

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
INSTITUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

---

# ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

XV.1

WITOLD WIERZBICKI

Zastosowanie różnie skończonych  
w przypadkach dwukierunkowych stanów naprężeń  
w budowlach

SZKOŁA INŻYNIERSKA W POZNANIU  
KATEDRA PRZEKABRYKACJI  
I BETONÓW SPRĘŻONYCH  
Warszawa, Śmiełowska 11

---

W A R S Z A W A

1 9 5 5

KOŁA INŻYNIERSKA W POZNANIU  
KATEDRA PREFABRYKACJI  
BETONÓW SPRĘŻONYCH  
Poznań, ul. Strzelecka 11

1204.

**ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (XV-1)**

Copyright 1955 by Państwowe Wydawnictwo Naukowe  
Warszawa (Poland). Printed in Poland.

All rights reserved

No part of this book may be translated or reproduced  
in any form, by mimeograph or any other means,  
without permission in writing from, publishers.

---

Nakład 1965+160 nadb. Papier druk. sat, 70x100/16, 70 g. Arkuszy wydawn 3,25. Arkuszy drukarskich 8.  
Oddano do składania dn. 7.XII 1954 r. Druk ukńcz. 28 II.1955. Zam. 575. B-6-50261 Cena zł 6,50

---

Stoż. Zakł. Graf., Drukarnia Naukowa. Warszawa, Sniadeckich 8.

P O L S K A A K A D E M I A N A U K  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

---

WITOLD WIERZBICKI

ZASTOSOWANIE RÓŻNIC SKOŃCZONYCH  
W PRZYPADKACH DWUKIERUNKOWYCH STANÓW NAPRĘŻEŃ  
W BUDOWLACH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE

XV.1

W A R S Z A W A 1 9 5 5

---

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## PRZEDMOWA

Teoria różnic skończonych znajduje w mechanice budowli zastosowanie do dwóch grup zagadnień.

Pierwsza z tych grup dotyczy procesów posiadających charakter nieciągły. W tym wypadku chodzi o nadanie otrzymanym wynikom obliczeń postaci wzorów zamkniętych. Typowym dla tego rodzaju zagadnień jest zagadnienie belek wieloprzęsłowych, w szczególności równanie trzech momentów, które *Clebsch* jeszcze w r. 1862 potraktował jako równanie różnicowe i jako takie scałkował. Do tego rodzaju zagadnień należy między innymi zagadnienie dźwigara ciągłego załamane w planie, które doprowadziło autora niniejszej pracy do równania pięciu momentów skręcających, dającego się scałkować jako równanie różnicowe.

Drugą grupę zagadnień, do rozwiązania których pomocna jest teoria różnic skończonych, stanowią zagadnienia dotyczące procesów z natury swojej ciągłych, lecz rozpatrywanych jako nieciągłe w celu uproszczenia lub umożliwienia obliczeń numerycznych. Trudno jest ustalić, kiedy zrodził się pomysł takiego postępowania, został on jednak niewątpliwie rozpowszechniony dzięki pracy *N. J. Nielsena* z 1920 r. i pracom *H. Marcusa* z okresu lat 1919-1924.

Treścią niniejszej pracy jest zastosowanie tego ostatniego pomysłu do badania dwukierunkowych stanów naprężeń w układach nieprętowych (pełnych), a więc przede wszystkim w płytach, belkach o znacznej wysokości i zaporach.

Autor wyzyskał tu dawniejsze swoje publikacje, w szczególności zaś następujące:

- (1) *Rozkład naprężeń w murach szczelnych*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1928,
- (2) *Wyznaczenie linii izostatycznych*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1932,
- (3) *Obliczenie płyty wspornikowej za pomocą równań różnicowych*, Wyd. Warsz. Tow. Politechn., Warszawa 1934,
- (4) *W sprawie metod obliczenia płyt żelbetowych*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1934.

Mówiąc o różnicach skończonych ma się tu na widoku wszelkie sposoby obliczeń statycznych, w których różniczki  $dx$  i  $dy$  są zastąpione przez małe wielkości skończone  $\Delta x$  lub  $\Delta y$ .

Obliczenie naprężeń i odkształceń w płytach doprowadza do liniowych równań różnicowych, a wyznaczenie linii izostatycznych do równań nieliniowych. Stąd ze względu na typy omawianych tu budowli pierwsza część pracy poświęcona jest teorii płyt, a druga wysokim belkom i zaporam, przy obliczaniu których linie izostatyczne odgrywają szczególnie poważną rolę. W ten sposób podział pracy z punktu widzenia metody obliczenia odpowiada podziałowi z punktu widzenia rodzaju konstrukcji.

AUTOR

## I. ZASTOSOWANIE RÓWNAŃ RÓZNICOWYCH LINIOWYCH

### 1. Znaczenie różnic skończonych w teorii płyt

Omówione tu zostaną różne możliwości zastosowania równań różnicowych liniowych do obliczenia odkształceń i naprężeń w płytach izotropowych oraz w płytach ortotropowych, w szczególności z punktu widzenia obliczenia płyt żelbetowych.

Całkowanie równania różniczkowego odkształconej środkowej powierzchni płyty, tj. równania

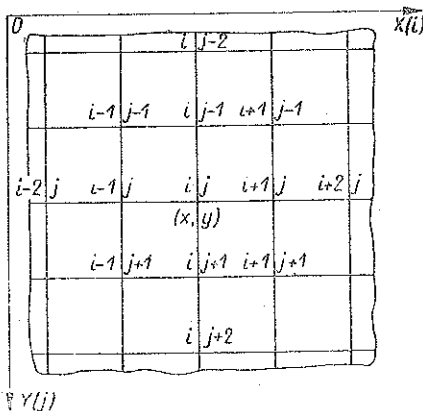
$$\frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (1)$$

w którym  $w$  oznacza ugięcie płyty w punkcie o współrzędnych  $x, y$  (rys 1),  $E$  współczynnik sprężystości,  $h$  grubość płyty,  $\mu$  współczynnik Poissona,  $q$  obciążenie na jednostkę powierzchni płyty, następcza dla wielu przypadków podparcia płyty trudności nie do przewidywania.

Stąd zrodził się pomysł zastąpienia równania różniczkowego (1) przez odpowiednie równanie różnicowe. Pomysł ten został prawie jednocześnie ogłoszony przez N. J. Nielsena i H. Marcusa; doprowadza on do równania

$$\frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^3}{12} \left( \frac{\Delta_x^4 w}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta_{xy}^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta_y^4 w}{\Delta y^4} \right) = q, \quad (2)$$

gdzie  $\Delta x$  i  $\Delta y$  są to skończone, lecz możliwie małe w stosunku do wymiarów płyty przyrosty współrzędnych,  $\Delta_x^4 w$  jest różnicą czwartego rzędu w kierunku osi  $X$ -ów,  $\Delta_y^4 w$  różnicą czwartego rzędu w kierunku osi  $Y$ -ów, a  $\Delta_{xy}^4 w$  różnicą drugiego rzędu w kierunku osi  $Y$ -ów różnicy dru-



Rys. 1

giego rzędu w kierunku osi X-ów lub równą jej różnicą drugiego rzędu w kierunku osi X-ów różnicy drugiego rzędu w kierunku osi Y-ów.

W związku z oznaczeniami na rys. 1, na którym przedstawione jest położenie pewnego punktu o współrzędnych  $x, y$  w stosunku do punktów sąsiednich, mamy

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x^4 w &= 6 w_{i,j} - 4(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + (w_{i+2,j} + w_{i-2,j}), \\ \Delta_y^4 w &= 6 w_{i,j} - 4(w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + (w_{i,j+2} + w_{i,j-2}), \\ \Delta_{xy}^4 w &= 4 w_{i,j} - 2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + \\ &\quad + (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

gdzie znaczki  $i, j$  zastępują znaczki  $x, y$  zgodnie ze związkami  $x = i \cdot \Delta x$  oraz  $y = j \cdot \Delta y$ .

W podobny sposób dla drugich różnic mamy

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x^2 w &= w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}, \\ \Delta_y^2 w &= w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}, \\ \Delta_{xy}^2 w &= w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j} - w_{i,j+1} + w_{i,j}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dla płyt ortotropowych równanie różniczkowe całkowanej środkowej powierzchni płyty ogłoszone po raz pierwszy przez Gehringa w 1860 r. posiada postać

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \quad (5)$$

gdzie

$$B_1 = \frac{E_1}{1 - \mu_1 \mu_2} \frac{h^3}{12}, \quad B_2 = \frac{E_2}{1 - \mu_1 \mu_2} \frac{h^3}{12},$$

a gdzie z kolei  $E_1$  i  $\mu_1$  odpowiadają kierunkowi osi X-ów, a  $E_2$  i  $\mu_2$  kierunkowi osi Y-ów.

H. Marcus korzysta z równania (5) specjalnie dla płyt żelbetowych i dlatego wielkości  $B_1$  i  $B_2$  różnią się w jego pracach od siebie tylko wskutek różnego uzbrojenia płyty w dwóch prostopadłych kierunkach, nie różnią się natomiast wielkościami  $\mu$ . Z tego powodu decydując się na małą zresztą niecisłość w całkowaniu, nie mającą znaczenia praktycznego, otrzymuje on

$$2H = B_1 + B_2. \quad (6)$$

Takie postawienie sprawy pozwoliło Marcusowi zastosować do płyt ortotropowych pewne uproszczenia wprowadzone przez niego do roz-

wiązywania równania płyty izotropowej. Uproszczenie to oparte jest na spostrzeżeniu, że jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$-\frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = M, \quad (7)$$

to równaniu (1) będziemy mogli nadać postać

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = q, \quad (8)$$

przy czym zależność między wielkością  $M$  a wielkościami  $M_1$  i  $M_2$  przedstawiającymi jednostkowe momenty zginające w danym punkcie płyty, działające w płaszczyznach pionowych równoległych do osi współrzędnych, wyraża się tu wzorem

$$M = \frac{1}{1+\mu} (M_1 + M_2). \quad (9)$$

Należy zauważyć, że równania (6) i (7) odpowiadają równaniom

$$-EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M \quad \text{i} \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = q \quad (10)$$

z teorii zginania belki prostej.

Podobnie jak równaniom (10) odpowiada równanie krzywej sznurowej

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{p}{H}, \quad (11)$$

w którym  $\eta$  oznacza rzędne liny zwisającej,  $p$  obciążenie ciągłe, a  $H$  siłę poziomą rozciągającą linę, równaniom (7) i (8) odpowiada w układzie przestrzennym następujące równanie błony sprężystej (*die elastische Haut*), rozciąganej równomiernie siłami poziomymi  $H$  i obciążonej pionowo siłami ciągłymi o natężeniu  $p$ :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \frac{p}{H}. \quad (12)$$

Obliczenie odkształceń płyt sprężystych na podstawie analogii między równaniem (12) a równaniami (7) i (8) znajduje odpowiednik w teorii belek prostych w metodzie momentów wtórnych. Podobnie jak metoda momentów wtórnych pozwala zarówno na wykreślnę, jak i na analityczne obliczenie odkształceń, tak samo i teoria błony sprężystej *M a r c u s a* pozwala na stosowanie tych obydwóch sposobów obliczenia.

Aby umożliwić wykreślnę obliczenie ugięć płyty sprężystej oraz zastosowanie do tego celu równań różnicowych, wprowadził *M a r c u s* pojęcie



siatki sprężystej (*das elastische Gewebe*). Pojęcie to odgrywa w danym wypadku rolę podobną do roli wieloboku sznurowego, który zastępuje w obliczeniach wykreslnych układów płaskich krzywą sznurową. Gdy chodzi o obliczenie analityczne ugięć płyty, to można tu zastąpić równania różniczkowe (7) i (8) przez odpowiednie równania różnicowe. Można to zrobić również i w przypadku płyty ortotropowej, kiedy równanie (7) musi być zastąpione przez równanie

$$B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -M \quad (13)$$

lub ściślej przez równanie

$$B_1 \frac{\Delta^2 w_1}{\Delta x^2} + B_2 \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} = -M, \quad (14)$$

jeżeli tylko przyjmiemy, że w równaniu (5) mamy  $2H = B_1 + B_2$ .

Marcus przypisuje chyba zbyt wielką rolę analogii zachodzącej między równaniami (7) i (8) a równaniem (12). Pomysł jego może wprawdzie oddać ważne usługi w przypadkach, gdy wielkości ugięć  $w$  i wielkości  $M$  stają się równe zero w tych samych punktach płyty, gdy to jednak miejsca nie ma, znikają korzyści wypływające z zalecanej analogii. Pochodzi to stąd, że gdy  $w$  i  $M$  stają się równe zero w tych samych punktach płyty, co ma miejsce przede wszystkim w obliczeniu płyt swobodnie podpartych na całym obwodzie, to możemy równanie (8) rozwiązać niezależnie od równania (7), a potem dopiero rozwiązać równanie (7) i na podstawie otrzymanych wielkości  $w$  obliczyć jednostkowe momenty zginające  $M_1$  i  $M_2$  w danym punkcie płyty:

$$M_1 = -B_1 \left( \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \mu_2 \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right), \quad (15)$$

$$M_2 = -B_2 \left( \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} + \mu_1 \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right), \quad (16)$$

przy czym dla płyty izotropowej  $B_1 = B_2$ .

Tego rodzaju tok postępowania nie jest możliwy, gdy  $w$  i  $M$  nie są jednocześnie równe zero; toteż sam Marcus ucieka się w tych wypadkach do rozwiązywania układu równań typu (2). Można więc, na ogół bez szczególnych strat w czasie, nie korzystać w obliczeniach analitycznych płyt z analogii między równaniami (7) i (8) a równaniem (12); należy jednak stwierdzić, że analogia ta daje szereg ważnych zależności, pozwalających się wyzyskać w różnych działach statyki budowli.

Bezpośrednie zastosowanie znajduje schemat siatki sprężystej w przypadku wykreslnego sposobu całkowania równania odkształconej po-

wierzchni płyty. Stosowanie jednak wykreślonego sposobu obliczenia przy tak precyzyjnej czynności matematycznej, jaką jest całkowanie równania różniczkowego czwartego rzędu w pochodnych cząstkowych, aczkolwiek interesujące w swym ujęciu, nie może być uważane za dostatecznie ściśle. Toteż nie znalazło ono na ogół zastosowania.

Z powyższych rozważań zdaje się wyraźnie wynikać, że najwłaściwszym sposobem zastosowania teorii różnic skończonych do obliczenia płyt jest bezpośrednio wyzyskanie równania (2).

Ponieważ płyty jako konstrukcje budowlane wykonane są przeważnie z żelbetu, powstaje pytanie, czy należy płyty takiej konstrukcji uważać za płyty izotropowe, czy też za płyty ortotropowe.

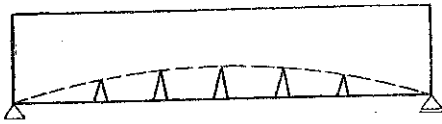
Teoria płyty sprężystej w ogóle, a teoria płyty ortotropowej w szczególności, oparta jest na założeniu, że materiał płyty szczelnie wypełnia całą jej objętość. Toteż zastosowanie teorii płyty ortotropowej do płyty żelbetowej powinno dotyczyć tej fazy odkształcenia, przy której płytę na całej grubości można uważać za sprężystą. Płyty obliczone dla tej fazy wykazują małe różnice w sztywnościach  $B_1$  i  $B_2$  przy znacznych nawet różnicach w uzbrojeniu w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach. Tak więc np. przy stosunku przekroju wkładek stalowych uzbrojenia 1 : 4,45 momenty bezwładności na 1 m długości przekroju mają się jak 1 : 1,06. Z tego wynikałoby, iż obliczanie płyty żelbetowej jako płyty ortotropowej nie jest w tych warunkach potrzebne.

W fazie odkształcenia, kiedy w płycie powstają rysy, stosunek momentów bezwładności równa się w przybliżeniu stosunkowi przekrojów wkładek stalowych uzbrojenia. W tych jednak wypadkach nawet przy znacznych różnicach w jednostkowych momentach bezwładności w dwóch kierunkach do siebie prostopadłych momenty zginające obliczone dla płyty izotropowej i ortotropowej różnią się od siebie nie tak wiele. A więc np. według Marcusa dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej przy stosunku boków 1 : 2 i stosunku momentów bezwładności 4 : 1 różnica ta wynosi 22%. Podobna różnica uzasadniałaby wprawdzie konieczność wzięcia pod uwagę okoliczności, że sztywność płyty jest w dwóch kierunkach do siebie prostopadłych różna, gdyby nie wzgląd na to, że znaczne różnice w tych sztywnościach dotyczą tylko fazy tworzenia się rys, a więc takiego stanu rzeczy, przy którym przewidziane jest pęknięcie betonu. W ten sposób (rys. 2) pasmo wyjęte w kierunku uzbrojenia znajduje się w różnych punktach swej długości w różnych warunkach dotyczących sztywności, gdyż powstałe rysy zmniejszają przekrój poprzeczny pasma w różnych jego miejscach w różnym stopniu.

A więc przekrój poprzeczny pasma wyjętego z płyty o stałej grubości nie może być uważany za stały na całej długości pasma, ponieważ zaś pasmo takie musi być uważane za układ statycznie niewyznaczalny, więc

momenty zginające muszą tu być uzależnione od stopnia zmienności przekroju. Tej zmienności nie jesteśmy jednak w stanie uwzględnić.

Ponieważ zmienność przekrojów poprzecznych w belkach prostych może mieć na momenty zginające wpływ wyrażający się w kilkudziesięciu procentach, należy więc oczekiwać, że rysy wywołane w płycie przez pęknięcie betonu w podobnym stopniu



Rys. 2

wpływają na momenty zginające w poszczególnych punktach płyty. Staje się wobec tego rzeczą wątpliwą, czy w tych warunkach warto w każdym poszczególnym wypadku uwzględniać wpływ na momenty

zginające anizotropii płyty, tym bardziej, że uwzględnienie skręcania w betonie, które ma wpływ na ściślejszą wartość współczynnika  $2H$ , natrafia wciąż na poważne trudności.

Wobec przytoczonych okoliczności należy uważać za słuszne, aby prostokątne płyty żelbetowe o stałej grubości były obliczane jako sprężyste płyty izotropowe z tym, że przy wyznaczaniu dopuszczalnych naprężeń ortotropia tych płyt zostanie uwzględniona.

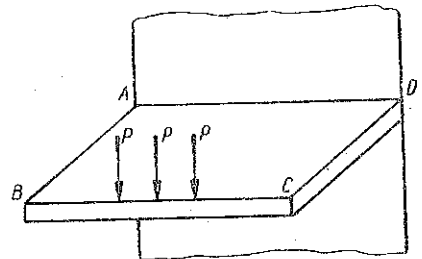
Jak widać z powyższych rozważań, stosowanie teorii różnic skończonych do obliczenia płyt może być wyzyskane zarówno w przypadkach płyt izotropowych, jak i ortotropowych, a więc w każdym wypadku płyty żelbetowej.

Na tle rozważań tego paragrafu jako przykład zostanie niżej podane obliczenie płyty-wspornika.

## 2. Obliczenie płyty-wspornika

Przedstawione niżej obliczenie płyty-wspornika ma za zadanie, poza rozwiązaniem konkretnego zagadnienia technicznego, zobrazowanie na przykładzie tych metod postępowania, które mają w danym zakresie również znaczenie ogólniejsze.

Weźmy więc pod uwagę prostokątną płytę-wspornik  $ABCD$  obciążoną trzema siłami  $P$ , których rozmieszczenie podane jest obok (por. rys. 3). Jako wspornik płyta jest utwierdzona wzdłuż jednej krawędzi, a jej ugięcia wzdłuż trzech pozostałych. Płytę uważamy za poziomą, a jej ugięcia za pionowe.

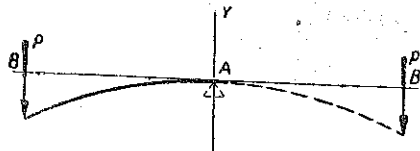


Rys. 3

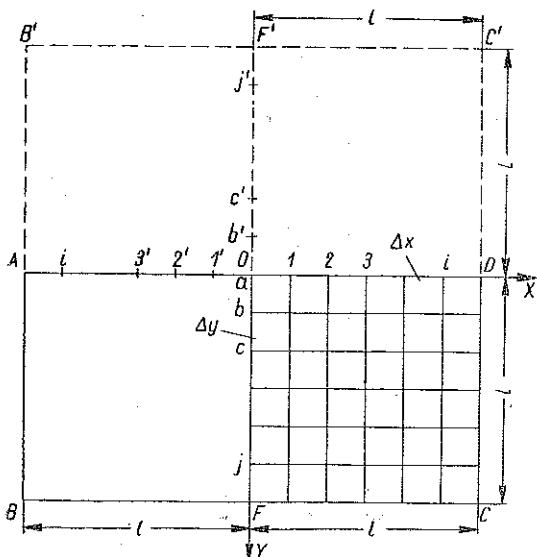
Podobnie jak belkę-wspornik  $AB$  (rys 4), obciążoną siłą  $P$  na końcu, można rozpatrywać z punktu widzenia odkształceń jako połowę belki

$BB'$  podpartej w punkcie  $A$  i obciążonej symetrycznie dwiema siłami  $P$ , tak samo i płytę-wspornik  $ABCD$  można rozpatrywać jako połowę płyty  $BB'C'C$  podpartej wzdłuż krawędzi  $AD$  i obciążonej w sposób symetryczny względem tej krawędzi (rys. 5).

Przeprowadzamy na rys. 5 przedstawiającym w planie płytę-wspornik szereg prostych  $a, b, c \dots j \dots$  równoległych do osi  $OX$  i oddalonych jedna od drugiej o równe odcinki  $\Delta y$  oraz szereg prostych  $0, 1, 2, \dots i \dots$  równoległych do osi  $OY$  i oddalonych od siebie o odcinki  $\Delta x$ .



Rys. 4



Rys. 5

W ten sposób powstanie na powierzchni płyty szereg punktów przecięcia dwóch układów prostych, a więc ogólnie mówiąc prostej  $j$  i prostej  $i$ ; będą to punkty  $i, j$  lub ogólnie punkty  $x, y$ ; ugięcia płyty w tych punktach będziemy oznaczali przez  $w_{i,j}$  lub prościej przez  $j_i$ .

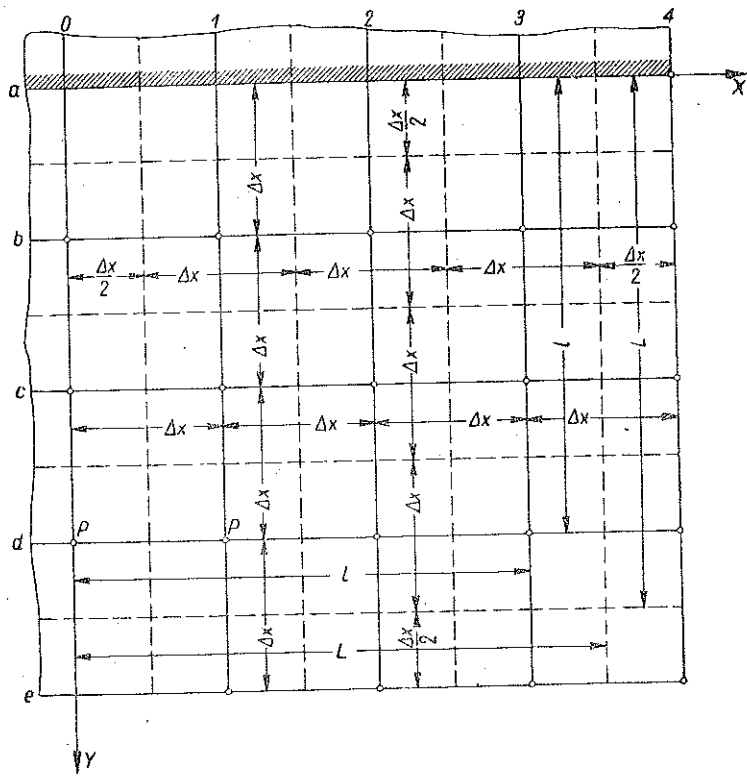
Odcinki  $\Delta x$  i  $\Delta y$  uważamy za przyrosty współrzędnych  $x$  i  $y$  i przyjmujemy, że  $\Delta x = \Delta y = 1/3 l$ , gdzie  $l$  jest to mniejszy wymiar wspornika, a  $2l$  większy.

Równanie (2) przybiera w tych warunkach postać następującą:

$$\begin{aligned}
 20 w_{i,j} - 8(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + \\
 + 2(w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}) + \\
 + (w_{i+2,j} + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} + w_{i,j-2}) = \frac{q \Delta x^4}{E h^3} \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{1}{12}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Poza prostymi  $a, b, c, d, e$  równoległymi do osi  $X$ -ów oraz prostymi  $0, 1, 2, 3, 4$  równoległymi do osi  $Y$ -ów, przeprowadzamy między prostymi obydwóch tych grup jeszcze proste odległe od wymienionych prostych o  $\Delta x/2$  i przedstawione jako punktowane linie na rys. 6. Punkty  $(i, j)$  znajdują się w środkach ciężkości otrzymanych tą drogą kwadratów. Siły

zaczepione w punktach  $(i, j)$  zastępujemy przez obciążenie równomiernie rozłożone na powierzchni tych kwadratów.



Rys. 6

Reakcję płyty  $ABCD$  obciążonej symetrycznie względem osi  $OX$  w punktach  $(a, 0)$ ,  $(a, 1)$ ,  $(a, 2)$ ,  $(a, 3)$  oznaczamy odpowiednio przez  $R_0, R_1, R_2, R_3$ . Dziąc te wielkości kolejno przez  $\Delta x^2$  będziemy otrzymywali wielkości oznaczone jako  $q$  w równaniach (1) i (2).  
Wprowadzamy oznaczenia

$$r = \frac{q \Delta x^4}{E h^3 (1 - \mu^2) 12} = \frac{R \Delta x^4}{E h^3 (1 - \mu^2) 12} \quad (18)$$

lub też ogólniej

$$r = \frac{R \Delta x^2}{B}, \quad (19)$$

gdzie  $B$  przedstawia jednostkową sztywność płyty i gdzie dla liczby Poissona przyjmujemy  $\mu = 0,2$ .

W punktach  $(a, 1')$ ,  $(a, 2')$ ,  $(a, 3')$  występują odpowiednio te same reakcje co w punktach  $(a, 1)$ ,  $(a, 2)$ ,  $(a, 3)$ .

Siły  $P$  uważamy za zaczepione w punktach  $(d, 0)$ ,  $(d, 1)$ , i  $(d, 1')$  rozpatrywanej płyty-wspornika lub w punktach  $(d, 0)$ ,  $(d, 1)$  i  $(d, 1')$  płyty  $AB'CD$ .

Wobec symetrii płyty względem osi  $OX$  i  $OY$  wyznaczenie ugięć ograniczyć można do punktów położonych wewnątrz obwodu  $ODCF$ , w danym wypadku do 12. Niezależnie od tego musimy obliczyć pionowe przesunięcia pewnych punktów poza obwodem ograniczającym płytę. Jest to konieczne do wyznaczania różnic skończonych, wyrażonych wzorami (3) i (4) dla punktów położonych na obwodzie płyty. Wyznaczenie przesunięć punktów położonych poza obwodem płyty należy rozumieć w ten sposób, że odkształcona środkowa powierzchnia płyty, odpowiadająca równaniu różniczkowemu (1), nie jest z geometrycznego punktu widzenia ograniczona obwodem płyty, możemy więc wyznaczyć jej rzędne nie tylko dla punktów położonych wewnątrz obwodu, ale i poza nim. Punktów takich będzie w danym przypadku 8. Są to mianowicie punkty  $(e, 0)$ ,  $(e, 1)$ ,  $(e, 2)$ ,  $(e, 3)$ ,  $(d, 4)$ ,  $(c, 4)$ ,  $(b, 4)$  i  $(a, 4)$ .

Ustawiamy równania (17) dla następujących 9 punktów płyty:

$$\left. \begin{array}{l} (a, 0), (a, 1), (a, 2), \\ (b, 0), (b, 1), (b, 2), \\ (c, 0), (c, 1), (c, 2). \end{array} \right\} \quad (20)$$

Są to równania następujące:

dla punktu  $(a, 0)$

$$-16b_0 + 8b_1 + 2c_0 = r_0, \quad (I)$$

dla punktu  $(a, 1)$

$$4b_0 - 16b_1 + 4b_2 + 2c_1 = r_1, \quad (II)$$

dla punktu  $(a, 2)$

$$4b_1 - 16b_2 + 4b_3 + 2c_2 = r_2, \quad (III)$$

dla punktu  $(b, 0)$

$$21b_0 - 16b_1 + 2b_2 - 8c_0 + 4c_1 + d_0 = 0, \quad (IV)$$

dla punktu  $(b, 1)$

$$-8b_0 + 22b_1 - 8b_2 + b_3 + 2c_0 - 8c_1 + 2c_2 + d_1 = 0, \quad (V)$$

dla punktu (b 2)

$$b_0 - 8b_1 + 21b_2 - 8b_3 + b_4 + 2c_1 - 8c_2 + 2c_3 + d_2 = 0, \quad (\text{VI})$$

dla punktu (c, 0)

$$-8b_0 + 4b_1 + 20c_0 - 16c_1 + 2c_2 - 8d_0 + 4d_1 + e_0 = 0, \quad (\text{VII})$$

dla punktu (c, 1)

$$2b_0 - 8b_1 + 2b_2 - 8c_0 + 21c_1 - 8c_2 + c_3 + 2d_0 - 8d_1 + 2d_2 + e_1 = 0, \quad (\text{VIII})$$

dla punktu (c 2)

$$2b_1 - 8b_2 + 2b_3 + c_0 - 8c_1 + 20c_2 - 8c_3 + c_4 + 2d_1 - 8d_2 + 2d_3 + e_2 = 0. \quad (\text{IX})$$

Przy ustawianiu równań (I)-(IX) brano pod uwagę, że przesunięcia punktów położonych symetrycznie względem osi  $O X$  lub osi  $O Y$  są sobie równe.

Następną grupę równań, potrzebnych do wyznaczenia ugięć  $w$ , otrzymamy przyrównując do zera naprężenia normalne prostopadłe do płaszczyzn pionowych  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  (rys. 1), czyli ustawiając równania

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0. \quad (21)$$

Naprężenia te wyrażają się wzorami

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\mu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\mu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

w których  $z$  oznacza odległość pewnego punktu przekroju od osi obrotnej.

Po zastąpieniu we wzorach (22) i (23) pochodnych przez odpowiednie ilorazy różnicowe znajdujemy

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \frac{z}{\Delta x^2} [w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j} + \mu(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1})], \quad (24)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\mu^2} \frac{z}{\Delta x^2} [w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1} + \mu(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j})]. \quad (25)$$

Równania (21) przybierają w tych warunkach postać:

dla punktu (a, 3) (równanie  $\sigma_x = 0$ )

$$a_1 + 0,4 b_3 = 0, \quad (\text{X})$$

dla punktu (b, 3) (równanie  $\sigma_x = 0$ )

$$b_2 - 2,4 b_3 + b_4 + 0,2 c_3 = 0, \quad (\text{XI})$$

dla punktu (c, 3) (równanie  $\sigma_x = 0$ )

$$0,2 b_3 + c_2 - 2,4 c_3 + c_4 + 0,2 d_3 = 0, \quad (\text{XII})$$

dla punktu (d, 3) (równanie  $\sigma_x = 0$ )

$$0,2 c_3 + d_2 - 2,4 d_3 + d_4 + 0,2 e_3 = 0, \quad (\text{XIII})$$

dla punktu (d, 0) (równanie  $\sigma_y = 0$ )

$$c_0 - 2,4 d_0 + 0,4 d_1 + e_0 = 0, \quad (\text{XIV})$$

dla punktu (d, 1) (równanie  $\sigma_y = 0$ )

$$c_1 + 0,2 d_0 - 2,4 d_1 + 0,2 d_2 + e_1 = 0, \quad (\text{XV})$$

dla punktu (d, 2) (równanie  $\sigma_y = 0$ )

$$c_2 + 0,2 d_1 - 2,4 d_2 + 0,2 d_3 + e_2 = 0, \quad (\text{XVI})$$

dla punktu (d, 3) (równanie  $\sigma_y = 0$ )

$$c_3 + 0,2 d_2 - 2,4 d_3 + 0,2 d_4 + e_3 = 0. \quad (\text{XVII})$$

Naprężenia styczne  $\tau_z$  występujące w płycie w kierunku poziomym w płaszczyznach pionowych równoległych do osi współrzędnych wyrażają się dla punktu oddalonego o  $z$  od powierzchni obojętnej za pomocą wzoru

$$\tau_z = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (26)$$

gdzie  $G$  oznacza współczynnik sprężystości przy przesuwaniu.

Zastępując w równaniu (26) pochodne przez odpowiednie ilorazy różnicowe znajdujemy w związku ze wzorami (4)

$$\tau_z = -2G \frac{z}{\Delta x^2} (w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j} - w_{i,j+1} + w_{i,j}). \quad (27)$$

Wobec symetrii płyty i jej obciążenia względem osi  $Y$ -ów naprężenia styczne  $\tau_z$  powinny być w poszczególnych punktach tej osi równe zero, powinna więc mieć miejsce zależność

$$\tau_z = 0, \quad (28)$$

czyli zależność

$$w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j} - w_{i,j+1} + w_{i,j} = 0. \quad (29)$$



Równanie (29) ustawiamy dla punktów następujących:

$$(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0). \quad (30)$$

Ponieważ pionowe przesunięcia punktów znajdujących się nad podporą równe są zeru, więc

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0. \quad (31)$$

Stąd równanie (29) ustawione dla punktu  $(a, 0)$  da nam

$$b_0 = b_1, \quad (XVIII)$$

dla punktu  $(b, 0)$

$$c_0 = c_1, \quad (XIX)$$

dla punktu  $(c, 0)$

$$d_0 = d_1, \quad (XX)$$

dla punktu  $(d, 0)$

$$e_0 = e_1. \quad (XXI)$$

Wobec tego że zarówno płyta, jak i jej obciążenie są symetryczne względem osi  $X$ -ów i  $Y$ -ów oraz wobec tego że siły, działające na płytę, są prostopadłe do płaszczyzny  $XOY$ , sześć równań równowagi bryły w przestrzeni sprowadza się w danym razie do jednego równania

$$\sum Z = 0, \quad (32)$$

gdzie  $Z$  oznacza rzuty sił na kierunek osi  $Z$ -ów (kierunek prostopadły do płaszczyzny  $XOY$ ).

Równanie (32) przybiera w zastosowaniu do płyty  $BB'C'C$  (rys. 5) postać

$$R_0 + 2R_1 + 2R_2 + 2R_3 = 6P. \quad (33)$$

Po wprowadzeniu oznaczenia (19) znajdujemy

$$r_0 + 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 = 6p. \quad (XXII)$$

Aby uzyskać dwa brakujące równania potrzebne do wyznaczenia ugięć płyty, ustawiamy równania wyrażające warunki równowagi części  $ABCD$  (rys. 3) oraz  $FF'C'C$  (rys. 5) płyty-schematu  $BB'C'C$ , mianowicie warunki, że sumy momentów sił działających na te części płyty względem osi  $X$ -ów oraz względem osi  $Y$ -ów równe są zeru.

Moment sił zewnętrznych działających na bryłę  $ABCD$  względem osi  $X$ -ów równa się

$$M_x = 3Pl = 9P \Delta x. \quad (34)$$

Moment sił wewnętrznych działających w płaszczyźnie pionowej  $AD$  płyty  $ABCD$ , w założeniu, że oś  $OX$  pokrywa się z osią obojętną przekroju  $AD$ , równa się

$$M_{wx} = \int M'_x dx, \quad (35)$$

gdzie  $M'_x$  oznacza moment sił wewnętrznych przypadających na jednostkę bieżącą przekroju  $AD$ .

Moment  $M'_x$  w związku z równaniami (22) i (23) przybiera postać następującą:

$$M'_x = \int_{-h/2}^{+h/2} z \sigma_y dz = -\frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (36)$$

Przyjmujemy dalej, że naprężenia  $\sigma_y$  i momenty  $M'_x$  obliczone dla punktów  $(a, 0)$ ,  $(a, 1)$ , itd. (rys. 6) przekroju  $AD$  płyty (rys. 5) nie ulegają zmianie na przestrzeni  $\Delta x/2$  w obie strony od tych punktów. Wobec tego że na podporze wszystkie przesunięcia płyty równe są zeru [punkt  $(a, 4)$  leży już poza podporą, jednak na powierzchni wyrażającej się równaniem (1)], równanie (35) przybiera postać

$$M_{wx} = -\frac{E h^3 \Delta x}{12(1-\mu^2)} \frac{1}{\Delta x^2} (2b_0 + 4b_1 + 4b_2 + 4b_3 + 2\mu a_4). \quad (37)$$

Stąd równanie momentów sił działających na bryłę  $ABCD$  względem osi  $OX$  ( $AD$ ), czyli równanie

$$\sum M = M_x + M_w = 0 \quad (38)$$

przybiera, po wprowadzeniu oznaczenia (19), postać

$$b_0 + 2b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 0,2a_4 = 4,5p. \quad (XXIII)$$

Moment sił zewnętrznych działających na część płyty  $FF'CC'$  względem osi  $OY$  równa się

$$M_y = 2P\Delta x - R_1\Delta x - R_2 \cdot 2\Delta x - R_3 \cdot 3\Delta x. \quad (39)$$

Odpowiedni moment sił wewnętrznych wynosi

$$M_{wy} = \int M'_y dy, \quad (40)$$

gdzie

$$M'_y = -\frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (41)$$

Zastępując w dalszym ciągu w wyrażeniu (41) pochodne przez odpowiednie ilorazy różnicowe i przyjmując, podobnie jak wyżej, że na odcinkach  $\Delta x$  przekroju  $F F'$  (rys. 5) momenty  $M'_y$  zmianie nie ulegają, nadajemy równaniu (40) postać

$$M_{wy} = \frac{E h^3 \Delta x}{12(1-\mu^2)} \frac{1}{\Delta x^2} (a_1 - 2a_0 + a_1) + 2(b_1 - 2b_0 + b_1) + \quad (42)$$

$$+ 2(c_1 - 2c_0 + c_1) + 2(d_1 - 2d_0 + d_1) + \mu(b_0 - 2a_0 + b_0) +$$

$$+ 2\mu(a_0 - 2b_0 + c_0) + 2\mu(b_0 - 2c_0 + d_0) + 2\mu(c_0 - 2d_0 + e_0) =$$

$$= \frac{E h^3 \Delta x}{12(1-\mu^2)} \frac{\mu}{\Delta x^2} (-2d_0 + 2e_0).$$

Stąd równanie momentów  $\sum M = 0$ , czyli równanie

$$M_y - M_w = 0 \quad (43)$$

przybiera postać

$$-0,4 d_0 + 0,4 e_0 = 2p - r_1 - 2r_2 - 3r_3. \quad (XXIV)$$

Równania (I)-(XXIV) tworzą układ 24 równań liniowych z taką samą liczbą niewiadomych, co pozwala na wyznaczenie wszystkich reakcji płyty i pionowych przesunięć wszystkich potrzebnych do obliczenia punktów płyty. Po rozwiązaniu tego układu znajdujemy

$$\left. \begin{aligned} a_4 &= 0,59967 p, \\ b_0 = b_1 &= 0,24033 p, \quad b_2 = 0,45028 p, \quad b_3 = 1,49917 p, \quad b_4 = 2,11916 p, \\ c_0 = c_1 &= 1,36093 p, \quad c_2 = 1,78112 p, \quad c_3 = 5,14316 p, \quad c_4 = 7,83913 p, \\ d_0 = d_1 &= 3,34183 p, \quad d_2 = 3,34145 p, \quad d_3 = 12,11767 p, \quad d_4 = 20,89392 p, \\ e_0 = e_1 &= 5,32270 p, \quad e_2 = 3,14643 p, \quad e_3 = 19,09226 p, \\ r_0 &= 0,79922 p, \quad r_1 = 1,63890 p, \quad r_2 = 3,31575 p, \quad r_3 = -2,35425 p. \end{aligned} \right\} (44)$$

Wprowadzając tu oznaczenie (19) oraz przyjmując  $\Delta x = -l/3$  znajdujemy dla ugięcia płyty w środku jej krawędzi  $BC$ :

$$d_0 = \frac{Pl^3}{2,693 B}. \quad (45)$$

Do obliczenia naprężeń normalnych korzystamy ze wzorów (24) i (25). W punkcie  $(a, 0)$  mamy

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{z}{\Delta x^2} [b_0 - 2a_0 + b_0 + \mu(a_1 - 2a_0 + a_1)], \quad (46)$$

co dla  $\Delta x = l/3$  i  $z = \pm h/2$  daje

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{h}{2} \frac{1}{\Delta x^2} \cdot 2b_0 = 0,240 \frac{12P}{h^2}. \quad (47)$$

Ścisłość otrzymanych wyników zwiększa się w miarę zmniejszania się odcinków  $\Delta x$ . Dla porównania ugięcia (45) płyty z ugięciem odpowiedniej belki-pasma, obciążonej na swobodnym końcu siłą  $P$ , mnożymy w wyrażeniu dla  $d_0$  licznik i mianownik przez  $\Delta x$  oraz bierzemy pod uwagę, że  $B = [E/(1 - \mu^2)] (h^3/12)$  i  $B\Delta x = EJ/(1 - \mu^2)$ . Znajdziemy w ten sposób dla  $d_0$  wyrażenie

$$d_0 = \frac{Pl^2 \Delta x}{2,693 B \Delta x} = \frac{Pl^3}{8,079 B \Delta x} = \frac{Pl^3}{8,416 EJ}. \quad (48)$$

Ponieważ w odpowiednim wzorze na ugięcie belki-pasma mielibyśmy przy  $EJ$  współczynnik 3, więc wzór (48) podkreśla znaczenie tzw. «płytowości».

## II. ZASTOSOWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH NIELINIOWYCH

### 1. Linie i kierunki naprężeń a linie izostatyczne

Nieliniowe równania różnicowe występują w statyce budowli przede wszystkim jako przetransponowane na różnice skończone równania różniczkowe linii izostatycznych, które w znacznym stopniu charakteryzują poszczególne stany naprężeń.

Jeżeli wyobrazimy sobie ciało sprężyste o kształcie graniastosłupa lub walca, obciążone w kierunku prostopadłym do wysokości, to linią izostatyczną będziemy nazywali krzywą wykreśloną na przekroju poprzecznym graniastosłupa i posiadającą tę własność, że styczna do niej w pewnym punkcie ciała sprężystego wskazuje kierunek jednego z naprężeń głównych.

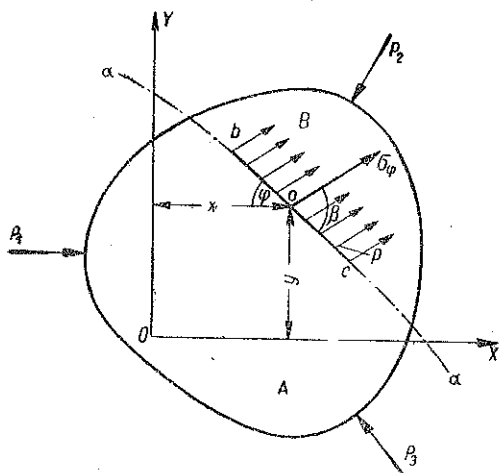
Poza ogólną charakterystyką warunków pracy poszczególnych budowli i wskazaniem w nich miejsc niebezpiecznych, linie izostatyczne są wielokrotnie pomocne przy rozmieszczaniu niektórych elementów konstrukcyjnych, np. stalowych wkładek ukośnych w belkach żelazo-betonowych, kątowników usztywniających konstrukcje w pionowych blachach belek stalowych itd. Ostatnio odgrywają one poważną rolę przy projektowaniu belek wstępnie sprężonych.

Przy wyznaczeniu linii izostatycznych bądź drogą ustawienia równań tych krzywych, bądź za pomocą obliczenia współrzędnych poszczególnych jej punktów, niezbędne jest wprowadzenie pewnego płaskiego układu

osi współrzędnych. Z drugiej strony, kierunki naprężeń głównych w pewnych punktach ciała sprężystego zależą od wielkości tych naprężeń. Z tego wynika konieczność analizy zarówno linii jednakowych naprężeń, jak i kierunków naprężeń, zwłaszcza kierunków naprężeń głównych.

Pojęcie naprężenia w danym punkcie  $o$  ciała sprężystego sprecyzujemy tu w sposób następujący.

Bierzemy pod uwagę walec sprężysty o przekroju dowolnym (rys. 7) i o wysokości 1. Niech walec ten będzie przecięty powierzchnią cylindryczną  $aa$  przechodzącą przez punkt  $o$ . Oddziaływanie odrzuconej części  $B$  walca na część jego  $A$  oddzieloną od tamtej powierzchnią  $aa$  może być zastąpione przez układ sił rozłożonych w sposób ciągły na tej powierzchni, których wypadkową oznaczmy przez  $p$ .



Rys. 7.

Przyjmujemy pewien układ współrzędnych  $X O Y$  i zakładamy, że

$$p = f(x, y). \quad (49)$$

W odległości nieskończenie małej od punktu  $o$ , na przestrzeni odcinka  $b c$ , zwanego elementem izostatycznym, uważamy powierzchnię cylindryczną za płaszczyznę nachyloną do osi  $O X$  pod kątem  $\varphi$ , a siły  $p$  za stałe i nachylone do  $b c$  pod stałym kątem  $\beta$ .

Naprężeniem w punkcie  $o$  będziemy w tym wypadku nazywali pochodną

$$\sigma_{\varphi} = \frac{d p}{d A}, \quad (50)$$

gdzie  $A$  oznacza pole przekroju.

Ponieważ siły ciągle o natężeniu  $p$  możemy rozłożyć na kierunek prostopadły do powierzchni  $b c$  i do niej styczny, więc i naprężenie  $\sigma_{\varphi}$  w punkcie  $o$  działające na płaszczyznę  $b c$  możemy rozłożyć na naprężenie normalne  $\sigma$  i styczne  $\tau$ .

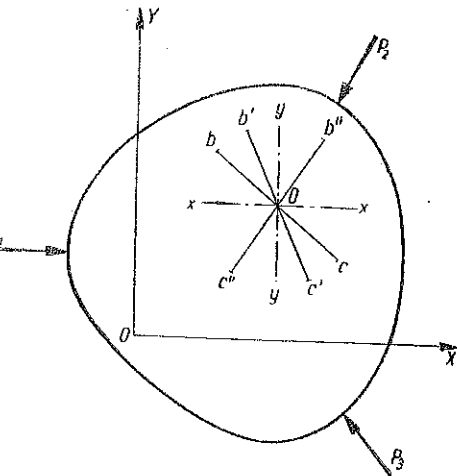
Aby można było porównywać ze sobą naprężenia  $\sigma$  i  $\tau$  odpowiadające różnym elementom izostatycznym, przechodzącym przez punkt  $o$ , ustala się zależność między naprężeniami działającymi na element  $b c$ , nachylony względem osi  $O X$  pod dowolnym kątem  $\varphi$ , a naprężeniami działającymi

na elementy  $xx$  oraz  $yy$  odpowiednio równoległe do osi  $O X$  i  $O Y$  (rys. 8). Zależność tę otrzymujemy z warunków równowagi graniastosłupa wyciętego z omawianego walca i posiadającego podstawę w kształcie trójkąta  $abc$  o wymiarach nieskończenie małych (rys. 9). Ponieważ odległość płaszczyzny  $bc$  od punktu  $a$  jest wielkością nieskończenie małą, naprężenia w tej płaszczyźnie oraz naprężenia w płaszczyźnie do niej równoległej, przechodzącej przez punkt  $a$ , różnią się od siebie o wielkości nieskończenie małe i muszą być wobec tego uważane za równe.

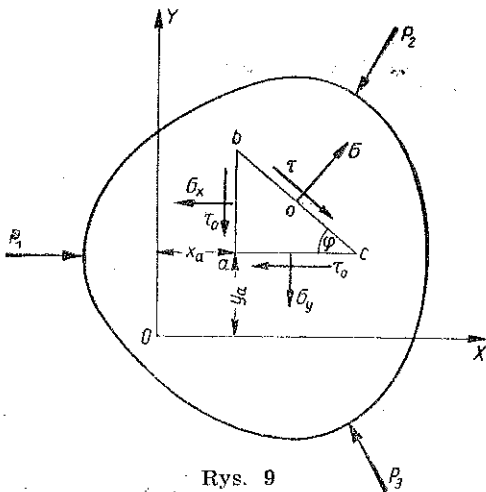
Przy kierunkach naprężeń przyjętych na rys. 9 i przy przyjętym tam sposobie odmierzania kątów  $\varphi$  zależność między naprężeniami  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  wyraża się za pomocą równań

$$\sigma = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi + 2 \tau_0 \sin \varphi \cos \varphi, \quad (51)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi + \tau_0 \sin 2\varphi, \quad (52)$$



Rys. 8



Rys. 9

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_0 \cos 2\varphi. \quad (53)$$

Największą wartość  $\sigma_1$  otrzyma naprężenie  $\sigma$  (naprężenie główne pierwszego rodzaju) w tzw. przekroju głównym, tj. wówczas gdy płaszczyzna  $bc$  nachylona będzie względem osi  $O X$  pod kątem  $\varphi = \varphi_1$  odpowiadającym równaniu

$$\operatorname{tg} 2\varphi_n = \frac{2\tau_0}{\sigma_y - \sigma_x} \quad (54)$$

lub też równaniu

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_0}\right)^2 + 1}. \quad (55)$$

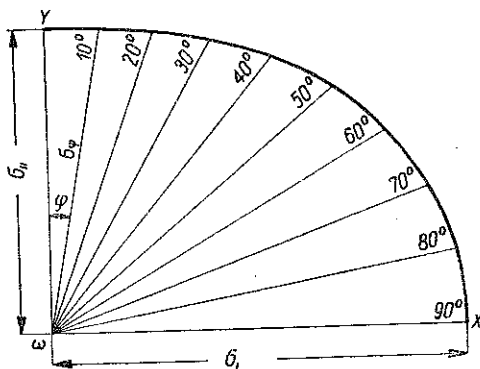
Drugi z kątów  $\varphi$  odpowiadający równaniom (54) lub (55) dotyczy nachylenia  $\varphi = \varphi_2$  elementu izostatycznego, w którym naprężenie  $\sigma$  (naprężenie główne drugiego rodzaju) osiąga wartość najmniejszą  $\sigma_{II}$ .

Przy danym sposobie znakowania dla wielkości naprężeń głównych otrzymujemy więc wzór

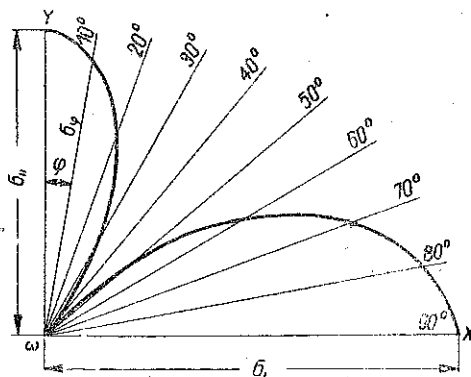
$$\text{extr } \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_0^2}. \quad (56)$$

Wyrażenie (53) daje przy  $\varphi = \varphi_1$  oraz przy  $\varphi = \varphi_2$  wartość  $\tau = 0$ .

Przy badaniu stanu naprężeń stosujemy wykresy naprężeń typu biegunowego i elipsę naprężeń.



Rys. 10



Rys. 11

Wykres biegunowy wyraża wzór (51) i ma kształt przedstawiony na rys. 10 i 11. Tu pewien wektor  $\sigma_\varphi$  przedstawia naprężenie normalne działające na element izostatyczny nachylony względem jednego z naprężeń głównych (oś  $O X$ ) o kąt  $\varphi$ ; naprężenia  $\sigma_I$  i  $\sigma_{II}$  odpowiadają naprężeniom głównym. Zaletą tego wykresu jest znaczna przejrzystość przy przedstawieniu naprężeń jako funkcji kąta  $\varphi$ .

Elipsa naprężeń (rys. 12) jest odniesiona do osi współrzędnych pokrywających się z kierunkami naprężeń głównych. Równanie jej będące przekształceniem równania (51) posiada postać

$$\frac{x^2}{\sigma_I^2} + \frac{y^2}{\sigma_{II}^2} = 1. \quad (57)$$

Tu  $x$  i  $y$  oznaczają współrzędne końca odcinka  $a B$  (rys. 12) wyrażającego naprężenia wypadkowe  $\sigma_\varphi$  naprężeń  $\sigma$  i  $\tau$ , działających w punkcie  $o$  na pewien przekrój,

czyli element izostatyczny przeprowadzony przez ten punkt, a  $\sigma_I$  i  $\sigma_{II}$  wielkości naprężeń głównych równoległych do osi współrzędnych  $O Y$  i  $O X$ .

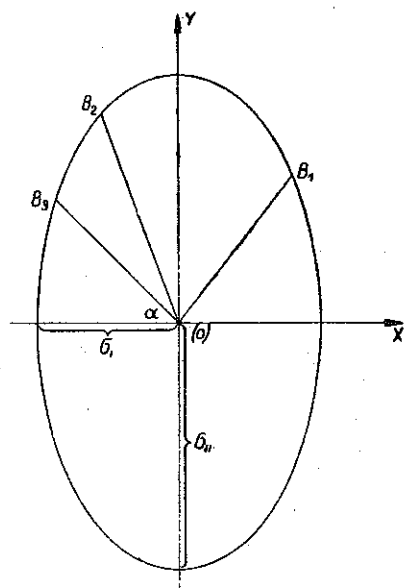
Omawiany przekrój może być uważany za identyczny z elementem  $b c$  według oznaczeń na rys. 9.

Budujemy w dalszym ciągu w tym samym co wyżej układzie współrzędnych elipsę odpowiadającą równaniu (rys. 13)

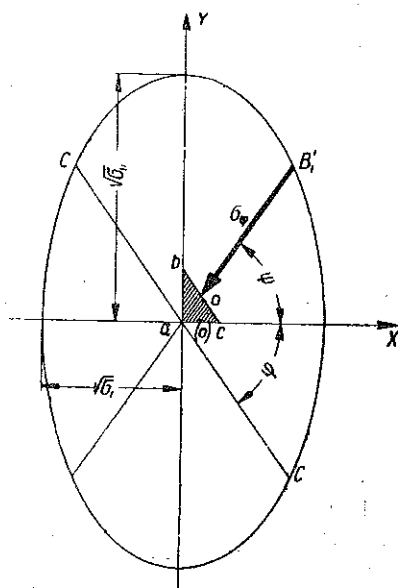
$$\frac{x^2}{\sigma_I} + \frac{y^2}{\sigma_{II}} = 1 \quad (58)$$

i zauważamy, iż kierunki  $a B'_1$  i  $a C$  nachylone tu względem osi  $a X$  pod kątami  $\psi$  i  $\varphi$  będą dla tej elipsy kierunkami sprzężonymi, o ile zostanie spełniony warunek

$$\tan \varphi \tan \psi = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_I} \quad (59)$$



Rys. 12



Rys. 13

Z budowy elipsy (57) wynika, że tangens kąta nachylenia prostej  $B_1$  względem osi  $a X$  równa się

$$\tan \psi = \frac{y}{x}, \quad (60)$$

czyli że

$$\tan \psi = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_I} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (61)$$



Z równania mamy

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_I}, \quad (62)$$

czyli że kierunek  $a B_1$  naprężenia wypadkowego w punkcie  $a$  i kierunek elementu izostatycznego, na którym to naprężenie występuje, są istotnie kierunkami sprzężonymi elipsy (58).

Gdy chcemy na podstawie elipsy naprężeń dowiedzieć się, jakie naprężenie działa na element izostatyczny nachylony względem osi  $a X$  pod kątem  $\varphi$ , wówczas przeprowadzamy średnicę  $a C$  elipsy (58) nachyloną względem osi  $a X$  pod wymienionym kątem i znajdujemy kierunek  $a B_1$  sprzężony z kierunkiem  $a C$ . Średnica  $a B_1$  elipsy (57) przeprowadzona równoległe do prostej  $a B_1$  da wielkość poszukiwanego naprężenia. Gdy obie elipsy wykonane są na jednym rysunku, konstrukcja geometryczna ulega uproszczeniu.

Dotąd liczyliśmy się, zgodnie z rys. 9, jedynie z naprężeniami rozciągającymi  $\sigma_I$  i  $\sigma_{II}$ . Gdyby oba te naprężenia były ściskające, sposób odczytywania z elipsy (57) wielkości naprężeń wypadkowych  $\sigma_\varphi$  nie uległby zmianie. Gdybyśmy natomiast mieli do czynienia z naprężeniami  $\sigma_I$  i  $\sigma_{II}$  różniącymi się co do znaków, wówczas elipsa (58) musiałaby być zastąpiona przez hiperbolę (rys. 14 lub 15) odpowiadającą równaniu

$$\frac{x^2}{\sigma_I} - \frac{y^2}{\sigma_{II}} = 1. \quad (62)$$

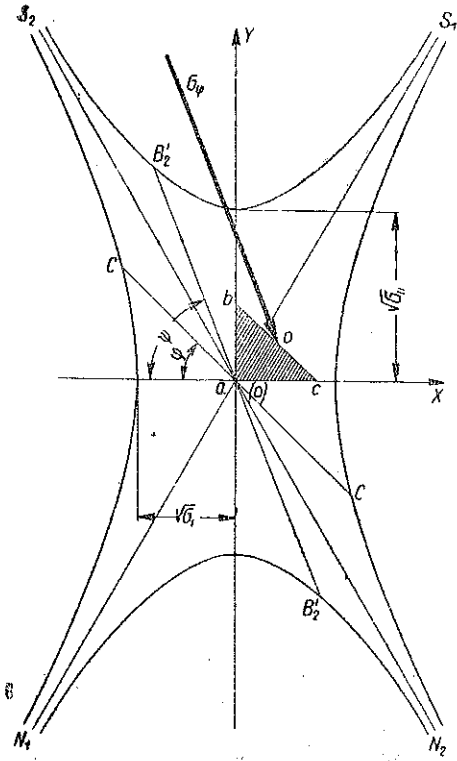
Poza tym sposób odczytywania naprężeń pozostaje tu ten sam co wyżej. Elipsa (58) i hiperbola (62) noszą nazwę *krzywych kierunków*. Przy wykreślaniu kierunków sprzężonych jest w danym razie najwłaściwsze skorzystanie z warunku, że każda ze średnic sprzężonych elipsy lub hiperboli jest równoległa do stycznej przeprowadzonej przez punkt przecięcia z krzywą średnicy sprzężonej.

O ile naprężenia  $\sigma_I$  i  $\sigma_{II}$  są tego samego znaku, to i naprężenie  $\sigma_\varphi$  będzie tegoż znaku. Wynika stąd, że w tym wypadku kierunek naprężenia ( $a B_1$  na rys. 13) i kierunek odpowiedniego elementu izostatycznego ( $a C$ ) tworzą jako średnice sprzężone elipsy zawsze kąt rozwarty.

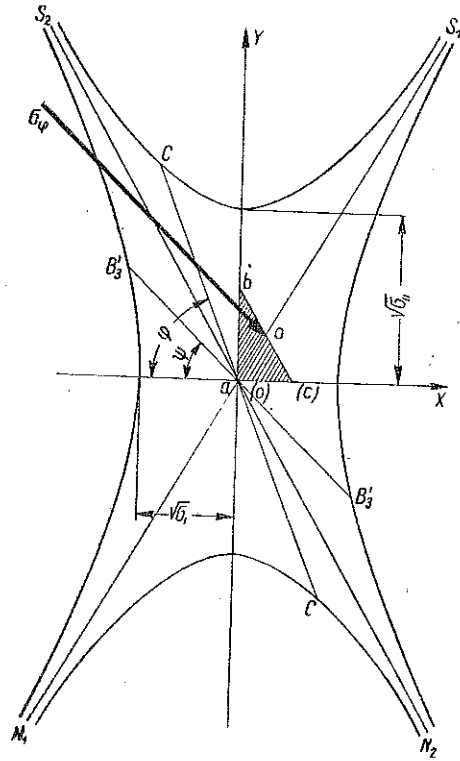
Naprężenia  $\sigma_\varphi$  wyrażone przez długości promieni wykresu biegunowego odniesionego do jednego z kierunków głównych układają się w danym wypadku według rys. 10.

Kąty zawarte między sprzężonymi średnicami hiperboli są kątami ostrymi, przy tym, o ile kierunek elementu izostatycznego  $a C$  znajduje

się w jednym z kątów utworzonych przez asymptoty  $N_1 S_1$  i  $N_2 S_2$  (rys. 14 i 15), to kierunek naprężenia wypadkowego  $a B'$  będzie znajdował się w drugim sąsiednim kącie.



Rys. 14



Rys. 15

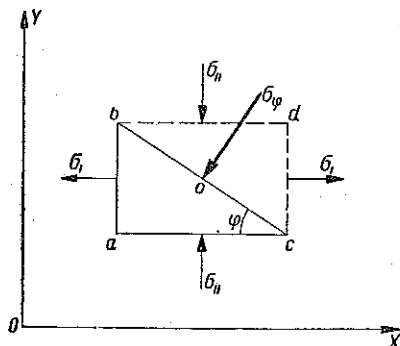
Przypuśćmy, iż naprężenie główne  $\sigma_{II}$  jest naprężeniem ściskającym (rys. 16), naprężenie zaś główne  $\sigma_I$  naprężeniem rozciągającym. Wówczas przy  $\varphi = 0$ , gdy element izostatyczny  $b c$  pokryje się z elementem  $a c$ , będziemy mieli  $\sigma_\varphi = \sigma_{II}$ .

Jeżeli kierunek naprężenia wypadkowego  $\sigma_\varphi$  odchyli się od kierunku  $a Y$  i zajmie w kącie  $S_2 a S_1$  położenie  $a B'_2$  (rys. 14), wówczas odpowiedni element izostatyczny pokryje się z kierunkiem sprzężonym  $a C$ , przechodzącym przez kąt  $S_2 a N_1$  i identycznym lub równoległym do  $b c$ . W tych warunkach element  $b c$  lub przekrój  $a C$  w punkcie  $a$  będzie ściskany.

Gdy kierunek  $a B'$  naprężenia wypadkowego  $\sigma_\varphi$  pokryje się z kierunkiem  $S_2 N_2$  asymptoty, wówczas pokryje się z nim i kierunek  $a C$  odp-

wiedniego elementu izostaticznego. Naprężenie  $\sigma_\varphi$  będzie w tym przypadku naprężeniem stycznym  $\tau$ .

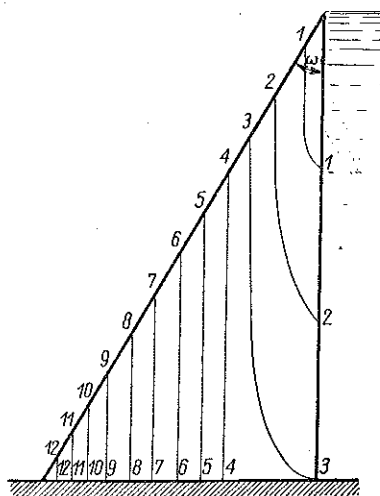
Skoro kierunek  $aB'$  naprężenia wypadkowego  $\sigma_\varphi$  przejdzie przez kąt  $S_2$  a  $N_1$  (rys. 15), wówczas kierunek odpowiedniego elementu izostaticznego  $a-C$  (lub  $b-c$ ) znajdzie się w kącie  $S_1$  a  $S_2$ . Naprężenie  $\sigma_\varphi$  występujące w płaszczyźnie  $bc$  będzie dążyło do oddalenia tej płaszczyzny od punktu  $a$ , będzie więc naprężeniem rozciągającym.



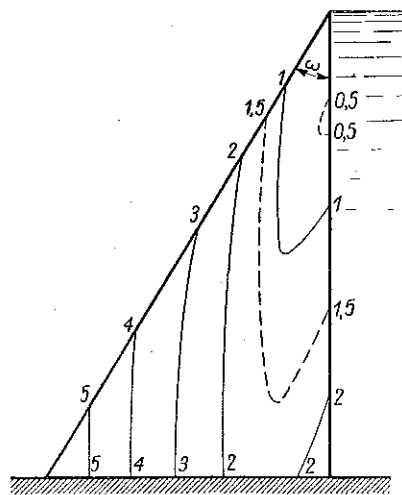
Rys. 16

Z powyższego wynika, że naprężenia  $\sigma_\varphi$  odpowiadające kierunkom zawartym w kątach  $S_1$  a  $S_2$  i  $N_1$  a  $N_2$  będą naprężeniami ściskającymi, a naprężenia odpowiadające kierunkom zawartym w kątach  $N_1$  a  $S_2$  i  $N_2$  a  $S_1$  będą naprężeniami rozciągającymi. Rzecz będzie się miała odwrotnie, gdy naprężenie główne  $\sigma_{II}$  będzie ściskającym, a naprężenie główne  $\sigma_I$  rozciągającym.

Wykres biegunowy odpowiadający wykresowi na rys. 10 przybiera tu postać przedstawioną na rys. 11.



Rys. 17



Rys. 18

Przy badaniu warunków pracy konstrukcji nieprętowych (pełnych) interesują nas nie tylko wykresy naprężeń w danym punkcie układu sprężystego, ale również krzywe charakteryzujące rozkład naprężeń w całej

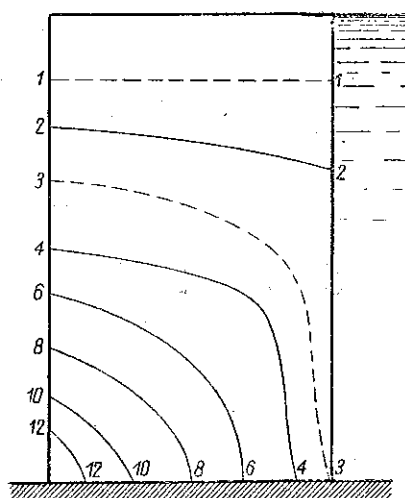
konstrukcji. W ten sposób dochodzimy do pojęcia linii równych naprężeń głównych, których budowa oparta jest na równaniu

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_0^2} = \sigma_r, \quad (63)$$

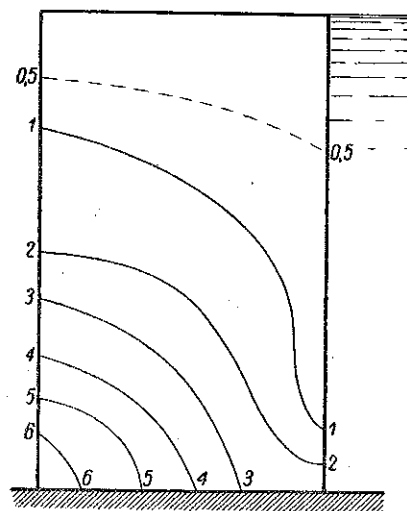
gdzie  $\sigma_r$  wyraża wartość naprężenia głównego we wszystkich punktach leżących na krzywej (63). Mając na uwadze, że naprężenie główne stanowi pewną funkcję współrzędnych  $x, y$ , możemy dla poszczególnych wartości  $\sigma_r$  znaleźć szereg punktów czyniących zadość równaniu (63) i wykreślić na tej podstawie linię równych naprężeń głównych  $\sigma_{max}$  lub  $\sigma_{min}$ . W podobny sposób postępując z równaniem

$$\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_0^2} = \tau, \quad (64)$$

znajdziemy linie równych naprężeń  $\tau_{max}$  lub  $\tau_{min}$  dla największych lub najmniejszych naprężeń stycznych.



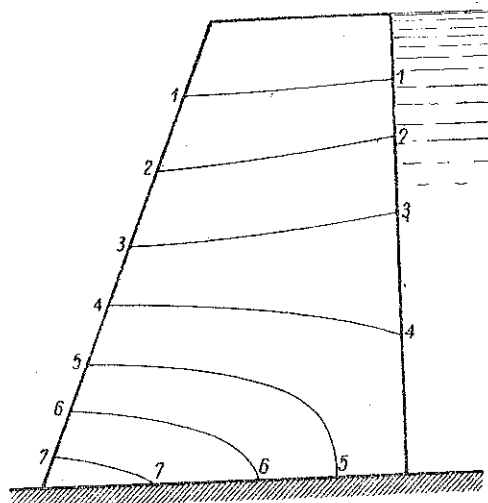
Rys. 19



Rys. 20

Na rysunkach 17 i 18 podane są dla przykładu, wykonane przedstawionym sposobem, linie równych naprężeń  $\sigma_{max}$  i  $\tau_{max}$  dla zapór, a więc konstrukcji pełnych, w których naprężenia  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  są wielkościami tego samego rzędu. Rysunki 17 i 18 dotyczą zapory w przekroju poprzecznym trójkątnej, o wysokości  $h = 30$  m, o kącie  $\varphi = 30^\circ$  i ciężarze jednostkowym muru  $\gamma = 2,4$  t/m<sup>3</sup>. Wartości naprężeń wyrażone w kg/cm<sup>2</sup> wypisane zostały na rysunkach na obwodzie przekroju poprzecznego zapo-

ry. Na rysunkach 19 i 20 przedstawione są linie równych naprężeń dla zapory o przekroju prostokątnym i o wymiarach poprzecznych 18 m na 30 m. W szczególności na rys. 19 podane są linie równych naprężeń  $\sigma_{max}$ , a na



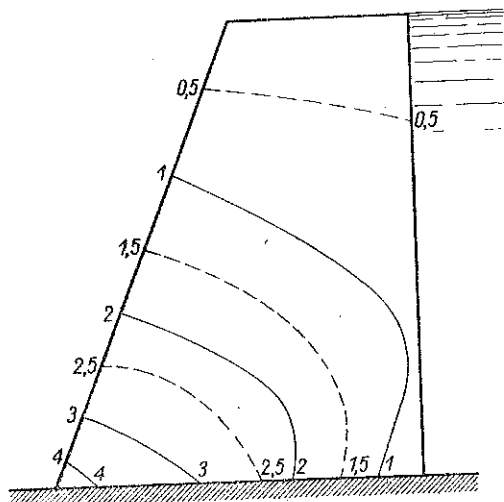
Rys. 2

rys. 20 linie równych naprężeń  $\tau_{max}$ . Wreszcie na rys. 21 i 22 podane są linie równych naprężeń dla zapory o przekroju poprzecznym w kształcie trapezu o podstawach równych 12 m i 24 m i o wysokości 30 m. Linie przedstawione na rys. 21 dotyczą naprężeń  $\sigma_{max}$ , a przedstawione na rys. 22 naprężeń  $\tau_{max}$ .

Przy wyznaczaniu położenia przekrojów głównych w danym punkcie, a więc tym samym osi elipsy naprężeń, natrafiamy nieraz na pytanie, które z dwu rozwiązań równania (54) odpowiada któremu z naprężeń

głównych. Aby kwestię tę rozstrzygnąć, wstawiamy oba rozwiązania  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  równania (54) w równanie (51) lub (52); przy tym wartość  $\sigma$  odpowiadająca kątowi  $\varphi_1$  musi być odłożona prostopadłe do przekroju nachylonego względem osi  $O X$  na rys. 9 pod kątem  $\varphi_1$ , a wartość  $\sigma$  odpowiadająca kątowi  $\varphi_2$  prostopadłe do przekroju nachylonego względem tej osi pod kątem  $\varphi_2$ .

Inne kryterium ustalenia kierunków naprężeń głównych możemy uzyskać z warunków równowagi graniastosłupa w rodzaju graniastosłupa  $abc$  na rys. 9 w przypadku, gdy naprężenie  $\sigma$  jest jednym z naprężeń głównych  $\sigma_I$  lub  $\sigma_{II}$ . Rzutując na oś  $O Y$  siły działające w tym wypadku na graniastosłup  $abc$  otrzymujemy równanie



Rys. 22

$$-\tau_0 dA \sin \varphi + \sigma dA \cos \varphi - \sigma_y dA \cos \varphi = 0, \quad (65)$$

gdzie  $dA$  przedstawia pole ściany  $b c$ . Znajdujemy stąd

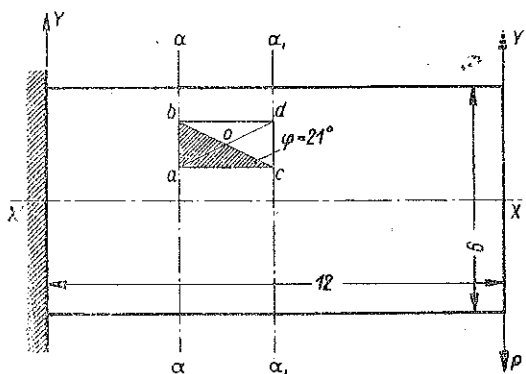
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma - \sigma_y}{\tau_0} \quad (66)$$

W belkach, gdy możemy przyjąć, że  $\sigma_y = 0$ , otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma}{\tau_0} \quad (67)$$

W tym więc przypadku kąt ostry  $\varphi = \varphi_1$  związany równaniem (66) lub (67) z naprężeniem głównym  $\sigma = \sigma_1$  jest kątem nachylenia względem osi  $X$ -ów przekroju głównego poddanego temu właśnie naprężeniu. W ten sam sposób kątowi ostremu  $\varphi_2 = \varphi_2$  odpowiada naprężenie główne  $\sigma = \sigma_{II}$

Należy zauważyć, że wprowadzie przy ustalaniu wzorów (54) i (55) przeznaczonych do wyznaczenia położenia przekrojów głównych liczyliśmy się ze schematem statycznym przyjętym na rys. 9, jednak przy korzystaniu z tych wzorów jest rzeczą obojętną, jakie położenie graniastosłupa  $abc$  względem osi współrzędnych będziemy mieli na uwadze, byleby znaki naprężeń, osi współrzędnych i kąty  $\varphi$  były uzgodnione ze schematem zasadniczym. Łatwo przekonać się np., że dla punktu  $a$  ( $x = 7$ ,  $y = 1,5$ ) otrzymamy tu nachylenie przekroju głównego  $\varphi = 21^\circ$  niezależnie ani od przyjętego układu współrzędnych, ani od przyjętego przekroju poprzecznego ( $aa$  lub  $a_1a_1$ ), ani też od przyjętego położenia elementarnego graniastosłupa (rys. 23).



Rys. 23

Rozważania nad kierunkami naprężeń głównych doprowadzają do ustawienia równania różniczkowego linii izostatycznych.

Istotnie, ponieważ w pewnym punkcie ciała pryzmatycznego oba naprężenia główne  $\sigma_I$  i  $\sigma_{II}$ , jak również oba odpowiadające im przekroje główne, są do siebie prostopadłe, więc kąt  $\varphi$  określający według równania (66) lub (67) położenie elementu izostatycznego, odpowiadającego jednemu z naprężeń głównych — przypuśćmy naprężeniu  $\sigma_I$  — tym samym określa kierunek drugiego naprężenia głównego  $\sigma_{II}$ , a więc i kierunek styczney w danym punkcie do krzywej izostatycznej dla tego naprężenia.

Wyobraźmy sobie, że krzywe izostatyczne, odniesione do pewnego układu osi współrzędnych  $O X$  i  $O Y$ , związanych z przyrządem sprężystym, wyrażają się za pomocą równania

$$y = F(x), \quad (68)$$

przy czym

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (69)$$

gdzie  $\varphi$  jest to kąt nachylenia względem osi  $O X$  stycznej do linii izostatycznej w danym punkcie. Wobec znakowania kątów przyjętego na rys. 9 równanie (69) przybiera postać

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} \varphi. \quad (70)$$

Po uwzględnieniu wyrażenia (55) dochodzimy do równania

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2 \tau_0} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2 \tau_0}\right)^2 + 1}, \quad (71)$$

które jest równaniem różniczkowym linii izostatycznej.

## 2. Całkowanie równania linii izostatycznej

Całkowanie równania linii izostatycznej (71) tylko w rzadkich wypadkach może być wykonane ściśle. Musimy tu się na ogół uciekać do metod numerycznych lub wykreślnych.

Równanie linii izostatycznej (równanie 68) może być rozpatrywane jako całka równania (71). Całka ta może być ściśle otrzymana tylko w przypadkach zupełnie wyjątkowych i drogą obliczeń dość żmudnych.

Proponuje się tu wyznaczenie krzywej izostatycznej drogą przybliżonego całkowania równania (71).

Przy numerycznym wyznaczaniu linii izostatycznych korzystamy z metody Rungego. Metoda ta znajduje punkt wyjścia w propozycji Eulera polegającej na tym, aby krzywą wyrażającą całkę danego równania różniczkowego budować na podstawie współrzędnych jej poszczególnych punktów, wyznaczonych w sposób przybliżony, a więc przez zastąpienie różniczek przez różnice skończone.

Na tle sposobu obliczenia poszczególnych współrzędnych krzywej (68) zaleconego przez Eulera powstało kilka różnych sposobów takiego obliczenia, z których najściślej jest właśnie sposób Rungego.

Podamy tu kryterium, na mocy którego poszczególne sposoby obliczenia współrzędnych równania (68) mogą być ze sobą porównywane,

w szczególności gdy chodzi o nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu, a więc i o równanie różniczkowe linii izostaticznej (71).

Przypuśćmy, że krzywa  $AB$  na rys. 24 przedstawia wykres poszukiwanej funkcji (68). Na podstawie warunków zadania ustalamy pewien punkt początkowy  $A_0(x_0, y_0)$ , przez który krzywa  $AB$  przejść powinna. Nadając odciętej  $x_0$  dowolny mały przyrost skończony  $\Delta x$  obliczamy przyrost  $\Delta y$  odpowiadający nowemu punktowi krzywej  $AB$ , a więc punktowi  $A_1$  o współrzędnych

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad y_1 = y_0 + \Delta y. \quad (72)$$

W podobny sposób przechodzimy od punktu  $A_1$  do punktu  $A_2$  ( $x_2, y_2$ ) itd.

Tą drogą otrzymujemy szereg punktów krzywej (68), które połączone ze sobą odcinkami prostych dają nam linię łamaną, zastępującą z potrzebną dokładnością poszukiwaną krzywą.

Równanie różniczkowe (71), o które tu chodzi, posiada ogólną postać

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (73)$$

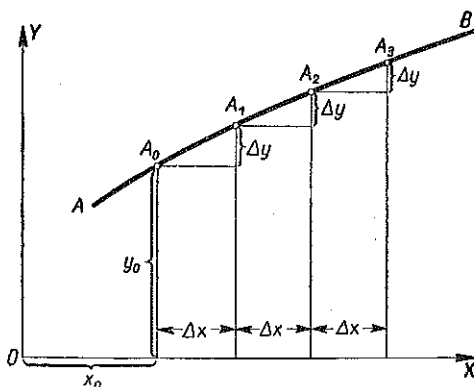
Stąd przyrost  $\Delta y$  może być obliczony za pomocą szeregu Taylora dla dwóch zmiennych niezależnych w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \Delta y = f(x, y) \Delta x + (f_1 + f_2 f) \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \\ + [f_{11} + 2f_{12} f + f_{22} f^2 + f_2(f_1 + f_2 f)] \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned} \quad (74)$$

gdzie

$$f_1 = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad f_{22} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \quad f_{12} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}.$$



Rys. 24



Euler stosował dla  $\Delta y$  wyrażenie

$$\Delta y = f(x, y) \Delta x, \quad (75)$$

skąd wynika, że tylko jeden wyraz przybliżenia Eulera pokrywa się z rozwinięciem (74).

Dla uzyskania większej dokładności obliczamy wyrażenia

$$\Delta_1 y = f(x, y) \Delta x, \quad (76)$$

$$\Delta_2 y = f(x + \Delta x, y + \Delta_1 y) \Delta x, \quad (77)$$

$$\Delta_3 y = f(x + \Delta x, y + \Delta_2 y) \Delta x, \quad (78)$$

$$\Delta y = \frac{\Delta_1 y + \Delta_3 y}{2} = N_S. \quad (79)$$

Po rozwinięciu wyrażeń (77) i (78) według szeregu Taylora znajdziemy, iż wyrażenie (79) różni się od ścisłego wyrażenia (74) dla  $\Delta y$  dopiero w wyrazie trzecim zawierającym  $\Delta x^3$  i następnych.

Runge proponuje dla przyrostu  $x$  wyrażenie

$$\Delta y = N_T + \frac{1}{3}(N_S - N_T), \quad (80)$$

w którym  $N_S$  oblicza się według wzoru (79),  $N_T$  zaś jako pierwsze przybliżenie dla przyrostu  $\Delta y$  nie według wzoru (76), lecz według wyrażenia

$$N_T = f\left(x + \frac{1}{2} \Delta x, y + \frac{1}{2} \Delta_1 y\right) \Delta x. \quad (81)$$

Po rozwinięciu w szereg wielkości wchodzących w skład wyrażenia (80) znajdziemy, że wyrażenie to różni się od ścisłej wartości  $\Delta y$  dopiero w wyrazach zawierających  $\Delta x$  w potęgze trzeciej i wyższych.

Sposób Rungego został sprawdzony drogą przybliżonego całkowania pewnych równań, posiadających rozwiązania ściśle. W przypadku przybliżonego obliczenia rozwiązania równania linii izostatycznej (71) najlepszym sposobem określenia ścisłości otrzymanego rozwiązania jest porównanie ze sobą kolejnych przybliżeń otrzymanych ze wzorów (79) i (80). Łatwo przekonać się, iż drogą zmniejszania wielkości odcinka  $\Delta x$  różnicę tę możemy uczynić dowolnie małą.

Sposób wyznaczenia linii izostatycznych drogą całkowania zobrazujemy tu na przykładzie belki utwierdzonej w jednym końcu oraz zapory trójkątnej znajdującej się pod działaniem parcia wody.

Bierzemy pod uwagę belkę przedstawioną na rys. 25, a więc belkę w jednym końcu utwierdzoną, a na drugim obciążoną siłą  $P$ , i przyjmuje-

my za początek współrzędnych środek ciężkości końcowego przekroju  $BB'$  danej belki. Aby wyznaczyć w przyjętym układzie współrzędnych linię izostatyczną, robimy tu przekrój  $aa$  i bierzemy omówiony wyżej (rys. 9) nieskończenie mały graniastosłup  $abc$ .

Przystępujemy do ustawienia równania różniczkowego (71) linii izostatycznej w danym przypadku szczególnym, a więc dla belki o rozpiętości  $l = 12$  i wysokości  $h = 6$ . Wobec tego, że obliczenie prowadzimy według ogólnie rozpowszechnionej w praktyce uproszczonej teorii zginania, przyjmujemy więc, że dla belki  $\sigma_y = 0$ .

Niech będą  $x, y$  współrzędnymi pewnego punktu  $a$ , leżącego w przekroju  $aa$  (rys. 25) lub też nieskończenie do niego zbliżonego punktu  $o$ . W tych warunkach naprężenie  $\sigma_x$  w wymienionym punkcie wyrazi się wzorem

$$\sigma_x = \frac{M y}{J}, \quad (82)$$

gdzie  $M$  oznacza moment zginający w przekroju  $aa$ , a  $J$  moment bezwładności tego przekroju.

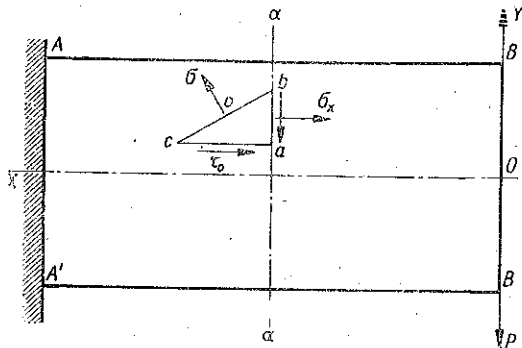
Ponieważ równanie (71) oparte jest na schemacie statycznym przyjętym na rys. 9, uważamy tu naprężenie  $\sigma_x$  za dodatnie, gdy jest ono naprężeniem rozciągającym. Moment  $M = P x$  nie ulega zmianie znaku na całej długości belki, będziemy więc go stale uważali za dodatni. Stąd otrzymamy dla naprężenia  $\sigma_x$  wyrażenie

$$\sigma_x = \frac{P x y}{J}. \quad (83)$$

Dla naprężenia stycznego  $\tau_0$  otrzymujemy odpowiednio wzór

$$\tau_0 = \frac{P}{2J} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad (84)$$

gdzie znak dodatni przed prawą częścią równania tłumaczy się zgodnością kierunku naprężenia  $\tau_0$  w danym przypadku ze schematem przyjętym na rys. 9.



Rys. 25

Nadajemy wreszcie równaniu (71) postać następującą:

$$\frac{dy}{dx} = - \left[ \frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2} \pm \sqrt{\left( \frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2} \right)^2 + 1} \right] \quad (85)$$

W myśl uwag wypowiedzianych na wstępie tego rozdziału i w myśl równania (67) znak + odpowiada tu równaniu różniczkowemu linii izostatycznej dla większego z naprężeń głównych, znak zaś — dla mniejszego z nich.

Przy znakowaniu przyjętym na rys. 9 w wyrażeniu (56) znak + odpowiada naprężeniu rozciągającemu, a znak — ściskającemu. Wobec przyjętego sposobu obliczania kątów  $\varphi$  musieliśmy, wstawiając w równanie (70) zamiast  $\operatorname{tg} \varphi$  wartość jego ze wzoru (55), znak w prawej części tego wyrażenia zmienić na odwrotny. Stąd wynika, iż linia izostatyczna dla naprężenia rozciągającego będzie miała w danym razie następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2} + \sqrt{\left( \frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2} \right)^2 + 1} \quad (86)$$

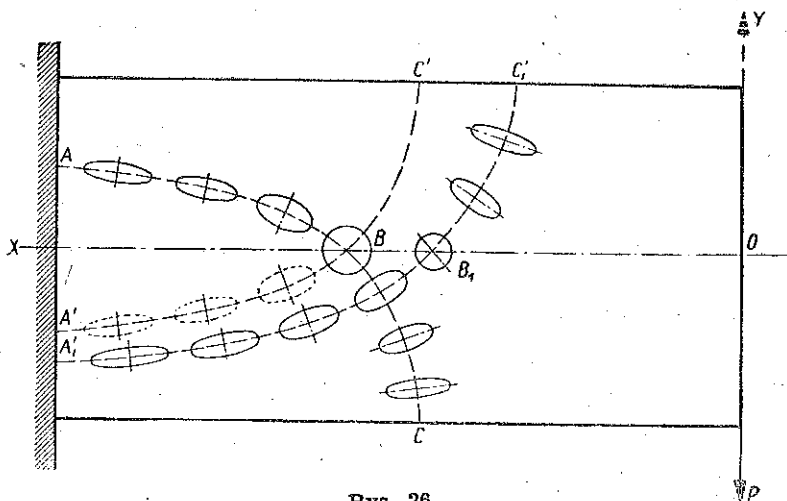
Przy  $y$  ujemnym pierwszy wyraz prawej części równania (85) staje się dodatnim. Wówczas znak + przy pierwiastku odpowiadać będzie linii izostatycznej mniejszego z naprężeń głównych ( $\sigma_{II}$ ), w danym razie dodatniego, czyli rozciągającego, znak zaś — odpowiadać będzie linii izostatycznej większego z naprężeń głównych ( $\sigma_I$ ), w danym razie ściskającego.

Jeżeli chodzi o to, aby dana linia izostatyczna wskazywała na całej swej długości kierunek głównych naprężeń rozciągających, wówczas dla części belki poniżej osi  $O X$  odpowiednikiem równania (86) będzie równanie następujące:

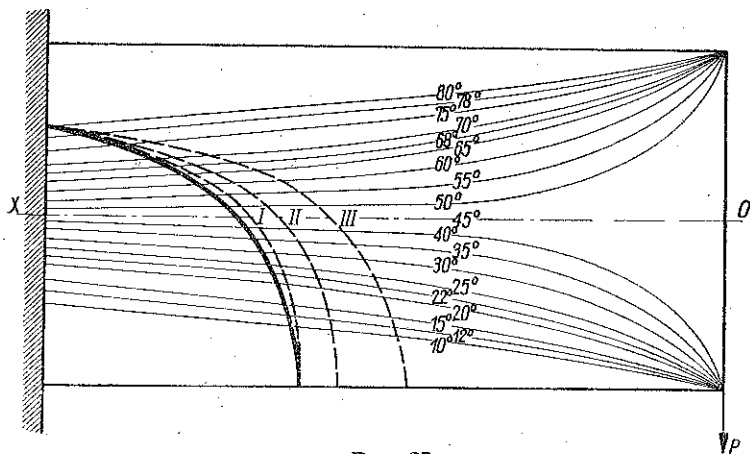
$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2} + \sqrt{\left( \frac{xy}{\frac{h^2}{4} - y^2} \right)^2 + 1} \quad (87)$$

Z zestawienia równań (86) i (87) wynika, że o ile linia izostatyczna odpowiadająca tym równaniom ma kształt przedstawiony na rys. 26 za pomocą krzywej  $ABC$ , to część jej  $AB$  odpowiada równaniu (86), część zaś  $BC$  równaniu (87).

Styczne do linii  $ABC$  wskazują kierunek naprężeń głównych rozciągających. Gdybyśmy chcieli mieć linię izostatyczną dla naprężeń głównych pierwszego rodzaju ( $\sigma_1$ ), niezależnie od znaku, wówczas zamiast gałęzi  $BC$  otrzymalibyśmy tu gałąź  $A'B$ , a krzywa  $ABA'$  byłaby linią poszukiwaną. Gałąź  $AB$  wskazywałaby wówczas kierunki naprężeń głównych ujemnych.



Rys. 26



Rys. 27

Dla przykładu wyznaczmy tu linię izostatyczną przechodzącą na rys. 27 przez punkt przekroju utwierdzenia o współrzędnych  $x_0 = 12$  i  $y_0 = 1,5$  i dla  $\Delta x = -2$ . A więc mamy

$$f(x_0, y_0) = -\frac{12 \cdot 1,5}{3^2 - 1,5^2} + \sqrt{\frac{12 \cdot 1,5}{3^2 - 1,5^2} + 1} = 0,178,$$

$$\Delta_1 y = -2 \cdot 0,178 = -0,356,$$

$$f(x_0 + \Delta x, y + \Delta_1 y) = -\frac{10 \cdot 1,144}{9 - 1,309} + \sqrt{1,488^2 + 1} = 0,304,$$

$$\Delta_2 y = -2 \cdot 0,304 = 0,608,$$

$$f(x_0 + \Delta x, y + \Delta_2 y) = -\frac{10 \cdot 0,892}{9 - 0,795} + \sqrt{1,087^2 + 1} = 0,400,$$

$$\Delta_3 y = -2 \cdot 0,400 = -0,800,$$

$$N_S = \frac{\Delta_1 y + \Delta_2 y}{2} = \frac{-0,356 - 0,800}{2} = -0,578,$$

$$f(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x, y_0 + \frac{1}{2} \Delta y) = -\frac{11 \cdot 1,322}{9 - 1,748} + \sqrt{2,005^2 + 1} = 0,236,$$

$$N_T = -2 \cdot 0,236 = -0,472,$$

$$\Delta y = N_T + \frac{1}{3} (N_S - N_T) = -0,472 - 0,035 = -0,507,$$

$$x_1 = 10, \quad y_1 = 0,993,$$

$$f(x_1, y_1) = 0,342, \quad \Delta x = -1, \quad \Delta_1 y = -0,342,$$

$$f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta_1 y) = 0,528, \quad \Delta_2 y = -0,528,$$

$$f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta_2 y) = 0,631, \quad \Delta_3 y = -0,631,$$

$$N_S = -0,486, \quad f(x_1 + \frac{1}{2} \Delta x, y_1 + \frac{1}{2} \Delta_1 y) = 0,635.$$

$$N_T = -0,635, \quad \Delta y = -0,586,$$

$$x_2 = 9, \quad y_2 = 0,402,$$

$$f(x_2, y_2) = 0,804, \quad \Delta x = -1, \quad \Delta_1 y = -0,804,$$

$$f(x_2 + \Delta x_1, y_2 + \Delta_1 y) = -\frac{8 \cdot 0,402}{9 - 0,160} + \sqrt{1,390^2 + 1} = 1,539.$$

Należy zauważyć, iż w punkcie odpowiadającym współrzędnym  $x_2 = 9$ ,  $y_2 = 0,402 - 0,804 = -0,402$  wobec zmiany znaku przy  $y$  linia izostatyczna odpowiada już naprężeniu drugiego rodzaju  $\sigma_{II}$ , które jest jednak w dalszym ciągu naprężeniem rozciągającym. A więc

$$\Delta_2 y = -1,539, \quad f(x_2 + \Delta x, y_2 + \Delta_2 y) = 1,546,$$

$$\Delta_3 y = -1,546, \quad N_S = -1,175,$$

$$f\left(x_3 + \frac{1}{2} \Delta x, y_3 + \frac{1}{2} \Delta_1 y\right) = 1, \quad N_T = -1, \quad \Delta y = -1,058,$$

$$x_3 = 8, \quad y_3 = -0,656,$$

$$f(x_3, y_3) = 1,784, \quad \Delta x = -0,500, \quad \Delta_1 y = -0,892,$$

$$f(x_3 + \Delta x, y_3 + \Delta_1 y) = 3,775, \quad \Delta_2 y = -1,887,$$

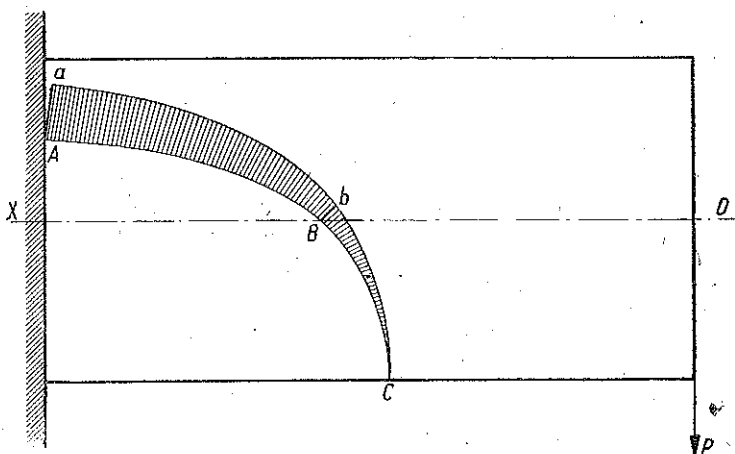
$$f(x_3 + \Delta x, y_3 + \Delta_2 y) = 5,388, \quad \Delta_3 y = -2,694,$$

$$N_S = -1,793, \quad f\left(x_3 + \frac{1}{2} \Delta x, y_3 + \frac{1}{2} \Delta_1 y\right) = 2,515,$$

$$N_T = -1,257, \quad \Delta y = -1,332,$$

$$x_4 = 7,5, \quad y_4 = -1,988.$$

Na podstawie obliczonych współrzędnych linii izostatycznej wykreślamy krzywą przedstawioną na rys. 27 za pomocą grubej linii pełnej. Linia ta jest normalną do dolnej powierzchni belki. Wynika to z równań (54) i (51). Skoro bowiem na krawędzi belki  $\tau_0 = 0$  i  $\sigma_y = 0$ , to otrzymujemy z równania (54) dla kąta  $\varphi$  wartości 0 i  $90^\circ$ , które wstawione do równania (51) uzasadniają taki wniosek.



Rys. 28

Dla innych punktów linii izostatycznej kąty nachylenia stycznych otrzymujemy z równania (86) bądź (87) mając na uwadze, iż  $dy/dx = \operatorname{tg} \varphi$ . Wstawiając otrzymane tą drogą kąty w równanie (51) znajdujemy na całej długości linii izostatycznej wartości tego naprężenia głównego, w danym razie rozciągającego, dla którego została ona zbudowana. Odkładając te wartości normalnie do linii izostatycznej  $ABC$  (rys. 28) otrzymujemy wykres  $abc$  tego naprężenia.

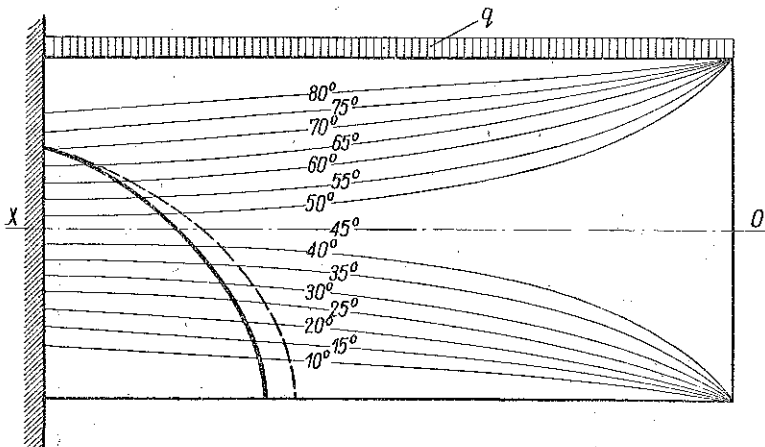
Jeżeli zaczepimy do belki przedstawionej na rysunkach 27-28 zamiast obciążenia skupionego obciążenie ciągle równomiernie rozłożone o natężeniu  $q$ , to wyrażenia (83), (84), (86) i (87) przybiorą odpowiednio postać

$$\sigma_x = \frac{qx^2y}{2J}, \quad \tau = \frac{qx}{2J} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad (88)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{2\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)} + \sqrt{\left[\frac{xy}{2\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}\right]^2 + 1}, \quad (89)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{2\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)} + \sqrt{\left[\frac{xy}{2\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}\right]^2 + 1}. \quad (90)$$

Obliczenie przeprowadzone na podstawie wzorów (88) - (90) doprowadza do krzywej izostatycznej przedstawionej linią grubą pełną na rys. 29.



Rys. 29

Po obliczeniu analogicznym do wykonanego dla belki przedstawionej na rys. 25 znajdujemy dla belki, w której  $l = 25$  i  $h = 10$ , obciążonej na końcu siłą skupioną, linię izostatyczną przedstawioną grubą linią pełną na rys. 30.

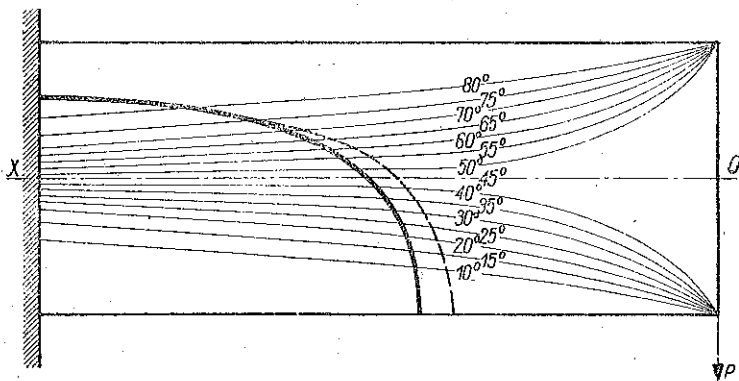
Zastosujemy dalej sposób przybliżonego całkowania równania (71) do wyznaczenia linii izostatycznej w zaporze o przekroju poprzecznym trójkątnym.

Dla zapory przedstawionej na rys. 31 i dla podanego tam układu współrzędnych wyrażenia dla naprężeń  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_0$  równoległych do osi współrzędnych, przybierają postać następującą:

$$\tau_0 = x \operatorname{ctg}^2 \omega, \quad (91)$$

$$\sigma_x = y, \quad (92)$$

$$\sigma_y = ax + by, \quad (93)$$



Rys. 30

gdzie

$$a = \frac{2 - \gamma \operatorname{tg}^2 \omega}{\operatorname{tg}^3 \omega}, \quad b = \gamma - \operatorname{ctg}^2 \omega, \quad (94)$$

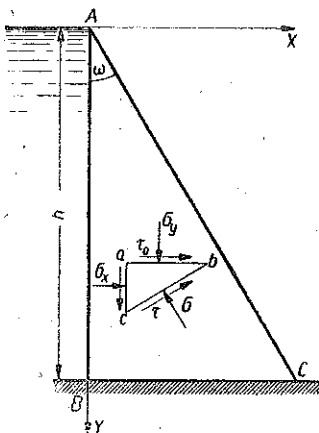
$\gamma$  zaś oznacza ciężar jednostkowy muru zapory przy ciężarze jednostkowym wody wynoszącym  $1 \text{ t/m}^3$ .

Przy wyznaczaniu naprężeń w zaporach uważamy zwykle naprężenia ściskające za dodatnie, wobec czego przyjmujemy dodatnie kierunki naprężeń według rys. 31. Ponieważ wszystkie naprężenia przyjmujemy tu ze znakiem odwrotnym w porównaniu do schematu z rys. 9, więc znak przed wyrażeniem (71) zmianie nie ulega.

Wyznaczymy dla zapory, w której  $h = 24 \text{ m}$ ,  $\omega = 30^\circ$  i  $\gamma = 2,4 \text{ t/m}^3$  linię izostatyczną przechodzącą przez punkt o współrzędnych  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 10$ .

W tym wypadku

$$a = 6,460, \quad b = 0,600, \quad c = b - 1 = -1,600.$$



Rys. 31



wobec czego równanie (71) przybiera postać

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6,460x - 1,600y}{6x} + \sqrt{\left(\frac{6,460x - 1,600y}{6x}\right)^2 + 1} \quad (95)$$

Aby zdecydować się na znak przed pierwiastkiem w równaniu (95), należy uciec się do wzorów (66) i (70) i nadać temu równaniu postać

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma - \sigma_y}{\tau_0} \quad (96)$$

a w dalszym ciągu postać

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\tau_0} \left[ \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_0^2 - \sigma_y} \right] \quad (97)$$

Z rozważań przytoczonych na początku tego rozdziału oraz z uwag dotyczących równania (85) wynika, iż znak — w równaniu (97) odpowiadać będzie linii izostatycznej naprężenia o większej bezwzględnej wartości, w danym razie naprężenia ściskającego  $\sigma = \sigma_1$ . Stąd dochodzimy do znaku + przed pierwiastkiem w równaniu (95).

Drogą takiego samego obliczenia, jakie zastosowaliśmy wyżej do belki w jednym końcu utwierdzonej, a w drugim swobodnej, znajdujemy następujące współrzędne poszczególnych punktów linii izostatycznej:

$$\left. \begin{array}{lll} x_0 = 0, & y_0 = 10,000, & \Delta x = 1, \\ x_1 = 1, & y_1 = 10,120, & \Delta x = 1, \\ x_2 = 2, & y_2 = 10,591, & \Delta x = 2, \\ x_3 = 4, & y_3 = 12,593, & \Delta x = 2, \\ x_4 = 6, & y_4 = 15,289, & \Delta x = 3, \\ x_5 = 9, & y_5 = 19,999, & \Delta x = 2, \\ x_6 = 11, & y_6 = 23,665. & \end{array} \right\} \quad (98)$$

Odpowiednia krzywa przedstawiona jest grubą linią pełną na rys. 32. W punkcie  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 10$  krzywa ta jest normalna do powierzchni muru wobec tego, że naprężenie styczne  $\tau_0 = 0$ .

Wykreślne wyznaczenie linii izostatycznych opiera się na budowie linii izoklinicznych.

Linie izokliniczne są to krzywe posiadające tę własność, że we wszystkich punktach jednej z nich naprężenia główne tego samego rodzaju są względem osi współrzędnych jednakowo nachylone.

Poszczególne elementy poszczególnych linii izostatycznych są więc dla danego rodzaju naprężenia głównego w miejscach przecięcia ich z liniami

izoklinicznymi do siebie równoległe. Linie izokliniczne (izokliny) są z tego powodu pomocne przy budowie linii izostaticznych.

Rolę równań linii izoklinicznych odgrywają równania (54) i (55), o ile kąty  $\varphi$  będziemy uważali w nich za wielkości stałe. Gdy chcemy więc sporządzić linię izokliniczną dla danej wartości kąta nachylenia danego naprężenia głównego, wstawiamy wartość tę w lewą część wyrażenia (55), prawą zaś przedstawiamy jako funkcję  $x$  i  $y$ , wyrażając naprężenie  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  w ten sposób jak poprzednio.

Tym sposobem równania izokliniczne stają się równaniami typu

$$\operatorname{tg} \varphi = \text{const}, \text{ czyli } F(x, y) = \text{const}. \quad (99)$$

Dla przykładu omówimy sposób powstawania linii izoklinicznych w przypadkach przedstawionych na rysunkach 27, 28, 30 i 31.

Dla łatwiejszego wykreślenia linii izoklinicznych wskazane jest, aby równania ich były rozwiązane względem jednej ze współrzędnych. W tym celu nieraz wygodniej jest korzystać nie z równania (55), lecz bezpośrednio z równania (54).

Ustawmy równanie linii izoklinicznej dla belki przedstawionej na rys. 27.

Zastępujemy przede wszystkim równanie (54) przez równanie

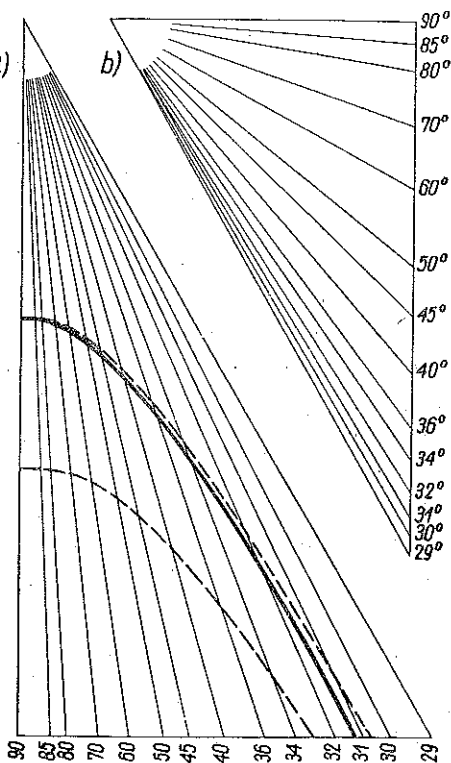
$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\tau_0}{\sigma_x}, \quad (100)$$

które przybiera w danym przypadku postać

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -2 \frac{\frac{P}{2J} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{Pxy}{J}} = -\frac{\frac{h^2}{4} - y^2}{xy} \quad (101)$$

lub postać

$$y^2 - xy \operatorname{tg} 2\varphi - \frac{h^2}{4} = 0, \quad (102)$$



Rys. 32

skąd po rozwiązaniu równania otrzymujemy

$$y = \frac{x \operatorname{tg} 2\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x \operatorname{tg} 2\varphi}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{4}} \quad (103)$$

Dla belki obciążonej w sposób ciągły odpowiednio znajdujemy

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -2 \frac{\frac{h^2}{4} - y^2}{xy}, \quad (104)$$

$$y^2 - y \frac{x}{2} \operatorname{tg} 2\varphi - \frac{h^2}{4} = 0, \quad (105)$$

$$y = \frac{x \operatorname{tg} 2\varphi}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{x \operatorname{tg} 2\varphi}{4}\right)^2 - \frac{h^2}{4}} \quad (106)$$

Wstawiamy dalej we wzory (103) i (106) np.  $\varphi = 60^\circ$  oraz  $x$  równe kolejno 2, 4, 6 itd. i tą drogą dochodzimy do linii izoklinicznych oznaczonych liczbą  $60^\circ$  na rysunkach 27 i 29. Liczba  $60^\circ$  wyraża tu, iż w każdym punkcie danej krzywej jeden z przekrojów głównych nachylony jest względem osi  $OX$  pod kątem  $60^\circ$ .

Ponieważ wiemy, że większe naprężenie główne na górnej powierzchni belki ma kierunek poziomy, czyli równoległy do osi belki, co odpowiada  $\varphi = 90^\circ$  i  $y = +h/2$ , więc przyjmujemy w równaniach (103) i (106) przed pierwiastkiem znak  $+$ . Dla podobnych powodów w dolnej części belki przyjmujemy znak  $-$ .

Przy  $\varphi = 45^\circ$  otrzymujemy zarówno z równania (103), jak i z równania (106) dla  $y$  wyrażenie nieokreślone  $\infty - \infty$ , którego wartość rzeczywista równa się 0. Oś belki jest więc linią izokliniczną dla kąta  $\varphi = 45^\circ$ .

Na rysunkach 27, 29 i 30 krzywe izokliniczne dla różnych kątów przedstawione są za pomocą cienkich linii pełnych.

Aby otrzymać linie izokliniczne dla zapory przedstawionej na rys. 32, nadajemy równaniu (54), w związku z oznaczeniami (94) i (95), postać następującą:

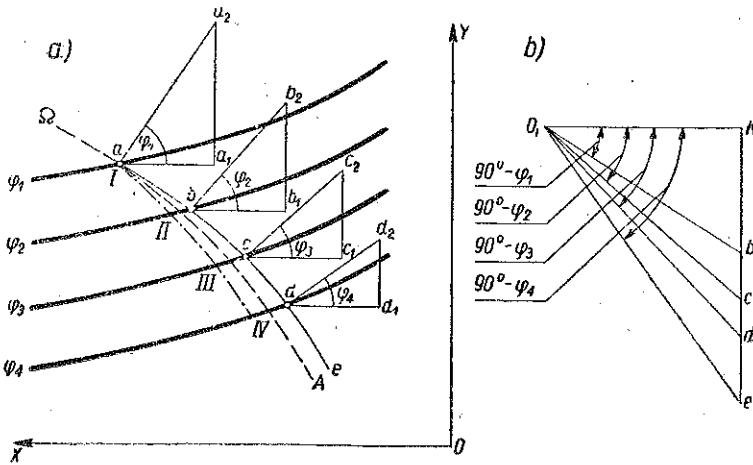
$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau_0}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{2x \operatorname{ctg}^2 \omega}{cy + ax} \quad (107)$$

Rozwiązując równanie (107) względem  $x$  otrzymujemy

$$x = \frac{y \operatorname{ctg} 2\varphi}{2 \operatorname{ctg}^2 \omega - a \operatorname{tg} 2\varphi} = \frac{1,6 y \operatorname{tg} 2\varphi}{6 - 6,46 \operatorname{tg} 2\varphi} \quad (108)$$

Wstawiając w równanie (108) poszczególne wartości kąta  $\varphi$  dochodzimy do pęku prostych izoklinicznych wskazanych na rys. 32 za pomocą cienkich linii pełnych.

Pęki linii izoklinicznych służą do budowy linii izostatycznych. Przypuśćmy więc, że mamy pęk linii izoklinicznych (rys. 33) odpowiadających kątom  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  itd.



Rys. 33

Jeżeli linia izostatyczna ma przejść przez punkt  $a$  leżący na izoklinie  $\varphi_1$ , to przeprowadzamy z tego punktu prostą  $aa_1$  równoległą do osi  $OX$  i odkładamy od niej kąt  $\varphi_1 = \angle a_1 a a_2$  w sensie schematu na rys. 7. Prosta  $a a_2$  będzie tu kierunkiem przekroju (elementu izostatycznego), na który działa naprężenie główne odpowiadające danemu pękowi linii izoklinicznych. Przeprowadzając prostą  $a b$  prostopadłą do prostej  $a a_2$  znajdujemy kierunek odcinka linii izostatycznej zawarty między izoklinami  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ .

W punkcie  $b$  przeprowadzamy prostą  $b b_2$  nachyloną pod kątem  $\varphi_2$  względem osi  $X$ -ów oraz prostą  $b c$  do niej prostopadłą i stanowiącą odcinek linii izostatycznej między izoklinami  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$ . W ten sam sposób budujemy pozostałe odcinki poszukiwanej linii izostatycznej, kąty  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  itd. odkładamy od osi  $X$ -ów na podstawie tangensów.

Wyznaczenie linii izostatycznej na podstawie izoklinów można uprościć sobie w sposób następujący.

Przeprowadzamy prostą  $OK$  równoległą do osi  $X$ -ów i prostą  $Ke'$  do niej prostopadłą. Na tej ostatniej prostej odkładamy odcinki  $Kb', Kc'$  itd. w ten sposób, aby

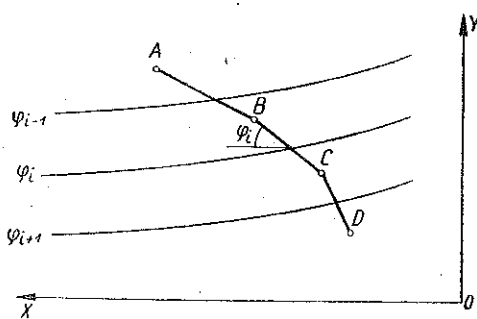
$$\frac{Kb'}{OK} = \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_1) = \operatorname{ctg} \varphi_1, \quad (109)$$

$$\frac{Kc'}{OK} = \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_2) = \operatorname{ctg} \varphi_2 \quad \text{itd.}$$

Łącząc ze sobą punkt  $O_1$  z punktami  $b', c', d'...$  znajdujemy kierunki  $O_1 b' \parallel ab$ ,  $O_1 c' \parallel bc$  itd. Dla wyznaczenia więc linii izostatycznej  $abcde$  przeprowadzamy z punktu  $a$  prostą równoległą do  $O_1 b'$ , z punktu  $b$  równoległą do  $O_1 c'$  itd. Mamy w ten sposób do czynienia z pewną analogią wieloboku sznurowego (rys. 33).

Gdyby linie izokliniczne były do siebie nieskończenie zbliżone, wówczas odcinki  $ab, bc, cd$  itd. byłyby nieskończenie małe i dałyby w rezultacie ściśłą linię izostatyczną  $aA$ . Ponieważ jednak wymienione odcinki mają długość skończoną, linia łamana  $abc d ...$  odsunie się na rys. 33 względem odpowiedniej krzywej w kierunku do początku współrzędnych.

Jeżeli przeprowadzimy przez punkt  $a$  zamiast prostej  $ab$  równoległą do niej prostą  $0I$ , a następnie zamiast prostej  $bc$  równoległą do niej prostą  $II$  itd., nowa linia łamana  $0I II III ...$  byłaby przesunięta względem linii łamanej  $abc ...$  w kierunku dodatnich  $X$ -ów. Dwie wymienione tu linie łamane tym różnią się od siebie, że każdy element linii  $abc ...$  zawarty między izoklinem  $\varphi$  a izoklinem  $\varphi_{i+1}$  nachylony jest względem osi  $X$ -ów pod kątem  $90^\circ - \varphi_i$ , a każdy element linii  $0I II ...$  zawarty między tymi samymi izoklinami nachylony jest względem osi  $X$ -ów pod kątem  $90^\circ - \varphi_{i+1}$ . Krzywa  $aA$  jako ściśle przeprowadzona linia izostatyczna,



Rys. 34

przechodzi między liniami łamanymi  $abc ...$  i  $0I II ...$  i odgrywa dla nich obu rolę przy nieskończeniu zwiększającej się liczbie izoklinów.

Aby możliwie jak najlepiej zastąpić linię  $aA$  (rys. 33) przez linię łamaną, można przeprowadzać tę ostatnią w ten sposób, aby jej odcinek przecinający linię izokliczną  $\varphi_i$  i nachylony względem osi  $X$ -ów pod kątem  $\varphi_i$  znajdował się częściowo między izoklinami  $\varphi_{i-1}$  a  $\varphi_i$ , częściowo zaś między izoklinami  $\varphi_i$  i  $\varphi_{i+1}$  (rys. 34). W tym wypadku wierzchołki linii łamanej  $B, C, D$  itd. powinny znajdować się w jednakowej odległości od izoklinów, między którymi są zawarte. Linia izostatyczna tą drogą wyznaczona wskazana jest na rys. 27 jako linia I, przy czym, jak widać, linia ta dobrze zgadza się z krzywą otrzymaną drogą przybliżonego całkowania równania (71). Na tym samym rysunku linia II została zbudowana na podstawie linii izoklinicznych przeprowadzonych co  $5^\circ$ , a linia III na podstawie linii izoklinicznych przeprowadzonych co  $10^\circ$ .

Na rys. 29, 30 i 32 liniami punktowanymi uwidocznione są linie wykonane na podstawie linii izoklinicznych według schematu linii  $abc ...$  z rys. 33.

Budowanie linii izostatycznej według schematu  $A B C \dots$  z rys. 34 na-  
stręcza trudności przy określaniu położenia punktów  $B, C, D$  jednakowo  
odległych od obejmujących je izoklinów. To powoduje dowolności i dla-  
tego przy korzystaniu z wymienionego schematu konieczne jest celem usta-  
lenia granic błędu jednoczesne sporządzenie linii izostatycznej według  
schematów  $a b c \dots$  i  $0 I II \dots$  z rys. 33.

Porównanie sposobów wyznaczenia linii izostatycznych na podstawie  
linii izoklinicznych ze sposobem przybliżonego całkowania równania róż-  
niczkowego linii izostatycznej doprowadza do poniższych wniosków.

Przy całkowaniu równania krzywej izostatycznej dokładność oblicze-  
nia może być łatwo ustalona drogą porównania ze sobą kolejnych przy-  
bliżeń. Dokładność, jaka może być uzyskana przez zmniejszenie do-  
wolnych przyrostów, jest dostateczna dla wszelkich zagadnień o charak-  
terze technicznym.

Przy wyznaczeniu linii izostatycznych na podstawie izoklinów do-  
kładność tego wyznaczenia zależy od takich okoliczności, jak skala rysun-  
ku, ścisłość rysunku, ilość wyznaczonych linii izoklinicznych itd., które  
nie zawsze są łatwo uchwytne i które nie pozwalają wobec tego łatwo  
ustalić granic błędu obliczenia.

Z drugiej strony, wyznaczenie jednej linii izostatycznej drogą przybli-  
żonego całkowania wymaga znacznego natężenia uwagi wobec tego, że zwią-  
zana z tym całkowaniem praca rachunkowa nie daje się zmechanizować.

Samo wyznaczenie linii izostatycznej na podstawie danego pęku izo-  
klinów jest rzeczą bardzo prostą. Wyznaczenie linii izoklinicznych wyma-  
ga wprawdzie dość znacznej ilości działań arytmetycznych, lecz działań  
powtarzających się i dających się ująć w tablice. Przy tym pęk izoklinów  
pozwala na przeprowadzenie linii izostatycznych przez dowolną liczbę  
punktów.

Dopóki więc chodzi o wyznaczenie linii izostatycznej dla celów ogól-  
nego zorientowania się w pracy danej konstrukcji, wyznaczenie tych linii  
na podstawie linii izoklinicznych jest całkowicie wskazane, gdy jednak  
chodzi o dokładne wskazanie miejsca w danej konstrukcji, które powinno  
być wzmocnione, lub w którym należy oczekiwać pęknięć, należy wówczas  
uciec się do numerycznego całkowania równania linii izostatycznej.

#### Р е з ю м е

#### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К СЛУЧАЯМ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В СООРУЖЕНИЯХ

В работе рассматриваются проблемы строительной механики, каса-  
ющиеся процессов, являющихся, по своей природе, непрерывными, ко-  
торые, однако, для упрощения обсуждаются как прерывные.

В области строительных конструкций, в которых выступают плоские напряженные состояния, подобный образ действия находит преимущественно применение к железобетонным плитам, балкам значительной высоты и плотинам.

В первой главе рассматривается применение разностных линейных уравнений в теории пластинок.

В этой теории, особенно в случае железобетонных плит, которые в строительных конструкциях заземляются и нагружаются самым различным образом, теория линейных разностных уравнений находит широкое применение. В первом параграфе второй главы приведены различные возможности применения метода конечных разностей к расчету плит. Здесь обосновывается мнение, что расчет железобетонных плит следует производить таким-же образом, как и изотропных пластинок. Второй параграф этой главы содержит пример применения линейных разностных уравнений к расчету изотропной плиты-консоли.

Вторая глава работы посвящается изостатическим линиям в балках и плотинах.

В первом параграфе той-же главы приведен вывод дифференциальных уравнений изостатических линий, в связи с уравнениями, выражающими направления напряжений, и с графиками напряжений. Приводятся линии одинаковых напряжений для различных форм плотин, вычисленные на основании напряжений, выступающих в отдельных пунктах.

Во втором параграфе второй главы приведено интегрирование уравнений изостатических линий типа (71). Уравнение сводится к нелинейному дифференциальному уравнению, а затем к нелинейному разностному уравнению. Решение уравнения производится числовым методом Рунге. Определены изостатические линии для целого ряда случаев. Рассматривается также способ решения уравнений (71) графическим методом и приводится сопоставление обоих образов действия.

## S u m m a r y

### THE APPLICATION OF FINITE DIFFERENCES IN TWO-DIMENSIONAL STATES OF STRESS IN STRUCTURES

This is a discussion of problems of structural mechanics concerning processes essentially continuous but assumed uncontinuous for the sake of simplicity or for mathematical reasons.

In structures characterized by two-dimensional states of stress this procedure is applied principally to reinforced concrete plates, girders of finite height and dams.

Chapter I concerns application of linear difference equations to the theory of plates, in which the theory of linear difference equations is commonly used, especially in reinforced concrete plates subjected to various kinds of load and supported in various manners. Sec. 1 of Chapter I contains a discussion of the various ways, in which finite differences may be applied to plate computation. The assumption that reinforced concrete plates should be treated as isotropic plates is justified. Sec. 2 brings an example of the application of linear difference equations to an isotropic cantilever plate.

In Chapter II the problem of isostatic lines in girders and dams is discussed. Sec. 1 contains the derivation of differential equations of isostatic lines taking into consideration the expressions for stress directions and stress diagrams. Lines of equal stresses are represented for dams of various shapes, computed on the basis of stresses in separate points. In sec. 2 the equations of isostatic line of the type (71) are integrated. This type of equation is reduced to a nonlinear differential equation and then to a nonlinear difference equation. The equation is solved by means of Runge's numerical method. The isostatic lines are determined in several cases. A graphical method of solution of Eqs. (71) is discussed and both methods are compared.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 czerwca 1954 r.*



## SPIS TREŚCI

	Str.
<b>Przedmowa</b>	3
<b>I. Zastosowanie równań różnicowych liniowych</b>	5
1. Znaczenie różnic skończonych w teorii płyt	5
2. Obliczenie płyty-wspornika	10
<b>II. Zastosowanie równań różnicowych nieliniowych</b>	19
1. Linie i kierunki naprężeń a linie izostatyczne	19
2. Całkowanie równania linii izostatycznej	30