

MICHAŁ ŻYCHKOWSKI

WPLYW ZMNIEJSZANIA SIĘ MIMOŚRODU  
NA UGIĘCIA PRĘTÓW MIMOŚRODOWO ŚCISKANYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
LXXIV

## SPIS TREŚCI

	Str.
1. Schematy ściskania mimośrodowego przy obliczaniu ugięć skończonych	401
2. Wyprowadzenie równań podstawowych	403
3. Parametryzacja równań określających strzałkę ugięcia	406
4. Obliczenie ugięć i zestawienie różnic	409
5. Uwagi końcowe	415

## 1. Schematy ściskania mimośrodowego przy obliczaniu ugięć skończonych

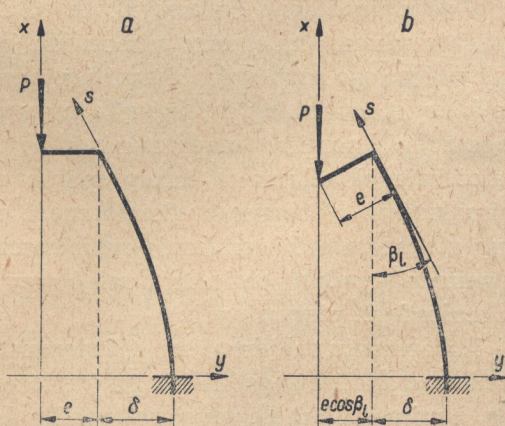
Zagadnienia związane z mimośrodowym ściskaniem prętów nabierają obecnie coraz większego znaczenia praktycznego w związku z coraz częściej wysuwanymi propozycjami obliczania wszystkich prętów ściskanych jako ściskanych mimośrodowo (por. G. Wästlund, [15], S. D. Lejties, [5], i inni). Propozycje te oparte są na spostrzeżeniu, że ze zjawiskiem ściskania ściśle osiowego, a zatem i ze zjawiskiem wyboczenia (w sensie matematycznym), w praktyce nigdy nie mamy do czynienia. Z punktu widzenia praktyki wyboczenie należy traktować jedynie jako granicę mimośrodowego ściskania, gdy mimośród działania siły zmierza do zera.

Dla ścisłości należałoby tu jeszcze wspomnieć o zmierzaniu do zera pierwotnej krzywizny pręta oraz o warunku jednorodności materiału (choć można również mówić o wyboczeniu przy pewnych szczególnych przypadkach niejednorodności, np. niejednorodności podłużnej lub niejednorodności poprzecznej symetrycznej).

Wydaje się, że powszechnemu zastąpieniu obliczeń na wyboczeniu przez obliczenia na mimośrodowe ściskanie stoi obecnie na przeszkodzie jedynie brak dostatecznie uzasadnionych metod obliczania nośności prętów mimośrodowo ściskanych (uwzględnienie nieliniowości geometrycznej zagadnienia, wzmocnienia plastycznego materiału, wpływu kształtu przekroju itp.).

Praca niniejsza jest poświęcona analizie skończonych ugięć idealnie sprężystych prętów mimośrodowo ściskanych, a więc analizie nieliniowości geometrycznej zagadnienia.

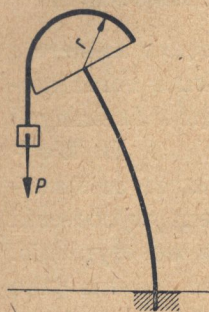
W dotychczasowych pracach zajmujących się tym problemem przyjmowano zazwyczaj, że mimośród działania siły jest stały w trakcie pro-



Rys. 1. Schematy mimośrodowego obciążenia pręta

cesu odkształcania (mimośród «prostokątne do siły», rysunek 1a). W ten sposób stawiają zagadnienie H. Czopowski, [2], J. Mutermilch, [6] i [7], J. Naleszkiewicz, [8], S. D. Lejties, [5]; podobne założenie przyjęto również w pracy autora [18].

Obok takiego schematu, który może być zrealizowany na przykład przy obciążeniu przedstawionym na rysunku 2 (dość abstrakcyjnym) lub, częściej, przy niezależnym działaniu siły osiowej — o mimośrodku pomijalnym — i momentu (o wartościach rosnących proporcjonalnie), możliwe są różne inne schematy mimośrodowego obciążenia prętów. Należy tu przede wszystkim przypadek przedstawiony na rysunku 1b,



Rys. 2. Przykład realizacji stałego mimośrodu  $e = r$

gdy pręt przedstawiający mimośród pozostaje zawsze prostokątne do stycznej do pręta obciążonego. Z takim przypadkiem mamy np. do czynienia przy ściskaniu korbowodu, gdy sworzeń tłoka i czop korbowy umieszczone są mimośrodkowo, a za długość korbowodu uważamy, jak się to zazwyczaj czyni, odległość między osiami czopa korbowego i sworzni tłokowego<sup>1</sup>. Przypadkowi takiemu była poświęcona praca F. Szelałgowskiego, [14].

Pośrednio stawia sprawę B. G. Galerkin, [3], który zasadniczo operuje schematem stałego mimośrodu (prostokątne do siły), oblicza jednak prócz tego mimośród pierwotny, prostokątne do stycznej do osi pręta, na którym musiałaby działać siła, by wywołać dane ugięcie. Takie ujęcie zagadnienia pomimo zaopatrzenia pracy w tablice liczbowe również nie umożliwia określenia w łatwy sposób ugięcia przy danej sile i danym mimośrodku pierwotnym (konieczność podwójnej interpolacji pomiędzy wartościami nierównomiernie rozmieszczonymi) oraz nie pozwala na porównanie wyników obliczania ugięć przy obu schematach, a przy równych mimośrodkach pierwotnych.

Porównaniu takiemu jest poświęcona niniejsza praca. W szczególności, ponieważ analiza zagadnienia przy założeniu stałego mimośrodu jest prostsza, a mimośród malejący (prostokątne do osi pręta) zdaje się częściej występować w praktyce, zbadamy, jakie różnice bezwzględne i procentowe otrzymuje się przy obliczaniu skończonych ugięć w oparciu o obydwa schematy obciążenia i kiedy różnice te można uważać za pomijalne.

Ponadto poświęcimy nieco uwagi ugięciom pręta przy wyboczeniu sprężystym jako przypadkowi granicznemu: będzie to przypadek zmierzania mimośrodu do zera, a zatem zanikania różnicy między obydwoema schematami obciążeń.

<sup>1</sup> Podobnie należy traktować przypadek osiowego osadzenia sworzni tłokowego i czopa korbowego w korbowodzie o niesymetrycznej niejednorodności poprzecznej.

## 2. Wyprowadzenie równań podstawowych

Przypadek malejącego mimośrodów rozwiążemy teraz przy użyciu tych samych oznaczeń, którymi posługiwaliśmy się w pracy [18] przy analizie przypadku stałego mimośrodów.

Przyjmijmy układ odniesienia jak na rysunku 1b. Korzystając ze znanego wzoru na krzywiznę<sup>2</sup>

$$(2.1) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{1-(y')^2}}$$

(w którym przecinki oznaczają różniczkowanie względem łuku  $s$ ), możemy równanie zasadnicze zginania

$$(2.2) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

po wprowadzeniu oznaczenia

$$(2.3) \quad \frac{P}{EI} = \alpha^2$$

zapisać w postaci

$$(2.4) \quad \frac{y''}{\sqrt{1-(y')^2}} = -\alpha^2 y.$$

Równanie to nie różni się niczym od odpowiedniego równania w przypadku stałego mimośrodów (równanie (6) pracy [18]). Różnica polegać więc będzie jedynie na zmienionych warunkach brzegowych.

W przypadku stałego mimośrodów warunki brzegowe mają mianowicie postać

$$(2.5) \quad s=0, \quad y=\delta+e, \quad y'=0; \quad s=l, \quad y=e.$$

Te trzy warunki służą do wyznaczenia dwóch stałych całkowania oraz występującego w nich niewiadomego ugięcia  $\delta$ . Natomiast w przypadku mimośrodów malejącego (prostokątnego do osi pręta) warunkami brzegowymi będą

$$(2.6) \quad \begin{cases} s=0, & s=l, \\ y=\delta+e \cos \beta_l, & y=e \cos \beta_l, \\ y'=0, & y'=-\sin \beta_l. \end{cases}$$

Mamy tu więc cztery warunki, w których występują jednak aż dwie wielkości niewiadome: ugięcie  $\delta$  i największy kąt ugięcia  $\beta_l$ . Ta właśnie okoliczność przyczyni się do pewnego skomplikowania obliczeń.

<sup>2</sup> Por. [4], s. 148 lub [10].

Przejdziemy do całkowania równania (2.4) przy warunkach brzegowych (2.6). Podobnie jak w pracy [18] podstawimy

$$(2.7) \quad y' = p(y), \quad y'' = pp',$$

otrzymując po scałkowaniu

$$(2.8) \quad \sqrt{1 - p^2} = \frac{1}{2} \alpha^2 y^2 + C.$$

Wyodrębniając z układu (2.6) warunki, w których występują jedynie  $y$  i  $y'$  możemy obliczyć stałą  $C$  i kąt  $\beta_l$ :

$$(2.9) \quad C = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 (\delta + e \cos \beta_l)^2$$

oraz

$$(2.10) \quad \cos \beta_l = \frac{1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \delta^2}{1 + \alpha^2 \delta e}.$$

Równanie (2.8) zapiszemy w postaci

$$(2.11) \quad p = \frac{dy}{ds} = \pm \sqrt{1 - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \left[ \left( \frac{2\delta + \alpha^2 \delta^2 e + 2e}{2(1 + \alpha^2 \delta e)} \right)^2 - y^2 \right] \right\}^2}.$$

Wybieramy znak minus, ponieważ z przyjętego układu osi jest widoczne, że pochodna  $dy/ds$  jest stale niedodatnia. Po uporządkowaniu i rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy podobnie jak w pracy [18] całkę eliptyczną, którą tym razem sprowadzimy do postaci normalnej przez podstawienie

$$(2.12) \quad y = \frac{2\delta + \alpha^2 \delta^2 e + 2e}{2(1 + \alpha^2 \delta e)} \cos \varphi,$$

gdzie  $\varphi$  jest nową zmienną zależną. Podstawienie (2.12) do (2.11) doprowadza mianowicie do całki eliptycznej pierwszego rodzaju

$$(2.13) \quad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \alpha^2 \left[ \frac{2\delta + \alpha^2 \delta^2 e + 2e}{2(1 + \alpha^2 \delta e)} \right]^2 \sin^2 \varphi}} = a ds.$$

Po wprowadzeniu zmiennej  $\varphi$  do dwóch pozostałych warunków brzegowych układu (2.6) będziemy je mogli napisać

$$(2.14) \quad \begin{cases} s = 0, & s = l, \\ \varphi = 0, & \varphi = \arccos \frac{(2 - \alpha^2 \delta^2) e}{2\delta + \alpha^2 \delta^2 e + 2e}. \end{cases}$$

Wykorzystamy najpierw pierwszy z tych warunków zapisując całąkę równania (2.13) w postaci

$$(2.15) \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} a^2 \left[ \frac{2\delta + a^2 \delta^2 e + 2e}{2(1 + a^2 \delta e)} \right]^2 \sin^2 \psi}} = a s,$$

gdzie  $\psi$  oznacza zmienną całkowania. Drugi z warunków (2.14) pozwoli teraz obliczyć poszukiwaną strzałkę ugięcia  $\delta$ . Dla uproszczenia zapisu oraz późniejszych rachunków numerycznych wprowadzimy — podobnie jak w pracy [18] — następujące oznaczenia wielkości bezwymiarowych<sup>3</sup>

$$(2.16) \quad \frac{\delta}{l} = \vartheta,$$

$$(2.17) \quad \frac{e}{l} = \Theta,$$

$$(2.18) \quad \frac{P}{P_E} = \frac{4}{\pi^2} \frac{P l^2}{E I} = m,$$

przy czym  $P_E$  oznacza siłę krytyczną (eulerowską) dla danego pręta.

Należy tutaj założyć, że mimośród działania siły znajduje się w płaszczyźnie, której odpowiada najmniejszy moment bezwładności przekroju pręta. W przeciwnym razie linia ugięcia mogłaby być znacznie bardziej skomplikowaną krzywą przestrzenną.

Zestawiając oznaczenia (2.3) i (2.18) otrzymujemy

$$(2.19) \quad a = \frac{\pi}{2l} \sqrt{m}$$

i ostatecznie równanie określające w sposób uwikłany poszukiwaną zależność  $\vartheta = f(m, \Theta)$  zapiszemy w postaci

$$(2.20) \quad \int_0^{\arccos \frac{(8 - \pi^2 m \vartheta^2) \Theta}{8\vartheta + 8\Theta + \pi^2 m \vartheta^2 \Theta}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{64} m \left[ \frac{8\vartheta + 8\Theta + \pi^2 m \vartheta^2 \Theta}{4 + \pi^2 m \vartheta \Theta} \right]^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{m}.$$

Dla porównania przytoczymy tu analogiczny związek wyprowadzony przy założeniu stałego mimośrodu (równanie (21) pracy [18]):

$$(2.21) \quad \int_0^{\arccos \frac{\Theta}{\vartheta + \Theta}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{16} m (\vartheta + \Theta)^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{m}.$$

<sup>3</sup> W niektórych pracach jako długość porównawczą przyjmuje się zredukowaną długość pręta,  $L = 2l$ .

Jak widać, obydwa równania nie tylko nie dadzą się rozwiązać względem niewiadomej  $\vartheta$ , lecz również względem dwu pozostałych występujących w nich zmiennych, nie jest więc możliwe utworzenie funkcji odwrotnych do poszukiwanych jako skończonej kombinacji funkcji elementarnych lub znanych funkcji nieelementarnych. Równania te dadzą się rozwiązywać za pomocą metody kolejnych przybliżeń, jednak równanie (2.20) jako bardziej skomplikowane nastęrcza więcej trudności rachunkowych. Najkorzystniejsze okaże się wprowadzenie odpowiedniej parametryzacji, która umożliwi otrzymywanie odpowiadających sobie trójek wartości zmiennych:  $m$ ,  $\Theta$  i  $\vartheta$ . Uzyskane w ten sposób rozwiązania będzie można następnie przedstawić na drodze graficznej i numerycznej oraz dokonać bezpośredniego porównania wyników.

### 5. Parametryzacja równań określających strzałkę ugięcia

Przystąpimy najpierw do parametryzacji równania (2.20) określającego strzałkę ugięcia pręta w przypadku malejącego mimośrod. Pomimo skomplikowanej postaci równania parametryzacja da się przeprowadzić stosunkowo łatwo.

Zapis równania (2.20) ulegnie skróceniu, gdy wprowadzimy następujące oznaczenie dla niepełnej całki eliptycznej pierwszego rodzaju <sup>4</sup>:

$$(3.1) \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \psi}} = F(\varphi, \zeta).$$

Zamiast (2.20) napiszemy mianowicie

$$(3.2) \quad F \left[ \arccos \frac{\Theta(8 - \pi^2 m \vartheta^2)}{8\vartheta + 8\Theta + \pi^2 m \vartheta^2 \Theta}, \right. \\ \left. \arcsin \frac{\pi \sqrt{m}(8\vartheta + 8\Theta + \pi^2 m \vartheta^2 \Theta)}{8(4 + \pi^2 m \vartheta \Theta)} \right] = \frac{\pi}{2} \sqrt{m}.$$

Występujące w tym równaniu trzy zmienne wyrazimy teraz za pomocą dwóch parametrów. Okazuje się, że za parametry te można przyjąć argumenty całki eliptycznej  $\varphi$  i  $\zeta$ . Wtedy bowiem zmienna  $m$  wyraża się wynikającym wprost z (3.2) wzorem

$$(3.3) \quad m = \frac{4}{\pi^2} F^2(\varphi, \zeta),$$

<sup>4</sup> Większość podręczników przyjmuje jako drugą zmienną niezależną niepełnej całki eliptycznej zmienną  $k = \sin \zeta$ , jednak niemal wszystkie tablice uzależniają całki eliptyczne od zmiennych  $\varphi$  i  $\zeta$  (prawdopodobnie z uwagi na ułatwienie obliczeń związanych z wahadłem matematycznym). Oznaczenie (3.1) zostało przyjęte dla ułatwienia postępowania się tablicami.



a do obliczenia pozostałych zmiennych  $\vartheta$  i  $\Theta$  otrzymujemy równania

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{\Theta(8 - 4\vartheta^2 F^2)}{8\vartheta + 8\Theta + 4\vartheta^2 \Theta F^2} = \cos \varphi, \\ \frac{F(2\vartheta + 2\Theta + \vartheta^2 \Theta F^2)}{4(1 + \vartheta \Theta F^2)} = \sin \zeta, \end{cases}$$

które dadzą się rozwiązać względem  $\vartheta$  i  $\Theta$  (w zapisie tych równań pominięto dla uproszczenia argumenty funkcji  $F$ ).

Po wyrugowaniu z układu (3.4) niewiadomej  $\Theta$  (co nie następuje żadnym trudności, są to bowiem równania liniowe względem tej zmiennej) otrzymujemy następujące równanie z niewiadomą  $\vartheta$ :

$$(3.5) \quad [\vartheta F - 2 \sin \zeta (1 - \cos \varphi)] (\vartheta^2 F^2 - 2) = 0.$$

Wyłączymy na razie przypadek

$$(3.6) \quad \vartheta^2 F^2 = 2;$$

zajmiemy się nim później. W takim razie z równania (3.5) wynika

$$(3.7) \quad \vartheta = \frac{2 \sin \zeta (1 - \cos \varphi)}{F(\varphi, \zeta)},$$

a z któregokolwiek z równań układu (3.4) otrzymujemy

$$(3.8) \quad \Theta = \frac{2 \sin \zeta \cos \varphi}{(1 - 2 \sin^2 \zeta \sin^2 \varphi) F(\varphi, \zeta)}.$$

Układ równań (3.3), (3.7) i (3.8) wyraża wszystkie trzy zmienne  $m$ ,  $\Theta$  i  $\theta$  przez parametry  $\varphi$  i  $\zeta$ , co umożliwi uzyskanie ostatecznych rozwiązań na drodze graficznej i numerycznej.

Taką samą parametryzację można również przeprowadzić w przypadku równania (2.21) (stałego mimośrod). Otrzymujemy w wyniku wzory (3.3) i (3.7) bez zmiany, a jedynie wzór (3.8) zostaje zastąpiony przez wzór

$$(3.9) \quad \Theta = \frac{2 \sin \zeta \cos \varphi}{F(\varphi, \zeta)}.$$

Fizykalna interpretacja uzyskanego wyniku jest nadzwyczaj prosta: przy doborze jednakowych wartości parametrów  $\varphi$  i  $\zeta$  rozważamy w obu przypadkach jednakowo ugięty pręt (to samo ugięcie pod działaniem tej samej siły), a jedynie pierwotny mimośród obciążenia musi być różny w każdym ze schematów. Okoliczność ta jednak nieznacznie tylko upraszcza nasze rozważania: interesuje nas bowiem różnica ugięć przy tej samej

wartości mimośrodru pierwotnego i pod działaniem tej samej siły. Różnicy tej nie można będzie, prawdopodobnie, wyrazić analitycznie za pomocą funkcji elementarnych lub znanych funkcji nieelementarnych; ograniczymy się do przedstawienia graficznego o dokładności wystarczającej dla celów praktyki.

Przed przystąpieniem do ostatecznego rozwiązania na drodze graficznej powrócimy jeszcze do analizy przypadku malejącego mimośrodru: założymy mianowicie, że jest spełnione równanie (3.6), co wyłączaliśmy z dotychczasowych rozważań. Podstawiając (3.6) do pierwszego z równań (3.4) otrzymujemy

$$(3.10) \quad \cos \varphi = 0,$$

czyli  $\varphi = \pi/2$  bez względu na wartość mimośrodru  $\Theta$ . Oznacza to, że niepełna całka eliptyczna  $F(\varphi, \zeta)$  zamieni się w tym przypadku na całość pełną, którą oznaczamy przez  $K(\zeta)$ . Podstawiając dalej (3.6) do drugiego z równań (3.4) otrzymujemy

$$(3.11) \quad \sin \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

czyli  $\zeta = \pi/4$ , również bez względu na wartość mimośrodru  $\Theta$ . Wobec tego  $F(\varphi, \zeta) = K(\pi/4)$ , a z równania (3.6) otrzymamy

$$(3.12) \quad \vartheta = \frac{\sqrt{2}}{F} = \frac{\sqrt{2}}{K\left(\frac{\pi}{4}\right)},$$

wreszcie z (3.3)

$$(3.13) \quad m = \frac{4}{\pi^2} K^2\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Zauważymy, że podstawiając (3.10) i (3.11) do poprzednio wyprowadzonych równań (3.3) i (3.7) otrzymujemy te same wartości  $\vartheta$  i  $m$ , natomiast określający  $\Theta$  wzór (3.8) przechodzi w symbol nieoznaczony  $0/0$ . Zatem — przy schemacie malejącego mimośrodru — bez względu na wielkość mimośrodru pierwotnego siła określona wzorem (3.13) wywołuje ugięcie, określone wzorem (3.12). Fizykalnie jest to oczywiste: ze wzoru (2.10) wynika mianowicie, że  $\beta_l = \pi/2$ , a gdy styczna do osi pręta w przekroju końcowym jest prostopadła do działającej siły (czyli że pręt przedstawiający mimośród jest równoległy), rzeczywisty mimośród działania siły maleje do zera bez względu na swą wartość pierwotną.

Wszystkie krzywe stałego mimośrodru ( $\Theta = \text{const}$ ) w płaszczyźnie  $\vartheta, m$  będą więc przechodziły przez punkt określony współrzędnymi (3.12) i (3.13).

Liczbowe wartości tych współrzędnych możemy otrzymać bądź korzystając z tablic całek eliptycznych, np. [12], bądź wyzyskując związek <sup>5</sup>

$$(3.14) \quad K\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

i posługując się tablicami funkcji Eulera, np. [19]. Ponieważ  $\Gamma(1/4) = 3,6256099$ , zatem poszukiwane wartości współrzędnych punktu węzłowego wyniosą

$$(3.15) \quad \begin{cases} \vartheta = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)} = 0,76275976, \\ m = \frac{1}{4\pi^3} \Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right) = 1,3932039. \end{cases}$$

Oczywiście, że przez punkt ten przejdzie również linia ugięć przy wyboczeniu ( $\Theta = 0$ ). Prostopadłość stycznej w przekroju końcowym do kierunku działania siły zachodzi więc przy wartości siły przekraczającej o około 40% wartość siły Eulera.

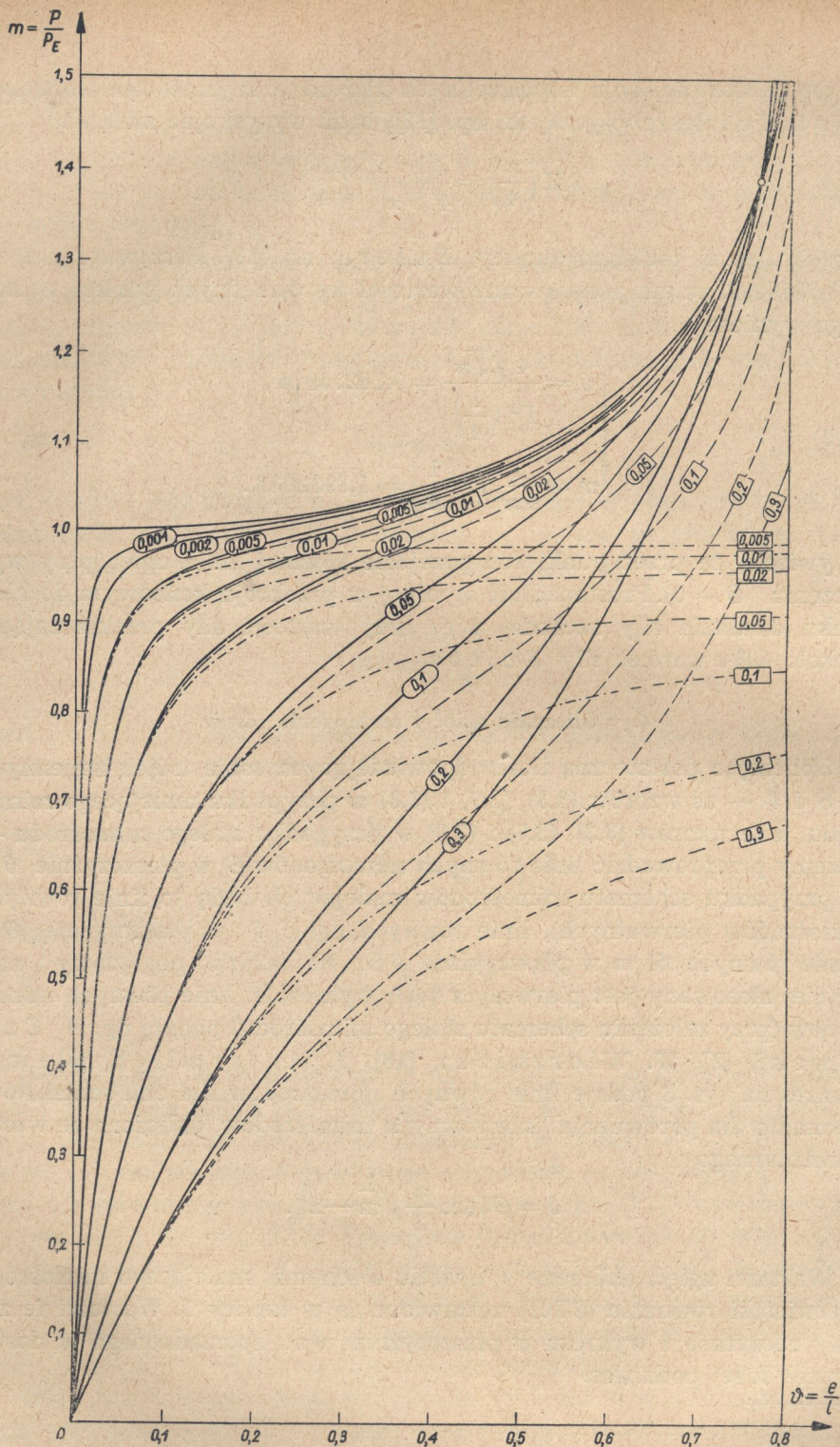
#### 4. Obliczenie ugięć i zestawienie różnic

Obliczając dostateczną ilość odpowiadających sobie trójek zmiennych  $m$ ,  $\Theta$  i  $\vartheta$  — ze wzorów (3.3), (3.7) i (3.8) w przypadku malejącego mimośrodów, a ze wzorów (3.3), (3.7) i (3.9) w przypadku stałego mimośrodów — możemy przeprowadzić linie równych mimośrodków  $\Theta$  w płaszczyźnie  $\vartheta m$  (w przypadku schematu mimośrodków malejących będą to linie równych mimośrodków pierwotnych), linie równych ugięć  $\vartheta$  w płaszczyźnie  $\Theta m$  i linie równych sił  $m$  w płaszczyźnie  $\vartheta \Theta$ . Najbardziej poglądowy i najczęściej stosowany jest pierwszy z tych wykresów: linie równych mimośrodków (przy założeniu schematu stałego mimośrodów) podają np. H. Czopowski, [2], W. Wierzbiński, [16], J. Mutermilch, [6] i inni. Wykres na rys. 3 podaje linie równych mimośrodków dla obu schematów, a ponadto dla porównania linie równych mimośrodków, obliczone ze wzoru elementarnego

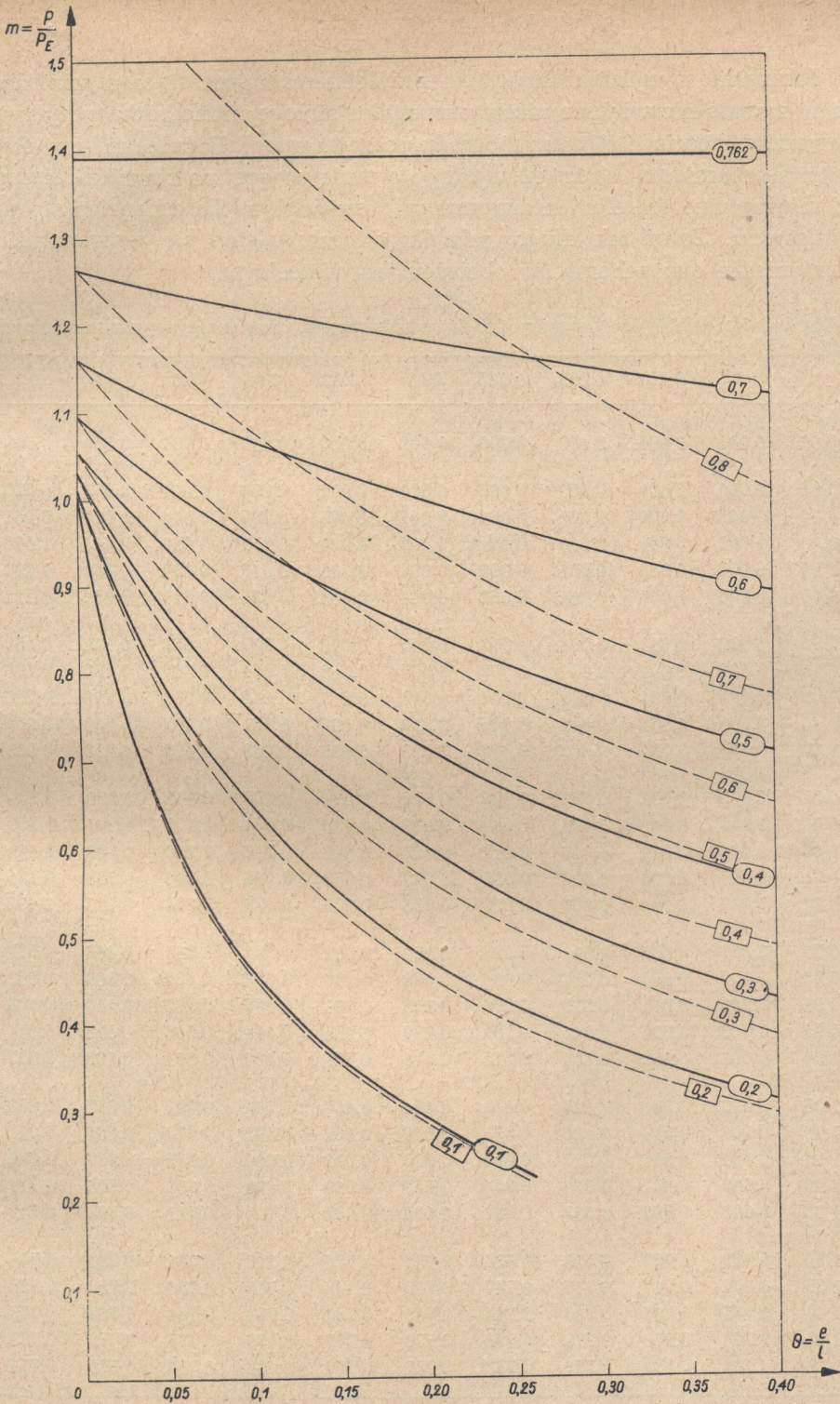
$$(4.1) \quad \vartheta = \Theta \left( \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{m-1} \right).$$

Wartości ugięć, obliczone w oparciu o schemat malejącego mimośrodów [pierwiastki równania (2.20)], zestawione są w tablicy 1. Wartości te zostały odczytane z wykresu w płaszczyźnie  $\vartheta m$  sporządzonego w dostatecznie dużej podziałce.

<sup>5</sup> Por. [11], wzór (6.129.1).



Rys. 3. Ugięcia prętów przy stałych mimośrodkach pierwotnych  $\theta = e/l$ ;  
 — mimośród malejący wraz z ugięciem, --- mimośród stały, - · - · wzór «secasowy»



Rys. 4. Linie stałych ugięć  $\vartheta$  w płaszczyźnie mimośród pierwotny-siła;  
 ——— mimośród malejący wraz z ugięciem, - - - - - mimośród stały

Jak widać z wykresu 3, ugięcia przy schemacie malejącego mimośrodowego są zawsze nie większe niż w przypadku stałego mimośrodowego (przy tych samych wartościach siły i mimośrodowego początkowego). Różnice między obydwooma schematami obciążeń występują mniej więcej na równi z różnicami między wzorem elementarnym a wzorem ścisłym dla schematu stałego mimośrodowego. Toteż tak długo, jak długo posługujemy się wzorem (4.1), rozróżnianie obu schematów obciążeń jest bezcelowe.

Tablica 1. Ugięcia  $\vartheta$  prętów mimośrodowo ściskanych przy malejącym mimośrodku

$\vartheta$ $m$	0	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,05	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,003	0,007	0,013	0,020
0,10	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,003	0,007	0,014	0,027	0,041
0,15	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,011	0,022	0,044	0,066
0,20	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,006	0,016	0,031	0,063	0,093
0,25	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,008	0,021	0,041	0,084	0,122
0,30	0,000	0,001	0,001	0,003	0,005	0,010	0,027	0,053	0,107	0,153
0,35	0,000	0,001	0,001	0,003	0,007	0,013	0,034	0,067	0,133	0,186
0,40	0,000	0,001	0,002	0,004	0,008	0,017	0,042	0,083	0,160	0,220
0,45	0,000	0,001	0,002	0,005	0,010	0,020	0,051	0,102	0,190	0,255
0,50	0,000	0,001	0,003	0,006	0,013	0,025	0,063	0,123	0,223	0,293
0,55	0,000	0,002	0,003	0,008	0,016	0,031	0,077	0,147	0,258	0,334
0,60	0,000	0,002	0,004	0,009	0,019	0,038	0,094	0,175	0,297	0,377
0,65	0,000	0,002	0,005	0,012	0,023	0,047	0,116	0,208	0,339	0,420
0,70	0,000	0,003	0,006	0,015	0,029	0,058	0,144	0,248	0,383	0,460
0,75	0,000	0,004	0,008	0,019	0,038	0,073	0,179	0,293	0,425	0,498
0,80	0,000	0,005	0,010	0,025	0,050	0,097	0,222	0,347	0,466	0,532
0,85	0,000	0,007	0,014	0,035	0,068	0,136	0,275	0,402	0,505	0,562
0,90	0,000	0,011	0,023	0,056	0,105	0,193	0,339	0,456	0,543	0,589
0,95	0,000	0,024	0,047	0,109	0,187	0,275	0,411	0,505	0,577	0,614
1,00	0,000	0,153	0,191	0,255	0,315	0,385	0,483	0,551	0,608	0,637
1,05	0,380	0,396	0,409	0,423	0,444	0,487	0,544	0,591	0,637	0,659
1,10	0,509	0,519	0,525	0,531	0,540	0,562	0,595	0,627	0,664	0,680
1,15	0,591	0,595	0,597	0,600	0,606	0,618	0,637	0,659	0,687	0,699
1,20	0,649	0,651	0,652	0,654	0,657	0,663	0,672	0,687	0,706	0,717
1,25	0,691	0,692	0,693	0,694	0,695	0,697	0,702	0,711	0,723	0,732
1,30	0,723	0,723	0,723	0,724	0,725	0,726	0,727	0,732	0,739	0,744
1,35	0,747	0,747	0,747	0,747	0,748	0,748	0,749	0,750	0,753	0,755
1,40	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765	0,764	0,764	0,764	0,763	0,763
1,45	0,779	0,779	0,779	0,778	0,778	0,777	0,776	0,775	0,772	0,769
1,50	0,789	0,789	0,788	0,788	0,787	0,787	0,786	0,785	0,779	0,774

Przy większych ugięciach różnice rosną dość poważnie. Wartości ich będziemy uzależniali nie od siły i ugięcia, lecz od siły i mimośrod — jako zmiennych, istotnie niezależnych. W tym celu sporządzimy najpierw wykres w płaszczyźnie  $\Theta m$  (linie równych ugięć, rys. 4). Bezwzględne różnice ugięć określimy wzorem

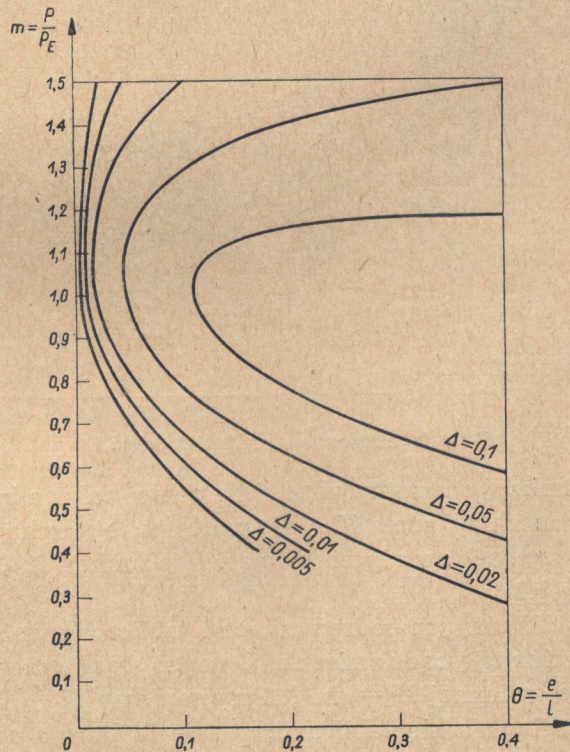
$$(4.2) \quad \Delta(m, \Theta) = \vartheta_c(m, \Theta) - \vartheta_v(m, \Theta),$$

gdzie  $\vartheta_c$  oznacza ugięcie obliczone przy założeniu stałego mimośrodu [pierwiastek równania (2.21)], natomiast  $\vartheta_v$  — przy założeniu malejącego mimośrodu [pierwiastek równania (2.20)]. Linie równych różnic bezwzględnych podaje wykres na rys. 5.

Niejednokrotnie ważniejszymi dla zastosowań praktycznych będą procentowe różnice ugięć przy obu schematach. Określimy je za pomocą wzoru

$$(4.3) \quad \bar{\Delta}(m, \Theta) = \frac{\vartheta_c(m, \Theta) - \vartheta_v(m, \Theta)}{\vartheta_v(m, \Theta)} 100\%.$$

Linie równych różnic procentowych podaje wykres na rys. 6. Największe różnice występują, jak widać, w pobliżu siły krytycznej E u l e r a. Korzystając z wykresu na rys. 6 łatwo ustalić, jakiej wartości nie przekroczą różnice między ugięciami obliczonymi w oparciu o oba schematy przy danym mimośrodzie pierwotnym. Na przykład, gdy  $\Theta = 0,003$ , to różnice nie przekroczą 1%, ale gdy  $\Theta = 0,1$  — różnice dochodzą do 20%. Jako ostateczny wniosek można przyjąć, że różnice między obydwoema schematami są pomijalne, gdy mimośrody działania siły są rzędu tysięcznych części długości pręta.



Rys. 5. Bezwzględne różnice ugięć

W przypadku  $\Theta = 0$  (wyboczenie) różnice między rozważanymi schematami obciążeń oczywiście znikają. Poświęćmy jeszcze chwilę uwagi

linii  $\Theta = 0$  w płaszczyźnie  $\vartheta m$ : jest to linia ugięć pręta przy wyboczeniu, a zarazem linia zerowych różnic między obydwoma schematami.

Obliczaniem ugięć przy wyboczeniu sprężystym zajmowało się wielu badaczy. Niektórzy podają tablice wartości poszukiwanej zależności w postaci parametrycznej przyjmując za parametr kąt ugięcia  $\beta$  (B. G. Galerkin, [3], R. V. Southwell, [13]), co nie jest zbyt wygodne dla zastosowań; inni wyprowadzają wzory przybliżone, określające poszukiwaną

zależność  $\vartheta = f(m)$  w sposób bezpośredni (T. Pöschl, [10], również M. E. Bierman, [1]; jedna z takich zależności przybliżonych została także zaproponowana w pracy autora [18]).

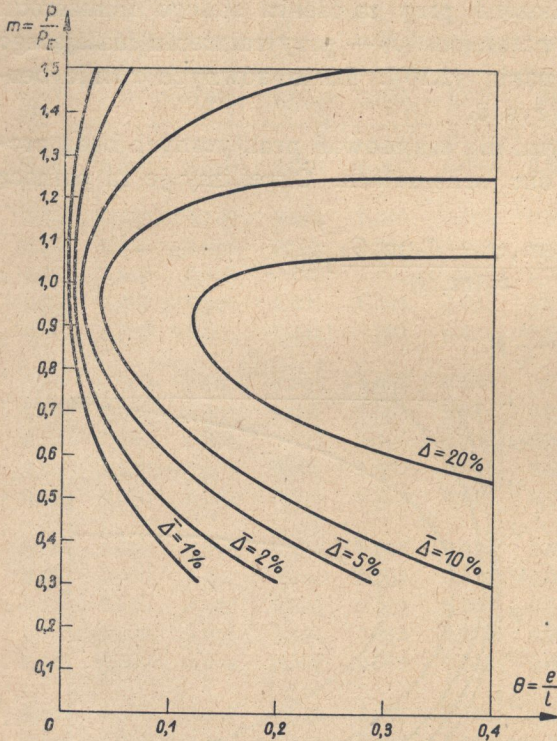
W pracy niniejszej podajemy czterocyfrowe tablice ugięć, obliczone w oparciu o wzór ścisły.

W przypadku  $\Theta = 0$  ze wzorów (3.4) otrzymujemy

$$(4.4) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ \sin \zeta = \frac{\vartheta F}{2} = \frac{\vartheta}{2} K(\zeta), \end{cases}$$

a ze wzoru (3.3)

$$(4.5) \quad m = \frac{4}{\pi^2} K^2(\zeta).$$



Rys. 6. Procentowe różnice ugięć

Funkcję odwrotną względem pełnej całki eliptycznej pierwszego rodzaju oznaczmy przez  $K_{-1}(x)$ ; wartości tej funkcji można będzie z łatwością otrzymać przez interpolację tablic funkcji  $K(\zeta)$  (np. zamieszczonej w pracy [12]).

W różnych podręcznikach i tablicach uważa się pełną całkę eliptyczną za funkcję bądź zmiennej  $\zeta$  (kąta), bądź zmiennej  $k = \sin \zeta$ , bądź wreszcie zmiennej  $k^2 = \sin^2 \zeta$ . Przyjmujemy  $K = K(\zeta)$  z uwagi na łatwość posługiwania się tablicami; przyjęcie innego argumentu zmieniłoby nieco określenie funkcji odwrotnej  $K_{-1}(x)$ .

W takim razie

$$(4.6) \quad \zeta = K_{-1}\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m}\right)$$



i ostatecznie, wobec (4.4),

$$(4.7) \quad \vartheta = \frac{4}{\pi \sqrt{m}} \sin \left[ K_{-1} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right) \right].$$

Wartości tej funkcji zebrane są w tabelicy 2. Osiąga ona maksimum w punkcie  $m = 1,747$ , wynoszące  $\vartheta = 0,8063$ ; przy dalszym wzroście siły

Tablica 2. Ugięcia prętów przy wyboczeniu sprężystym

$m = \frac{P}{P_E}$	$\vartheta = \frac{\delta}{l}$	$m = \frac{P}{P_E}$	$\vartheta = \frac{\delta}{l}$	$m = \frac{P}{P_E}$	$\vartheta = \frac{\delta}{l}$
1	0,0000	1,018	0,2366	1,45	0,7785
1,001	0,0569	1,019	0,2428	1,50	0,7886
1,002	0,0803	1,020	0,2488	1,55	0,7959
1,003	0,0983	1,03	0,3011	1,60	0,8009
1,004	0,1134	1,04	0,3438	1,65	0,8040
1,005	0,1266	1,05	0,3800	1,70	0,8058
1,006	0,1385	1,06	0,4116	1,75	0,8062
1,007	0,1495	1,07	0,4397	1,80	0,8058
1,008	0,1596	1,08	0,4649	1,85	0,8045
1,009	0,1691	1,09	0,4877	1,90	0,8025
1,010	0,1780	1,10	0,5085	1,95	0,8000
1,011	0,1865	1,15	0,5909	2,00	0,7969
1,012	0,1946	1,20	0,6488	2,10	0,7899
1,013	0,2023	1,25	0,6912	2,20	0,7818
1,014	0,2096	1,30	0,7229	2,50	0,7544
1,015	0,2167	1,35	0,7469	3,00	0,7070
1,016	0,2236	1,40	0,7649	$\infty$	0,0000
1,017	0,2302				

ugięcia maleje. Warto tu wspomnieć, że obrazowy szkic kolejnych położań pręta przy wyboczeniu podaje E. P. Popow ([9], s. 106).

### 5. Uwagi końcowe

Praca niniejsza umożliwia obliczenie sprężystych ugięć pręta mimośrodowo ściskanego przy schematach obciążeń przedstawionych na rysunkach 1a i 1b z dokładnością wystarczającą dla zastosowań technicznych oraz ocenę różnic ugięć przy obu schematach.

Natomiast wyniki pracy — odnoszące się do różnic między rozpatrywanymi schematami — można będzie przenieść na szczególnie ważny dla praktyki przypadek odkształceń sprężysto-plastycznych jedynie w nieznacznym stopniu: w zakresie sprężysto-plastycznym mamy bowiem do czynienia z pojęciem «siły krytycznej drugiego rodzaju» (S. D. Lejties, [5]) — największego obciążenia pręta (nośności granicznej) — i może zajść taki przypadek, że siła działająca na danym mimośrodku, przeno-

szona jeszcze przez pręt przy jednym schemacie obciążenia, może już przewyższać nośność pręta przy drugim schemacie. Różnica ta ma już charakter jakościowy i nie daje się podciągnąć pod schemat obliczanych przez nas różnic procentowych. Kwestia ta zdaje się wymagać dalszych badań.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] M. E. Bierman, *O prodolnoj ustojcziwosti stierżniej*, Sborn. stat. Ras-czety na procznost', żestkost', ustojcziwost' i kolebanja, Moskwa 1955, s. 216-222.
- [2] H. Czopowski, *Kilka słów o wyboczeniu sprężystym*, Czasop. Techn. 7 (1924).
- [3] B. G. Galerkin, *Sobranje soczinienij*, t. 1, wyd. AN ZSSR, Moskwa 1952, s. 125-154.
- [4] F. S. Jasiński, *Izbrannyje raboty po ustojcziwosti szatych stierżniej*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1952.
- [5] S. D. Lejties, *Ustojcziwost' szatych stalnych stierżniej*, Gos. Izd. Lit. po Stroit. i Archit., Moskwa 1954.
- [6] J. Mutermilch, *Ścisły wzór na krzywiznę w zastosowaniu do mimośrodowego ściskania*, Arch. Mech. Stos. 1 (1949), 3, Gdańsk 1949, s. 203-228.
- [7] J. Mutermilch, *Zastosowanie rachunku różnicowego do obliczeń opartych na ścisłym równaniu odkształconej*, z. 3/1 mat. nadesł. na Zjazd Nauk PZITB w Gdańsku, 1949.
- [8] J. Naleszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, Wyd. Kom., Warszawa 1953.
- [9] E. P. Popow, *Nieliniennyje zadaczi statiki tonkich stierżniej*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1948.
- [10] T. Pöschl, *Über eine Methode zur angenäherten Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen mit anwendung auf die Berechnung der Durchbiegung bei der Knickung gerader Stäbe*, Ing.-Archiv 9 (1938), 1, s. 34-41.
- [11] I. M. Ryżik i I. S. Gradsztiejn. *Tablicy intiegralów, summ, riałow i proizwiedienij*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1951.
- [12] B. I. Siegał, K. A. Siemiendiajew, *Piatiznacnyje matiematiczeskie tablicy*, wyd. AN ZSSR, Moskwa-Leningrad 1950.
- [13] R. V. Southwell, *An Introduction to the Theory of Elasticity*, przekł. ros., IL, Moskwa 1948.
- [14] F. Szelągowski, *Wpływ siły krytycznej na stateczność prętów zginanych lub ściskanych mimośrodowo*, Przegl. Techn. Warszawa 1927.
- [15] G. Wästlund i Sven G. Bergström, *Tests with Compressed Steel Members and General Principles for Standard Specifications*, Cz. 4 mat. nadesł. na VI Zjazd Nauk PZITB w Gdańsku, 1-4, XII, 1949.
- [16] W. Wierzbicki, *O powstawaniu zjawiska wyboczenia*, Przegl. Techn. 71 (1932), 31/32 i 35/36, s. 341-345 i 387-391.
- [17] W. Wierzbicki, *O powstawaniu wyboczenia prętów prostych*, Rozpr. Inż. XII, Warszawa 1954.
- [18] M. Życzkowski, *Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej*, Rozpr. Inż. IV, Warszawa 1953.
- [19] M. Życzkowski, *Tablice funkcij Eulera i pokrewnych*, PWN, Warszawa 1954

## ВЛИЯНИЕ УБЫВАНИЯ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА НА ПРОГИБЫ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

В существующих до настоящего времени работах по расчету конечных прогибов эксцентрически сжатых стержней, обычно принималось, что эксцентриситет действия силы во время процесса деформации, (эксцентриситет «перпендикулярен к силе»; рис. 1а) является постоянным. Наряду с такой схемой, которую можно реализовать, например, при нагрузке представленной на рис. 2 (довольно абстрактной), или, чаще, при независимом действии осевой силы и момента (с пропорционально увеличивающимися значениями), возможны другие различные схемы эксцентрической нагрузки стержней. Сюда следует зачислить, прежде всего, случай, представленный на рис. 1б, когда стержень, символизирующий эксцентриситет остается всегда перпендикулярным касательной к нагруженному стержню («уменьшающийся» эксцентриситет).

В настоящей работе сравниваются прогибы при обеих схемах нагрузки. В частности, ввиду того, что анализ вопроса при предположении постоянного эксцентриситета более прост, а уменьшающийся эксцентриситет, повидимому, чаще выступает на практике — исследовано, какая абсолютная и процентная разница получается при расчете прогибов, основываясь на обеих схемах, и когда этой разницей можно пренебречь.

В работе использованы обозначения, принятые в предыдущей статье автора, [18]. Используя точное решение уравнения упругой линии (2.1), получен наибольший прогиб стержня из уравнения (2.20) (в случае уменьшающегося эксцентриситета) и (2.21) (в случае постоянного эксцентриситета). Эти уравнения являются неявными зависимостями типа  $f(\vartheta, \Theta, m) = 0$  с неизвестной  $\vartheta = \delta/l$ , где  $l$  длина стержня, а  $\Theta$  и  $m$  — соответственно безразмерный первоначальный эксцентриситет и безразмерная продольная сила.

В п. 3 эти уравнения параметризованы, что дало возможность исчислить соответствующие друг другу тройки переменных  $\vartheta$ ,  $\Theta$  и  $m$ . Дальнейшие исчисления выполнены графически и нумерически. Таким образом построен график линий  $\Theta = \text{const}$  в плоскости  $\vartheta m$  (рис. 3) и график линии  $\vartheta = \text{const}$  в плоскости  $\Theta m$  (рис. 4). Основываясь на рис. 4, построены графики абсолютных и процентных разниц прогибов при обеих схемах нагрузки (рис. 5 и 6).

Делается вывод, что разницей между обеими схемами можно пренебречь, когда эксцентриситеты действия силы составляют тысячные части длины стержня.

В работе приводится также четырехзначная таблица прогибов стержня при продольном изгибе (осевом сжатии), вычисленных по точной формуле (4.7). Этот случай можно рассматривать как предельный для обсуждаемой задачи, так как в данном случае разница между обеими схемами нагрузок, очевидно, исчезает.

### Summary

#### THE INFLUENCE OF DECREASING ECCENTRICITY ON THE DEFLECTIONS OF A BAR SUBJECTED TO ECCENTRIC COMPRESSION

In all investigations concerning the computation of finite deflections of eccentrically compressed bars it has been assumed hitherto that the eccentricity of the force remains constant («normal to the force», Fig. 1a) during the deformation process. In addition to this type of load, which can be realized, for instance, in the somewhat unusual way shown at Fig. 2 or, more commonly, with the axial force and the moment acting independently (the values increasing proportionally), various other types of eccentric load are possible. Above all, there is the case shown at Fig. 1b, where the bar representing the eccentricity remains always normal to the tangent to the loaded bar («the decreasing eccentricity»).

The object of this paper is to compare the deflections for the two types of load. In particular, since the analysis for constant eccentricity is simpler, and the decreasing eccentricity seems to be more often encountered in practice, the differences (absolute and relative) between these two cases are investigated. The cases in which these differences can be disregarded are indicated.

The notations used are those of the previous paper, [18], by the present author. Using the exact equation of the deflection curve (2.1), the Eqs. (2.20) are obtained for the maximum deflection in the case of decreasing eccentricity and (2.21) in the case of constant eccentricity. These are equations of the type  $f(\vartheta, \Theta, m) = 0$ , the unknown being  $\vartheta = \delta/l$ , where  $l$  denotes the length of the bar and  $\Theta$ , and  $m$  the dimensionless eccentricity and dimensionless axial force, respectively.

In Art. 3 these equations are expressed in a parametric form which makes possible a computation of the sets of variables  $\vartheta$ ,  $\Theta$  and  $m$ , corresponding to each other. Further calculations are performed graphically and numerically. Thus, the diagram of the curve  $\Theta = \text{const}$  in the  $\vartheta m$  plane is constructed (Fig. 3), together with the diagram of the curve  $\vartheta = \text{const}$  in the plane  $\Theta m$  (Fig. 4). On the basis of Fig. 4, are drawn diagrams of the absolute and relative (percentage) deflection differences between the two types of load (Figs. 5 and 6).

In conclusion, it can be assumed that the differences between the two types of load can be disregarded when the eccentricity of the force is of the order of a thousandth part of the bar length.

A four-figure table of deflections of a bar under buckling (axial compression), calculated from the accurate equation (4.7), is presented too. This case can be treated as the limit case for the problem under consideration, the difference between the two types of load being zero.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 kwietnia 1956 r.*

---

