

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

X

Z. WASIUTYŃSKI

O kształtach pęknięć powierzchniowych

W A R S Z A W A

1 9 5 4

Nr. inv. 965

ZAKŁAD BADAWCZY BUDOWNICTWA
SZKOŁY INŻYNIERSKIEJ W POZNANIU

WYDZIAŁ INŻYNIERSKI W POZNANIU
KATEDRA PRZEŁADYKACJI
I PRZEŁADÓW SPŁOZONICZ.
Poznań, ul. Strzelcka 11

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (X)

Copyright 1954 by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa (Poland). Printed in Poland.

All rights reserved

No part of this book may be translated or reproduced
in any form, by mimeograph or any other means,
without permission in writing from the publishers.

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK

Nakład 1420 + 160 egz. Papier druk. sat. 70×100/16, 60 g. Arkuszy wydawniczych 2. Arkuszy drukarskich 1³/₄.
Oddano do składania dn. 4.XI.53 r. Druk ukończono dn. 30.III.54 r. Zam. 315. 5-B-53563. Cena zł 3,—

Stoł. Zakł. Graf. Drukarnia Naukowa, Warszawa, Śniadeckich 8

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Z. WASIUTYŃSKI

O KSZTAŁTACH PĘKNIĘĆ POWIERZCHNIOWYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

X

WARSZAWA 1954

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

1. Przykłady *)

1.1. Na rysunku 1 przedstawione są spękania ziemi ogrodowej, wysychającej po rozmarznieniu na wiosnę. Z punktów rozgałęzień wychodzą tylko po trzy szczeliny. Wymiary pól zawartych między szczelinami wynoszą po kilkanaście centymetrów. Podobne spękania występują też na powierzchni glin i iłów.

1.2. Rysunki 2 i 3 przedstawiają wieloboczne spękania ziemi występujące w okolicach arktycznych, w których powierzchnia ziemi rozmarza tylko do niewielkiej głębokości. Przyczyną ich powstawania są, zapewne, odkształcenia nasiąkniętej wodą ziemi w czasie zamarzania i tajania. Spękania tego rodzaju układają się w regularną sieć sześciokątną, czym różnią się zasadniczo od spękań ziemi występujących wskutek skurczu przy jej wysychaniu. Wymiary sześciokątów zawartych między spękaniami wynoszą od dwudziestu centymetrów do jednego metra¹⁾.

1.3. Powszechnie znane są spękania magmy lakolitów wytwarzające słupy bazaltowe (rys. 4). Przekroje ich mają najczęściej kształty sześciokątów, pięciokątów lub siedmiokątów. Przekroje o mniejszej lub większej ilości boków występują znacznie rzadziej.

1.4. Podobne spękania dają przy ściskaniu kamienne kostki sześciennie, o ile zmniejszymy dostatecznie tarcie między kostką i płytami prasy; jednak powierzchnie graniastosłupów, na które rozpada się kostka, nie są tak równe i wyraźnie wyodrębnione, jak powierzchnie słupów bazaltu.

1.5. Na rysunku 5 przedstawione są spękania paromilimetrowej wyprawy z zaczynu cementowego na tynku cementowym. Przyczyną ich jest skurcz cementu. Sieć ich jest nieregularna. Odnogi mniejszych spękań urywają się ślepo wewnątrz pól obwiedzionych większymi spękaniami. Wymiary pól zawartych między przeciwległymi rysami wynoszą od paru do kilkunastu centymetrów.

Rysunek 6 przedstawia spękania na tynku wapiennym położonym przed czterystu kilkudziesięciu laty. Spękania te są większe i lepiej wykształcone od spękań cienkiej warstwy zaczynu cementowego.

*) Komitet Redakcyjny ROZPRAW publikuje niniejszą pracę uważając, że porusza ona w ogólnym zarysie temat oryginalny i mało zbadany.

¹⁾ Według *Astrophysica Norvegica*, tom 4, 1946.

1.6. Rysunek 7 przedstawia spękania na powierzchni kuli z zaczynu cementowego. Dla lepszego uwidocznienia włoskowatych rys kulę tę zanurzano w wodzie, a następnie osuszono jej powierzchnię. Fotografie wykonano, gdy zawilgocenia szczelin jeszcze nie wyschły. Widoczne są tu dwa układy spękań: jeden układ ma pola o wymiarze kilku centymetrów i szersze szczeliny, a drugi ma pola o wymiarze rzędu jednego centymetra i znacznie węższe szczeliny. Pierwszy układ wystąpił wcześniej wskutek skurczu cementu. Drugi jest późniejszy i został wywołany przez nagrzanie kuli do 500°C . Nagrzanie to wywołało również wzrost szerokości szczelin pierwszego układu. Wnioskujemy stąd, że gęstość rys na powierzchni przedmiotów z danego materiału zależy od wielkości skurczu i od wielkości odkształceń termicznych.

1.7. Rysunek 8 obrazuje przykład sfałdowania tynku wykonanego ze zbyt tłustej zaprawy wapiennej, pęczniejącej podczas wiązania. W punktach rozgałęzień zbiegają się po trzy sfałdowania. Pod tym względem są one zbliżone do spękań ziemi. Poza tym układ tych sfałdowań nie ma innych cech regularności.

1.8. Już kilkadziesiąt lat temu zwrócono uwagę na to, że tak zwane «kratery» na powierzchni księżyca mają kształty wieloboczne. W 1907 roku P. P u i s e u x ogłosił w *Bulletin de la Société Astronomique de France* szczegółową analizę tych kształtów wykazując, że krawędzie większości kraterów stanowią sfałdowania układające się w mniej lub więcej regularne sześciokąty o określonych pochyleniach względem południków. Prócz nich na powierzchni księżyca występują szczeliny biegnące w trzech kierunkach, z których jeden tworzy z południkami kąt około 20° a pozostałe są pochylone do pierwszego pod kątami wynoszącymi około 60° . Na rysunkach 10 i 12 wykreślono układy rys, dających się dostrzec na częściach powierzchni księżyca przedstawionych na fotografiach 9 i 11. Niektóre z tych rys przechodzą przez środki «kraterów» i łączą je z jednym z wierzchołków. W *Astrophysica Norvegica* z 1946 roku przeprowadzona jest analiza hydrodynamiczna tych utworów. Według niej zestaleniu uległo najpierw jądro księżyca, a następnie dopiero jego powłoka. Powstanie szczelin na powierzchni jest objaśnione skurczem zewnętrznych warstw magmy, zestalających się na już stałym jądrze.

Jednym z możliwych sposobów powstania kraterów jest osadzanie stałych części na krawędziach «kraterów» przez odśrodkowe prądy w warstwie magmy określonej grubości, tak zwane prądy B é n a r d a, który przeprowadził dokładną ich analizę oraz pomiary prądów powstających w warstwach cieczy pod działaniem przepływającego przez nie ciepła.

Rysunek 13 przedstawia fotografię komórek wytworzonych przez ruchy wirowe w cienkiej warstwie lepkiej cieczy użytej do jednego z doświadczeń B é n a r d a. Rysunek 14 przedstawia wieloboczny podział wytworzony przez prądy konwekcyjne w cienkiej warstwie chmur, a rys. 15 ilustruje podobny podział w fotosferze słońca.

Prądami konwekcyjnymi tłumaczy się powstawanie tak zwanych wieloboków z kamieni występujących w okolicach podbiegunowych (rys. 16 i 17).

Z dwóch opisanych tu rodzajów utworów na powierzchni księżycy przykładem zjawisk ilustrujących omawiany temat jest pierwszy rodzaj — układ sieci rys. Drugi rodzaj jest związany ze zjawiskami hydrodynamicznymi, a więc całkowicie odrębnymi od zjawisk wytrzymałościowych. Został on tutaj wzmiankowany po to tylko, aby wskazać, że różne zjawiska mogą prowadzić do podobnych układów linii i że, być może, w niektórych przypadkach formy te powstają wskutek łącznego występowania różnych zjawisk.

Na przykład powstawanie słupów bazaltu może być wywołane działaniem nie tylko skurczu magmy, lecz również prądów konwekcyjnych. Ostatni z opisanych tu przykładów wskazuje jeszcze inny rodzaj zjawisk, prowadzący do podobnych układów linii.

1.9. Rysunki 18, 19 i 20 przedstawiają pęknięcia szkliwa na porcelanowym talerzu, wywołane nagraniem w czasie pożaru. Układ pęknięć jest w tym przypadku zupełnie inny od układów poprzednio zilustrowanych. Talerz leżał w stosie między innymi talerzami i nagrzewał się pochynając od krawędzi. Na fotografiach widoczne są układy długich, nie przecinających się pęknięć. Przy obrzeżu dna mają one kierunek zbliżony do obrzeża, a dalej odchylają się nieco. Znaczą one kolejno nagrzewające się pasy (rys. 18). Szkliwo tych pasów jest poprzecinane krótkimi liniami poprzecznymi, urywającymi się najczęściej na krawędziach pasów lub też, niekiedy, przecinającymi kilka pasów jedną linią. Długie pęknięcia ciągłe wystąpiły wcześniej, a krótkie, przerywane — później. Pęknięcia poprzeczne są proste, gdy mają kierunek zbliżony do normalnych do linii pęknięć podłużnych. Pęknięcia poprzeczne skierowane ukośnie wyginają się w pobliżu pęknięć podłużnych, dążąc do zetknięcia się z nimi pod kątem prostym (rys. 19 i 10). Rysy poprzeczne biegą normalnie do obrzeża dna talerza (rys. 19). Podobne sieci rys są widoczne na szkliwie wielu przedmiotów z porcelany, fajansu, kamionki.

Zestawiając te obserwacje z poprzednimi widzimy, że w czasie powstawania rys występuje dążność do wyrównania kątów przy ich zbiegu. Gdy trzy rysy biorą początek w jednym punkcie, kąty są zazwyczaj bliskie jednej trzeciej kąta pełnego, gdy zaś najpierw powstają rysy w jednym kierunku, a następnie w drugim, to kąty między nimi są zbliżone do kątów prostych.

1.10. Rysunek 21 przedstawia układ pęknięć stalowego zbiornika, zerwanego przez dostatecznie wielkie ciśnienie wypełniającej go wody. Pęknięcia rozchodzą się po wielkich kołach z jednego miejsca. Układ tych pęknięć jest podobny do układu pęknięć powstających od uderzenia. Poszczególne pęknięcia wystąpiły tu, zapewne, prawie jednocześnie, w ciągu bardzo krótkiego czasu. Trudno mówić o kolejności ich powstawania.

Natomiast w niektórych z poprzednio opisanych przypadków kolejność występowania pewnych grup rys jest wyraźna.

Rysunki 22 i 23 są reprodukcjami fotografii wytrawionych szlifów dwóch rodzajów stali. Pierwszy z nich obrazuje układ ziaren w przekroju poprzecznym pręta miękkiej stali wydłużającej się przy rozerwaniu o 33%. Metal została się jednocześnie w wielu ziarnach. Składniki nie biorące udziału w krystalizacji gromadzą się na zewnątrz ziaren. W końcowym etapie krystalizacji sąsiednie ziarna naciskają na siebie poprzez ścianki z obcych składników. Niektóre z tych ścianek są zbliżone swym kształtem do płaszczyzn, a linie ich przekrojów zbiegają się najczęściej po trzy na raz. Na tych dwóch cechach polega regularność ich układu. Drugi rysunek przedstawia układ ziaren metalu, w którym cecha płaskości ścian występuje wyraźniej niż w pierwszym przykładzie, natomiast cecha zbiegania się trzech linii przekrojów ścian występuje mniej wyraźnie.

Oba opisane rysunki przedstawiają układy linii wytworzone w czasie zjawisk całkowicie odmiennych od zjawisk powodujących spękania lub sfałdowania, a także od zjawisk związanych z prądami konwekcyjnymi Bénarda. Mimo to układy linii we wszystkich tych zjawiskach mają pewne cechy wspólne. Można więc przypuszczać, że i w przebiegu wszystkich tych zjawisk występują pewne cechy podobieństwa. Wskazemy je, w zakończeniu.

2. Analiza kształtu pęknięć powierzchniowych

2.1. Główne cechy spękań lub sfałdowań powierzchniowych. Zwróćmy uwagę na to, że stan spękania występujący w pierwszych przykładach ma następujące cechy charakterystyczne:

po pierwsze, wzdłuż rys, a częściowo też wzdłuż fałd, występuje utrata pierwotnej spójności między materiałem;

po drugie, między rysami lub fałdami występują pola niezarysowane i niesfałdowane;

po trzecie, zewnętrzna warstwa podzielona spękaniami zachowuje spójność z warstwami głębszymi;

po czwarte, rysy mają kształt linii łamanych, rozgałęziających się i złożonych z odcinków linii zbliżonych do prostych,

po piąte, sieć rys lub fałd wykazuje niekiedy wyraźną regularność pod względem kierunków pęknięć, wielkości kątów i długości odcinków.

W niektórych przypadkach układy rys nie mają wszystkich tych cech, lecz tylko pewne z nich.

Rysy występujące w szkliwie porcelany, opisane w przykładzie 1.9, układają się inaczej, zapewne wskutek odmiennego, jak to już opisano, przebiegu zmian cieplnych.

Pęknięcia występujące przy rozerwaniu stalowego zbiornika kulistego rozchodzą się z jednego punktu wzdłuż łuków wielkich kół, jak gdyby

bez ograniczenia ich długości, a to niewątpliwie wskutek tego, że powłoka zbiornika nie jest związana z wypełniającą go cieczą oraz wskutek tego, że z chwilą pęknięcia ciśnienie bardzo prędko spada do zera wraz ze stanem naprężenia w całym zbiorniku.

2.2. Założenia przyjęte w analizie kształtu pęknięć powierzchniowych. Aby zanalizować te zjawiska, rozpatrzmy kulę jednorodnie zbudowaną z materiału stałego. Założmy, że kula ta stygnie oddając energię cieplną ze swej powierzchni, bądź też że nagrzewa się pobierając energię tę z zewnątrz. Niech przy tym temperatura rozkłada się jednakowo wzdłuż każdego promienia kuli tak, aby we wszystkich punktach leżących na jednakowych głębokościach pod powierzchnią była ona w każdej chwili jednakowa. Założenie to stanowi też schemat zjawisk obserwowanych na powierzchniach płaskich, bowiem płaskie pole zawarte wewnątrz okręgu o promieniu r może być rozpatrywane jako część powierzchni kuli o promieniu R , o ile stosunek $r : R$ dąży do zera. Taki dowolnie mały w stosunku do promienia element powierzchni kuli będziemy rozpatrywali przyrównując jego powierzchnię do płaszczyzny. Schemat zjawisk wynikający z przyjętych założeń jest szczególnie prosty wskutek tego, że powierzchnia kuli nie ma krawędzi i że wszystkie punkty kuli leżące na jednakowej głębokości pod powierzchnią znajdują się w jednakowych warunkach, a więc występuje w nich jednakowy stan naprężenia. Do wyznaczenia stanu naprężenia w całej kuli wystarcza przeto wyznaczyć stan naprężenia wzdłuż jej promienia.

Na powierzchni kuli naprężenia skierowane wzdłuż promieni mają wartości zerowe, a naprężenia normalne, występujące wzdłuż stycznych, mają wartość

$$\sigma = \frac{\alpha \Delta t E}{1 - \nu},$$

niezależną od kierunku pęknięć. We wzorze tym występuje współczynnik rozszerzalności cieplnej α , współczynnik sprężystości E , liczba Poissona ν oraz przyrost temperatury Δt liczony od stanu zerowego naprężenia. W tak prostym stanie naprężenia powierzchniowej warstwy kuli nie ma potrzeby wprowadzania dodatkowych założeń o materiale kuli i o odpowiadającej mu hipotezie wyteżenia.

Rozpatrzmy kształt pęknięć lub sfałdowań występujących w przyjętych założeniach.

2.3. Pęknięcia i sfałdowania występują wzdłuż odcinków linii położonych w skończonych odstępach. Przede wszystkim zwróćmy uwagę na to, że po wystąpieniu pierwszego pęknięcia lub sfałdowania zmienia się stan naprężenia kuli. Zmiany te mogą wystąpić w obszarach różnej wielkości i wpływać na dalsze pęknięcia w większym lub mniejszym obszarze. Obrazem jednego ze skrajnych przypadków jest poprzednio opisane pęknięcie powłoki zbiornika kulistego. W przeciwstawieniu do tego przypadku możemy założyć, że pęknięcia zmieniają stan naprężenia tyl-

ko w dostatecznie małym, przyległym do nich obszarze. W tym drugim przypadku wszystkie dalsze pęknięcia występują niezależnie od poprzednich. W rzeczywistości, zgodnie z zasadą Saint-Venanta, zmiany w stanie naprężenia będą występowały w bezpośrednim sąsiedztwie danego pęknięcia powodując zmniejszenie naprężeń. Dlatego w obszarze tym nie powstaną nowe pęknięcia, natomiast poza tym obszarem będą powstawały dalsze pęknięcia, niezależnie od poprzednich. Proces pęknięcia lub sfaldowania kończy się z chwilą spadku naprężeń na całej powierzchni kuli. Gęstość siatki pęknięć lub sfaldowań będzie zależała od wielkości obszarów, w których poszczególne pęknięcia wywołują zmniejszenie naprężeń. W ten sposób znajdujemy potwierdzenie następujących faktów znanych z obserwacji:

- (1) sieć pęknięć składa się z odcinków o skończonej długości;
- (2) zmniejszenie naprężeń w warstwie powierzchniowej powstaje wskutek wytworzenia siatki o skończonych odstępach, a nie z powodu utraty spójności cząstek materiału na całej powierzchni kuli;
- (3) pęknięcia lub sfaldowania mogą występować niezależnie jedno od drugich i w dowolnej kolejności.

Jest rzeczą prawdopodobną, że powstawaniu rys powierzchniowych towarzyszy wystąpienie naprężeń powierzchniowych, których wielkości wyrażają się zależnościami podobnymi do zależności wyprowadzonych przez Griffitha w odniesieniu do płyt poddanych równomiernemu rozciąganiu. W niedawno ogłoszonej pracy M. T. Hubera²⁾ podany jest następujący wzór Griffitha na całkowity ubytek energii potencjalnej przy powstawaniu szczeliny o długości $2c$:

$$V = \frac{1 - \theta \nu^2}{E} \pi c^2 \sigma_1 - 4cT \quad (0 < \theta < 1),$$

w którym σ_1 oznacza naprężenie rozciągające płytę, T naprężenie powierzchniowe wywołane pęknięciem oraz ν i E odpowiednio liczbę Poissona i współczynnik sprężystości.

Wielkość ubytku energii potencjalnej osiąga maksimum przy

$$\frac{\partial V}{\partial c} = 2 \frac{1 - \theta \nu^2}{E} \pi c \sigma_1 - 4T = 0,$$

to jest przy długości szczeliny

$$(c)_{V_{max}} = \frac{2TE}{(1 - \theta \nu^2) \pi \sigma_1}$$

Naprężenia powierzchniowe mogą przeto tak samo wywierać wpływ na ograniczenie długości szczelin.

2.4. Symetria stanu naprężenia w obszarze otaczającym pęknięcie. Przed wystąpieniem pęknięć stan naprężenia na powierzchni kuli był jednako-

²⁾ M. T. Huber, *Kilka uwag o własnościach mechanicznych ciał stałych*, Arch. Mech. Stos. 1 (1953).

wy we wszystkich punktach, a więc symetryczny względem każdej płaszczyzny przechodzącej przez środek kuli. Pęknięcie w punkcie A (rys. 24), wzdłuż dowolnie małego odcinka krzywej c , wywołuje w otaczającym go obszarze D zmiany naprężeń rozłożone symetrycznie względem prostej t stycznej do c w punkcie A . Punkty obszaru D związane tą symetrią znajdują się w jednakowym stanie naprężenia i odkształcenia.

2.5. Pęknięcia występują wzdłuż łuków wielkich kół. Dowiedzimy, że pęknięcia lub sfałdowania mogą przebiegać tylko wzdłuż łuków wielkich kół.

Założmy, że tak nie jest i że pęknięcia występują wzdłuż dowolnych linii krzywych. Niech linia c oznacza jedną z nich. Jeżeli pęknięcie w obszarze D przyległym do punktu A miałyby wystąpić wzdłuż krzywej c , to wystąpiłoby też wzdłuż krzywej c' symetrycznej do c względem t . Podobne rozumowanie można przeprowadzić obierając zamiast A dowolne inne punkty na linii c w obrębie obszaru D . Możemy na przykład obrać punkt A_1 , położony w skończonej odległości od A , następnie punkt A_2 , położony między A i A_1 , potem punkty A_3 i A_1 , położone odpowiednio między punktami A i A_2 oraz A_2 i A_1 . Za każdym razem możemy wyznaczyć nowe pęknięcia lub sfałdowania występujące wzdłuż krzywych c'_1, c'_2, c'_3, \dots symetrycznych do krzywej c względem wielkich kół przechodzących przez styczne w punktach A_1, A_2, A_3, \dots

Ponieważ działanie to możemy powtarzać dowolną ilość razy, przeto możemy pokryć dowolnie gęsto liniami c' część obszaru D położoną po wypukłej stronie krzywej c . To samo dotyczy części obszaru D położonej po wypukłej stronie krzywej c' . Wynikałoby stąd, wbrew stwierdzeniu skończonych odstępów między pęknięciami, że pokrywają one obszar D dowolnie gęsto. Wskazuje to na błędność przypuszczenia, że linie te mogą być dowolnymi krzywymi. Wnioskujemy stąd, że linie pęknięć lub sfałdowań mogą się składać tylko z odcinków wielkich kół.

2.6. Pęknięcia lub sfałdowania rozgałęziają się symetrycznie. Dowiedzimy, że promień kuli, przechodzący przez punkt załamania linii pęknięcia, jest osią symetrii n -go rzędu łuków pęknięć przechodzących przez ten punkt.

Istotnie, niech S oznacza punkt leżący na skrzyżowaniu dwóch sąsiednich odcinków wielkich kół d i d_1 oznaczających pęknięcia lub sfałdowania (rys. 25). Wobec symetrii stanu naprężenia w obszarach otaczających każdy z tych odcinków są one rozłożone symetrycznie względem przechodzących przez nie płaszczyzn wielkich kół. Kąty zawarte między sąsiednimi parami tych płaszczyzn są zatem równe. Stanowią one podwielokrotność kąta pełnego. Oznaczmy liczbę tej podwielokrotności przez n . Odcinki łuków pęknięć lub sfałdowań zbiegające się w jednym punkcie stanowią przeto układ symetryczny n -go rzędu względem promienia przechodzącego przez ten punkt. Wynika stąd, że promień ten jest n -krotną osią symetrii. Symetria ta dotyczy łuków pęknięć przechodzących przez oś symetrii. Obrót o $1/n$ kąta pełnego dokoła osi symetrii naprowadza

pęknięcia lub sfałdowania, przechodzące przez oś, do pokrycia się z pierwotnym ich położeniem. Może to nie dotyczyć pęknięć leżących poza obszarem przyległym do osi symetrii.

2.7. Pęknięcia lub sfałdowania układają się w sieć sześciokątów. Na ostatnio opisaną własność kończą się te cechy układu pęknięć, które wynikają z jego symetrii. Aby wskazać jeszcze na jedną cechę tego układu, rozpatrzmy zmiany potencjału nagromadzonego w powierzchniowej warstwie kuli, wywołane jej pęknięciami. Powstawanie pęknięć jest związane z ubytkiem energii potencjalnej, nagromadzonej przez odkształcenia sprężyste, oraz z wytrzymałością materiału. Pęknięcia występują dopiero wtedy, gdy naprężenie dojdzie do granicy wytrzymałości materiału. Każde pęknięcie łądzi stan naprężenia w swoim otoczeniu. Następne pęknięcia występują w miejscach, w których naprężenia nie uległy zmniejszeniu. Powstawanie pęknięć kończy się wówczas, gdy na całej powierzchni kuli naprężenia są mniejsze od granicy wytrzymałości.

Zgodnie z zasadą najmniejszej wytrzymałości pęknięcia układają się na powierzchni kuli tak, aby odpowiadający im spadek energii potencjalnej był jak największy w odniesieniu do jednostki długości pęknięć. Podkreślając formę ekstremum związanego, warunek ten można wypowiedzieć albo w postaci: «minimum długości pęknięć wyzwalaających daną ilość energii potencjalnej» albo w postaci: «maksimum wyzwolonej energii potencjalnej wywołującej sieć pęknięć o danej długości».

Ilość wyzwolonej energii potencjalnej przynależna jednemu wielobokowi siatki pęknięć jest proporcjonalna do jego pola, a długość pęknięć przynależna temu wielobokowi jest równa połowie jego obwodu, ponieważ do każdego pęknięcia przylegają dwa wieloboki.

Oznaczając przez V wyzwoloną energię potencjalną, przez A pole wieloboku, przez p obwód wieloboku oraz przez c stałą, wyrażamy warunek wyznaczający kształt osi pęknięć w postaci

$$\text{minimum } p/2 \text{ przy } V = cA = \text{const},$$

to jest

$$\text{minimum } p \text{ przy } A = \text{const},$$

lub w postaci

$$\text{maksimum } V = cA \text{ przy } p/2 = \text{const},$$

to jest

$$\text{maksimum } A \text{ przy } p = \text{const}.$$

Jeżeli powierzchnia jest płaska, to warunki te wyznaczają sieć sześcioboków foremnych. Jeżeli powierzchnia jest kulista, to warunki te wyznaczają taki sześciokąt, którego kształt w ten sposób zależy od promienia kuli, że zdąża do kształtu sześciokąta foremnego, gdy promień ten wzrasta nieograniczenie.

2.8. Uwagi końcowe. Na tym można by skończyć rozpatrywanie myślowego modelu kuli naprężonej termicznie. Jednak trzeba jeszcze za-

strzec, że wszystkie rozumowania dotyczące tego modelu mogą prowadzić do schematu zbliżonego do rzeczywistości w takim stopniu, w jakim rzeczywiste warunki, w których powstają pęknięcia, są zbliżone do modelu kuli. Ponieważ minimum $p : A$, wyrażone w zależności od parametrów kształtu sieci, jest niewątpliwie dość płaskie, przeto nawet niewielkie nierównomierności sprężystościowe lub wytrzymałościowe mogą wyraźnie wpływać na kształt siatki pęknięć. Zresztą obserwacja wszystkim dobrze znanych siatek pęknięć najlepiej wskazuje, w jakim stopniu kształt rzeczywistych pęknięć może odbiegać od idealnego schematu.

Przeprowadzone rozumowanie nie daje odpowiedzi na wszystkie pytania nasuwające się w związku z powstawaniem pęknięć powierzchniowych. Może więc być w miarę potrzeby rozszerzane i uzupełniane. Spośród tych uzupełnień istotnymi wydają się następujące tematy. Po pierwsze, jako zagadnienie mechaniki technicznej, interesujące może być wyznaczenie wymiarów elementów siatki pęknięć w zależności od własności materiału. Po drugie, jako zagadnienie geometryczne, interesująca jest sprawa wyznaczenia kształtu siatki pęknięć na kuli. Po trzecie mogłoby być interesujące przedyskutowanie analogicznych zagadnień w trójwymiarowym stanie naprężenia. Natomiast takie zagadnienia, jak na przykład wyznaczanie naprężeń w spękanej warstwie powierzchniowej, są zapewne mniej ważne.

Wydaje się rzeczą istotną zwrócić uwagi na to, że z dwóch cech regularności geometrycznej układu rys — prostokreślności i równości kątów — druga cecha daje się uzasadnić jedynie przez ekstremalność mierników właściwych zjawiskom wytrzymałościowym. Niewątpliwie ekstremalnością przemian energetycznych daje się też wyjaśnić równość kątów komórek B é n a r d a i równość kątów dwuściennych między ziarnami metali. Jest to zapewne wspólna cecha zjawisk leżących u podstawy regularności geometrycznej wszystkich form opisanych na wstępie.

Wreszcie zwróćmy uwagę na to, że wartość otrzymanych wyników z punktu widzenia zastosowań mechaniki technicznej jest niewielka. Mogą one służyć do wyjaśnienia niektórych zjawisk opisanych na wstępie, na przykład rozpadania się ściskanych kostek kamiennych na graniastosłupy, powstawania kształtów słupów bazaltu i spękań powierzchniowych ziemi. Regularne układy odcinków prostych nabierają wagi dopiero w zagadnieniach technicznych, które mają na celu wyznaczenie kształtu pewnych przedmiotów lub układu budowli ze względu na minimum nakładów na ich wykonanie i użytkowanie.

3. Wnioski

Regularne układy odcinków prostych występują w zagadnieniach wytrzymałościowych dotyczących zjawisk wymienionych na wstępie.

W analizie tych zjawisk są one związane z ich cechami ekstremalnymi.

Pod tym względem są one analogiczne do takich figur geometrycznych, jak linia łańcuchowa, brachistochroma, koło, prosta oraz figur, związanych z występowaniem ekstremów najrozmaitszych mierników w wielkiej liczbie zagadnień.

Резюме

О ФОРМЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ТРЕЩИН

Поверхности твёрдых тел часто покрыты системами трещин или складок, обусловленных внутренними напряжениями. Трещины появляются, например, на поверхности земли, на штукатурках, на глазури фарфора. Приложенные рисунки дают примеры таких трещин.

Поверхностные трещины обладают следующими характеристическими чертами.

Вдоль трещин, а частично и вдоль складок, исчезает первичная связь между материалом.

Между трещинами или складками находятся непотресканные и бескладочные поля.

Внешний слой, разделённый трещинами, сохраняет связь со слоями, находящимися глубже.

Трещины имеют форму зигзагообразных линий, разветвляющихся и состоящих из отрезков линий, приближенных к простым.

Сетка трещин или складок обладает иногда яркой правильностью в отношении направлений трещин, величины углов и длины отрезков.

Одновременно образующиеся трещины расходятся обычно по три из одной точки, а углы между ними приближены по величине к одной третьей части полного угла. Если после образования системы трещин, вследствие новых причин образуются новые трещины, то в этом случае углы между новыми и первичными трещинами, в их общих точках, близки простым углам (фиг. 8, 18, 19 и 20). Во время образования трещин, из за симметрии напряжённого состояния, появляется стремление к выравниванию сходящихся углов. Это стремление появляется не только в этом случае, когда три трещины берут одновременно свое начало в одной точке, но и в том случае, когда новая трещина ответвляется от прежней.

Для анализа такого рода явлений принята абстрактная модель в виде шара, однородно построенного из твёрдого материала; шар находится в напряжённом состоянии под действием протекания теплоты от центра к поверхности. В этом состоянии радиальные напряжения имеют на поверхности нулевые значения, а нормальные напряжения, выступающие вдоль касательных, значение $\sigma = \alpha \Delta t E / (1 - \nu)$, независимое от направления. В этой формуле выступает коэффициент термического расширения α , коэффициент упругости E , число Пуассона ν и приращение температуры Δt .

Простые рассуждения ведут к следующим заключениям, касающимся формы трещин на поверхности шара, подтверждая факты, известные из наблюдений.

Сетка трещин состоит из отрезков конечной длины.

Уменьшение напряжений в поверхностном слое обусловлено образованием сетки с конечными интервалами, а не исчезновением связи частиц на всей поверхности.

Трещины и складки могут образоваться независимо друг от друга и в любой последовательности.

Эти заключения вытекают из принципа Сен-Венана. Их подтверждение можно найти тоже в зависимостях, выведенных Гриффитом для поверхностных напряжений.

Из симметрии напряжённого состояния по обеим сторонам трещины вытекают ещё два заключения: (1), что линии трещин или складок могут состоять лишь из отрезков больших кругов и, (2), что радиус шара, проходящий через точку перелома линии трещины, является осью симметрии n -го порядка дуг трещин, проходящих через эту точку.

Этим исчерпываются черты форм трещин, вытекающие из симметрии напряжённого состояния. Для того, чтобы доказать ещё одну черту этих форм, полагаем, согласно принципу наименьшего сопротивления, что трещины располагаются так, чтобы сопутствующее им падение потенциальной энергии было самое большое по отношению к единице длины трещин. Это положение ведет к выводу, что трещины укладываются на поверхности шара в шестиугольники, которые стремятся к правильным шестиугольникам, когда радиус шара бесконечно возрастает.

Формы поверхностных трещин обладают чертами подобия формам, образованным другими явлениями, как, например, течениями Бенара и кристаллизацией металлов. Можно предполагать, что общность этих черт обусловлена экстремальностью энергетических превращений, сопровождающих указанные явления. Сетка правильных шестиугольников выступает здесь аналогично таким геометрическим фигурам, как цепная линия, брахистохрона, круг, прямая и т. п., которые связаны с экстремумами разнообразных мерил встречающихся в многочисленных задачах.

Résumé

SUR LES FORMES DES FISSURES SUPERFICIELLES

Les surfaces des corps solides sont souvent couvertes de réseaux de fissures ou de plis, dus aux tensions internes. On les aperçoit par exemple sur la surface des terres desséchées, des enduits, des murs, des couvertes d'émail de porcelaine.

Ces réseaux se distinguent par les faits suivants:

(1) le long des fissures ou des plis la matière est totalement ou partiellement désagrégée,

(2) les surfaces des champs encadrés par les fissures ou les plis ne sont ni fissurées ni pliées,

(3) la forme du réseau de fissures ou de plis est plus ou moins régulière.

Ces phénomènes peuvent être analysés sur un modèle constitué par une sphère homogène qui subit des déformations par changement de température des couches extérieures. En ce cas les tensions ne dépendent que de la distance du centre de la sphère. À la surface, les tensions normales, dirigées suivant le prolongement du rayon sont nulles et la valeur commune des tensions normales dirigées suivant les tangentes aux grands cercles est $\sigma = a \Delta t E_r (1 - \nu)$.

En discutant les fissurations qui peuvent se former dans ces conditions sur la surface d'une sphère, il est facile de démontrer les propositions suivantes.

Les fissures doivent être disposées dans des distances finies les unes des autres. Cette proposition résulte du principe de Saint Venant, d'après lequel une fissure ne peut produire de changements de l'état de déformation que dans un certain domaine adjacent.

Au voisinage d'une fissure, les déformations de la sphère sont symétriques par rapport au plan du grand cercle tangent à la ligne de la fissure; c'est la conséquence de l'uniformité des déformations avant la fissuration et de la symétrie des déformations, causées par une fissure dans son voisinage.

Les fissures ne peuvent se produire que le long des grands cercles. On établit cette propriété en démontrant par fausse position, que dans le cas contraire les fissures devraient former un réseau infiniment dense; contrairement à la première proposition.

Les fissures se débranchent symétriquement; le rayon de la sphère passant par le point de débranchement est un axe de symétrie d'ordre n des lignes de fissuration; c'est la conséquence de la symétrie de l'état de déformation par rapport aux fissures.

Enfin, en supposant que les fissures se disposent sur la surface de la sphère suivant la condition, que le quotient des forces exercées le long des fissures et de l'énergie des déformations élastiques soit minimum, on ramène la recherche de la forme de leur réseau à la recherche de leur moindre longueur, nécessaire pour couvrir une surface donnée, c'est-à-dire à un problème isopérimétrique, qui conduit à la conclusion que les fissures forment un réseau hexagonal.

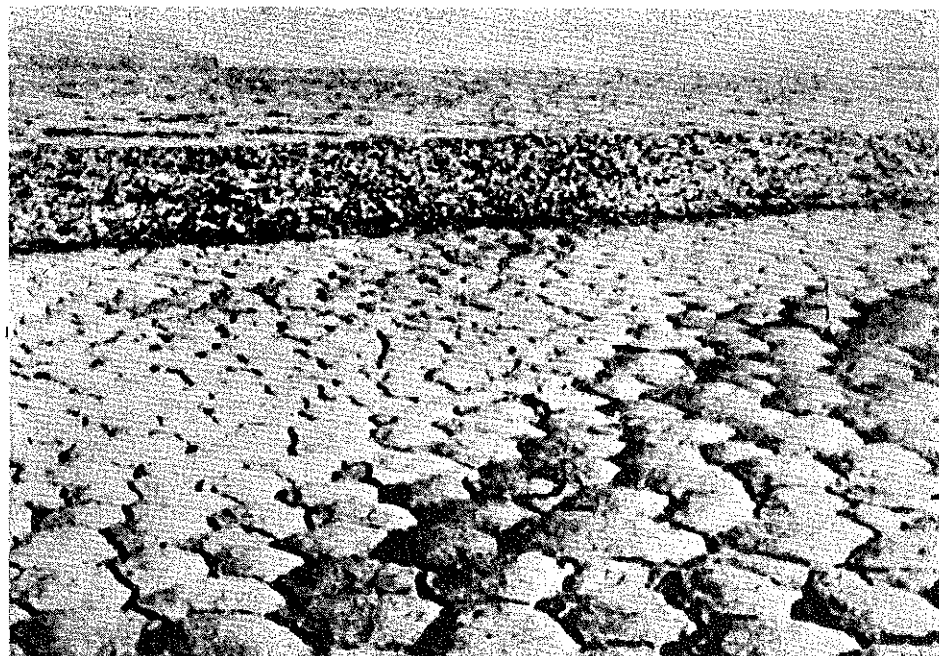
Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1953 r.

ILUSTRACJE

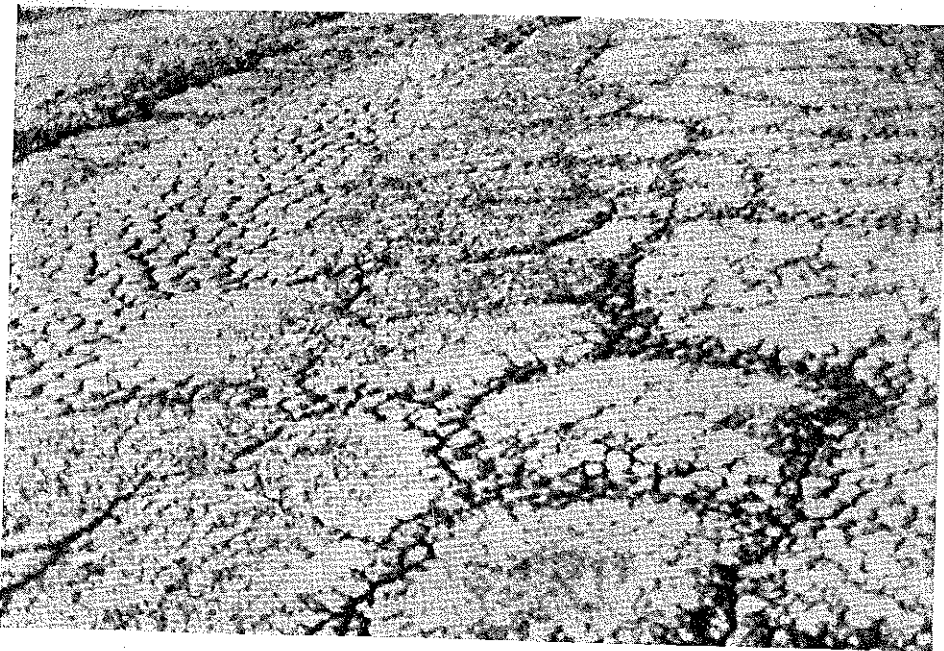
Fotografie 1, 5, 7, 8, 18, 19, 20 i rys. 24 i 25 są własnością autora; fotografie 2, 3, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 i 17 podano według *Astrophysica Norwegica*, t. 4; fotografię 4 reprodukowano według O. D. Engel, *Geomorphology*; fotografię 21 podano według *Ossature Métallique*; fotografia 23 stanowi własność Zakładu Metaloznawstwa Politechniki Warszawskiej.



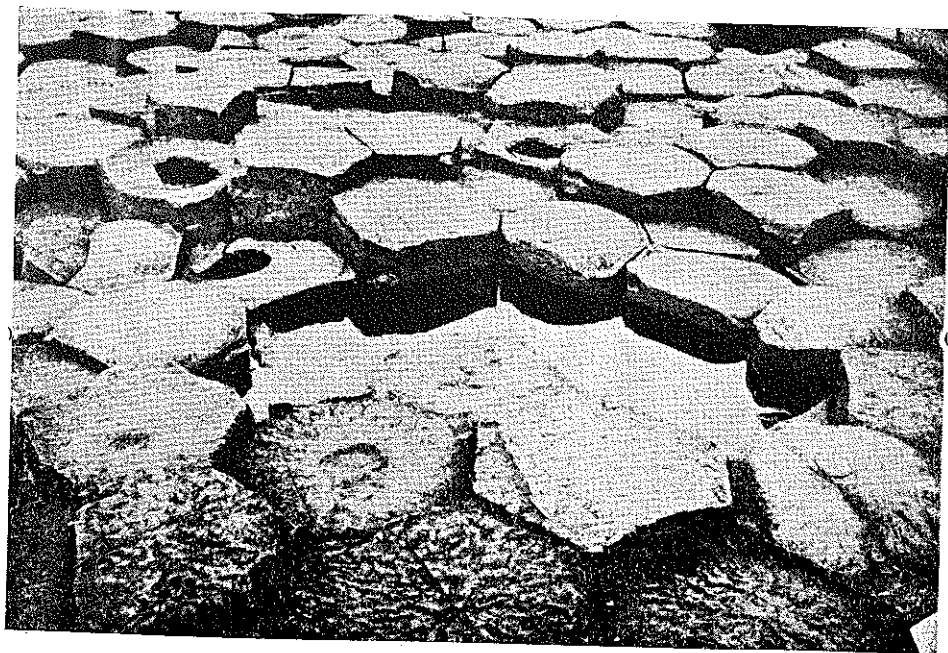
Rys. 1. Spękanie rozmarzającej ziemi ogrodowej. Warszawa.



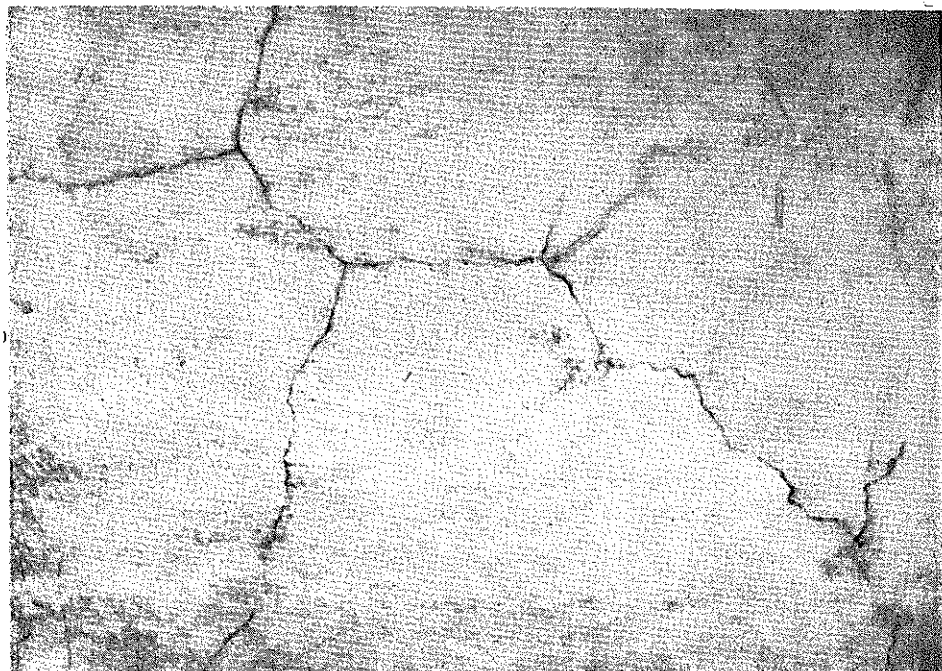
Rys. 2. Wieloboczne spękania ziemi na wybrzeżu. Szpicberg.



Rys. 3. Wieloboczne spekania ziemi na wybrzeżu. Szpicberg.



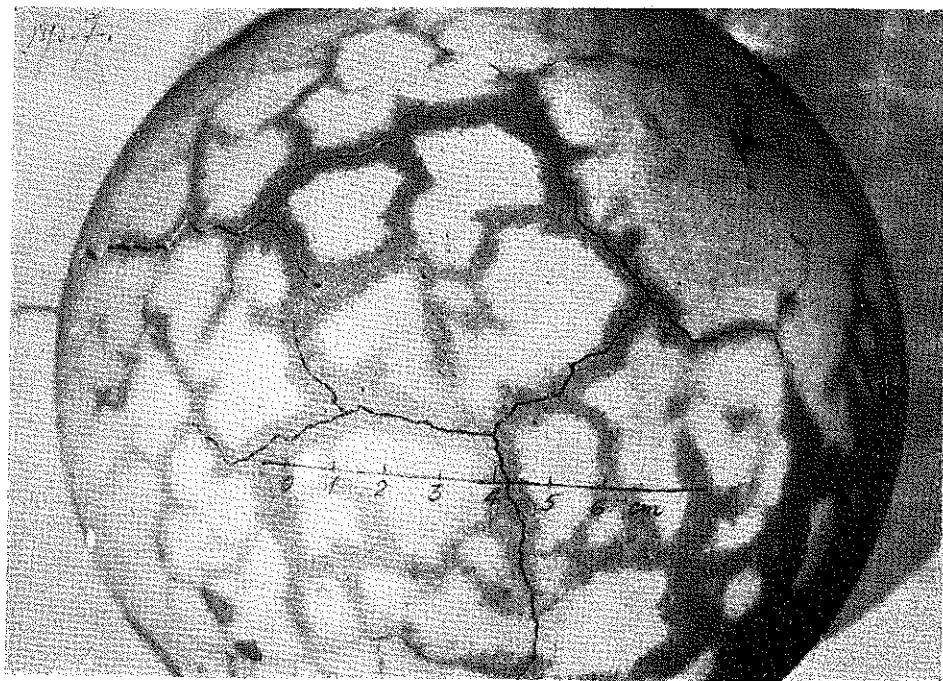
Rys. 4. Przekroje słupów bazaltu. Irlandia.



Rys. 5. Rysy na wyprawie z zaczynu cementowego.



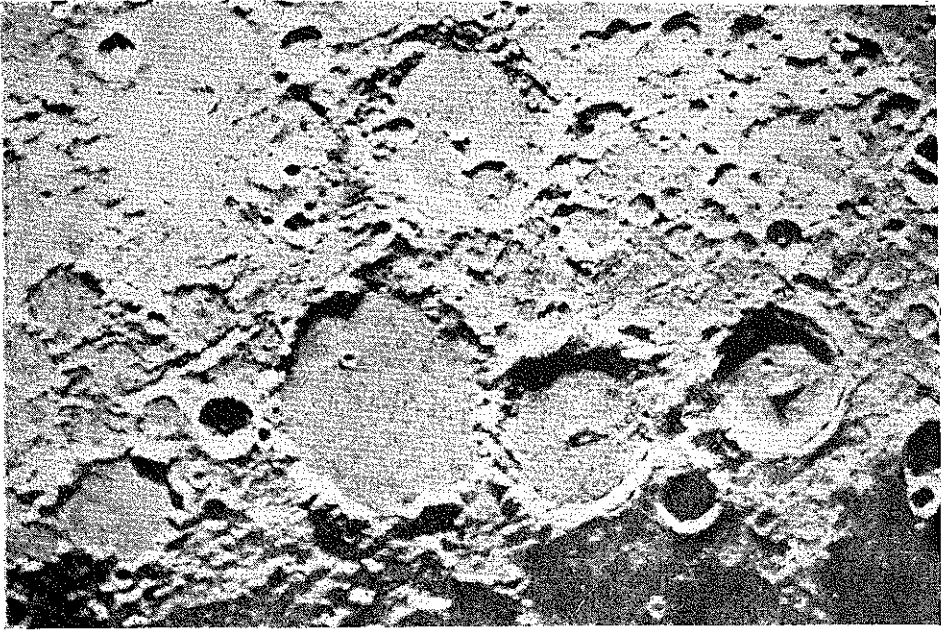
Rys. 6. Rysy na tynku wapiennym pod malowidłem M. A. Buonarotti



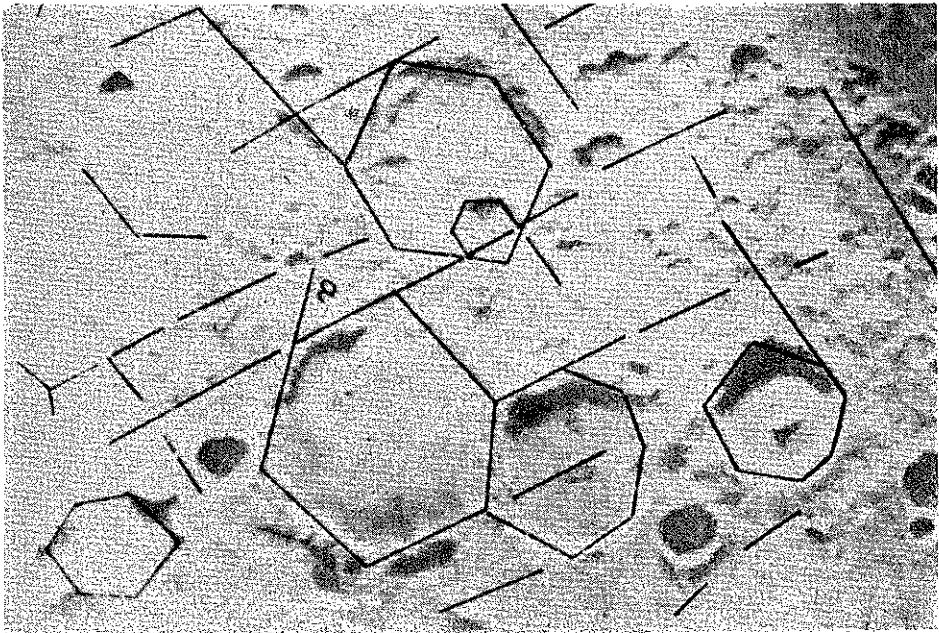
Rys. 7. Podwójny układ rys na kuli z zaczynu cementowego.



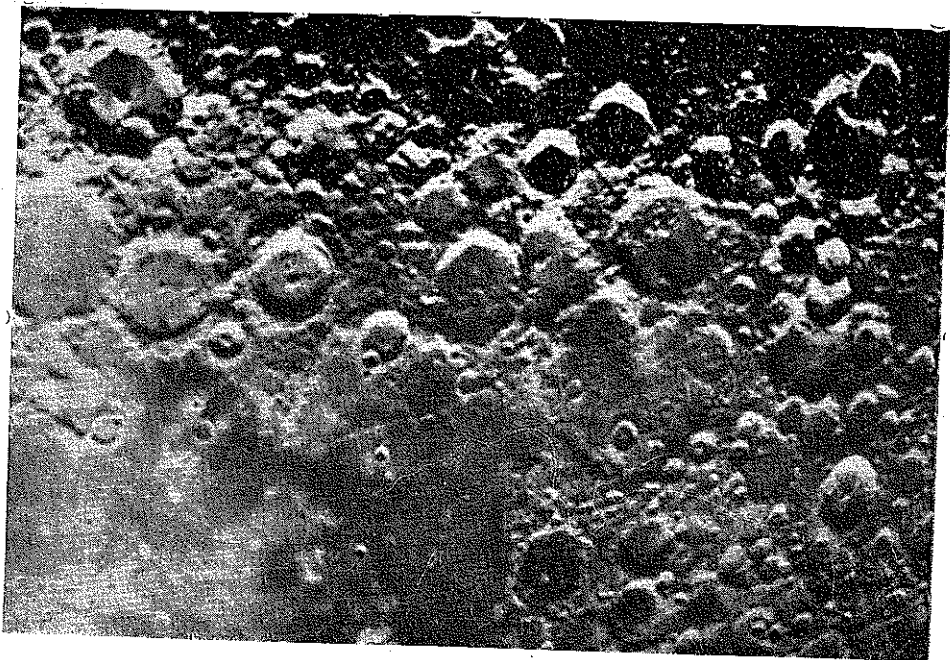
Rys. 8. Sfałdowania na zbyt tłustym tynku wapiennym.



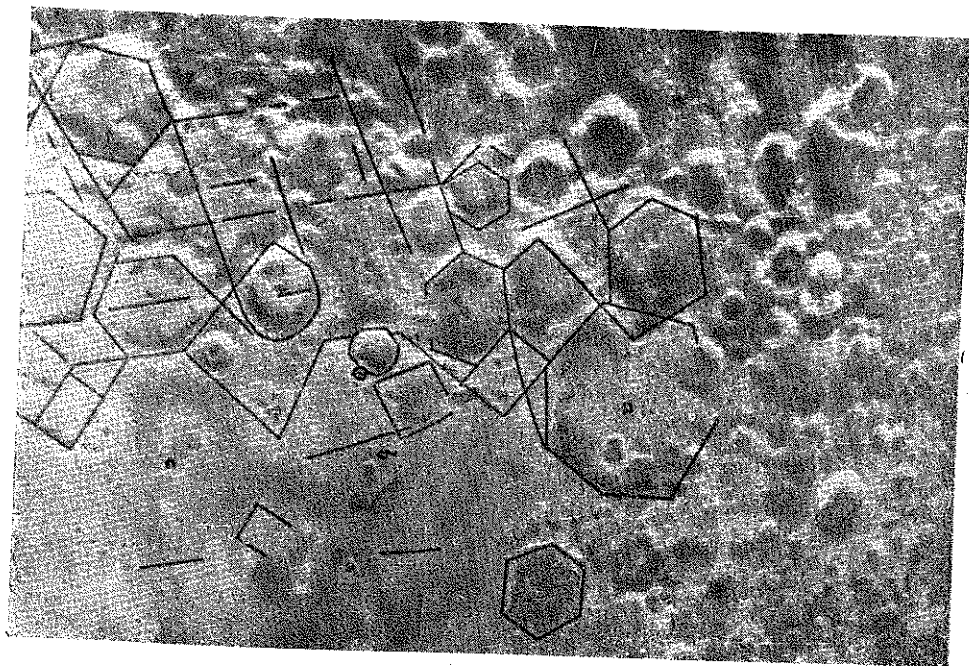
Rys. 9. Powierzchnia księżyca w okolicy krateru P t o l e m e u s z a.



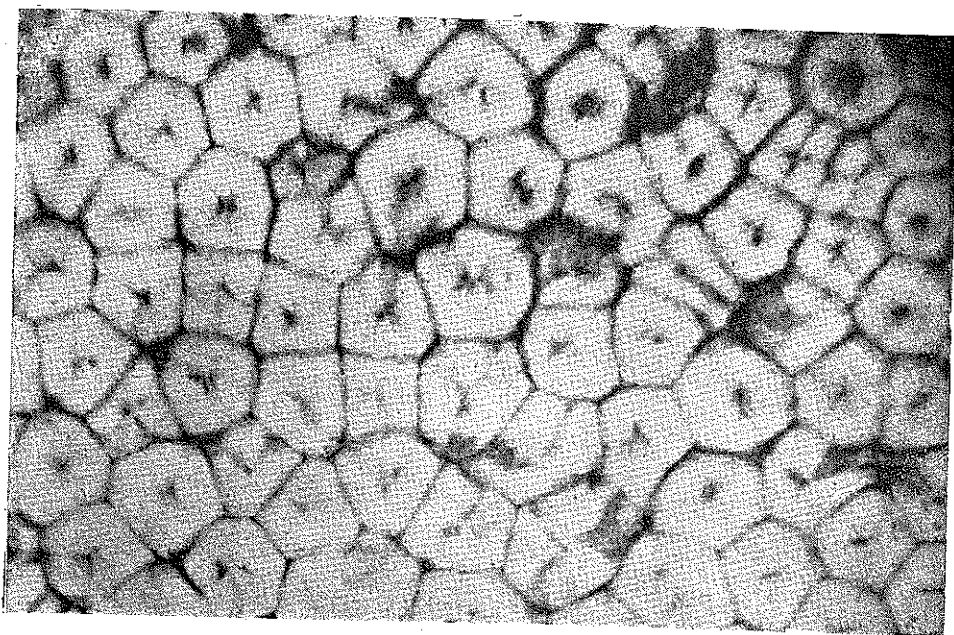
Rys. 10. Oznaczenie układu rys na rysunku 9.



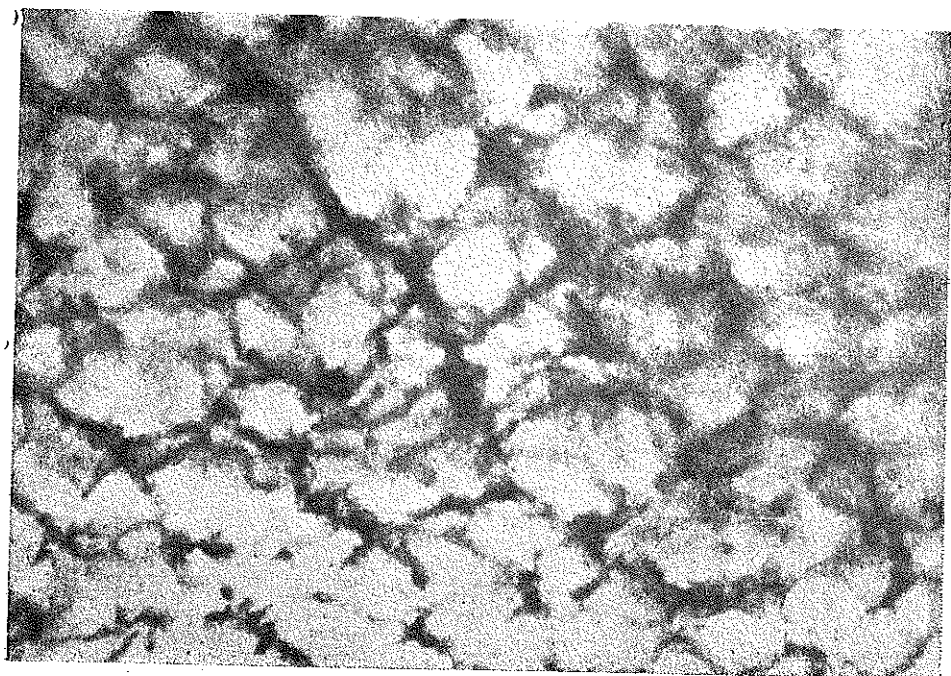
Rys. 11. Powierzchnia księżycy w okolicy krateru Ptolemeusza i pola wieloboczne na brzegach Mare Nubium.



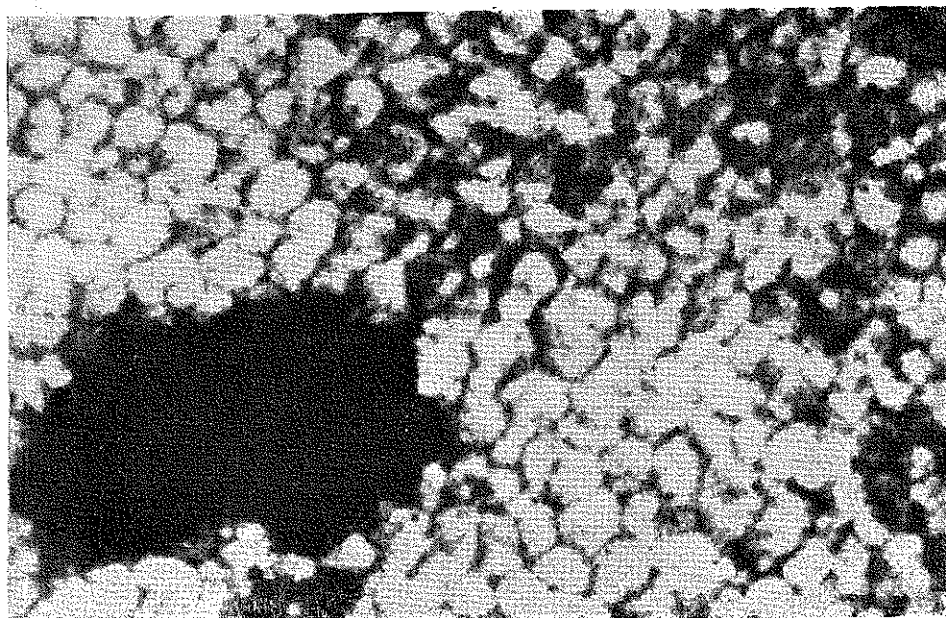
Rys. 12. Oznaczenie układu rys na rysunku 11.



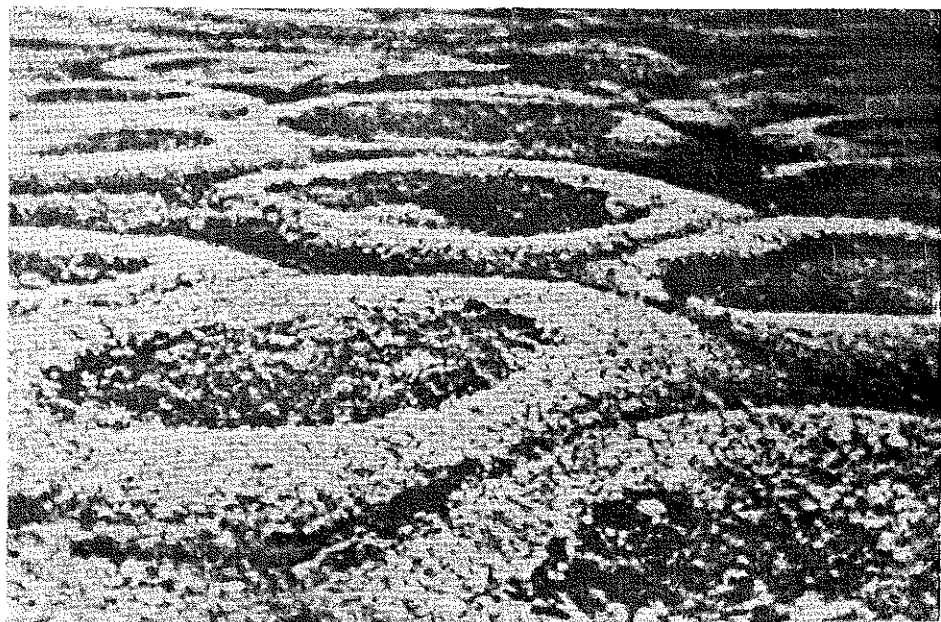
Rys. 13. Komórki wytworzone przez ruchy wirowe w cienkiej warstwie lepkiej cieczy według doświadczenia B é n a r d a.



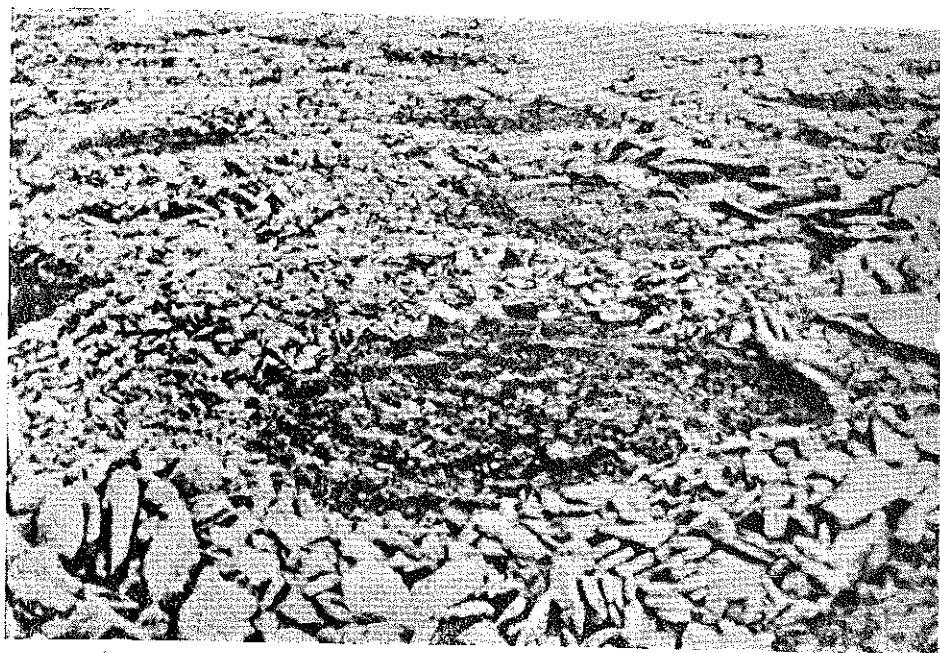
Rys. 14. Podział wieloboczny obłoków w cienkiej warstwie chmur.



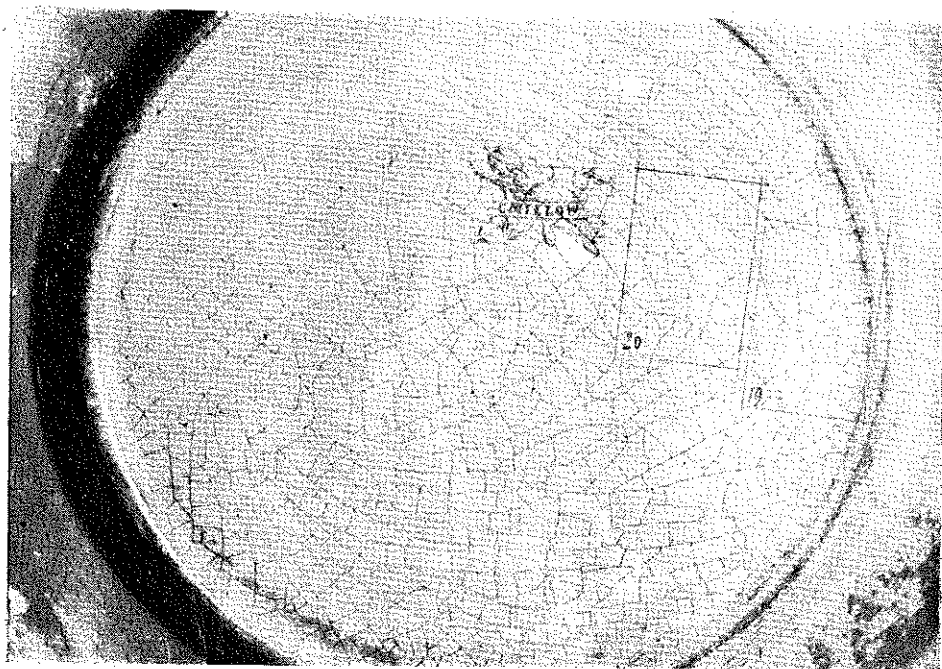
Rys. 15. Wieloboczna powłoka konwekcyjna fotosfery słońca.



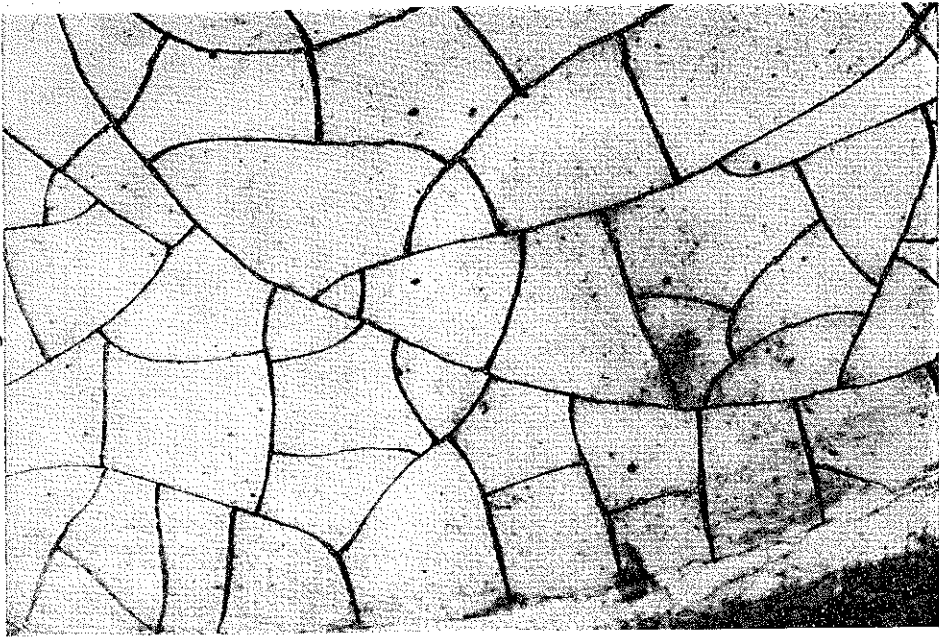
Rys. 16. Wieloboki kamienne. Szpicberg.



Rys. 17. Wieloboki kamienne. Szpicberg.



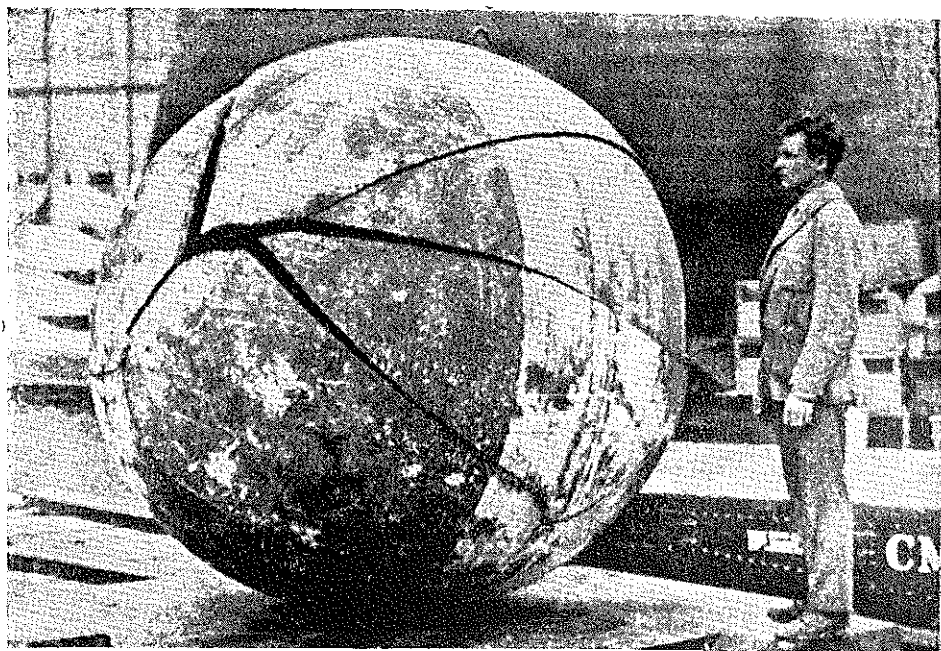
Rys. 18. Sieć pęknięć szkliva na spodzie talerza.



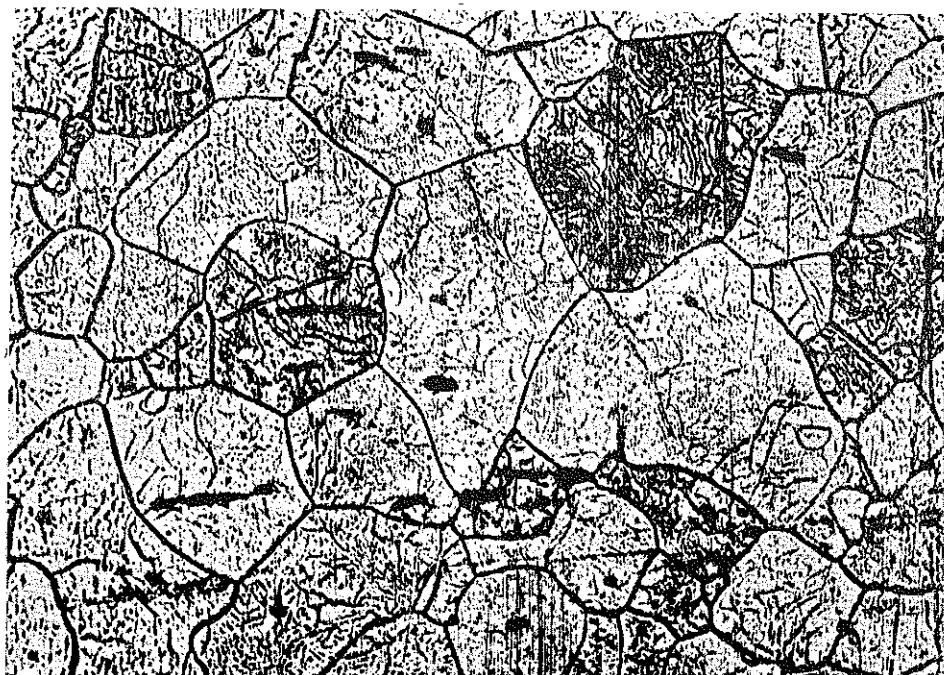
Rys. 19. Układ spękań szkliva w pobliżu obrzeża talerza.



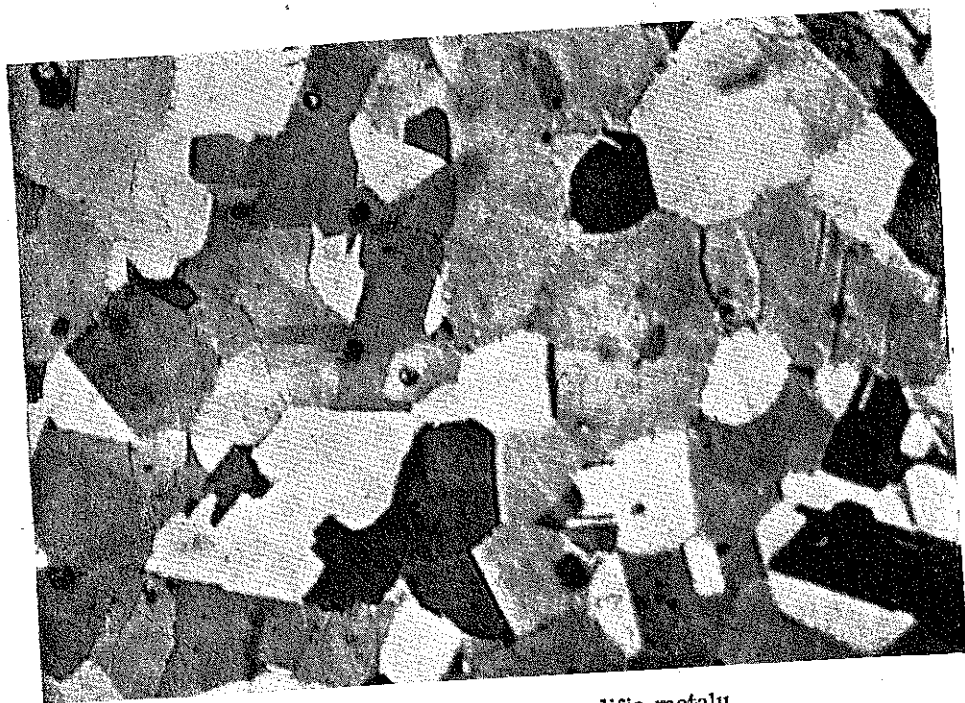
Rys. 20. Układ spękań szkliva, podłużnych i poprzecznych, wskazujący dążenie do zachowania kątów prostych między rysami wcześniejszymi i późniejszymi.



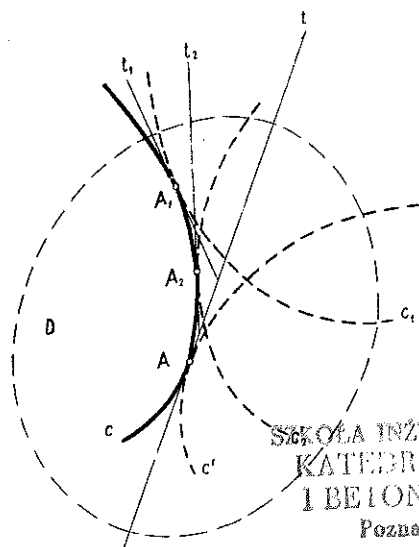
Rys. 21. Układ nieprzecinających się pęknięć zbiornika stalowego.



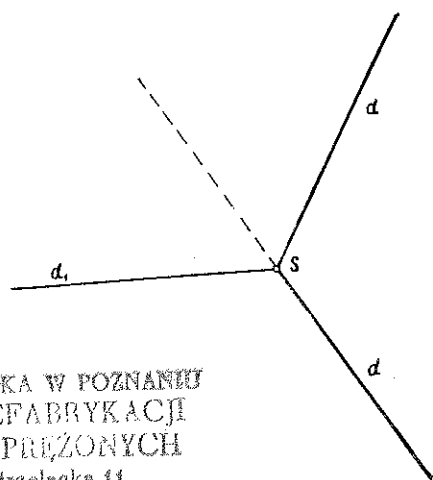
Rys. 22. Układ ziaren na szlifie miękkiej stali.



Rys. 23. Układ ziaren na szlifie metalu.



Rys. 24. Ilustracja do dowodu prostoliniowości pęknięć.



Rys. 25. Ilustracja do dowodu symetrii pęknięć.

SZKOŁA INŻYNIERSKA W POZNANIU
 KATEDRA PREFABRYKACJI
 I BETONÓW SPRĘŻONYCH
 Poznań, ul. Strzelecka 11