ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 28, 4, 653—659, 1980
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

K O M U N I K A T Y

O NIEISTNIENIU CIĄGŁYCH ROZKŁADÓW DYSKLINACJI W KLASYCZNYM CIELE SPRĘŻYSTYM

ZOFIA MOSSAKOWSKA (WARSZAWA)

Wykazano, że w klasycznym ośrodku sprężystym nie można rozważać ciągłych rozkładów dysklinacji. Ciągłe rozkłady dysklinacji mogą być realizowane w ciałach posiadających dodatkowe obrotowe stopnie swobody (np. w ośrodkach Cosseratów). Ponadto wykazano, że w klasycznym ośrodku sprężystym tensor gęstości dyslokacji α oprócz warunku $\operatorname{div}\alpha=0$ musi spełniać także warunek $\operatorname{tr}_\alpha=0$.

1. Wstęp

W okresie ostatniego dziesięciolecia ukazało się wiele prac poświęconych ciągłym rozkładom dysklinacji. Można je podzielić na trzy grupy. Jedna obejmuje prace traktujące zagadnienia dysklinacji czysto geometrycznie. Druga dotyczy dysklinacji w ośrodkach Cosseratów. Trzecia, najliczniejsza grupa, obejmuje prace omawiające ciągłe rozkłady dysklinacji w klasycznym ośrodku sprężystym, gdzie każdy punkt ma tylko trzy stopnie swobody opisane wektorem przemieszczenia.

Zajmiemy się tu omówieniem tej ostatniej grupy prac, przy czym ograniczymy się do statycznej teorii małych odkształceń i materiału typu Hooke'a. Te upraszczające założenia nie mają wpływu na ogólność wyprowadzonych wniosków, są one także prawidłowe dla dużych odkształceń i materiałów o dowolnej zależności naprężeń od odkształceń.

2. Podstawowe rozwiązania teorii dysklinacji i dyslokacji

Podstawowe równania teorii przyjmiemy zgodnie z pracą R. deWita [1]. Polami źródłowymi są tensory gęstości dyslokacji $\boldsymbol{\alpha}$ i dysklinacji $\boldsymbol{\theta}$ zdefiniowane wzorami

$$\begin{aligned} \alpha_{pl} &= -\varepsilon_{pmk}\left(\overset{\circ}{e}_{kl,m}+\varepsilon_{klq}\overset{\circ}{\kappa}_{mq}\right), \\ \theta_{pl} &= -\varepsilon_{pmk}\overset{\circ}{\kappa}_{kl,m}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Muszą one spełniać warunki całkowalności, które mają postać

$$\begin{aligned} \alpha_{pl,p}+\varepsilon_{lpq}\,\theta_{pq} &= 0, \\ \theta_{pq,p} &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie $\mathring{\mathbf{e}}$ jest tensorem wstępnych (plastycznych) odkształceń, a $\mathring{\boldsymbol{\varkappa}}$ tensorem wstępnych deformacji giętno-skrętnych. Wprowadzenie do ciała pól $\mathring{\mathbf{e}}$ i $\mathring{\boldsymbol{\varkappa}}$ wywołuje reakcję sprężystą opisaną przez tensory $\mathbf{e}$ i $\boldsymbol{\varkappa}$ takie, że

$$
\begin{aligned}
&e_{ij}+\mathring{e}_{ij}=u_{(i,j)},\\
(2.3)\qquad &\kappa_{ij}+\mathring{\kappa}_{ij}=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{jkl}\,u_{l,ki}.
\end{aligned}
$$

Naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ są związane z odkształceniem sprężystym $\mathbf{e}$ wzorem

$$
(2.4)\qquad \sigma_{ij}=C_{ijkl}\,e_{kl}
$$

i muszą spełniać równania równowagi

$$
(2.5)\qquad \nabla_i\,\sigma_{ij}=0.
$$

Rozwiązanie układu równań (2.1)–(2.5) pozwala napisać deformacje sprężyste $\mathbf{e}$ i $\boldsymbol{\varkappa}$ w postaci [1]

$$
\begin{aligned}
&e_{mn}=\int_V C_{ijkl}\,\varepsilon_{pmk}\,G_{jn,\,i}\,(\alpha_{pl}-\mathring{\kappa}_{pl})\,dV'|_{(mn)},\\
(2.6)\qquad &\kappa_{mn}=-\frac{1}{2}\int_V C_{ijkl}\,\varepsilon_{nts}\,\varepsilon_{ptk}\,(G_{js,\,im}\,\alpha_{pl}+G_{js,\,i}\,\varepsilon_{qml}\,\theta_{qp})\,dV'.
\end{aligned}
$$

Symbol (mn) po wzorze oznacza symetryzacje względem wskaźników m, n. $\mathbf{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ jest tensorem Greena operatora Lamégo,

$$
(2.7)\qquad C_{ijkl}\,G_{js,\,ik}+\delta_{ls}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=0.
$$

Wprowadzając tzw. tensor źródeł niespójności $\mathbf{I}$, określony wzorem

$$
I_{mnpq}(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi}\int_V \varepsilon_{pmk}\,\varepsilon_{qsl}\,C_{ijkl}\,G_{jn,\,is}(\mathbf{x}')\,\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV'|_{(mn)}
$$

można odkształcenie sprężyste e_{mn} wyrazić nie poprzez $\boldsymbol{\alpha}$ i $\mathring{\boldsymbol{\varkappa}}$, lecz przez gęstości dyslokacji $\boldsymbol{\alpha}$ i dysklinacji $\boldsymbol{\theta}$:

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad e_{mn}(\mathbf{x})=&\int \varepsilon_{pmk}\,C_{ijkl}\,G_{jn,\,i}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\alpha_{pl}(\mathbf{x}')\,dV'|_{(mn)}-\\
&-\int I_{mnpq}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\theta_{qp}(\mathbf{x}')\,dV'.
\end{aligned}
$$

Teorię dyslokacji można otrzymać z powyższych wzorów, przyjmując $\boldsymbol{\theta}=0$. Podstawiając we wzorze $(2.1)_2$ $\boldsymbol{\theta}=0$ otrzymamy

$$
\varepsilon_{pmk}\,\mathring{\kappa}_{kl,\,m}=0.
$$

Scałkowanie tego równania daje

$$
\mathring{\kappa}_{kl}=\mathring{\omega}_{l,\,k}.
$$

Przyporządkowując wektorowi wstępnego obrotu $\mathring{\boldsymbol{\omega}}$ tensor skośno-symetryczny

$$
\mathring{\omega}_{ij}=\varepsilon_{ijk}\,\mathring{\omega}_k,
$$

można dla $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}$ równania (2.1)–(2.3) napisać w postaci

$$\tag{2.9} \begin{gathered} \alpha_{pl}=-\varepsilon_{pmk}\,\mathring{\beta}_{kl,m}, \\ \alpha_{pl,p}=0, \\ \beta_{ij}+\mathring{\beta}_{ij}=u_{i,j}, \end{gathered}$$

gdzie

$$\mathring{\beta}_{ij}=\mathring{e}_{ij}+\mathring{\omega}_{ij},$$

czyli

$$\mathring{\beta}_{(ij)}=\mathring{e}_{ij}, \qquad \mathring{\beta}_{[ij]}=\mathring{\omega}_{ij}=\varepsilon_{ijk}\,\mathring{\omega}_k,$$
$$\beta_{(ij)}=e_{ij}.$$

Równania (2.4) i (2.5) pozostają bez zmiany.

Rozwiązania (2.7) przechodzą we wzory

$$\tag{2.10} \begin{gathered} e_{mn}=\int\limits_V C_{ijkl}\,\varepsilon_{pmk}\,G_{jn,i}\,\alpha_{pl}\,dV', \\ \kappa_{mn}=\frac{1}{2}\int\limits_V C_{ijkl}\,\varepsilon_{nts}\,\varepsilon_{ptk}\,G_{js,im}\,\alpha_{pl}\,dV', \end{gathered}$$

które są rozwiązaniem równań teorii dyslokacji.

3. Analiza rozwiązań teorii dysklinacji

Oznaczmy tensor gęstości dyslokacji (gdy nie występują dysklinacje), $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}$ dany wzorem $(2.9)_1$ symbolem $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, różnicę zaś

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}=\check{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Wtedy pełny tensor $\boldsymbol{\alpha}$ określony wzorem $(2.1)_1$ możemy napisać w postaci

$$\tag{3.1} \begin{aligned} \alpha_{pl}=-\varepsilon_{pmk}\,(\mathring{e}_{kl,m}+\varepsilon_{klq}\,\mathring{\kappa}_{mq})=-\varepsilon_{pmk}\,(\mathring{e}_{kl,m}+\mathring{\omega}_{kl,m})+ \\ +[-\varepsilon_{pmk}\,(-\mathring{\omega}_{kl,m}+\varepsilon_{klq}\,\mathring{\kappa}_{mq})]=\bar{\alpha}_{pl}+\check{\alpha}_{pl}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathring{\omega}_{kl}$ jest dowolnym antysymetrycznym tensorem, a

$$\tag{3.2} \begin{gathered} \bar{\alpha}_{pl}=-\varepsilon_{pmk}\,(\mathring{e}_{kl,m}+\mathring{\omega}_{kl,m})=-\varepsilon_{pmk}\,\mathring{\beta}_{kl,m} \\ \check{\alpha}_{pl}=-\varepsilon_{pmk}\,(-\mathring{\omega}_{kl,m}+\varepsilon_{klq}\,\mathring{\kappa}_{mq})=-\varepsilon_{pmk}\,\varepsilon_{klq}\,(\mathring{\kappa}_{mq}-\mathring{\omega}_{q,m}), \\ \mathring{\omega}_{(kl)}=0, \qquad \mathring{\omega}_{kl}=\varepsilon_{kls}\,\mathring{\omega}_s. \end{gathered}$$

Wstawiając (3.1) do $(2.6)_1$ otrzymamy

$$\tag{3.3} e_{mn}=\bar{e}_{mn}+\check{e}_{mn},$$

gdzie $\bar{e}_{mn}$ jest częścią odkształcenia sprężystego zależną jedynie od gęstości dyslokacji $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, czyli

$$\tag{3.4} \bar{e}_{mn}(\mathbf{x})=\int\limits_V C_{ijkl}\,\varepsilon_{pmk}\,G_{jn,i}\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\bar{\alpha}_{pl}\,(\mathbf{x}')\,dV'|_{(mn)},$$

zaś $\check{e}_{mn}$ zależy od dysklinacyjnej części tensora $\boldsymbol{\alpha}$ czyli od $\check{\boldsymbol{\alpha}}$ i $\mathring{\boldsymbol{\varkappa}}$; możemy więc napisać

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad \check{e}_{mn} &= \int C_{ijkl}\,\varepsilon_{pmk}\,G_{jn,i}\,(\check{\alpha}_{pl}-\mathring{\kappa}_{lp})\,dV'|_{(mn)}= \\
&= -\int C_{ijkl}\,G_{jn,i}\,\varepsilon_{pmk}\,[\varepsilon_{prs}(-\mathring{\omega}_{sl,r}+\varepsilon_{slq}\,\mathring{\kappa}_{rq})+\mathring{\kappa}_{lp}]\,dV'|_{(mn)}= \\
-&= \int C_{ijkl}\,G_{jn,i}\,\varepsilon_{pmk}\,[-\varepsilon_{prs}\,\mathring{\omega}_{sl,r}+(\delta_{pl}\,\delta_{rq}-\delta_{pq}\,\delta_{rl})\,\mathring{\kappa}_{rq}+\mathring{\kappa}_{lp}]\,dV'|_{(mn)}= \\
-&= \int C_{ijkl}\,G_{jn,i}\,\varepsilon_{pmk}\,[-\varepsilon_{prs}\,\mathring{\omega}_{sl,r}+\delta_{pl}\,\mathring{\kappa}_{qq}-\mathring{\kappa}_{lp}+\mathring{\kappa}_{lp}]\,dV'|_{(mn)}= \\
&= \int C_{ijkl}\,G_{jn,i}\,\varepsilon_{pmk}\,\varepsilon_{prs}\,\mathring{\omega}_{sl,r}\,dV'|_{(mn)}-\int C_{ijkl}\,\varepsilon_{lmk}\,G_{jn,i}\,\mathring{\kappa}_{qq}\,dV'|_{(mn)}= \\
&= \int C_{ijkl}\,G_{jn,ir}\,(\delta_{mr}\,\delta_{ks}-\delta_{ms}\,\delta_{kr})\,\mathring{\omega}_{sl}\,dV'|_{(mn)}= \\
&= \int C_{ijkl}\,G_{jn,ir}\,(\delta_{mr}\,\mathring{\omega}_{kl}-\delta_{kr}\,\mathring{\omega}_{ml})\,dV'|_{(mn)}= \\
&= -\int C_{ijkl}\,G_{jn,ik}\,\mathring{\omega}_{ml}\,dV'|_{(mn)}=\int \delta_{ln}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathring{\omega}_{ml}(\mathbf{x}')\,dV'|_{(mn)}=\mathring{\omega}_{(mn)}=0,
\end{aligned}
$$

Wykorzystaliśmy symetrię tensorów C_{ijkl} i δ_{kl}, antysymetrię tensorów ω_{kl} i ε_{ijk}, równanie (2.6), własność tensora Greena

$$
G_{ij,k}=\frac{\partial}{\partial x^k}\,G_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=-\frac{\partial}{\partial x'^k}\,G_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')
$$

oraz—przy całkowaniu przez części—warunek znikania w nieskończoności wszystkich rozważanych pól.

Ostatecznie otrzymamy

$$
(3.6)\qquad e_{mn}=\bar{e}_{mn}.
$$

Podobnie w wyniku przekształcenia wzoru $(2.7)_2$ otrzymamy

$$
(3.7)\qquad \kappa_{mn}=\bar{\kappa}_{mn}+\check{\kappa}_{mn},
$$

gdzie oznaczono

$$
(3.8)\qquad \bar{\kappa}_{mn}=\frac{1}{2}\int C_{ijkl}\,\varepsilon_{nts}\,\varepsilon_{ptk}\,G_{js,im}\,\bar{\alpha}_{pl}\,dV',
$$

$$
(3.9)\qquad \check{\kappa}_{mn}=\frac{1}{2}\int C_{ijkl}\,\varepsilon_{nts}\,\varepsilon_{ptk}\,G_{js,im}\,[\check{\alpha}_{pl}+\varepsilon_{qml}\,\theta_{qp}]\,dV'.
$$

Przekształcając wzory (3.8) i (3.9) analogicznie do (3.5), otrzymamy

$$
(3.10)\qquad \check{\kappa}_{mn}=-\mathring{\kappa}_{mn}+\mathring{\omega}_{n,m},
$$

$$
(3.11)\qquad \bar{\kappa}_{mn}=-\frac{1}{2}\int C_{ijkl}\,\varepsilon_{nts}\,G_{js,im}\,\mathring{e}_{kl,t}\,dV'-\mathring{\omega}_{n,m},
$$

stąd

$$
(3.12)\qquad \kappa_{mn}=-\frac{1}{2}\int C_{ijkl}\,\varepsilon_{nts}\,G_{js,im}\,\mathring{e}_{kl,t}\,dV'-\mathring{\kappa}_{mn}.
$$

Widać z powyższych wzorów, że jeżeli część dyslokacyjną $\bar{\alpha}$ tensora α przyrównamy do zera, tj.

$$\bar{\alpha}_{ij}=0,$$

to

$$\bar{e}_{ij}=0 \quad \text{oraz} \quad \bar{\kappa}_{ij}=0.$$

Jedynym źródłem zostanie część dysklinacyjna $\check{\alpha}$ tensora gęstości dyslokacji i tensor gęstości dysklinacji θ. Wywołują one w ciele odkształcenia sprężyste $\check{e}$ i deformację giętno-skrętną $\check{\varkappa}$ określone wzorami

$$\begin{aligned} e_{ij}&=\check{e}_{ij}=0, \\ \kappa_{ij}&=\check{\kappa}_{ij}=-\mathring{\kappa}_{ij}+\mathring{\omega}_{j,i}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

A więc ciągły rozkład dysklinacji nie wywołuje w ciele odkształceń sprężystych, a tym samym naprężenia są równe zeru. Ponadto ze wzoru (3.13) wynika, że ciało «kasuje» nadaną mu przez nas deformację wstępną $(\mathring{\kappa}_{mn}-\mathring{\omega}_{n,m})$. Innymi słowy, ażeby zachować ciągłość ciała (warunki (2.3)) musimy skasować tego typu deformację wstępną. Ciało sprężyste nie dopuszcza nadania mu takich deformacji wstępnych. Z powyższych rozważań wynika, że nie można w teorii klasycznego ciała sprężystego mówić o ciągłych rozkładach dysklinacji. Jest to pojęcie, które nie może występować w klasycznej teorii sprężystości. Ciało sprężyste dopuszcza defekty w postaci dyskretnych linii dysklinacji, ale nie można wprowadzić ciągłych rozkładów dysklinacji. Ciągłe rozkłady dysklinacji są naturalnym źródłem samonaprężeń w materiałach typu Cosseratów.

4. Ciągłe rozkłady dyslokacji

Układ równań opisujący ciało sprężyste z dyslokacjami rozłożonymi w sposób ciągły dany jest równaniami (2.9), (2.4) i (2.5), a odpowiadające im rozwiązania mają postać

$$\beta_{mn}=\int C_{ijkl}\,\varepsilon_{pmk}\,G_{jn,l}\,\alpha_{pl}\,dV'. \tag{4.1}$$

Wstawiając $(2.9)_1$ do (4.1) otrzymamy

$$\begin{aligned} \beta_{(mn)}&=e_{mn}=-\int C_{ijkl}\,G_{jm,ni}\,\mathring{e}_{kl}\,dV'|_{(mn)}, \\ \beta_{[mn]}&=\omega_{mn}=-\frac{1}{2}\int C_{ijkl}\,(G_{jn,mi}-G_{jm,ni})\,\mathring{e}_{kl}\,dV'-\mathring{\omega}_{mn}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Z powyższych wzorów widać, że antysymetryczna część dystorsji wstępnej

$$\mathring{\beta}_{[mn]}=\mathring{\omega}_{mn}$$

nie ma wpływu na odkształcenia sprężyste, a tym samym na naprężenia. Jest to zrozumiałe, gdyż klasyczny materiał sprężysty nie reaguje na obroty. Jeżeli rozważymy takie α, że

$$\alpha_{pl}=-\varepsilon_{pmk}\,\mathring{\omega}_{kl,m},$$

tzn. $\mathring{\mathbf{e}}=0$, to z (4.2) mamy

$$e_{mn}=0,\tag{4.3}$$
$$\omega_{mn}=-\mathring{\omega}_{mn},\qquad \omega^{T}_{mn}=\omega_{mn}+\mathring{\omega}_{mn}=0.$$

A więc część tensora gęstości dyslokacji pochodząca od antysymetrycznej części dystorsji wstępnej $\mathring{\beta}$ nie powoduje powstania reakcji sprężystej ($\mathbf{e}=0$, $\boldsymbol{\sigma}=0$). Warunek ciągłości ciała $(2.9)_3$ wymaga skasowania wstępnie danych obrotów $\mathring{\boldsymbol{\omega}}$ $((4.3)_2)$.

Widać z powyższych rozważań, że tensor gęstości dyslokacji powinien być określony nie wzorem $(2.9)_1$, lecz

$$\alpha_{pl}=-\varepsilon_{pmk}\,\mathring{e}_{kl,m}.\tag{4.4}$$

Równanie to implikuje następujące warunki zgodności:

$$\alpha_{pl,p}=0,\qquad \alpha_{pp}=0.\tag{4.5}$$

Dla $\boldsymbol{\alpha}$ spełniających równania (4.5) całka szczególna równania (4.4) ma postać

$$\mathring{e}_{kl}(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi}\,\varepsilon_{ksp}\nabla_s\int\limits_{V\infty}\frac{\alpha_{pl}(\mathbf{x}')}{r}\,dV'+\frac{1}{4\pi}\,\varepsilon_{lsp}\nabla_k\int\limits_{V\infty}\frac{\alpha_{ps}(\mathbf{x}')}{r}\,dV',\tag{4.6}$$

gdzie

$$r=|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|.$$

W literaturze podaje się jedynie warunek $(4.5)_1$, który jest konsekwencją wzoru $(2.9)_1$. Powoduje to rozważanie rozkładów dyslokacji, którym nie towarzyszy pole naprężeń i które są likwidowane przez materiał, co wynika ze wzorów (4.3). MURA [2] nazwał takie rozkłady «*impotent dislocations*».

Powyższe rozważania wykazują, że można rozpatrywać jedynie takie tensory gęstości dyslokacji, które spełniają oba warunki (4.5), oraz że tensor gęstości dyslokacji musi być definiowany wzorem (4.4), a nie $(2.9)_1$.

5. Ciągłe rozkłady dyslokacji w ośrodkach Cosseratów

W ośrodkach sprężystych, których każdy punkt posiada sześć stopni swobody (trzy translacyjne i trzy obrotowe) deformacja ciała opisana jest przez wektor przemieszczenia $\mathbf{u}$ i obrotu $\boldsymbol{\varphi}$. Deformacja jest określona przez tensory $\boldsymbol{\varkappa}$ i $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\gamma_{ik}+\mathring{\gamma}_{ik}=u_{k,i}-\varepsilon_{ikp}\,\varphi_p,\tag{5.1}$$
$$\varkappa_{ik}+\mathring{\varkappa}_{ik}=\varphi_{k,i},$$

gdzie tak jak poprzednio $\mathring{\boldsymbol{\gamma}}$ i $\mathring{\boldsymbol{\varkappa}}$ są tensorami deformacji wstępnych, a $\boldsymbol{\gamma}$ i $\boldsymbol{\varkappa}$—sprężystych.

Warunki całkowalności równań (5.1) mają postać

$$\varepsilon_{pmk}(\gamma_{kl,m}+\varepsilon_{lmq}\,\varkappa_{kq})=-\alpha_{pl},\tag{5.2}$$
$$\varepsilon_{pmk}\,\varkappa_{kl,m}=-\theta_{pl}.$$

Są to równania zgodności odkształceń dla ośrodka Cosseratów. W przeciwieństwie do klasycznej teorii sprężystości są to równania pierwszego rzędu. Tensory $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\theta}$ są tensorami niespójności i związane są z deformacjami wstępnymi $\overset{\circ}{\boldsymbol{\gamma}}$ i $\overset{\circ}{\boldsymbol{\varkappa}}$ zależnościami

$$(5.3)\qquad \begin{aligned} \alpha_{pl} &= -\varepsilon_{pmk}\,(\overset{\circ}{\gamma}_{kl,m}+\varepsilon_{lmq}\,\overset{\circ}{\kappa}_{kq}),\\ \theta_{pl} &= -\varepsilon_{pmk}\,\overset{\circ}{\kappa}_{kl,m}. \end{aligned}$$

Tensorów $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\theta}$ nie można przyjąć dowolnie. Muszą one spełniać równania

$$(5.4)\qquad \begin{aligned} \alpha_{pl,p}+\varepsilon_{lpq}\,\theta_{pq} &= 0,\\ \theta_{pq,p} &= 0, \end{aligned}$$

które są warunkami całkowalności równań (5.3).

Podczas gdy w klasycznym ośrodku Hooke'a tensor niespójności $\boldsymbol{\eta}$ określony wzorem

$$(5.5)\qquad \eta_{ij} = -\varepsilon_{ikm}\,\varepsilon_{jln}\,\overset{\circ}{e}_{mn,kl}$$

nie ma dobrej bezpośredniej interpretacji fizycznej, tensory niespójności $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\theta}$ w teorii Cosseratów (5.3) mają interpretację tensorów gęstości dyslokacji i dysklinacji. Widać stąd, że ciągłe rozkłady dysklinacji są pojęciem, które w sposób naturalny wchodzi do teorii ośrodków, w których istnieją dodatkowe obrotowe stopnie swobody.

Mając dane $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\theta}$, można scałkować równania (5.3); przy uwzględnieniu równań (5.4) otrzymamy rozwiązania

$$(5.6)\qquad \begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{kl}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi}\,\varepsilon_{ksp}\,\nabla_s \int_{V\infty} \frac{\alpha_{pl}(\mathbf{x}')}{r}\,dV' + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\,\varepsilon_{lqs}\,\varepsilon_{kij}\,\nabla_s\,\nabla_j \int_{V\infty} \frac{dV'}{r} \int_{V\infty} \frac{\theta_{iq}(\mathbf{x}'')}{r'}\,dV'',\\ \overset{\circ}{\kappa}_{kl}(\mathbf{x}) &= \varepsilon_{kij}\,\nabla_i \int_{V\infty} \frac{\theta_{jl}(\mathbf{x}')}{r}\,dV', \end{aligned}$$

gdzie

$$r = |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|,\qquad r' = |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|.$$

Literatura cytowana w tekście

1. R. deWit, *Theory of disclinations; II. Continuous and discrete disclinations in anisotropic elasticity*, J. Res. Nat. Bur. Stand., **77A**, 1, 49–100, 1973.
2. T. Mura, *Continuum theory of dislocations in plasticity*, in: Mechanics of Generalized Continua, ed. E. Kröner, Springer Verlag, 1968.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 maja 1979 r.