

WYMUSZONE DRGANIA TŁUMIONE POWŁOKI STOŻKOWEJ Z MATERIAŁU ŚCIŚLIWEGO NIELINIOWO SPRĘŻYSTEGO

TADEUSZ W E G N E R (POZNAŃ)

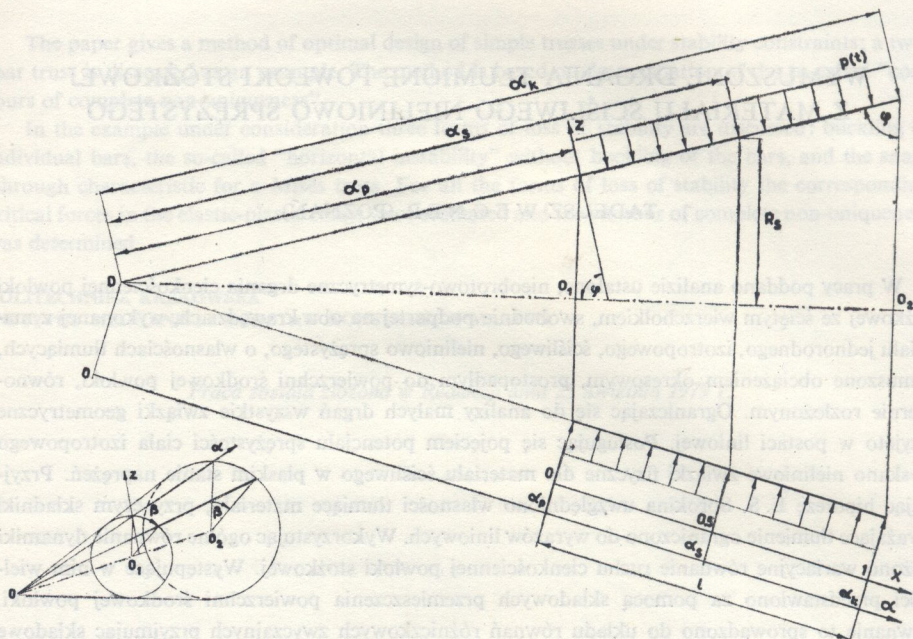
W pracy poddano analizie ustalone, nieobrotowo-symetryczne drgania cienkościennej powłoki stożkowej ze ściętym wierzchołkiem, swobodnie podpartej na obu krawędziach, wykonanej z materiału jednorodnego, izotropowego, ściśliwego, nieliniowo sprężystego, o własnościach tłumiących, wymuszone obciążeniem okresowym, prostopadłym do powierzchni środkowej powłoki, równomiernie rozłożonym. Ograniczając się do analizy małych drgań wszystkie związki geometryczne przyjęto w postaci liniowej. Posługując się pojęciem potencjału sprężystości ciała izotropowego uzyskano nieliniowe związki fizyczne dla materiału ściśliwego w płaskim stanie naprężeń. Przyjmując hipotezę E. S. Sorokina uwzględniono własności tłumiące materiału, przy czym składniki wyrażające tłumienie ograniczono do wyrazów liniowych. Wykorzystując ogólne równanie dynamiki ułożono wariacyjne równanie ruchu cienkościennej powłoki stożkowej. Występujące w nim wielkości przedstawiono za pomocą składowych przemieszczenia powierzchni środkowej powłoki. Równanie to sprowadzono do układu równań różniczkowych zwyczajnych przyjmując składowe przemieszczenia powierzchni środkowej powłoki w postaci sumy składowych obrotowo-symetrycznej i nieobrotowo-symetrycznej, przy czym każdą ze składowych aproksymowano iloczynem nieznannej funkcji zależnej od czasu oraz danej funkcji pozostałych współrzędnych, wyznaczającej założoną postać drgań. Otrzymany układ równań rozwiązano metodą małego parametru. Uzyskane rozwiązanie, ilustrujące wpływ nieliniowości sprężystej na drgania powłoki, przedstawiono w postaci graficznej.

WSTĘP

W wielu pracach dotyczących drgań powłok walcowych lub stożkowych [3, 4, 7, 8, 9, 10 i inne] analizowano drgania obrotowo-symetryczne. W przypadku cienkich powłok, znacznie niższymi częstotliwościami drgań własnych od częstotliwości odpowiadających drganiom obrotowo-symetrycznym charakteryzują się drgania nieobrotowo-symetryczne; stąd możliwe jest występowanie nieobrotowo-symetrycznych drgań w elementach konstrukcji powłokowych. Dokładne poznanie charakteru tych drgań umożliwi taki wybór parametrów układu, przy których drgania te nie występują. Drgania nieobrotowo-symetryczne powłok rozpatrywano m.in. w pracach [1, 5 i 6], przy czym analiza dotyczyła drgań swobodnych.

W niniejszej pracy rozpatrzmy wymuszone drgania nieobrotowo-symetryczne cienkościennej powłoki w kształcie stożka ściętego (rys. 1), swobodnie podpartej na obu krawędziach, wykonanej z materiału jednorodnego, izotropowego, ściśliwego, nieliniowo sprężystego, o własnościach tłumiących. Zakładamy, że na powłokę

działa harmonicznie zmienne obciążenie o amplitudzie p i zerowej wartości średniej, równomiernie rozłożone na powierzchni bocznej powłoki i prostopadłe do niej, o częstotści zbliżonej do najniższej częstotści własnej powłoki.



Rys. 1

Dla obciążenia zewnętrznego, równomiernie rozłożonego na powierzchni bocznej powłoki, praca sił zewnętrznych na nieobrotowo-symetrycznych składowych przemieszczenia w dolnym przedziale czasu jest równa zero; stąd (ze względu na występującą w materiale powłoki dysypację) drgania powłoki, których składowa obrotowo-symetryczna jest równa zero, mogą wystąpić tylko jako drgania gasnące. Tak więc ustalone składowe nieobrotowo-symetryczne drgań mogą istnieć jedynie łącznie ze składowymi obrotowo-symetrycznymi, co uwzględnimy przyjmując w rozwiązaniu odpowiednie funkcje aproksymujące składowe stanu przemieszczenia powłoki.

1. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Zgodnie z hipotezą Kirchhoffa-Love'a składowe stanu odkształcenia elementu powłoki odległego o z od powierzchni środkowej przedstawiono w postaci

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \varepsilon_1 + zK_1, \\ \varepsilon_\beta &= \varepsilon_2 + zK_2, \end{aligned}$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{12} + z\omega_{12},$$

gdzie składowe stanu odkształcenia powierzchni środkowej $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ i współczynniki $\kappa_1, \kappa_2, \omega_{12}$, charakteryzujące zmianę głównych krzywizn oraz obrót powierzchni środkowej, wyrażono za pomocą składowych przemieszczenia u, v, w powierzchni środkowej wzorami

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_{,\alpha}, & \varepsilon_2 &= \frac{u}{\alpha} + \frac{w \sin \varphi + v_{,\beta}}{\alpha \cos \varphi}, & \gamma_{12} &= -\frac{v}{\alpha} + v_{,\alpha} + \frac{u_{,\beta}}{\alpha \cos \varphi}, \\ \kappa_1 &= -w_{,\alpha\alpha}, & \kappa_2 &= -\frac{w_{,\alpha}}{\alpha} + \frac{v_{,\beta} \sin \varphi - w_{,\beta\beta}}{(\alpha \cos \varphi)^2}, \\ \omega_{12} &= \frac{2}{\alpha \cos \varphi} \left[\left(-\frac{v}{\alpha} + v_{,\alpha} \right) \sin \varphi + \frac{w_{,\beta}}{\alpha} - w_{,\alpha\beta} \right]. \end{aligned}$$

Wykorzystując model ciała nieliniowo sprężystego KAUDERERA [2], potencjał sprężystości dla wielu ważnych w zastosowaniach technicznych materiałów (np. miedzi, aluminium, stopów miedzi i innych) przedstawiono w postaci

$$(1.3) \quad V = \frac{1}{2} K \theta^2 + \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon,$$

gdzie intensywność naprężeń σ i intensywność odkształceń ε dane są wzorami

$$(1.4) \quad \sigma = E(1 - b\varepsilon^2)\varepsilon, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2} v_0 \gamma_0},$$

oraz

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\beta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\alpha)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{\alpha\beta}^2 + \gamma_{\beta z}^2 + \gamma_{z\alpha}^2)}, \\ \theta &= \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_z, \\ b &= a_3 E^2 v_0^2, \quad v_0 = \frac{3}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \end{aligned}$$

Współczynnik a_3 jest stałą materiałową określającą nieliniowe własności materiału, przy czym związek między naprężeniem σ_x a podłużnym odkształceniem ε_x dla jednoosiowego rozciągania-ściskania ma postać

$$(1.6) \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} (1 + a_3 \sigma_x^2) \sigma_x.$$

Moduł Younga E i współczynnik Poissona ν są stałymi materiałowymi wyznaczonymi przy małych odkształceniach.

Pochodne cząstkowe potencjału sprężystości względem składowych stanu odkształcenia określają składowe stanu naprężenia

$$(1.7) \quad \sigma_\alpha = V_{,\varepsilon_\alpha}, \quad \sigma_\beta = V_{,\varepsilon_\beta}, \quad \tau_{\alpha\beta} = V_{,\gamma_{\alpha\beta}}.$$

Wykorzystując liniowe związki geometryczne (1.1) składowe stanu naprężenia przedstawiono w postaci rozwinięć względem współrzędnej z :

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= E [b_0 + b_1 z - a (p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3)], \\ \sigma_\beta &= E [c_0 + c_1 z - a (r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + r_3 z^3)], \\ \tau_{\alpha\beta} &= E [d_0 + d_1 z - a (s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + s_3 z^3)], \\ a &= a_3 E^2. \end{aligned}$$

Współczynniki b , c i d oraz p , r i s są funkcjami jednorodnymi odpowiednio stopnia pierwszego i trzeciego składowych stanu przemieszczenia powierzchni środkowej powłoki oraz ich pochodnych względem zmiennych przestrzennych.

Związek pomiędzy naprężeniem i odkształceniem dla liniowego modelu tłumienia w jednoosiowym stanie naprężenia ma według hipotezy Sorokina postać

$$(1.9) \quad \bar{\sigma}_x = E \varepsilon_x \pm \frac{\psi}{2\pi} E \varepsilon_a \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_a}\right)^2},$$

gdzie ψ jest współczynnikiem tłumienia materiałowego, a ε_a amplitudą odkształcenia. Zakładając, że ruch drgający jest w przybliżeniu harmoniczny i jego częstość wynosi ω , wzór (1.9) można napisać w postaci

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= E \varepsilon_x + \frac{\eta}{\omega} E \varepsilon_{x,t}, \\ \eta &= \frac{\psi}{2\pi}. \end{aligned}$$

Przyjmując, iż spełnione jest w przybliżeniu prawo Hooke'a mamy

$$(1.11) \quad \bar{\sigma}_x = \sigma_x + \frac{\eta}{\omega} \sigma_{x,t}.$$

Ta liniowa zależność została wyprowadzona przez Boka dla ustalonych drgań wymuszonych. Przyjmujemy, że współczynnik tłumienia materiałowego jest wielkością stałą i nie zależy ani od amplitudy odkształcenia, ani od częstości drgań. Jest to założenie przybliżone, ale zupełnie wystarczające dla drgań o niewielkich amplitudach odkształcenia. Uwzględniając własności tłumiące materiału, składowe stanu naprężenia przedstawiono w postaci

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= E \left[b_0 + \frac{\eta}{\omega} b_{0,t} + \left(b_1 + \frac{\eta}{\omega} b_{1,t} \right) z - a (p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3) \right], \\ \sigma_\beta &= E \left[c_0 + \frac{\eta}{\omega} c_{0,t} + \left(c_1 + \frac{\eta}{\omega} c_{1,t} \right) z - a (r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + r_3 z^3) \right], \\ \tau_{\alpha\beta} &= E \left[d_0 + \frac{\eta}{\omega} d_{0,t} + \left(d_1 + \frac{\eta}{\omega} d_{1,t} \right) z - a (s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + s_3 z^3) \right], \end{aligned}$$

gdzie, ze względu na złożoność problemu, składniki uwzględniające tłumienie wewnętrzne ograniczono do wyrazów liniowych.

Wykorzystując ogólne równanie dynamiki otrzymano warunek równowagi dynamicznej powłoki obrotowej w postaci

$$(1.13) \quad \int_{\alpha_p}^{\alpha_k} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[(BN_{\alpha, \alpha} + AS_{, \beta} + (AB \tau_{\alpha z})|_{-h}^h - B_{, \alpha} N_{\beta} + \frac{AB}{R_1} T_{\alpha} - 2h AB \rho u_{, tt} \right] \delta u + \right. \\ \left. + \left[(BS)_{, \alpha} + AN_{\beta, \beta} + (AB \tau_{\beta z})|_{-h}^h + B_{, \alpha} S + \frac{AB}{R_2} T_{\beta} - 2h AB \rho v_{, tt} \right] \delta v + \right. \\ \left. + \left[(BT_{\alpha, \alpha} + AT_{\beta, \beta} + (AB \sigma_z)|_{-h}^h - \frac{AB}{R_1} N_{\alpha} - \frac{AB}{R_2} N_{\beta} - 2h AB \rho w_{, tt} \right] \delta w - \right. \\ \left. - \left[(BM_{\alpha, \alpha} + AH_{, \beta} + (ABz \tau_{\alpha z})|_{-h}^h - ABT_{\alpha} - B_{, \alpha} M_{\beta} + \frac{(2h)^3}{12} AB \rho \frac{w_{, \alpha tt}}{A} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta w_{, \alpha}}{A} - \left[(BH)_{, \alpha} + AM_{\beta, \beta} + (ABz \tau_{\beta z})|_{-h}^h - ABT_{\beta} + B_{, \alpha} H + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(2h)^3}{12} AB \rho \frac{w_{, \beta tt}}{B} \right] \frac{\delta w_{, \beta}}{B} \right\} d\alpha d\beta = 0,$$

gdzie ρ jest gęstością materiału powłoki, a siły i momenty odniesione do jednostki długości krawędzi powierzchni środkowej związane są z naprężeniami zależnościami

$$(1.14) \quad N_{\alpha} = \int_{-h}^h \sigma_{\alpha} dz, \quad N_{\beta} = \int_{-h}^h \sigma_{\beta} dz, \quad S = \int_{-h}^h \tau_{\alpha\beta} dz, \\ T_{\alpha} = \int_{-h}^h \tau_{\alpha z} dz, \quad T_{\beta} = \int_{-h}^h \tau_{\beta z} dz, \\ M_{\alpha} = \int_{-h}^h z \sigma_{\alpha} dz, \quad M_{\beta} = \int_{-h}^h z \sigma_{\beta} dz, \quad H = \int_{-h}^h z \tau_{\alpha\beta} dz.$$

Dla powłoki obrotowej o grubości $2h$, podpartej przegubowo przesuwnie wzdłuż krawędzi $\alpha = \alpha_p$ oraz $\alpha = \alpha_k$, obciążonej na powierzchni $z = h$ ciśnieniem $p(t)$, warunki brzegowe mają postać

$$(1.15) \quad (\sigma_z)_{-h} = (\tau_{\alpha z})_{-h} = (\tau_{\beta z})_{-h} = 0, \\ (\sigma_z)_h = -p(t), \quad (\tau_{\alpha z})_h = (\tau_{\beta z})_h = 0,$$

$$(1.16) \quad (N_{\alpha})_{\alpha_p} = (v)_{\alpha_p} = (w)_{\alpha_p} = (M_{\alpha})_{\alpha_p} = (w_{, \beta})_{\alpha_p} = 0, \\ (N_{\alpha})_{\alpha_k} = (v)_{\alpha_k} = (w)_{\alpha_k} = (M_{\alpha})_{\alpha_k} = (w_{, \beta})_{\alpha_k} = 0.$$

Uwzględniając warunki brzegowe oraz fakt, iż funkcje określające przemieszczenia, obroty, siły i momenty oraz współczynniki Lamègo A i B są okresowe względem zmiennej β o okresie równym 2π , całkujemy przez części te składniki równania (1.13), w których występują pochodne sił lub momentów. W wyniku całkowania uzyskano wariacyjne równanie ruchu powłoki obrotowej w postaci

$$\begin{aligned}
 (1.17) \quad \int_{\alpha_p}^{\alpha_k} \int_0^{2\pi} & \left[-(N_\beta B_{,\alpha} + 2h \rho AB u_{,tt}) \delta u - N_\alpha B \delta u_{,\alpha} - SA \delta u_{,\beta} + \right. \\
 & + (SB_{,\alpha} - 2h \rho AB v_{,tt}) \delta v - SB \delta v_{,\alpha} - N_\beta A \delta v_{,\beta} - \\
 & \left. - \left(p(t) + \frac{N_\alpha}{R_1} + \frac{N_\beta}{R_2} + 2h \rho w_{,tt} \right) AB \delta w + \right. \\
 & + \left(M_\beta B_{,\alpha} - \frac{(2h)^3}{12} \rho B w_{,att} \right) \frac{\delta w_{,\alpha}}{A} - \frac{(2h)^3}{12} \rho A w_{,\beta tt} \frac{\delta w_{,\beta}}{B} + \\
 & \left. + M_{\alpha} B \left(\frac{\delta w_{,\alpha}}{A} \right)_{,\alpha} + 2HB \left(\frac{\delta w_{,\beta}}{B} \right)_{,\alpha} + M_\beta A \frac{\delta w_{,\beta\beta}}{B} \right] d\alpha d\beta = 0.
 \end{aligned}$$

Ponieważ naprężenia styczne w płaszczyznach prostopadłych do powierzchni środkowej są bliskie zeru, w równaniu pominięto pracę przygotowaną sił poprzecznych T_α i T_β na przemieszczeniach w kierunkach stycznych do płaszczyzny środkowej.

Dla powłoki stożkowej wariacyjne równanie ruchu ma postać

$$\begin{aligned}
 (1.18) \quad \int_{\alpha_p}^{\alpha_k} \int_0^{2\pi} & \left[-(N_\beta + 2h \rho \alpha u_{,tt}) \cos \varphi \delta u - N_\alpha \alpha \cos \varphi \delta u_{,\alpha} - S \delta u_{,\beta} + \right. \\
 & + (S - 2h \rho \alpha v_{,tt}) \cos \varphi \delta v - S \alpha \cos \varphi \delta v_{,\alpha} - N_\beta \delta v_{,\beta} + \\
 & \left. - \left(p(t) + \frac{N_\beta \operatorname{tg} \varphi}{\alpha} + 2h \rho w_{,tt} \right) \alpha \cos \varphi \delta w + \right. \\
 & + \left(M_\beta - \frac{(2h)^3}{12} \rho \alpha w_{,att} \right) \cos \varphi \delta w_{,\alpha} - \frac{(2h)^3}{12} \rho w_{,\beta tt} \frac{\delta w_{,\beta}}{\alpha \cos \varphi} + \\
 & \left. + M_\alpha \alpha \cos \varphi \delta w_{,\alpha\alpha} + 2H\alpha \left(\frac{\delta w_{,\beta}}{\alpha} \right)_{,\alpha} + M_\beta \frac{\delta w_{,\beta\beta}}{\alpha \cos \varphi} \right] d\alpha d\beta = 0.
 \end{aligned}$$

Składowe stanu przemieszczenia powierzchni środkowej powłoki aproksymowano funkcjami

$$\begin{aligned}
 u(\alpha, \beta, t) &= \left(\frac{\alpha}{\alpha_S} \right)^2 \left(U_0(t) \cos \frac{m_0 \pi (\alpha - \alpha_p)}{l} + \right. \\
 & \quad \left. + U_n(t) \cos \frac{m\pi (\alpha - \alpha_p)}{l} \cos n\beta \right), \\
 (1.19) \quad v(\alpha, \beta, t) &= \left(\frac{\alpha}{\alpha_S} \right)^2 V_n(t) \sin \frac{m\pi (\alpha - \alpha_p)}{l} \sin n\beta, \\
 w(\alpha, \beta, t) &= \left(\frac{\alpha}{\alpha_S} \right)^2 \left(W_0(t) \sin \frac{m_0 \pi (\alpha - \alpha_p)}{l} + \right. \\
 & \quad \left. + W_n(t) \sin \frac{m\pi (\alpha - \alpha_p)}{l} \cos n\beta \right),
 \end{aligned}$$

gdzie $U_0(t)$, $W_0(t)$, $U_n(t)$, $V_n(t)$ i $W_n(t)$ są nieznanymi funkcjami czasu. Wzdłuż krawędzi powłoki przyjęte funkcje aproksymujące spełniają ściśle warunki (1.16) dotyczące przemieszczeń, a warunki (1.16) dotyczące sił i momentów spełnione są

w przybliżeniu. Ze względu na zastosowaną metodę ściśle spełnienie warunków statycznych, wynikających ze sposobu podparcia krawędzi, nie jest konieczne.

Wykorzystując założone funkcje aproksymujące oraz wprowadzając wielkości bezwymiarowe czasu, siły wymuszającej i częstości oraz poszukiwanych funkcji czasu

$$(1.20) \quad \tau = \omega t, \quad P(\tau) = \frac{p(\tau)}{E}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0},$$

$$Y_1 = \frac{U_0}{l}, \quad Y_2 = \frac{W_0}{l}, \quad Y_3 = \frac{U_n}{l}, \quad Y_4 = \frac{V_n}{l}, \quad Y_5 = \frac{W_n}{l},$$

gdzie

$$(1.21) \quad \omega_0 = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

wariacyjne równanie ruchu powłoki stożkowej (1.18) sprowadzono do układu równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(1.22) \quad \Omega^2 \alpha_1^{(1)} Y_{1,\tau\tau} + \sum_{j \in I_0} \beta_j^{(1)} (Y_j + \eta Y_{j,\tau}) - a \left(\sum_{k, m, n \in I_0} \gamma_{kmn}^{(1)} Y_k Y_m Y_n + \sum_{k \in I_0} \gamma_{kmn}^{(1)} Y_k Y_m Y_n \right) = 0,$$

$$\Omega^2 \alpha_2^{(2)} Y_{2,\tau\tau} + \sum_{j \in I_0} \beta_j^{(2)} (Y_j + \eta Y_{j,\tau}) - a \left(\sum_{k, m, n \in I_0} \gamma_{kmn}^{(2)} Y_k Y_m Y_n + \sum_{k \in I_0} \gamma_{kmn}^{(2)} Y_k Y_m Y_n \right) = -d^{(2)} P(\tau),$$

$$\Omega^2 \alpha_3^{(3)} Y_{3,\tau\tau} + \sum_{j \in I_n} \beta_j^{(3)} (Y_j + \eta Y_{j,\tau}) - a \left(\sum_{k, m \in I_0} \gamma_{kmn}^{(3)} Y_k Y_m Y_n + \sum_{k, m, n \in I_n} \gamma_{kmn}^{(3)} Y_k Y_m Y_n \right) = 0,$$

$$\Omega^2 \alpha_4^{(4)} Y_{4,\tau\tau} + \sum_{j \in I_n} \beta_j^{(4)} (Y_j + \eta Y_{j,\tau}) - a \left(\sum_{k, m \in I_0} \gamma_{kmn}^{(4)} Y_k Y_m Y_n + \sum_{k, m, n \in I_n} \gamma_{kmn}^{(4)} Y_k Y_m Y_n \right) = 0,$$

$$\Omega^2 \alpha_5^{(5)} Y_{5,\tau\tau} + \sum_{j \in I_n} \beta_j^{(5)} (Y_j + \eta Y_{j,\tau}) - a \left(\sum_{k, m \in I_0} \gamma_{kmn}^{(5)} Y_k Y_m Y_n + \sum_{k, m, n \in I_n} \gamma_{kmn}^{(5)} Y_k Y_m Y_n \right) = 0,$$

gdzie $k \leq m \leq n$, $I_0 = \{1, 2\}$, $I_n = \{3, 4, 5\}$.

Zakładamy, że powłoka poddana jest działaniu harmonicznego wymuszenia

$$(1.23) \quad P(\tau) = -P \cos \tau.$$

Dla układu liniowego geometrycznie i fizycznie ($a=0$) składowe drgań obrotowo-symetryczne Y_1 i Y_2 są niezależne od składowych nieobrotowo-symetrycznych Y_3 , Y_4 i Y_5 . W tym przypadku, ze względu na istniejące tłumienie ($\eta > 0$), mogą wystąpić obok ustalonych drgań obrotowo-symetrycznych jedynie gasnące drgania nieobrotowo-symetryczne. W układzie nieliniowym fizycznie ($a \neq 0$) możliwe są również ustalone drgania nieobrotowo-symetryczne.

W uzyskanym układzie równań różniczkowych (1.22) opisujących małe drgania powłoki stożkowej, wyrazy nieliniowe są małe w porównaniu z liniowymi. W związku z tym dany układ traktowano jako słabo nieliniowy i do rozwiązania zastosowano metodę małego parametru. Otrzymane rozwiązanie przedstawiono ostatecznie w postaci

$$(1.24) \quad Y_j = A_j \cos(\tau - \vartheta_j) + A_j^* \cos 3(\tau - \vartheta_j^*) + A_j^{**} \cos 5(\tau - \vartheta_j^{**}), \quad j \in I_0 \cup I_n.$$

2. PRZYKŁAD LICZBOWY

Uzyskane rozwiązanie zilustrujemy przykładem liczbowym dla rodziny powłok stożkowych o kącie przy podstawie $\varphi = 75^\circ$ i wartościach bezwymiarowych parametrów określających średni promień stożka i grubość powłoki:

$$\mu_s = \frac{R_s}{l} = 0,5, \quad \chi = \frac{2h}{l} = 0,004.$$

Przyjęto, że powłoki wykonane są z materiału określonego następującymi wartościami stałych:

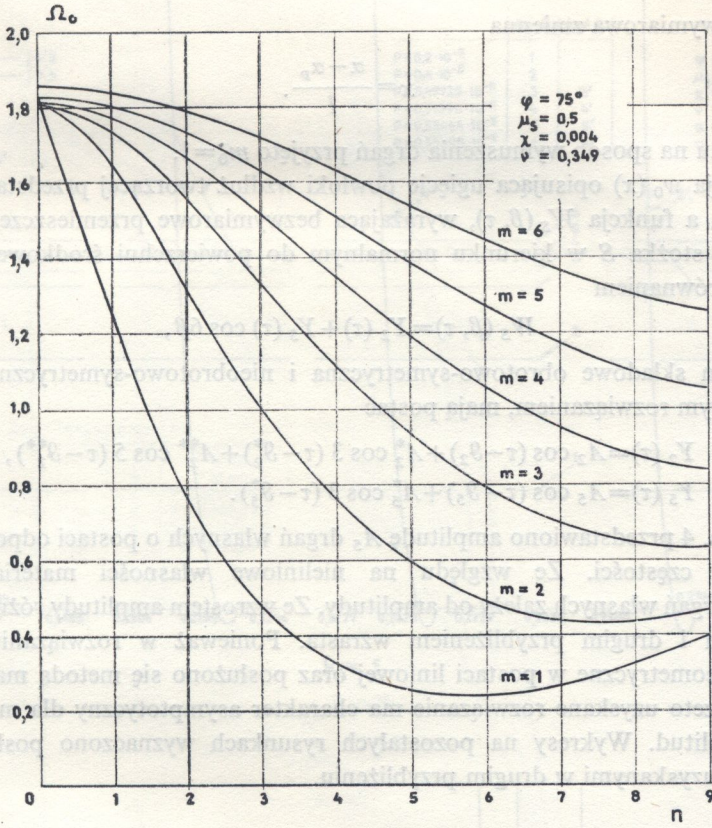
$$\nu = 0,349, \quad a = 0,262 \cdot 10^6, \quad \eta = 0,0525,$$

odpowiadającymi czystej miedzi. Obliczenia wykonano na komputerze Odra 1305.

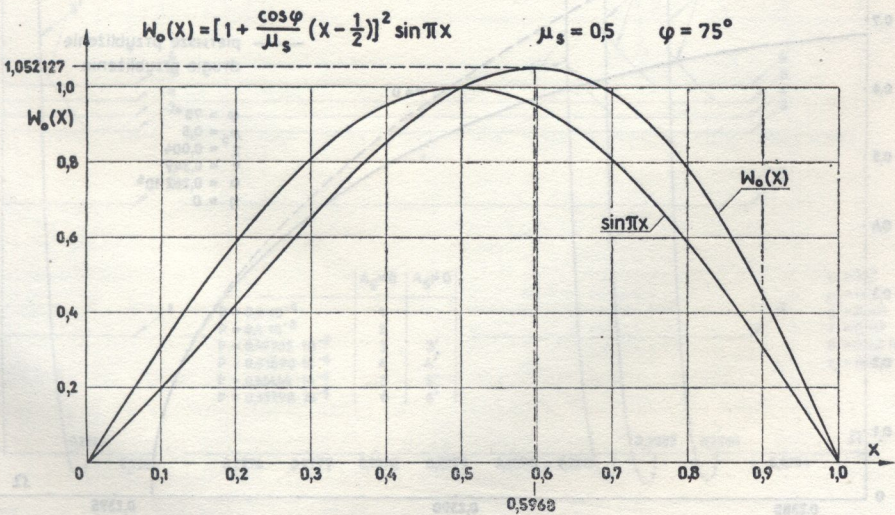
Na rys. 2 przedstawiono częstotliwości własne drgań obrotowo-symetrycznych ($n=0$) oraz nieobrotowo-symetrycznych ($n>0$) układu zlinearyzowanego ($a=0$). W praktycznych zastosowaniach najczęściej interesują nas najniższe częstotliwości drgań własnych. Analizowana rodzina powłok stożkowych osiąga minimalną częstotliwość drgań własnych dla postaci drgań określonej parametrami $m=1$, $n=6$, co odpowiada drganiom o jednej półfali wzdłuż tworzącej stożka i sześciu falach w przekroju poprzecznym powłoki. Częstotliwości własne obrotowo-symetrycznych postaci drgań ($n=0$) są około 7,7 razy wyższe od minimalnej częstotliwości drgań własnych.

Dla parametrów odpowiadających najniższej częstotliwości drgań własnych bezwymiarowa składowa przemieszczenia powierzchni środkowej powłoki w kierunku normalnym, zgodnie z założoną funkcją aproksymującą (1.19), ma postać

$$(2.1) \quad W(x, \beta, \tau) = \frac{w(x, \beta, \tau)}{l} = w_0(x) W_s(\beta, \tau),$$



Rys. 2



Rys. 3

gdzie bezwymiarowa zmienna

$$(2.2) \quad x = \frac{\alpha - \alpha_p}{l}.$$

Ze względu na sposób wymuszenia drgań przyjęto $m_0 = 1$.

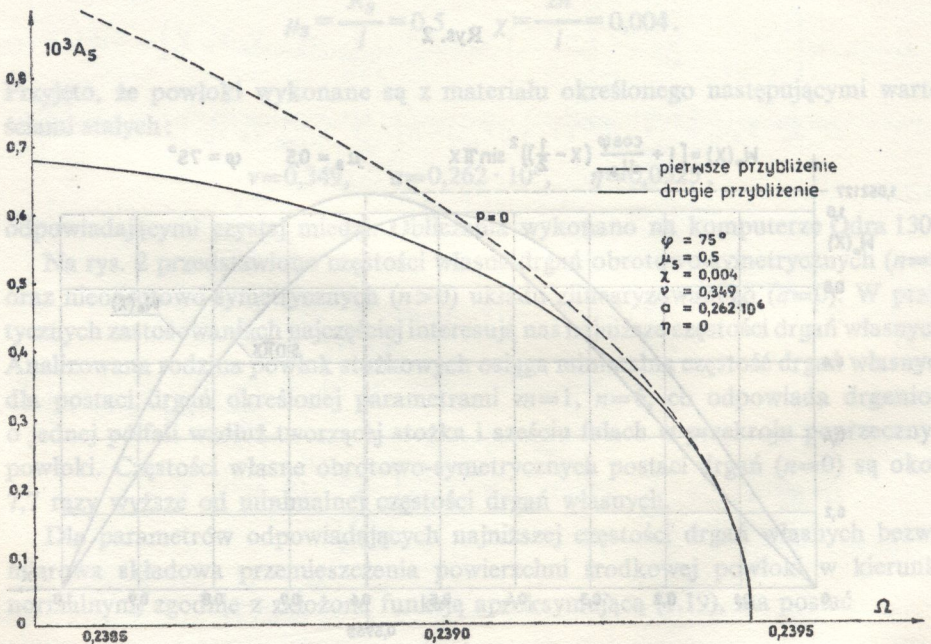
Funkcja $w_0(x)$ opisująca ugięcie powłoki wzdłuż tworzącej przedstawiona jest na rys. 3, a funkcja $W_S(\beta, \tau)$, wyrażająca bezwymiarowe przemieszczenie środka tworzącej stożka S w kierunku normalnym do powierzchni środkowej powłoki, dana jest równaniem

$$(2.3) \quad W_S(\beta, \tau) = Y_2(\tau) + Y_5(\tau) \cos 6\beta,$$

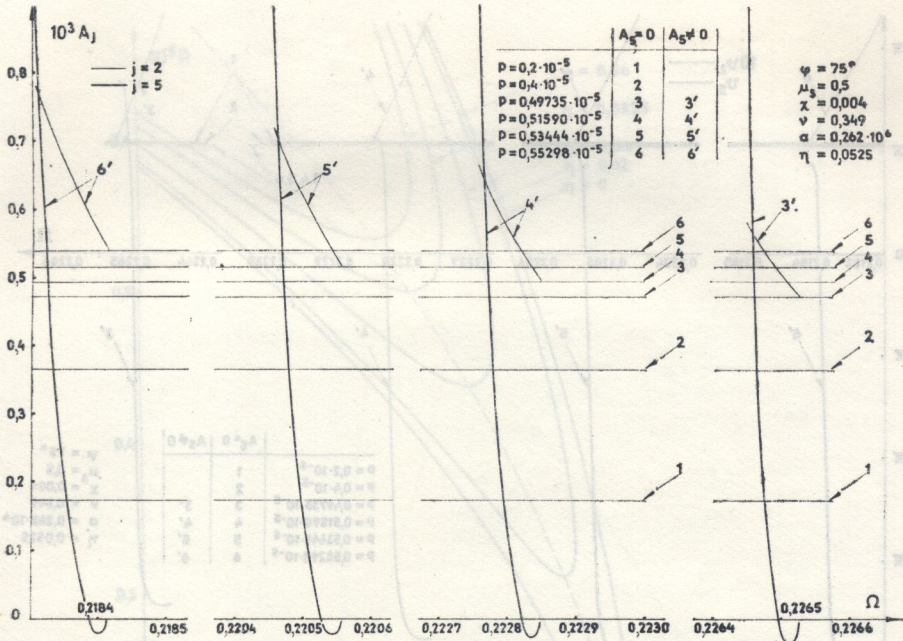
przy czym składowe obrotowo-symetryczna i nieobrotowo-symetryczna, zgodnie z uzyskanym rozwiązaniem, mają postać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} Y_2(\tau) &= A_2 \cos(\tau - \vartheta_2) + A_2^* \cos 3(\tau - \vartheta_2^*) + A_2^{**} \cos 5(\tau - \vartheta_2^{**}), \\ Y_5(\tau) &= A_5 \cos(\tau - \vartheta_5) + A_5^* \cos 3(\tau - \vartheta_5^*). \end{aligned}$$

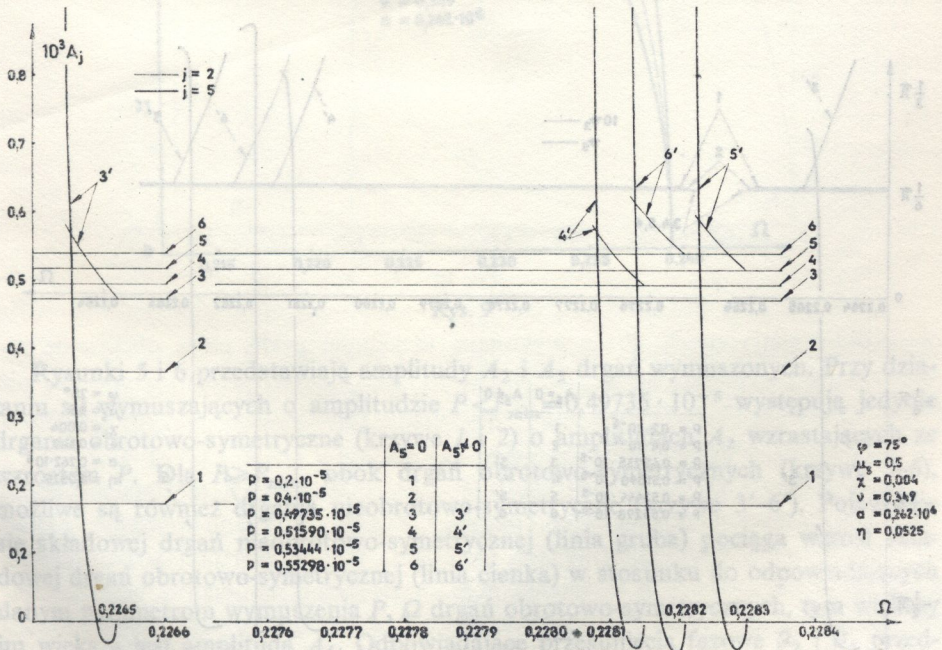
Na rys. 4 przedstawiono amplitudę A_5 drgań własnych o postaci odpowiadającej najniższej częstotliwości. Ze względu na nieliniowe własności materiału ($a \neq 0$) częstość drgań własnych zależy od amplitudy. Ze wzrostem amplitudy różnica między pierwszym i drugim przybliżeniem wzrasta. Ponieważ w rozwiązaniu przyjęto związki geometryczne w postaci liniowej oraz posłużono się metodą małego parametru, przeto uzyskane rozwiązanie ma charakter asymptotyczny dla małych wartości amplitud. Wykresy na pozostałych rysunkach wyznaczono posługując się wzorami uzyskanymi w drugim przybliżeniu.



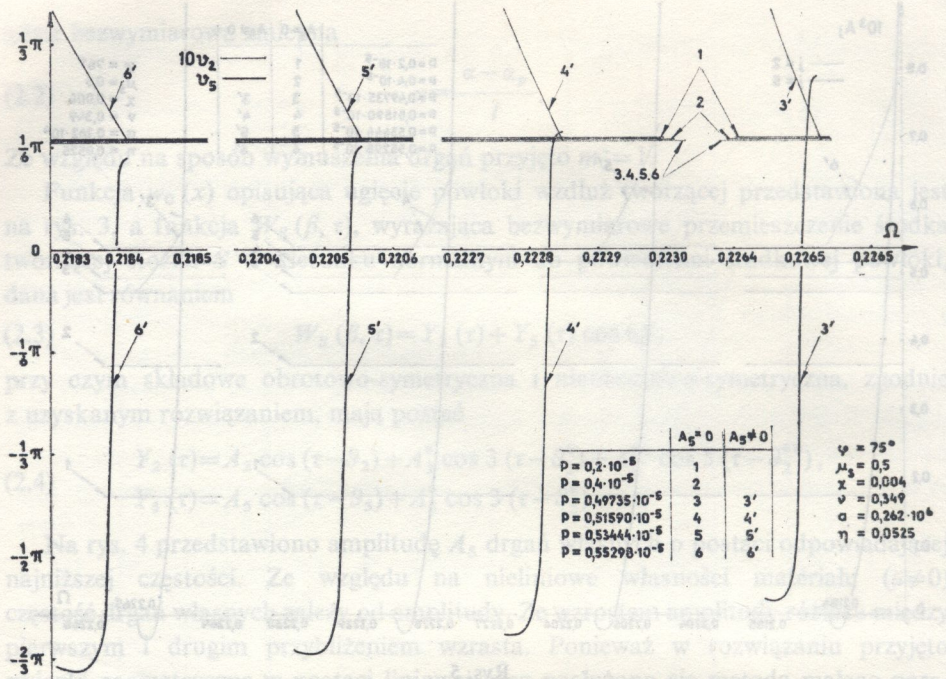
Rys. 4



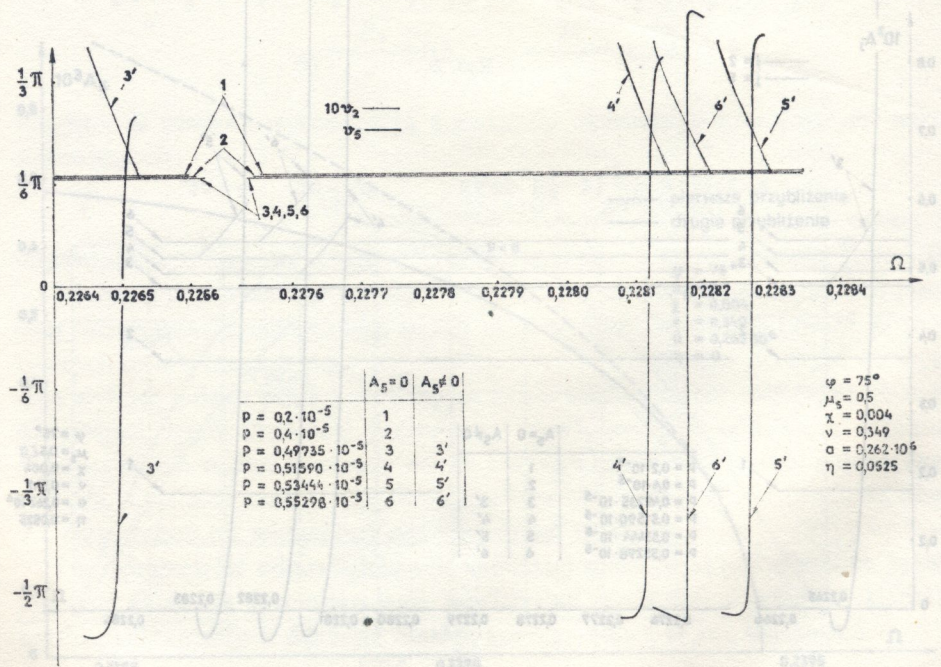
Rys. 5



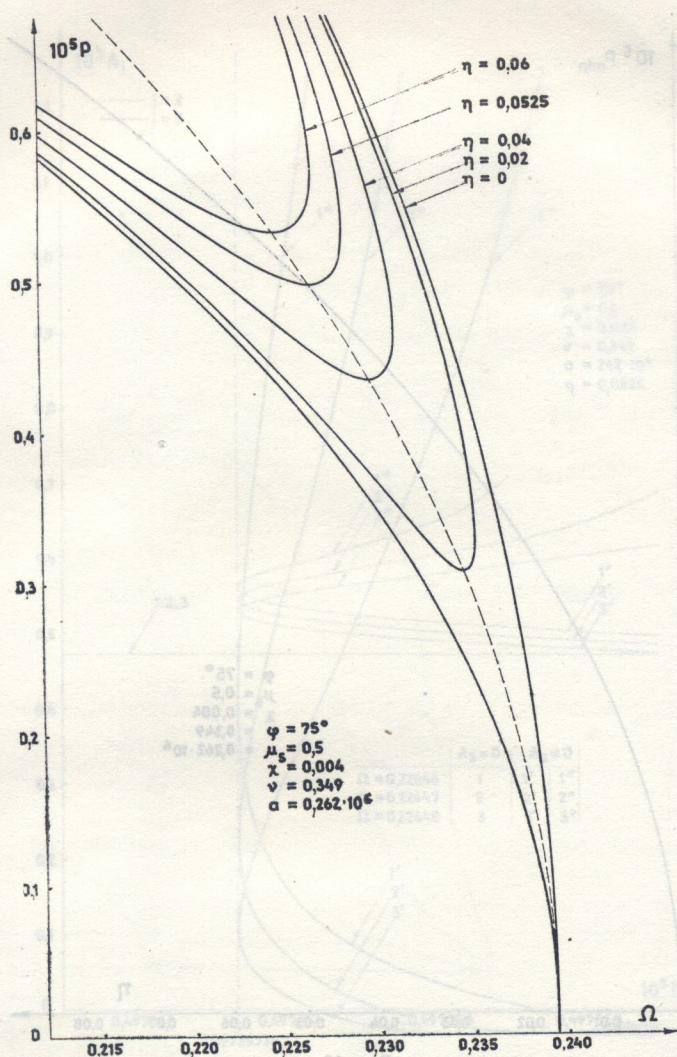
Rys. 6



Rys. 7

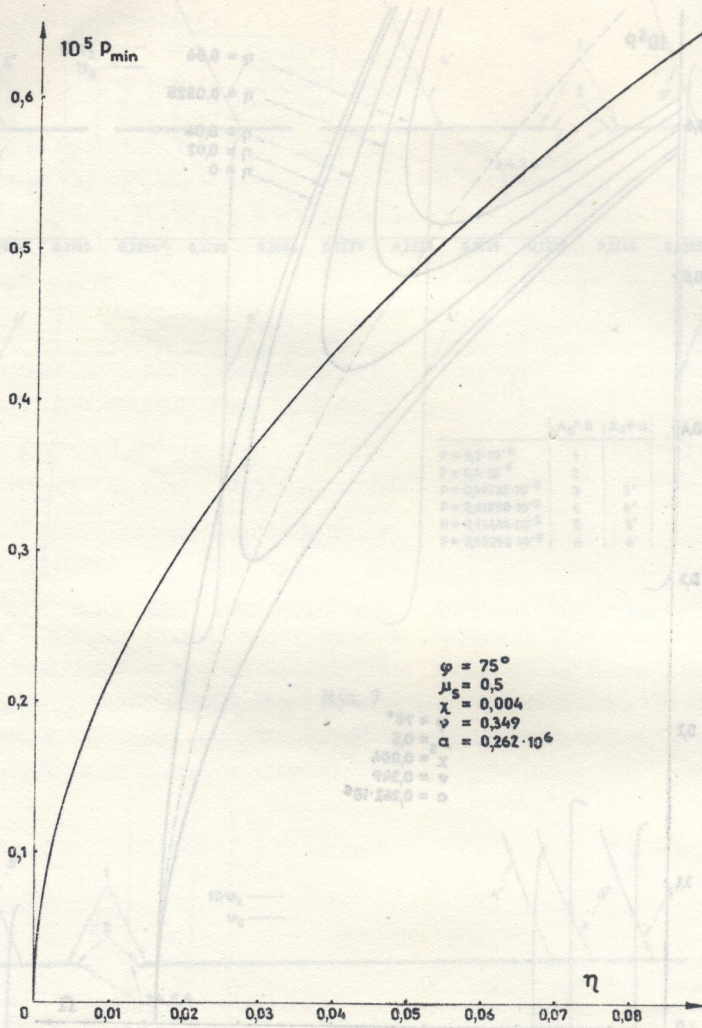


Rys. 8



Rys. 9

Rysunki 5 i 6 przedstawiają amplitudy A_2 i A_5 drgań wymuszonych. Przy działaniu sił wymuszających o amplitudzie $P < P_{\min} = 0,49735 \cdot 10^{-5}$ występują jedynie drgania obrotowo-symetryczne (krzywe 1 i 2) o amplitudach A_2 wzrastających ze wzrostem P . Dla $P \geq P_{\min}$, obok drgań obrotowo-symetrycznych (krzywe 3–6), możliwe są również drgania nieobrotowo-symetryczne (krzywe 3'–6'). Pojawienie się składowej drgań nieobrotowo-symetrycznej (linia gruba) pociąga wzrost składowej drgań obrotowo-symetrycznej (linia cienka) w stosunku do odpowiadających danym parametrom wymuszenia P , Ω drgań obrotowo-symetrycznych, tym większy im większa jest amplituda A_5 . Odpowiadające przesunięcia fazowe ϑ_2 i ϑ_5 przedstawiono na rysunkach 7 i 8. Występowanie składowej nieobrotowo-symetrycznej powoduje, że przesunięcie fazowe ϑ_2 jest większe niż przesunięcie fazowe drgań

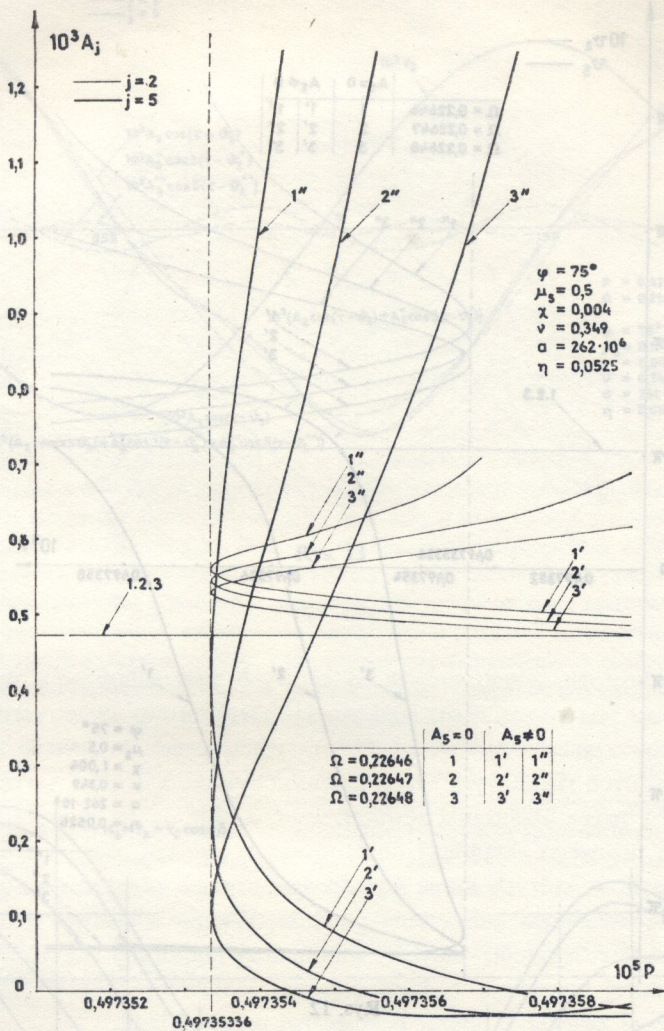


Rys. 10

obrotowo-symetrycznych. Praca wykonana w jednym cyklu przez obciążenie zewnętrzne w przypadku drgań nieobrotowo-symetrycznych jest więc większa niż praca wykonana w przypadku drgań obrotowo-symetrycznych, co spowodowane jest zwiększonym rozpraszaniem energii.

Parametry obciążenia zewnętrznego P i Ω , przy których występują punkty bifurkacji rozwiązania przedstawiono na rys. 9. Znaczny wpływ na położenie i kształt tej krzywej mają własności tłumiące materiału. Wzrost wartości współczynnika tłumienia materiałowego η powoduje m.in. zwiększenie minimalnej wartości amplitudy siły wymuszającej P_{\min} , przy której mogą wystąpić drgania nieobrotowo-symetryczne (rys. 10).

Na rysunkach 11 i 12 przedstawiono amplitudy A_2 i A_5 oraz przesunięcia fazowe ϑ_2 i ϑ_5 w zależności od amplitudy obciążenia wymuszającego P przy danych war-

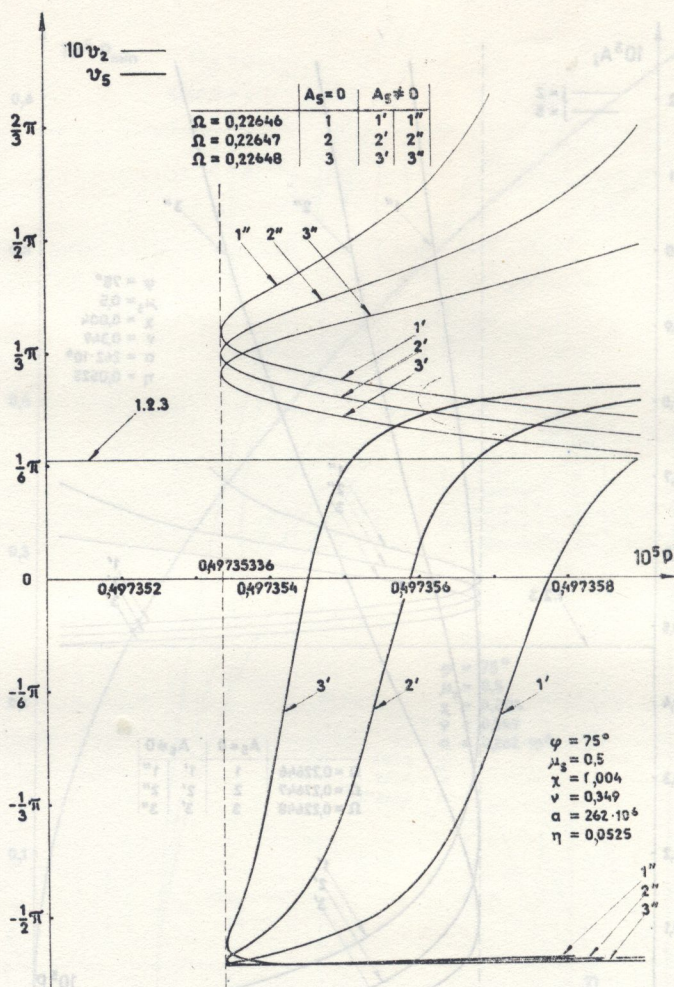


Rys. 11

tościach Ω . Przy $P < P_{\min}$ możliwe są jedynie drgania obrotowo-symetryczne (krzywe 1, 2 i 3). Dla $P \geq P_{\min}$, oprócz drgań obrotowo-symetrycznych (krzywe 1, 2 i 3), występują drgania nieobrotowo-symetryczne (krzywe 1', 2' i 3' oraz 1'', 2'' i 3'').

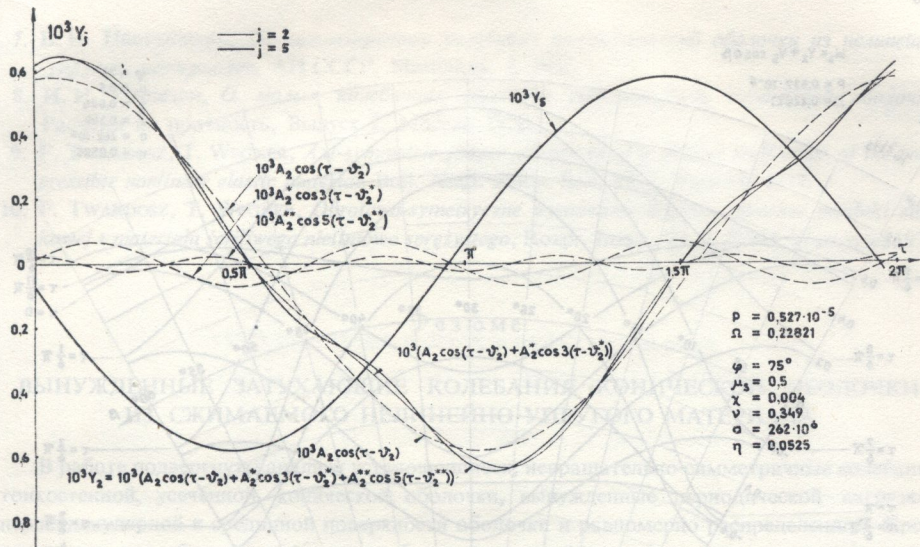
Funkcje $Y_2(\tau)$ i $Y_5(\tau)$ wyznaczające obrotowo-symetryczną i nieobrotowo-symetryczną składową drgań, dla określonych wartości P i Ω , przedstawiono na rys. 13. Różnica między funkcją $Y_5(\tau)$ a jej pierwszą harmoniczną jest nieuchwytna rysunkowo, przeto nie przedstawiono poszczególnych składników funkcji $Y_5(\tau)$.

Rysunek 14 przedstawia składową normalną przemieszczenia środka S tworzącej stożka o współrzędnej β w dowolnej chwili. Składowe przemieszczenia w kierunku normalnym punktów powierzchni środkowej powłoki, leżących w przekroju poprzecznym przechodzącym przez środki tworzących stożka, dla określonych τ przedstawiono na rys. 15.

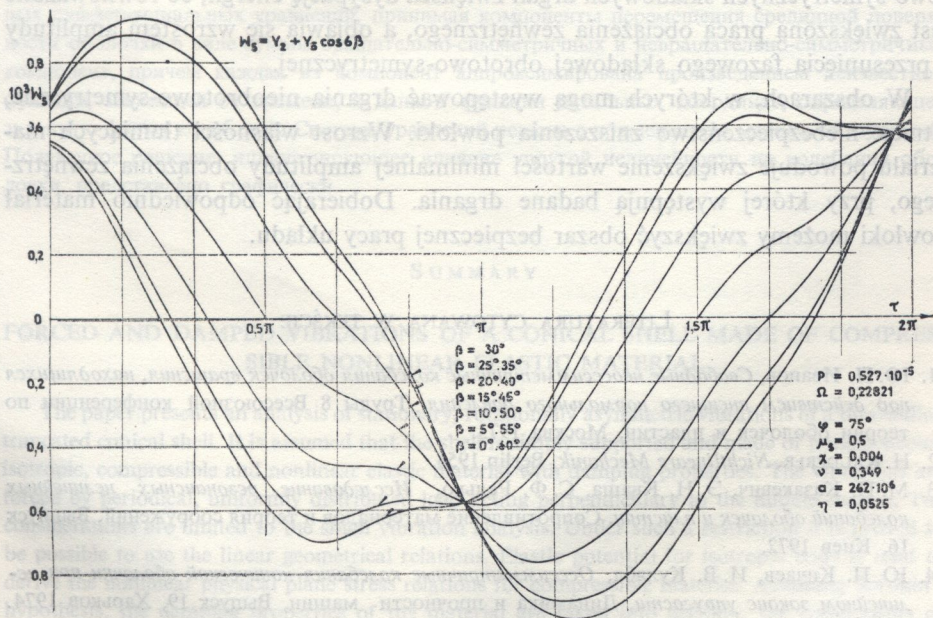


Rys. 12

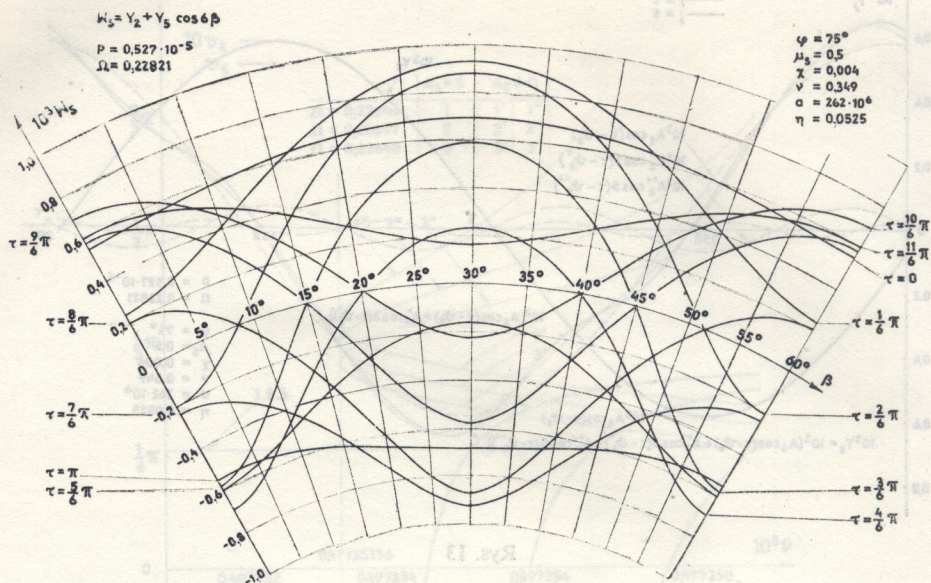
Przedstawione w niniejszej pracy drgania nieobrotowo-symetryczne mają charakter rezonansowy: niewielkim przyrostom amplitudy siły wymuszającej odpowiadają duże przyrosty amplitudy drgań. Opisany rezonans występuje wskutek sprzężenia nieliniowego między składowymi drgań obrotowo-symetrycznymi i nieobrotowo-symetrycznymi, wywołanego nieliniowo sprężystymi właściwościami materiału. Dla materiału o odpowiednio niskich właściwościach tłumiących drgania nieobrotowo-symetryczne mogą występować przy dowolnie małych amplitudach obciążenia zewnętrznego, a więc przy dowolnie małych drganiach obrotowo-symetrycznych, pod warunkiem odpowiedniego doboru częstości wymuszenia. Występująca w materiale powłoki dysypacja energii powoduje, że dla podtrzymania drgań konieczne jest ciągle doprowadzanie do układu energii mechanicznej. Zadanie to realizuje obciążenie zewnętrzne wykonując pracę na obrotowo-symetrycznych składowych przemieszczenia. Dla założonego modelu praca obciążenia zewnętrznego



Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15

nego na nieobrotowo-symetrycznych składowych przemieszczenia w dowolnym przedziale czasu jest równa zero, stąd zawsze nieobrotowo-symetrycznym składowym drgań towarzyszą składowe obrotowo-symetryczne. Pojawienie się nieobrotowo-symetrycznych składowych drgań zwiększa dysypację energii, co równoważone jest zwiększoną pracą obciążenia zewnętrznego, a objawia się wzrostem amplitudy i przesunięcia fazowego składowej obrotowo-symetrycznej.

W obszarach, w których mogą występować drgania nieobrotowo-symetryczne, istnieje niebezpieczeństwo zniszczenia powłoki. Wzrost własności tłumiących materiału powoduje zwiększenie wartości minimalnej amplitudy obciążenia zewnętrznego, przy której występują badane drgania. Dobierając odpowiednio materiał powłoki możemy zwiększyć obszar bezpiecznej pracy układu.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Ю. П. Иванов, *Свободные неосесимметричные колебания оболочек вращения, находящихся под действием внешнего нормального давления*, Труды 8 Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Москва 1973.
2. H. KAUDERER, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin 1958.
3. М. И. Казакевич, Э. Н. Кваша, С. Ф. Редько, *Исследование резонансных нелинейных колебаний оболочек и пластин*, Сопротивление материалов и теория сооружений, Выпуск 16, Киев 1972.
4. Ю. П. Кичаев, И. В. Куляба, *Оссимметричные колебания конической оболочки при нелинейном законе упругости*, Динамика и прочности машин, Выпуск 19, Харьков 1974.
5. И. Г. Кильдибеков, *Собственные нелинейные колебания круговой цилиндрической оболочки*, Труды 8 Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Москва 1973.
6. С. Н. Кукуджанов, *Свободные колебания предварительно сжатой длиной цилиндрической оболочки*, Труды 8 Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Москва 1973.

7. В. Н. Пастушихин, *Оссимметричные колебания цилиндрической оболочки из нелинейно-упругих материалов*, АН СССР, Механика, 4, 1965.
8. И. И. Трапезин, *О малых колебаниях круговой тонкостенной конической оболочки*, Расчеты на прочность, Выпуск 2, Москва 1958.
9. F. TWARDOSZ, T. WEGNER, *Axi-symmetric proper vibrations of a conical shell made of the compressible nonlinear elastic material*, Bull. Acad. Polon. Sci., 25, 7, Varsovie 1977.
10. F. TWARDOSZ, T. WEGNER, *Obrotowo-symetryczne wymuszone drgania tłumione powłoki stożkowej z materiału ściśliwego nieliniowo sprężystego*, Rozpr. Inżyn., 24, 2, PWN, Warszawa 1976.

Резюме

ВЫНУЖДЕННЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СЖИМАЕМОГО НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

В работе подвергнута анализу установившиеся, неврацательно-симметричные колебания тонкостенной, усеченной, конической оболочки, вынужденные периодической нагрузкой перпендикулярной к срединной поверхности оболочки и равномерно распределенной. Предполагается, что оболочка является свободно подпертой, изготовлена из однородного, изотропного, сжимаемого, нелинейно упругого материала с демпферами свойствами. Ограничиваясь анализом малых колебаний, все геометрические соотношения приняты в линейном виде. Пользуясь понятием потенциала упругости изотропного тела, получены нелинейные физические соотношения для сжимаемого материала в плоском напряженном состоянии. Принимая во внимание гипотезу Е. С. Сорокина, учтены демпферные свойства материала, причем члены, выражающие затухание, ограничены к линейным выражениям. Используя общее уравнение динамики, составлено вариационное уравнение движения тонкостенной конической оболочки. Появляющиеся в нем величины представлены при помощи компонент перемещения срединной поверхности оболочки. Это уравнение сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, принимая компоненты перемещения срединной поверхности оболочки в виде суммы вращательно-симметричных и неврацательно-симметричных компонент, причем каждая из компонент аппроксимирована произведением неизвестной функции, зависящей от времени, и данной функции остальных координат, определяющей заданную форму колебаний. Система уравнений решена с применением метода возмущений. Полученное решение, иллюстрирующее влияние упругой нелинейности на колебания оболочки, представлено графически.

SUMMARY

FORCED AND DAMPED VIBRATIONS OF A CONICAL SHELL MADE OF COMPRESSIBLE NONLINEAR ELASTIC MATERIAL

The paper presents an analysis of stationary, rotationally asymmetric vibrations of a thin-walled truncated conical shell. It is assumed that the shell is simply supported and made of homogeneous, isotropic, compressible and nonlinear elastic material with damping properties. The vibrations are forced by periodical, uniformly distributed load acting perpendicular to the middle surface. The considerations are limited to the small vibration analysis. Under such a restriction it is proved to be possible to use the linear geometrical relations. Elastic potential for isotropic body is used to derive the nonlinear physical plane stress relations for compressible material. Assuming Sorokin's hypothesis, the damping properties of the material are taken into account, the components of material damping being assumed as linear. The variational equation of a motion of a thin-walled conical shell is based on the general dynamic equation. Components in this equation are expressed in terms of the displacements of the middle surface. The equation is then transformed to the set

of ordinary differential equations in which the middle surface displacements are written in the form of sums of rotationally symmetric and asymmetric terms. Both terms are written as products of an unknown time-dependent function and a known function describing the assumed form of vibration. The set of equations is solved by employing the perturbation method. The obtained solution, describing the influence of the elastic nonlinearity on the shell vibration, is presented graphically.

**POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ**

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 maja 1979 r.

В работе рассмотрены вынужденные затухающие колебания конической оболочки, нагруженной осесимметричной и несимметричной нагрузкой. В уравнениях перемещений срединной поверхности оболочки введены функции, описывающие предположенную форму колебаний. Система уравнений решается методом возмущений. Полученное решение, описывающее влияние упругой нелинейности на колебания оболочки, представлено графически.

SUMMARY

FORCED AND DAMPED VIBRATIONS OF A CONICAL SHELL MADE OF COMPRESSIBLE NONLINEAR ELASTIC MATERIAL
The paper presents an analysis of nonlinear, damped and forced vibrations of a thin-walled truncated conical shell. It is assumed that the shell is simply supported and made of homogeneous, isotropic, compressible and nonlinear elastic material with damping properties. The vibrations are forced by rotational, uniformly distributed load acting perpendicular to the middle surface. The considerations are limited to the small deflection and, in order such a restriction it is proved to be possible to use the linear geometrical relations. Elastic potential for isotropic body is used to derive the nonlinear partial differential equations for compressible material. Assuming working hypothesis, the damping properties of the material are taken into account. The components of middle surface displacements are assumed as finite. The variational equation of a motion of a thin-walled conical shell is based on the general dynamic equation. Components in this equation are expressed in terms of the displacements of the middle surface. The equation is then transformed to the set of ordinary differential equations in which the middle surface displacements are written in the form of sums of rotationally symmetric and asymmetric terms. Both terms are written as products of an unknown time-dependent function and a known function describing the assumed form of vibration. The set of equations is solved by employing the perturbation method. The obtained solution, describing the influence of the elastic nonlinearity on the shell vibration, is presented graphically.