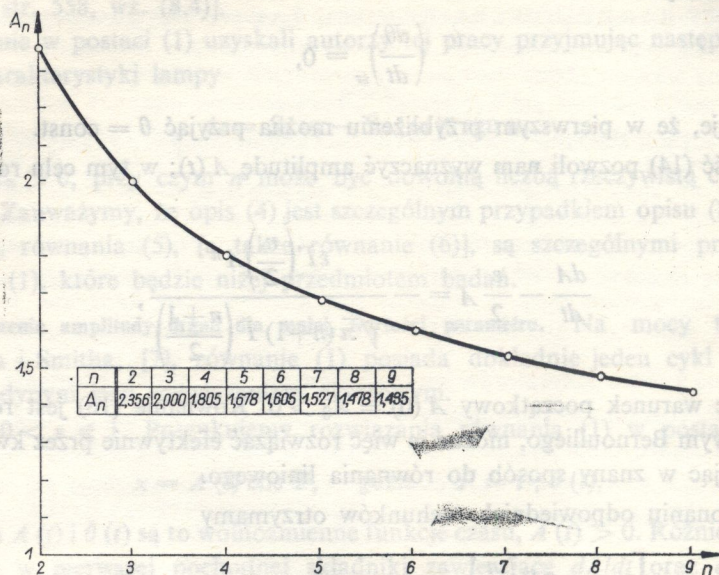
Przejrzysta postać wzoru (17) pozwala na przeprowadzenie dyskusji. Istnieje mianowicie granica

$$(18) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \left[\frac{\sqrt{\pi}(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{n-1}} = A_n,$$

która odpowiada amplitudzie drgań cyklu granicznego. Wzór (18) można było uzyskać bezpośrednio z warunku (14), jednakże rozwiązanie (17) pozwala na stwierdzenie monotonicznej zmienności $A(t)$ ze wzrostem t , a mianowicie: $A(t)$ rośnie do wartości A_n , gdy $A_0 < A_n$ oraz maleje do wartości A_n , gdy $A_0 > A_n$.

Zauważymy, że zbliżony do (17) budową wzór otrzymano w pracy [5], jednakże inną metodą (która w istotny sposób wymaga założenia, że n jest liczbą naturalną), a ponadto wprowadzono tam dwa parametry $A(0) = a_0$ oraz $A(\infty) = a_\infty$, z których drugi, jak wynika ze wzoru (18), można efektywnie wyznaczyć. Łatwo sprawdzić, że otrzymany wzór (18) na amplitudę drgań w cyklu granicznym jest zgodny ze wzorem (7) w zakresie stosowalności tego ostatniego.

Wykres zależności A_n od n przedstawia rys. 1.



Rys. 1

Z wykresu widać, że wartość A_n maleje ze wzrostem n . Nie wdając się w szczegółowe badanie tej zależności, która jak widać ze wzoru (18) jest dość złożona, wyznaczymy jedynie $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. W tym celu przekształcimy wzór (18) do nieco innej postaci korzystając z tożsamości Legendre'a [8]

$$(19) \quad \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2x-1/2}} \Gamma(2x),$$

w której przyjmując $2x = n$, dostajemy po prostych przekształceniach

$$(20) \quad A_n = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi(n+1) \Gamma(n)}{2\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

Bierzemy następnie pod uwagę asymptotyczne przedstawienie funkcji gamma Eulera

$$(21) \quad \Gamma(n) \approx n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \quad \text{dla } n \gg 1,$$

skąd wynika równość przybliżona

$$(22) \quad \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right) \approx \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}} e^{-n} 2\pi \quad \text{dla } n \gg 1.$$

Wzór asymptotyczny dla A_n ma więc postać

$$(23) \quad A_n \approx (n+1) \sqrt{\frac{\pi n}{8}}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Stąd

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^{3/2} + n^{1/2})}{n-1} \right] = \exp \left(\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n^2+n} \right) = 1.$$

Otrzymany wynik stanie się w pełni oczywisty, gdy przeprowadzimy analizę cyklu granicznego na płaszczyźnie fazowej. Zaznaczymy tu jeszcze, że istotną cechą amplitudy A_n jest jej niezależność od ε ; nie należy jednak zapominać, że u podstaw wzoru (17), a więc także (18), leży założenie $\varepsilon \ll 1$. Z drugiej strony wiadomo, że dla równania Van der Pola (przypadek $n = 3$) amplituda nie zależy praktycznie od ε , choć charakter drgań zmienia się ze zmianą ε w sposób istotny. Fakt ten nasunął autorom myśl zbadania zależności A_n od ε w rozważanym przypadku ogólnym dla $n \geq 2$ w oparciu o metodę «funkcji delta». W tym celu wyprowadzimy uogólnione równanie Rayleigha odpowiadające równaniu (1), które będzie wygodniejsze do badania na płaszczyźnie fazowej niż uogólnione równanie Van der Pola, podobnie jak to ma miejsce w przypadku $n = 3$.

Uogólnione równanie Rayleigha i badanie jego cyklu granicznego metodą funkcji delta. Wprowadzimy nową funkcję niewiadomą

$$(25) \quad y(t) = \int x(t) dt,$$

a następnie rozumując jak w przypadku klasycznym $n = 3$ (por [2], str. 48) otrzymujemy następujące równanie

$$(26) \quad \ddot{y} - \varepsilon \left(1 - \frac{|y|^{n-1}}{n} \right) \dot{y} + y = 0$$

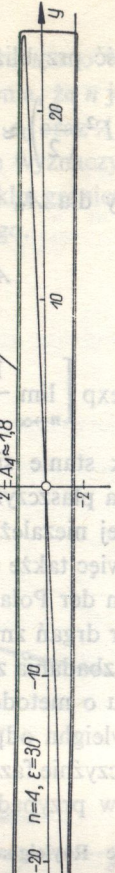
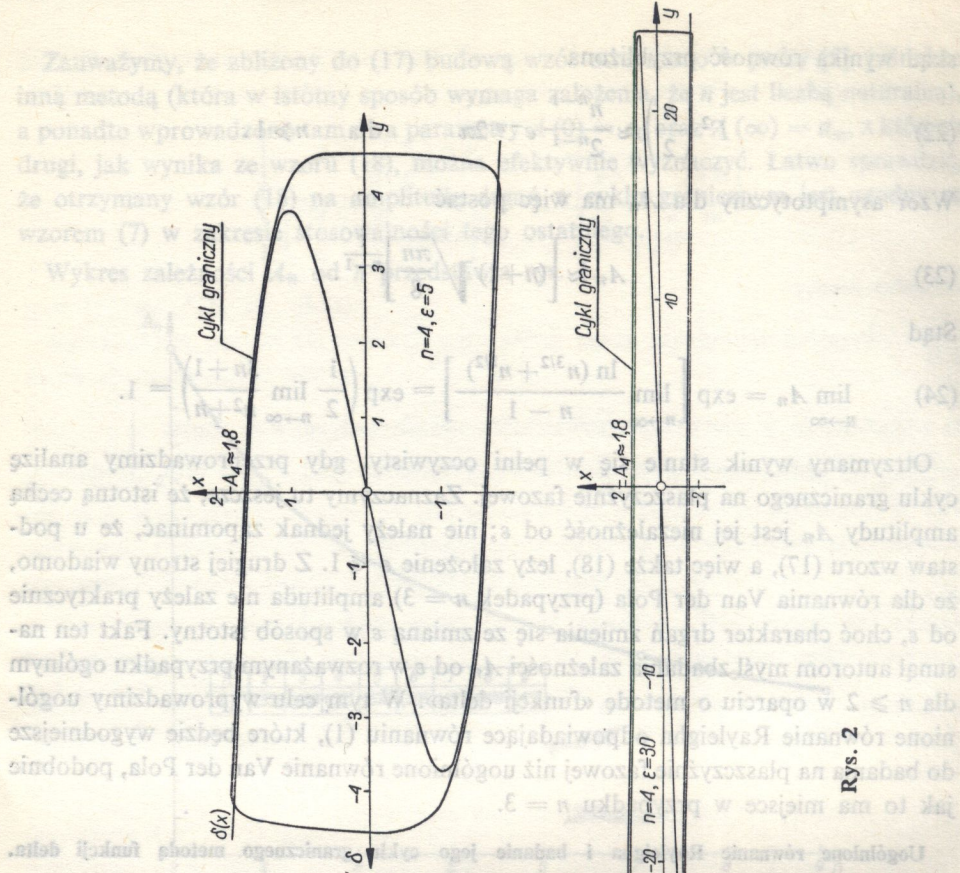
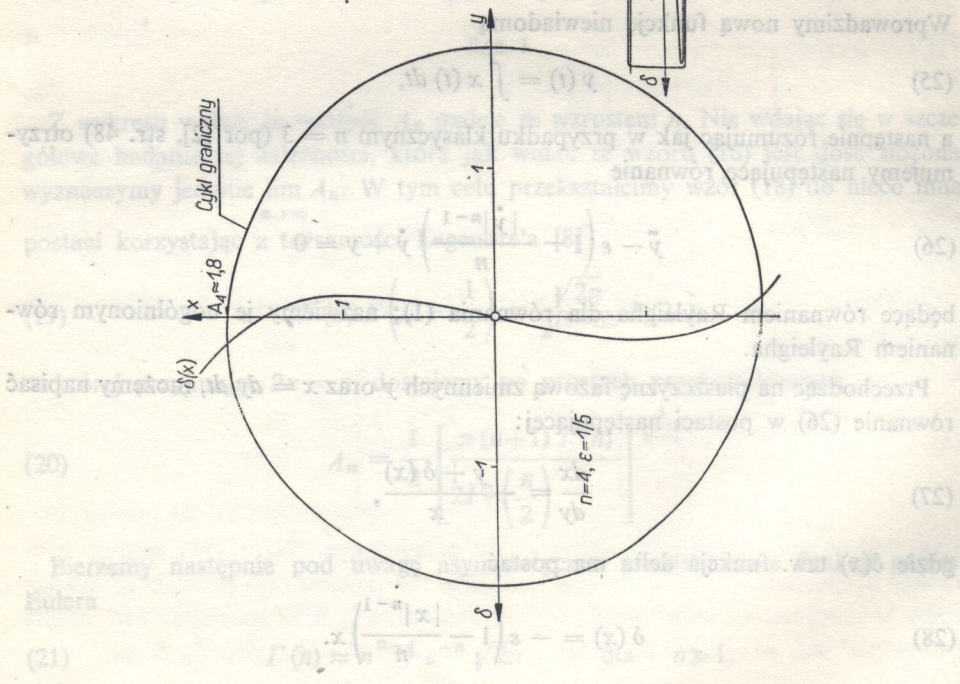
będące równaniem Rayleigha dla równania (1); nazwiemy je uogólnionym równaniem Rayleigha.

Przechodząc na płaszczyznę fazową zmiennych y oraz $x = dy/dt$, możemy napisać równanie (26) w postaci następującej:

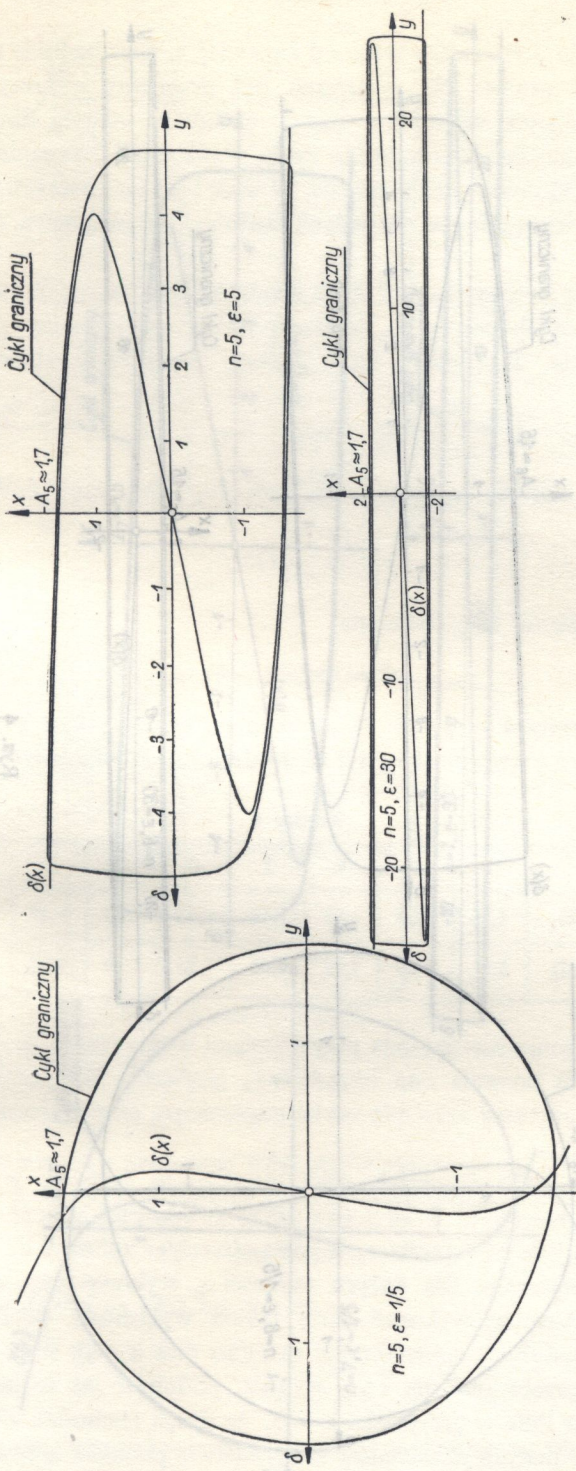
$$(27) \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y + \delta(x)}{x},$$

gdzie $\delta(x)$ tzw. funkcja delta ma postać

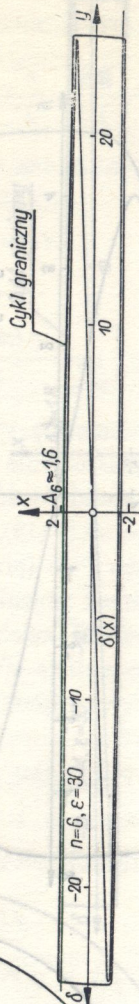
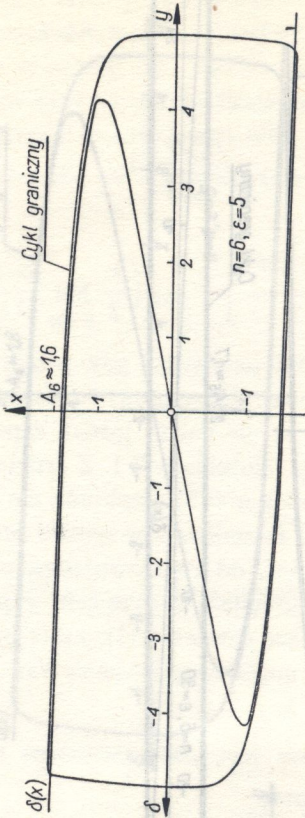
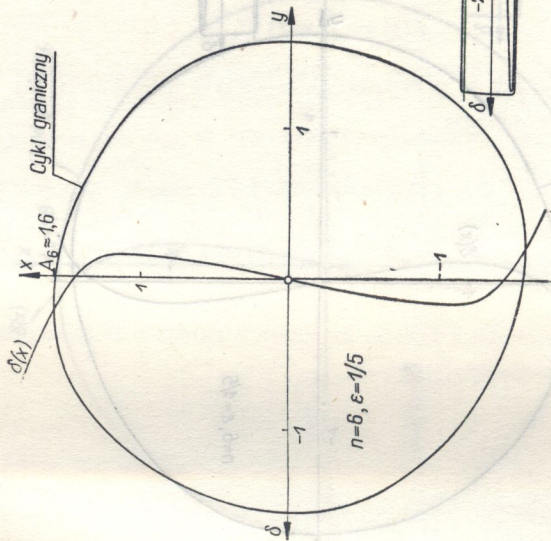
$$(28) \quad \delta(x) = -\varepsilon \left(1 - \frac{|x|^{n-1}}{n} \right) x.$$



Rys. 2

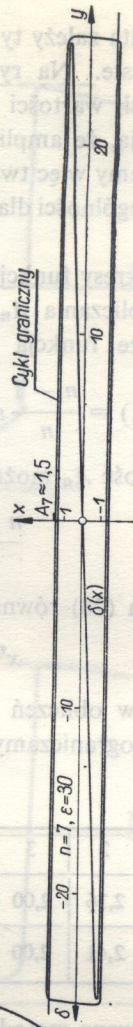
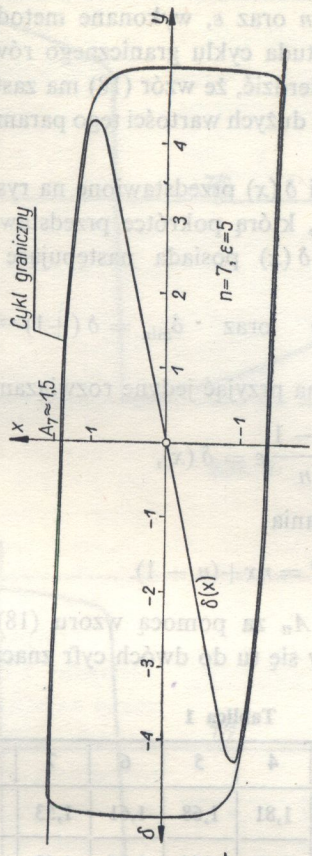
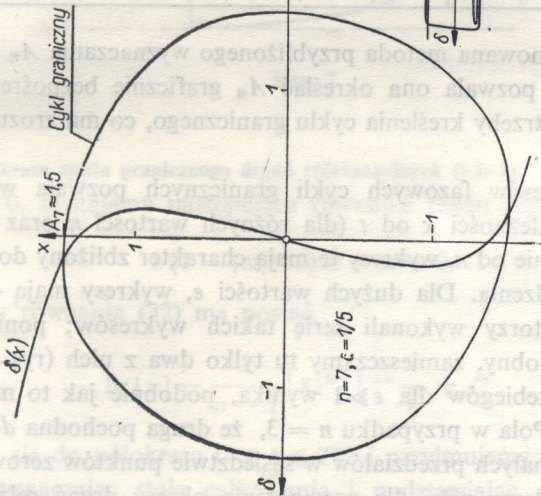


Rys. 3



Rys. 4

Równ. (31)	1.49	1.50	1.49	1.45	1.41
Wzr. (28)	1.00	1.31	1.48	1.48	1.44



Rys. 5

Ponieważ funkcja delta zależy tylko od zmiennej x , więc badanie na płaszczyźnie fazowej jest dość proste. Na rysunkach 2-5 podajemy wykresy fazowe cyklu granicznego dla różnych wartości n oraz ε , wykonane metodą funkcji delta.

Rysunki 2-5 wskazują, że amplituda cyklu granicznego równania (1) nie zależy praktycznie od ε . Możemy więc twierdzić, że wzór (18) ma zastosowanie dla dowolnych wartości ε , w szczególności dla dużych wartości tego parametru, co ma znaczenie zasadnicze.

Obrazy fazowe i wykresy funkcji $\delta(x)$ przedstawione na rys. 2-5 sugerują pewną przybliżoną metodę obliczania A_n , którą pokrótce przedstawimy. Ze wzoru (28) wynika mianowicie, że funkcja $\delta(x)$ posiada następujące ekstrema:

$$(29) \quad \delta_{\max} = \delta(-1) = \frac{n-1}{n} \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \delta_{\min} = \delta(+1) = -\frac{n-1}{n} \varepsilon.$$

Za przybliżoną wartość A_n można przyjąć jedyne rozwiązanie dodatnie równania

$$(30) \quad \frac{n-1}{n} \varepsilon = \delta(x),$$

czyli po uwzględnieniu (28) równania

$$(31) \quad x^n = nx + (n-1).$$

Porównanie wyników obliczeń A_n za pomocą wzoru (18) i z równania (31), przedstawia tablica 1 (ograniczamy się tu do dwóch cyfr znaczących po przecinku).

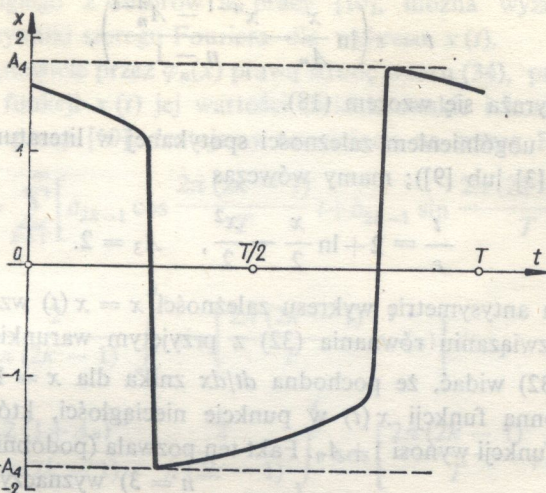
Tablica 1

n	2	3	4	5	6	7	8	9
Wzór (18)	2,36	2,00	1,81	1,68	1,61	1,53	1,48	1,44
Równ. (31)	2,41	2,00	1,78	1,64	1,56	1,49	1,45	1,41

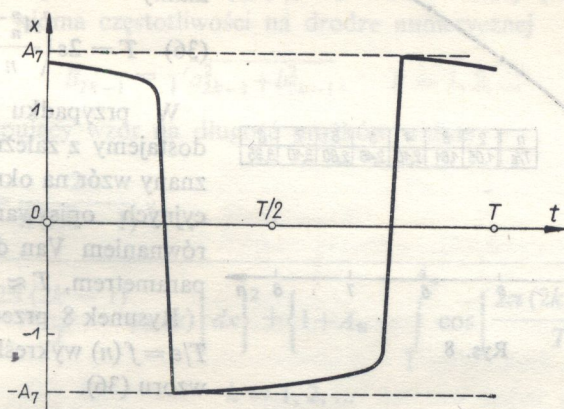
Jak widać, proponowana metoda przybliżonego wyznaczania A_n daje dość dobre wyniki, przy czym pozwala ona określać A_n graficznie bezpośrednio z wykresu funkcji $\delta(x)$ bez potrzeby kreślenia cyklu granicznego, co ma zrozumiałe znaczenie praktyczne.

Znajomość wykresów fazowych cykli granicznych pozwala w znany sposób uzyskać wykresy zależności x od t (dla różnych wartości n oraz ε). Dla małych wartości ε , niezależnie od n , wykresy te mają charakter zbliżony do sinusoidalnego, co było do przewidzenia. Dla dużych wartości ε , wykresy mają charakter drgań relaksacyjnych. Autorzy wykonali serię takich wykresów; ponieważ charakter ich jest bardzo podobny, zamieszczamy tu tylko dwa z nich (rys. 6 i 7).

Z charakteru przebiegów dla $\varepsilon \gg 1$ wynika, podobnie jak to miało miejsce dla równania Van der Pola w przypadku $n = 3$, że druga pochodna d^2x/dt^2 jest bliska zeru (z wyjątkiem małych przedziałów w sąsiedztwie punktów zerowych przebiegu). Fakt ten wykorzystamy niżej dla wyznaczenia okresu drgań relaksacyjnych, podobnie jak się to zwykle czyni w przypadku $n = 3$.



Rys. 6



Rys. 7

Wyznaczenie okresu cyklu granicznego drgań relaksacyjnych ($\varepsilon \gg 1$). Przyjmując w równaniu (1) $\ddot{x} = 0$, dostajemy następujące równanie rzędu pierwszego

$$(32) \quad \varepsilon (1 - |x|^{n-1}) \dot{x} - x = 0.$$

Całka ogólna równania (32) ma postać

$$(33) \quad \ln |x| - \frac{1}{n-1} |x|^{n-1} = \frac{t}{\varepsilon} + C.$$

Ograniczamy się do półokresu $0 \leq t \leq T/2$ i przyjmujemy warunek początkowy $x(0) = A_n$. Wyznaczając stałą całkowania i podstawiając do (33), otrzymamy ostatecznie rozwiązanie równania (32) w postaci

$$(34) \quad t = \varepsilon \left(\ln \frac{x}{A_n} - \frac{x^{n-1} - A_n^{n-1}}{n-1} \right),$$

przy czym A_n wyraża się wzorem (18).

Wzór (34) jest uogólnieniem zależności spotykanej w literaturze dla przypadku $n = 3$ (por. np. [3] lub [9]); mamy wówczas

$$(35) \quad \frac{t}{\varepsilon} = 2 + \ln \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}, \quad A_3 = 2.$$

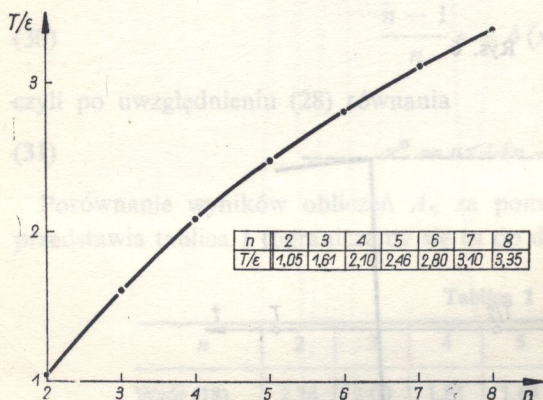
Ze względu na antysymetrię wykresu zależności $x = x(t)$ wzór (34) daje pełne informacje o rozwiązaniu równania (32) z przyjętym warunkiem początkowym.

Z równania (32) widać, że pochodna dt/dx znika dla $x = 1$; wartość ta jest granicą lewostronną funkcji $x(t)$ w punkcie nieciągłości, którym jest $t = T/2$, przy czym skok funkcji wynosi $1 + A_n$. Fakt ten pozwala (podobnie jak w przypadku $n = 3$) wyznaczyć okres drgań relaksacyjnych. Przyjmując we wzorze (34) $t = T/2$ oraz $x = 1$, otrzymamy

$$(36) \quad T = 2\varepsilon \left(\frac{A_n^{n-1} - 1}{n-1} - \ln A_n \right).$$

W przypadku $n = 3$ ($A_3 = 2$) dostajemy z zależności (36) dobrze znany wzór na okres drgań relaksacyjnych opisywanych klasycznym równaniem Van der Pola z dużym parametrem, $T \approx \varepsilon \cdot 1,614$.

Rysunek 8 przedstawia zależność $T/\varepsilon = f(n)$ wykreśloną na podstawie wzoru (36).

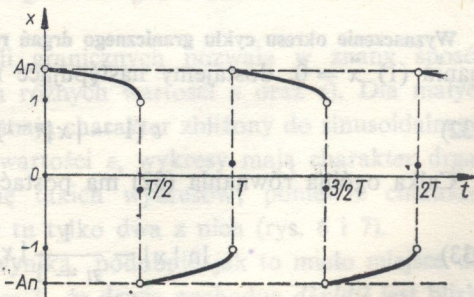


Rys. 8

Podkreślamy, że przedstawione w tej części pracy badanie okresu drgań relaksacyjnych ma charakter wstępny. Rozwinięcie tego tematu przewiduje pierwszy z autorów tej pracy w oddzielnej publikacji.

Widmo częstotliwości cyklu granicznego drgań relaksacyjnych. Wykres zależności $x(t)$ otrzymany na podstawie wzoru (34) z uwzględnieniem antysymetrii przedstawiono na rys. 9.

Aczkolwiek zależność $x = x(t)$ nie jest znana w postaci zamkniętego wzoru, co związane jest z niemożliwością rozwikłania związku (34) względem x , jednakże, stosując metodę przedsta-



Rys. 9

wioną przez drugiego z autorów w pracy [10], można wyznaczyć zamknięte wzory na współczynniki szeregu Fouriera dla wykresu $x(t)$.

Oznaczając mianowicie przez $\varphi_n(x)$ prawą stronę wzoru (34), przyjmując w punktach nieciągłości funkcji $x(t)$ jej wartości dirichletowskie i korzystając z metody przedstawionej w pracy [10], dostajemy rozwinięcie na szereg Fouriera

$$(37) \quad x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{2k-1} \cos \frac{2\pi(2k-1)}{T} t + b_{2k-1} \sin \frac{2\pi(2k-1)}{T} t \right],$$

przy czym

$$(38) \quad a_{2k-1} = \frac{2}{\pi(2k-1)} \int_1^{A_n} \sin \left[\frac{2\pi(2k-1)}{T} \varphi_n(x) \right] dx,$$

$$b_{2k-1} = \frac{2(1+A_n)}{\pi(2k-1)} - \frac{2}{\pi(2k-1)} \int_1^{A_n} \cos \left[\frac{2\pi(2k-1)}{T} \varphi_n(x) \right] dx,$$

$k = 1, 2, \dots$

Ze względu na znajomość funkcji $\varphi_n(x)$, A_n oraz T wzory (38) mogą posłużyć do wyznaczenia widma częstotliwości na drodze numerycznej

$$(39) \quad B_{2k-1} = \sqrt{a_{2k-1}^2 + b_{2k-1}^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

dostajemy następujący wzór na długość prążków widma

$$(40) \quad B_{2k-1} = \frac{2}{\pi(2k-1)} \times$$

$$\times \sqrt{\left\{ \int_1^{A_n} \sin \left[\frac{2\pi(2k-1)}{T} \varphi_n(x) \right] dx \right\}^2 + \left\{ 1 + A_n - \int_1^{A_n} \cos \left[\frac{2\pi(2k-1)}{T} \varphi_n(x) \right] dx \right\}^2},$$

$k = 1, 2, \dots$

który jest uogólnieniem wzoru (19) w pracy [10].

Zależność (40) pozwala na interesującą ocenę prążków widma. Ponieważ

$$(41) \quad \left| \int_1^{A_n} \frac{\sin \left[\frac{2\pi(2k-1)}{T} \varphi_n(x) \right]}{\cos \left[\frac{2\pi(2k-1)}{T} \varphi_n(x) \right]} dx \right| \leq A_n - 1,$$

więc

$$(42) \quad \frac{4}{\pi(2k-1)} < B_{2k-1} < \frac{4}{\pi(2k-1)} \sqrt{A_n^2 + \left(\frac{A_n - 1}{2} \right)^2}.$$

Jak wynika z własności (24), dla dużych wartości n można przyjąć

$$(43) \quad B_{2k-1} \approx \frac{4}{\pi(2k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

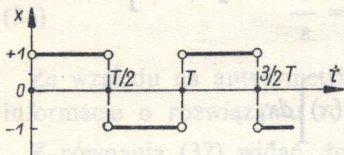
przy czym ze względu na postać wzorów (38) mamy wówczas

$$(44) \quad a_{2k-1} \approx 0, \quad b_{2k-1} \approx \frac{4}{\pi(2k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ponieważ $A_n \approx 1$.

Wynik (44) jest dlatęgo interesujący, że odpowiada mu następujący szereg Fouriera

$$(45) \quad \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi(2k-1)t}{T}}{2k-1},$$



Rys. 10

który przedstawia funkcję okresową jak na rys. 10.

Jest widoczne, że przebieg przedstawiony na rys. 9 zbliża się do przebiegu przedstawionego na rys. 10, gdy n wzrasta nieograniczenie.

Korzystając ze znanego wzoru Parsevala-Lapunowa mamy następnie

$$(46) \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k-1}^2 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x^2(t) dt.$$

Podstawiając $u = x(t)$, skąd $t = \varphi_n(x)$, $dt = \varphi_n'(x) dx$ i wykonując wskazane całkowanie, otrzymujemy zależność następującą

$$(47) \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k-1}^2 = \frac{4\varepsilon}{T} \left[\frac{1 - A_n^2}{2} + \frac{A_n^{n+1} - 1}{n+1} \right],$$

które w ciekawy sposób wiąże widmo drgań relaksacyjnych z parametrem ε , okresem T oraz amplitudą drgań A_n .

Podamy jeszcze jeden wniosek wynikający z zależności (47). Korzystając ze znanego wzoru

$$(48) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

a następnie biorąc pod uwagę (23) dostajemy dla dużych n następującą równość przybliżoną

$$(49) \quad 2 \approx \frac{4\varepsilon}{T} \left(\sqrt{\frac{\pi n}{8}} - \frac{1}{n+1} \right),$$

z której wynika wzór

$$(50) \quad \frac{T}{\varepsilon} \approx \sqrt{\frac{\pi n}{2}} - \frac{2}{n+1}$$

o przydatnej do obliczeń, prostej budowie.

Tablica 2 przedstawia porównanie obliczeń stosunku T/ε według (36) i (50). Wyniki obliczeń wskazują, że w przypadkach nie wymagających dużej dokładności wzór (50) może być stosowany również dla małych wartości n . W zakresie $4 \leq n \leq 8$, błąd spowodowany przyjęciem wzoru (50) nie przekracza 1,5%.

Tablica 2

n		2	3	4	5	6	7	8
$\frac{T}{\varepsilon}$	wzór (36)	1,05	1,61	2,10	2,46	2,80	3,10	3,35
	wzór (50)	1,11	1,66	2,09	2,46	2,78	3,06	3,31
	różnica	0,06	0,05	0,01	0,00	0,02	0,04	0,04

Niniejsza praca została zainicjowana przez drugiego z autorów w ramach prowadzonego seminarium w Katedrze Podstaw Elektrotechniki WAT. Przedstawione w pracy badanie wykonano wspólnie. Przewidziane jest kontynuowanie i pogłębienie podjętego tematu przez pierwszego z autorów tej publikacji.

Literatura cytowana w tekście

- [1] B. VAN DER POL, *The nonlinear theory of electric oscillations*, Proc. I.R.E., 1934, 1051-1086.
- [2] W. J. CUNNINGHAM, *Analiza układów nieliniowych*, (tłum. z ang.), WNT, Warszawa 1962.
- [3] N. MINORSKY, *Nonlinear oscillations*, D. Van Nostr. Comp. Inc., Toronto-New York-London 1962.
- [4] J. GROSZKOWSKI, *Wytwarzanie drgań elektrycznych*, PWT, Warszawa 1958.
- [5] S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1957.
- [6] T. ZAGAJEWSKI, *Czas ustalania się drgań i zniekształcenia nieliniowe generatorów lampowych*, Arch. Elektrot., t. IV. 1957, 395-419.
- [7] N. LEVINSON O. K. SMITH, *A general equation of relaxation oscillations*, Duke math. Journ., t. 9, 1942.
- [8] Т. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. III, Москва-Ленинград 1948, 799.
- [9] J. STOKER, *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*, Interscience Publishers, New York 1954.
- [10] W. ŻAKOWSKI, *Przyczynek do teorii drgań relaksacyjnych*, Zeszyty Nauk. Polit. Warsz., Elektryka, 14, 1957, 111-117.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВАН ДЕР ПОЛЯ

В работе представлены исследования авторов над свойствами уравнения (1), имеющего большое значение в нелинейной генерации. Применяя метод усреднений, дается формула для амплитуды в нестационарном (17) и стационарном (18) состоянии, для малых значений параметра. Фиксируется асимптотическая формула (23) для больших значений n , а затем доказывается условие (24). Исследуя уравнение Рэлея (26), соответствующее уравнению (1), констатируется, при использовании метода функции дельта что амплитуда колебаний в граничном цикле практически не зависит от ε (рис. 2-5). В дальнейшем рассматривается случай

релаксационных колебаний ($\epsilon \gg 1$), получая формулу (36) для периода этих колебаний (рис. 8). Применяя метод, представленный в работе [10], определяется спектр Фурье релаксационных колебаний (37) и (38). Обсуждается также случай больших значений n , который благодаря полученной оценке (42), приводит к известному разложению (45). Затем, доказывается зависимость (47), которая в случае больших значений n , дала возможность привести приближенную формулу (50). Оказалось, что формула (50) дает довольно хорошие результаты также и для малых значений n (таблица 2).

8	7	6	5	4	3	2	1
1.02	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70

Summary

THE PROPERTIES OF THE GENERALIZED EQUATION OF VAN DER POL

The authors present their research work on the properties of the equation (1) of importance in the nonlinear theory of generation. By means of the method of averaging the equation for amplitude in non-stationary state (17) and in the stationary state (18) for small values of the parameters has been obtained. Asymptotic equation (23) is obtained for large n . Then the condition (24) is proved. Investigating the Rayleigh equation (26) corresponding to (1), it is found by means of the delta-function method that the vibration amplitude in the limit cycle is practically independent of ϵ (Fig. 2-5). Next, the case of relaxation oscillation is considered ($\epsilon \gg 1$), the equation (36) being obtained for the period of these vibrations (Fig. 8). By applying the method represented in [10] the Fourier spectre of relaxation oscillations is found (37), (38). Also the case of large n is considered which, owing to the appraisal (42) obtained, leads to the known expansion (45). Then the relation (47) is proved which for large n enables the obtainment of the approximate equation (50). It is found that (50) gives relatively good results also for small values of n (Table 2).

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 października 1963 r.

Abstract and Bibliography section containing references [1] through [10] and a mirrored abstract in Russian at the bottom of the page.