

860a
ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

VIII

JERZY NOWIŃSKI

Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt
na podstawie metody Ritza

W A R S Z A W A

1 9 5 3

SZKOŁA INŻYNIERSKA W POZNANI
KATEDRA MECHANIKI
I DRUKÓW SPECJALNYCH
Poznań, ul. Strzelcka 13

ZAKŁAD BADAWCZY BUDOWNICTWA
SZKOŁY INŻYNIERSKIEJ W POZNANIU

Nr. inw. 860

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (VIII)

Copyright 1953 by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa (Poland). Printed in Poland.

All rights reserved

No part of this book may be translated or reproduced
in any form, by mimeograph or any other means,
without permission in writing from the publishers.

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK

Nakład 1000 + 150 egz. Papier druk. sat. 70x100 16, 70 g. Arkuszy wydawniczych 3. Arkuszy drukarskich 2,5.
Oddano do składania dn. 27.VII.53 r. Druk. ukończono dn. 15.XII.53 r. Zam. 151. 4-B-55425. Cena zł 8,—

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa, Śniadeckich 8

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

JERZY NOWIŃSKI

WYZNACZENIE PRZYBLIŻONEJ WIELKOŚCI UGIĘCIA PŁYT
NA PODSTAWIE METODY RITZA

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

VIII

WARSZAWA 1953

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

	str.
1. Wzory ogólne	3
2. Płyty kołowe oparte swobodnie na obwodzie	6
3. Płyty kołowe utwierdzone sztywnie na obwodzie	12
4. Płyty kołowe z otworem kołowym	17
5. Płyty kołowe wspornikowe	23
6. Płyty prostokątne	27

1. Wzory ogólne

W innej pracy¹⁾ rozpatrzono zastosowanie metody Ritz'a do wyznaczenia ugięcia belek i podano wyjaśnienia ogólne dotyczące tej metody. Przyjmując, że są one znane czytelnikowi, podamy tutaj przykłady zastosowania metody Ritz'a do wyznaczenia ugięcia płyt, w szczególności płyt okrągłych.

Obierzmy osie x i y prostokątnego układu osi współrzędnych x, y, z w płaszczyźnie środkowej płyty i oznaczmy przez δ jej grubość, przez E i ν odpowiednio moduł Younga i liczbę Poissona oraz przez w ugięcie płaszczyzny środkowej pod wpływem obciążenia pionowego, rozłożonego w sposób ciągły, o wielkości $q(x, y)$ na jednostkę powierzchni płyty.

Wiadomo²⁾, że energię sprężystą odkształcenia płyty przedstawia następujące wyrażenie:

$$(1.1) \quad E_s = \frac{D}{2} \iint_F \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy,$$

gdzie

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1-\nu^2)}$$

jest tak zwaną sztywnością płyty, a F oznacza powierzchnię płyty przedstawiającą obszar całkowania.

Założmy, że płyta posiada kształt kołowy i że zarówno jej obciążenie, jako też rodzaj oparcia brzegów są kołowo symetryczne. Początek układu współrzędnych biegunowych r, φ umieścimy w środku koła przedstawiającego płaszczyznę środkową płyty (rys. 1).

¹⁾ Por. [1]. Nawiasem prostokątnym oznaczono numer kolejny prac wymienionych w wykazie literatury na końcu niniejszej pracy.

²⁾ Por. np. [2].

Wówczas można przyjąć, że ugięcie w jest również wielkością kołowo symetryczną i, co za tym idzie, nie zależy od zmiennej φ :

$$w = w(r).$$

Z oczywistych zależności

$$x = r \cos \varphi,$$

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

wynikają znane związki

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \varphi.$$

Wobec tego jest w danym przypadku

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dw}{dr} \cos \varphi$$

i w dalszym ciągu

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d^2 w}{dr^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \sin^2 \varphi.$$

Podobnie otrzymujemy wartość drugiej pochodnej ugięcia względem zmiennej y oraz pochodnej mieszanej względem obu zmiennych x i y :

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 w}{dr^2} \sin^2 \varphi + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \cos^2 \varphi,$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Po uwzględnieniu powyższych związków (1.2)-(1.4) i wykonaniu całkowania względem zmiennej φ , wzór (1.1) dla energii odkształcenia przybiera następującą postać we współrzędnych biegunowych:

$$(1.5.1) \quad E_s = \pi D \int_0^a \left[r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2r \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] dr,$$

gdzie a oznacza promień płyty kołowej.

Zatem energię potencjalną \mathcal{E} układu sił sprężystych i obciążenia przedstawia wzór

$$(1.5) \quad \mathcal{E} = \pi D \int_0^a \left[r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2\nu \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] dr - 2\pi \int_0^a q w r dr.$$

Jeżeli założyć zgodnie z postępowaniem przyjętym przez W. Ritz'a, że nieznaną funkcja w daje się przedstawić w postaci sumy pewnych funkcji $f_i(r)$, $i=1, 2, \dots, n$, spełniających (niekoniecznie wszystkie) warunki brzegowe zagadnienia:

$$(1.6) \quad w = A_1 f_1(r) + A_2 f_2(r) + \dots + A_n f_n(r),$$

to twierdzenie o minimum energii potencjalnej układu w stanie równowagi trwałej dostarcza n warunków postaci

$$(1.7) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dla wyznaczenia wartości n stałych A_i .

Funkcje $f_i(r)$ występujące w tzw. założeniu Ritz'a (1.6) mogą być, oczywiście, dobierane w różnej postaci. W rozpatrzonych dalej przykładach będziemy się opierać stale na porównaniu zginania płyt ze zginaniem belek³⁾. Wykorzystanie tej analogii fizycznej pozwala uzyskać — jak wykazują przykłady — na ogół wystarczająco dokładne rozwiązanie przybliżone już przy użyciu jednej funkcji $f_1(r)$, co znacznie upraszcza obliczenie.

W tym celu przyjmujemy, że funkcja ugięcia dowolnej średnicy płaszczyzny środkowej płyty posiada postać podobną do funkcji ugięcia osi belki, której końce oparte są w taki sam sposób jak brzeg płyty. Obciążenie hipotetycznej belki stanowi obciążenie przypadające na średnicę belki. Na przykład dla płyty, utwierdzonej sztywnie na obwodzie i obciążonej równomiernie, kształt średnicy odkształconej przyjęty zostaje jako podobny do kształtu osi odkształconej belki, obustronnie sztywnie utwierdzonej i poddanej działaniu obciążenia równomiernego. Oczywiście, wobec założenia, że ugięcie płyty nie zależy od wartości kąta φ , otrzymuje się w ten sposób równocześnie kształt całej płaszczyzny środkowej płyty po wystąpieniu odkształcenia.

Należy wyraźnie zaznaczyć, że przyjęte założenie co do kształtu powierzchni odkształconej przedstawia założenie czysto formalne i nie

³⁾ Przykłady takiego postępowania w odniesieniu do płyt prostokątnych podali już w pewnych szczególnych przypadkach A. i L. Föpplowie, [4].

oznacza bynajmniej, że płyta jest traktowana jak wiązka belek, przechodzących przez środek płyty i w określony sposób ze sobą współpracujących. Przeciwnie, wykorzystanie nasuwającej się w danym przypadku analogii pomiędzy pracą belki i pracą płyty służy wyłącznie do ustalenia przybliżonego kształtu powierzchni środkowej płyty; po określeniu postaci funkcji ugięcia $f_z(r)$ można w pełni abstrahować od przesłanek fizycznych, które doprowadziły do jej ustalenia.

Jest rzeczą zrozumiałą, że w przyjętej przez nas metodzie postępowania postać funkcji ugięcia zależy jedynie od sposobu oparcia brzegów płyty, nie zależy zaś od sposobu obciążenia. Wynika stąd, że dla płyt o tym samym typie podparcia energia odkształcenia E_s (wzór 1.5.1) daje się obliczyć efektywnie raz na zawsze. Jak stwierdzimy na przykładach, powoduje to znaczne skrócenie rachunków, zwłaszcza że obliczenie zależnej od rodzaju obciążenia energii potencjalnej sił zewnętrznych sprowadza się na ogół do prostego całkowania wielomianów.

Aby uzyskać możliwość porównania otrzymanych wyników przybliżonych z rozwiązaniami ściślejszymi, rozpatrywać będziemy w ogólności tylko takie przykłady, których rozwiązania okazały się znane. Jednakże, jak można stwierdzić po dokładniejszym zapoznaniu się z zastosowaną dalej metodą, również inne, bardziej skomplikowane zagadnienia dadzą się rozwiązać bez zasadniczych trudności. Nie obejdzie się jednak w przypadkach nie typowych bez pewnej pomysłowości rozwiązującego.

Zauważmy, że naprężenia występujące w płycie kołowej przyjmują w danym przypadku następującą postać ⁴⁾:

$$(1.8) \quad \sigma_r = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right),$$

$$(1.9) \quad \sigma_\varphi = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right).$$

We wzorach powyższych wskaźnik r oznacza naprężenie normalne promieniowe, a wskaźnik φ naprężenie normalne obwodowe; naprężenia styczne $\tau_{r\varphi}$ równoległe do płaszczyzny środkowej płyty są tożsamośćowo równe zeru.

2. Płyty kołowe oparte swobodnie na obwodzie

2.1. Płyta kołowa oparta swobodnie na obwodzie, poddana obciążeniu równomiernie rozłożonemu (rys. 2). Równanie osi odkształconej belki prostej o długości $2a$, obciążonej równomiernie, przybiera następującą

⁴⁾ Por. [7].

postać, gdy początek osi współrzędnych umieścić w połowie rozpiętości belki:

$$(2.1) \quad w = A(r^4 - 6a^2r^2 + 5a^4).$$

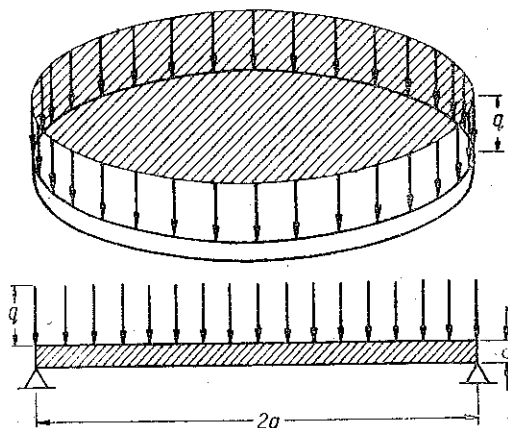
Funkcja powyższa spełnia przepisane w danym razie warunki brzegowe na obu końcach belki (dla $r = \pm a$):

$$(2.2) \quad w = \frac{d^2 w}{d r^2} = 0.$$

Odpowiednie warunki dla płyty swobodnie podpartej są (dla $r = a$)

$$(2.3) \quad \begin{cases} w = 0, \\ \sigma_r = 0. \end{cases}$$

Jeżeli ugięcie płyty przedstawione będzie przez funkcję (2.1), wówczas pierwszy z warunków (2.3) jest spełniony. Natomiast drugi warunek, jak wynika ze wzoru (1.8), nie jest spełniony, gdyż wartość pochodnej dw/dr nie jest równa zero na obwodzie płyty. Istnieje zatem tutaj pewien bieżący moment zginający o wielkości



Rys. 2

$$M_a = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_r z dz = 8AD\nu a^2$$

na jednostkę długości obwodu. Choć i funkcja (2.1) nie spełnia wszystkich warunków brzegowych, obierzemy ją jako funkcję przedstawiającą ugięcie płyty. Zastosowanie bowiem metody *Ritz* pozwoli i w tym przypadku uzyskać — jak się zaraz przekonamy — wystarczająco dokładne rozwiązanie przybliżone.

Na podstawie wzoru (1.5) otrzymujemy po wykonaniu prostych przekształceń wartość energii potencjalnej układu równą

$$(2.4) \quad \mathfrak{D} = \frac{\pi a^6}{3} [32(7 + 6\nu)DA^2 - 7Aq]$$

i w dalszym ciągu z warunku (1.7)

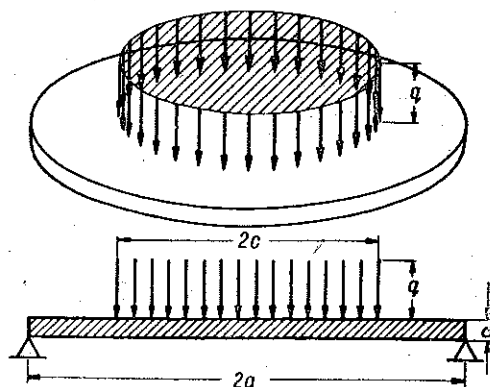
$$A = \frac{21(1 - \nu^2)}{16(7 + 6\nu)E\delta^3} q.$$

Wobec tego największe ugięcie w środku płyty jest równe

$$(2.5) \quad w_{max} = \frac{3(1-\nu)(5+\nu)a^4}{16E\delta^3} q \cdot \frac{35(1+\nu)}{(5+\nu)(7+6\nu)},$$

gdzie pierwszy czynnik przedstawia ugięcie maksymalne obliczone na podstawie wzorów ścisłych⁵⁾. Wartość drugiego czynnika przy założeniu, że współczynnik Poissona ν jest równy np. $\frac{1}{4}$, wynosi 0,98; zatem błąd rozwiązania przybliżonego nie przewyższa 2%.⁰.

2.2. Płyta kołowa oparta swobodnie na obwodzie, poddana obciążeniu równomiernie rozłożonemu w części środkowej płyty (rys. 3). Wykorzystujemy obliczoną poprzednio wartość energii sprężystej odkształcenia, która na podstawie wzoru (2.4) jest równa



Rys. 3

$$(2.6) \quad E_s = \frac{32}{3}(7+6\nu)\pi a^6 D A^2.$$

Energia potencjalną E_z sił zewnętrznych przy założeniu Ritz'a (2.1) przedstawia następujące wyrażenie [por. drugi składnik po prawej stronie wzoru (1.5)]:

$$(2.7) \quad E_z = -2\pi q A \int_0^c (r^4 - 6a^2 r^2 + 5a^4) r dr.$$

Po wykonaniu prostych przekształceń otrzymuje się

$$(2.8) \quad \mathfrak{D} = \frac{32}{3}(7+6\nu)\pi a^6 D A^2 - \pi c^2 \left(\frac{c^4}{3} - 3a^2 c^2 + 5a^4 \right) q A$$

i w dalszym ciągu na podstawie warunku (1.7)

$$(2.9) \quad A = \frac{(c^4 - 9a^2 c^2 + 15a^4) c^2}{64(7+6\nu)a^6 D} q.$$

Wobec tego największe ugięcie w środku płyty jest równe

$$(2.10) \quad w_{max} = \frac{15(1-\nu^3)(c^4 - 9a^2 c^2 + 15a^4) c^2}{16(7+6\nu)E\delta^3 a^2} q.$$

⁵⁾ Por. [5]. W dalszym ciągu, porównując otrzymane wyniki przybliżone z obliczeniami ścisłymi lub ściślejszymi, mamy na względzie głównie wyniki obliczeń zebrane w podręcznikach A. N. Dinnika, [5], i K. Beyera, [6].

Gdy obciążenie jest rozłożone równomiernie na całej powierzchni płyty ($c = a$), wówczas wzór (2.10) przechodzi we wzór (2.5), jak być powinno. Oznaczmy teraz całkowite obciążenie przypadające na płytę przez P . Wówczas jest

$$P = \pi c^3 q$$

oraz

$$(2.11) \quad w_{max} = \frac{3 P (1 - \nu^2) 5 (c^4 - 9 a^2 c^2 + 15 a^4)}{16 \pi E \delta^3 (7 + 6 \nu) a^2}$$

Gdy c zdąży do zera przy niezmienniej wartości siły P , wówczas prawa strona wzoru (2.11) zdąży do wartości

$$(2.12) \quad w_{max} = \frac{3 P (1 - \nu) (3 + \nu) a^2}{4 \pi E \delta^3} \frac{75 (1 + \nu)}{4 (3 + \nu) (7 + 6 \nu)}$$

i wartość ta odpowiada przypadkowi granicznemu, gdy płyta ulega zginaniu pod działaniem siły skupionej P , przyłożonej centrycznie (rys. 5).

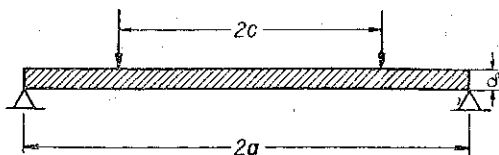
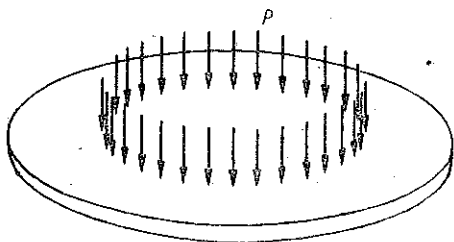
Pierwszy czynnik po prawej stronie wzoru (2.12) przedstawia wielkość ugięcia obliczoną w sposób ścisły. Drugi czynnik, dla ν równego np. $\frac{1}{4}$, wynosi 0,85. Zatem błąd otrzymanego przybliżenia jest równy w rozpatrzonym przypadku szczególnym około 15%. Jest to błąd dość znaczny, który daje się atoli usprawiedliwić prostotą użytych środków. Błąd ten można by zmniejszyć wydatnie np. przez zastosowanie założenia R i $t z a$, które zawierałoby dwa wyrazy, a nie jeden, jak w przeprowadzonym wyżej obliczeniu, lub przez przyjęcie innego założenia dla rozpatzonego przypadku granicznego⁶⁾.

Odpowiednich obliczeń nie będziemy jednak tutaj przeprowadzali. Gdy obciążenie rozłożone jest na większej powierzchni, wówczas błąd otrzymanego przybliżenia ulega znacznemu zmniejszeniu. Na przykład, gdy długość średnicy koła, którego pole poddane jest działaniu obciążenia, wynosi połowę długości średnicy płyty, wówczas dla $\nu = \frac{1}{4}$ wartość drugiego czynnika po prawej stronie wzoru (2.11) jest równa 7,54. Czynnik ten we wzorze ścisłym przybiera inną postać i jego wartość w przypadku rozpatrywanym jest równa 8,16. Zatem błąd otrzymanego przybliżenia wynosi około 7,6%.

⁶⁾ Por. [1], przykład 2.2. Por. również dalej przykład 5.2 jak również 3.2. W ogólności należy zaznaczyć, że przy wyznaczeniu wielkości ugięcia chodzi często o wyznaczenie «rzędu» tej wielkości. Jest bowiem sprawą w pewnych przypadkach drugorzędą, czy ugięcie wynosi np. 5 mm albo 6 mm, tzn. o 20% więcej, natomiast nie jest obojętne, czy wynosi ono 5 mm lub też 2 cm. Można zatem częstokroć dopuścić przybliżoną ocenę wielkości ugięcia, nawet jeżeli jest ona obarczona błędem dość znacznym, co nie byłoby dopuszczalne przy obliczeniu np. momentu zginającego. Por. również opinię Föppelów w [4].

2.3. Płyta kołowa oparta swobodnie na obwodzie i obciążona równomiernie wzdłuż obwodu koła współśrodkowego (rys. 4). Jak już była o tym poprzednio mowa, wartość energii odkształcenia pozostaje w danym przypadku ta sama jak w przykładzie 2.1, wzór (2.4). Energia potencjalna sił zewnętrznych jest natomiast równa

$$(2.13) \quad E_z = -P(c^4 - 6a^2c^2 + 5a^4)A,$$



Rys. 4

jeżeli P oznacza wielkość obciążenia przypadającego na całkowity obwód koła o promieniu c .

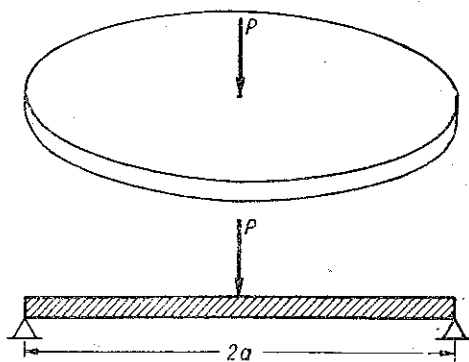
Postępując jak wyżej otrzymuje się po prostych przekształceniach

$$(2.14) \quad A = \frac{3(c^4 - 6a^2c^2 + 5a^4)P}{64(7 + 6\nu)\pi a^3 D}$$

i w dalszym ciągu wielkość ugięcia maksymalnego w środku płyty równą

$$(2.15) \quad w_{max} = \frac{3(1 - \nu^2)P}{2\pi E \delta^3} \times \frac{15(c^4 - 6a^2c^2 + 5a^4)}{8(7 + 6\nu)a^2}$$

Gdy c zmierza do zera, wówczas w_{max} zmierza do wartości przedstawionej przez wzór (2.12), czyli do wartości ugięcia w punkcie przyłożenia siły skupionej, jak być powinno (rys. 5). Gdy obciążenie jest rozłożone wzdłuż koła, którego średnica jest, powiedzmy, dwukrotnie mniejsza od średnicy płyty, wówczas dla $\nu = 1/4$ drugi czynnik po prawej stronie wzoru (2.15) przybiera wartość równą $0,786 a^2$. Wartość tego czynnika (posiadającego inną postać) we wzorze ścisłym wynosi $0,802 a^2$, skąd wynika, że błąd otrzymanego przybliżenia jest nieco mniejszy od 2%.



Rys. 5

2.4. Płyta kołowa oparta swobodnie na obwodzie i poddana obciążeniu malejącemu liniowo od środka ku obwodowi płyty (rys. 6). Energię potencjalną sił zewnętrznych przedstawia w danym razie następujące wyrażenie:

$$(2.16) \quad E_z = -\frac{2\pi}{a} A \int_0^a [qa - (q - q_0)r] (r^4 - 6a^2 r^2 + 5a^4) r dr,$$

w którym czynnik $[qa - (q - q_0)r]/a$ odpowiada obciążeniu jednostkowemu w odległości r od środka płyty.

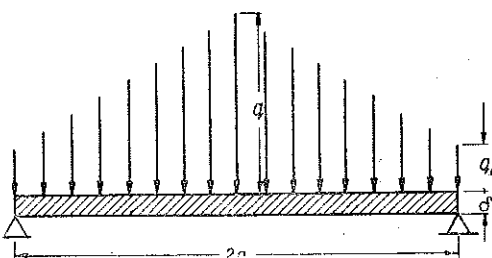
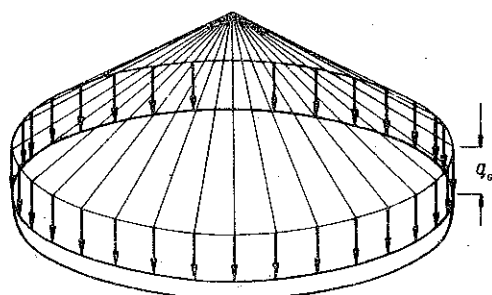
Pamiętając, że energię odkształcenia przedstawia wzór (2.4), otrzymuje się ostatecznie po uwzględnieniu warunku (1.7) wartość współczynnika A równą

$$(2.17) \quad A = \frac{3(1 - \nu^2)(117q + 128q_0)}{560(7 + 6\nu)E\delta^3}$$

oraz ugięcie w środku płyty równe

$$(2.18) \quad w_{max} = \frac{3(1 - \nu^2)(117q + 128q_0)}{112(7 + 6\nu)E\delta^3}$$

Gdy $q = q_0$, to znaczy gdy obciążenie płyty jest równomierne, wówczas prawa strona wzoru (2.18) przybiera obliczoną poprzednio wartość (2.5), jak być powinno. Gdy $q_0 = 0$, to znaczy gdy powierzchnia obciążenia posiada kształt powłoki stożka kołowego prostego o wysokości q (rys. 7),

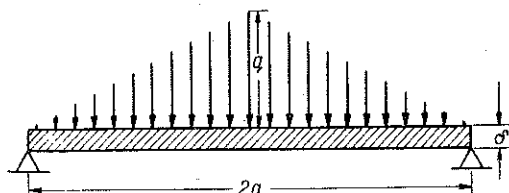
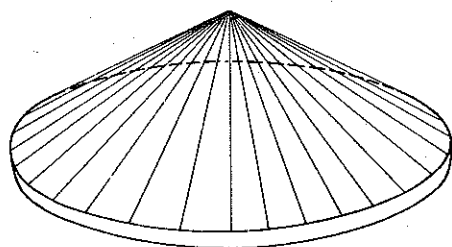


Rys. 6

wówczas ugięcie w środku płyty jest równe

$$(2.19) \quad w_{max} = \frac{351(1 - \nu^2)a^4}{112(7 + 6\nu)E\delta^3} q.$$

Rozwiązanie ściśle powyższego przypadku nie jest autorowi znane, jednakże istnieje podstawa do przypuszczenia, że błąd rozwiązania przybliżonego nie powinien przekroczyć w danym razie kilku procent.



Rys. 7

3. Płyty kołowe utwierdzone sztywnie na obwodzie

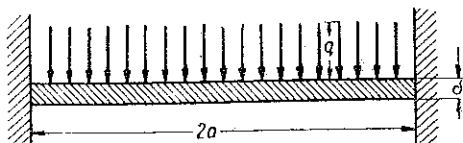
Rozpatrzmy teraz przykłady omówione w poprzednim paragrafie przyjmując, że brzeg płyty jest sztywnie utwierdzony.

3.1. Płyta kołowa utwierdzona sztywnie na obwodzie, poddana obciążeniu równomiernie rozłożonemu (rys. 8; por. również rys. 2). Równanie osi odkształconej belki o długości $2a$, obustronnie utwierdzonej sztywnie i obciążonej równomiernie, przyjmuje następującą postać, gdy początek osi współrzędnych umieszczony zostaje w połowie rozpiętości belki:

$$(3.1) \quad w = A(r^2 - a^2)^2;$$

A jest tutaj pewną wielkością stałą. Tak dobrana funkcja ugięcia spełnia na obu końcach belki ($r = \pm a$) przepisane zadaniem warunki brzegowe

$$(3.2) \quad w = \frac{dw}{dr} = 0,$$



Rys. 8

natomiast druga pochodna w względem r , przedstawiająca w pewnej skali moment zginający, oraz trzecia pochodna, przedstawiająca siłę poprzeczną, są na obu końcach belki różne od zera, jak być powinno.

Zgodnie z wyjaśnionym poprzednio postępowaniem przyjmujemy, że ugięcie płyty przedstawia ta sama funkcja (3.1). Wówczas na podstawie wzoru (1.5) otrzymuje się po wykonaniu prostych przekształceń

$$(3.3) \quad \vartheta = \frac{\pi a^6}{3} (32 A^2 D - A q)$$

i w dalszym ciągu z warunku (1.7)

$$(3.4) \quad A = \frac{3(1-\nu^2)}{16 E \delta^3} q.$$

Wobec tego wielkość ugięcia jest równa

$$(3.5) \quad w = \frac{3(1-\nu^2)}{16 E \delta^3} (r^2 - a^2)^2 q$$

i największe ugięcie w środku płyty ($r = 0$) jest

$$(3.6) \quad w_{max} = \frac{3(1-\nu^2) a^4}{16 E \delta^3} q.$$

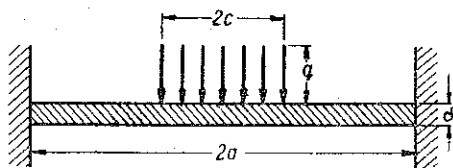
Jeżeli porównać obliczoną wartość w_{max} z wartością dokładną tej wielkości, uzyskaną na drodze rozwiązania odpowiedniego równania różniczkowego (zwanego równaniem zginania płyty), to okazuje się, że wzór (3.6) przedstawia wartość dokładną. Jest to rzeczą zrozumiałą, gdyż w danym przypadku funkcja (3.1) przedstawia całkę równania różniczkowego, która spełnia wszystkie przepisane zadaniem warunki brzegowe [postaci (3.2)], stanowi zatem ściśle rozwiązanie zagadnienia ⁷⁾.

3.2. Płyta kołowa utwierdzona sztywnie na obwodzie i poddana obciążeniu równomiernie rozłożonemu w części środkowej płyty (rys 9; por. również rys. 3). Przyjmujemy postać płyty po odkształceniu zgodnie z założeniem R i t z a (3.1). Wykorzystujemy obliczone w poprzednim przyкладzie wyrażenie dla energii sprężystej [według wzoru (3.3)], wobec czego energia potencjalna układu przyjmuje postać następującą:

$$(3.7) \quad \mathfrak{D} = \frac{32}{3} \pi a^6 D A^2 - 2 \pi q A \int_0^c (r^2 - a^2)^2 r dr.$$

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń i uwzględnieniu warunku (1.7) otrzymuje się

$$(3.8) \quad A = \frac{3(1-\nu^2)(c^4 - 3c^2 a^2 + 3a^4)c^2}{16 E \delta^3 a^6} q$$



Rys. 9

i w dalszym ciągu największe ugięcie w środku płyty równe

$$(3.9) \quad w_{max} = \frac{3(1-\nu^2)P}{16 \pi E \delta^3} \frac{(c^4 - 3c^2 a^2 + 3a^4)}{a^2},$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$(3.10) \quad P = \pi c^2 q.$$

Gdy obciążeniu ulega pole koła współśrodkowego o promieniu równym połowie promienia konturu płyty ($c = a/2$), to największe ugięcie w środku płyty jest równe w przybliżeniu

$$(3.11) \quad w_{max} = \frac{3(1-\nu^2)a^3 P}{16 \pi E \delta^3} 2,313$$

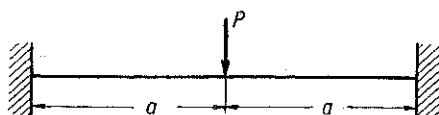
i różni się od dokładnie obliczonego ugięcia w tym miejscu [odpowiada mu współczynnik liczbowy we wzorze (3.11) równy 2,577] o około 9,5%.

⁷⁾ Por. np. [4] lub [5].

Rozpatrzmy przypadek graniczny, gdy $c = 0$, to znaczy gdy płyta ulega obciążeniu siłą skupioną P przyłożoną w jej środku. Ze wzoru (3.9) otrzymuje się w tym przypadku wartość największego ugięcia równą

$$(3.12) \quad w_{max} = \frac{3(1-\nu^2)a^2 P}{4\pi E \delta^3} \cdot 0,75.$$

Wobec tego że wartość w_{max} obliczoną w sposób ścisły przedstawia pierwszy czynnik (ułamkowy) po prawej stronie wzoru (3.12), zatem błąd otrzymanego przybliżenia sięga 25%. Jak już o tym była poprzednio mowa, błąd ten można znacznie obniżyć, jeżeli w założeniu R i t z a zamiast jednego użyć dwóch wyrazów. Aby uniknąć złączonych z tym dość żmudnych rachunków, postąpimy jednak odmiennie, mianowicie posłużymy się założeniem R i t z a jednowyrazowym, lecz specjalnie dobranym dla danego przypadku granicznego. Rozważmy w tym celu linię



Rys. 10

ugięcia belki obustronnie sztywnie utwierdzonej i obciążonej w środku siłą skupioną P (rys. 10). Jak wiadomo, linia ugięcia składa się w tym przypadku z dwóch gałęzi rozdzielonych linią działania siły i przedstawionych

dwoma odrębnymi równaniami. Równanie np. prawej gałęzi, odniesione do układu osi współrzędnych o początku na lewej podporze, posiada następującą postać podaną w podręcznikach statyki:

$$w = \frac{P}{48EJ} [3l(l-x)^2 - 4(l-x)^3],$$

gdzie l jest długością belki. Przenosząc początek układu do środka płyty i oznaczając współczynnik występujący przed nawiasem kwadratowym przez A otrzymujemy

$$(3.13) \quad w = A(a + 2r)(a - r)^2.$$

Wzór ten traktujemy jako założenie R i t z a dla rozpatrywanego szczególnego przypadku obciążenia płyty⁸⁾.

Na zasadzie wzoru (1.5) znajdujemy teraz łatwo energię potencjalną układu w postaci

$$(3.14) \quad \mathfrak{E} = 9\pi a^4 D A^2 - P a^3 A$$

⁸⁾ Założenie powyższe spełnia, jak łatwo sprawdzić, warunki brzegowe $[w]_{r=a} = 0$ oraz $[dw/dr]_{r=a} = 0$ i ponadto, odpowiadający symetrii obciążenia, warunek $[dw/dr]_{r=0} = 0$.

i w dalszym ciągu na podstawie warunku (1.7) wartość stałej A równą

$$(3.15) \quad A = \frac{P}{18 \pi a D}.$$

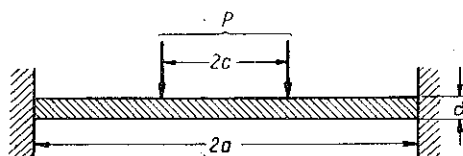
Największe ugięcie w środku płyty jest w danym razie równe

$$(3.16) \quad w_{max} = \frac{3(1-\nu^2)a^3 P}{4 \pi E \delta^3} 0,89,$$

wobec czego błąd uzyskanego przybliżenia wynosi około 110/0, to znaczy nieomal dwa i trzy dziesiąte razy mniej niż poprzednio.

W drugim przypadku granicznym, gdy obciążenie pokrywa równomiernie całą powierzchnię płyty, wzór (3.9) dla ugięcia maksymalnego przechodzi we wzór (3.6) wyprowadzony bezpośrednio dla rozpatrywanego przypadku granicznego, jak być powinno.

3.3. Płyta kołowa utwierdzona sztywnie na obwodzie i poddana obciążeniu równomiernie rozłożonemu na obwodzie koła współśrodkowego (rys. 11). Przyjmujemy, jak w poprzednich przykładach, założenie Ritza w postaci przedstawionej przez wzór (3.1).



Rys. 11

Jak poprzednio jest

$$(3.17) \quad E_s = \frac{32}{3} \pi a^6 D A^2,$$

natomiast energia potencjalna sił zewnętrznych przybiera zrozumiałą wartość

$$(3.18) \quad E_z = -(c^2 - a^2) A P.$$

Po uwzględnieniu warunku (1.7) i prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(3.19) \quad A = \frac{9(1-\nu^2)(c^2 - a^2)^2 P}{16 \pi E \delta^3 a^6}$$

i w dalszym ciągu największe ugięcie w środku płyty równe

$$(3.20) \quad w_{max} = \frac{9(1-\nu^2)(c^2 - a^2)^2 P}{16 \pi E \delta^3 a^2}.$$

Gdy promień koła, na którego obwodzie rozłożone jest obciążenie równomierne o wielkości P , zdąża do zera ($c \rightarrow 0$) przy niezmienniej wartości P

wówczas ugięcie maksymalne (3.20) zdąży do wartości przedstawionej przez wzór (3.12), jak być powinno. Dla oszacowania błędu uzyskanego przybliżenia w_{max} według wzoru (3.20) przyjmijmy, że $c = a/2$, to znaczy że linia obciążenia dzieli promień płyty na dwie równe części.

Przekształćmy w tym celu prawą stronę wzoru (3.20) w następujący sposób:

$$(3.21) \quad w_{max} = \frac{3(1-\nu^2)P}{2\pi E \delta^3} \frac{3(c^2 - a^2)^2}{8a^2}$$

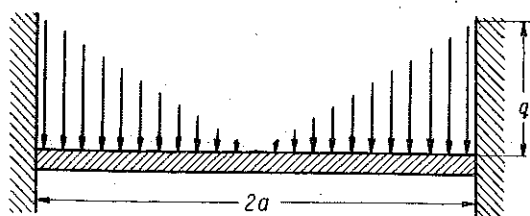
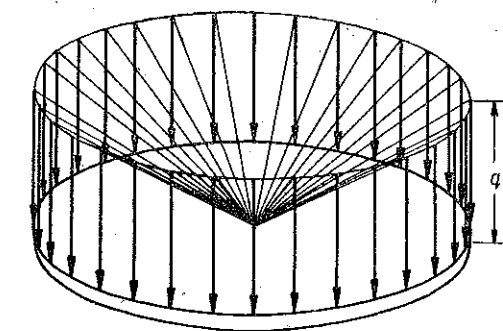
Dla $c = a/2$ drugi czynnik przyjmuje wartość $0,211 a^2$. Ponieważ w rozwiązaniu ścisłym wartość tego czynnika wynosi $0,202 a^2$, to błąd uzyskanego przybliżenia nie przewyższa $4,5\%$.

3.4. Płyta kołowa utwierdzona sztywnie na obwodzie i poddana obciążeniu wzrastającemu liniowo od środka ku obwodowi płyty (rys. 12). Podobnie jak w poprzednich przykładach energia odkształcenia przybiera postać następującą:

$$(3.22) \quad E_s = \frac{32}{3} \pi a^6 D A^2$$

Natomiast energię potencjalną sił zewnętrznych przedstawia wzór

$$(3.23) \quad E_z = -\frac{2\pi q}{a} A \int_0^a r^2 (r^4 - 2r^2 a^2 + a^4) dr$$



Rys. 12

Po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$\mathfrak{D} = \frac{32}{3} \pi a^6 D A^2 - \frac{16}{105} \pi a^6 q A$$

i w dalszym ciągu na podstawie warunku (1.7)

$$(3.24) \quad A = \frac{1}{140} \frac{q}{D}$$

Wobec tego największe ugięcie w środku płyty jest równe

$$(3.25) \quad w_{max} = \frac{q a^4}{D} \frac{1}{140}$$

Wartość współczynnika liczbowego występującego w powyższym wzorze jest według wzoru ściśłego równa $1/150$ ⁹⁾. Zatem błąd uzyskanego rozwiązania przybliżonego wynosi 7%.

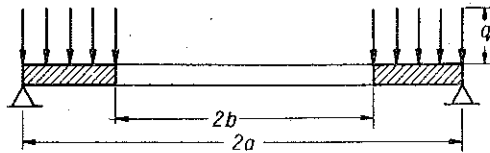
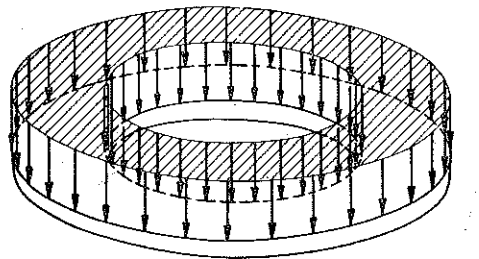
4. Płyty kołowe z otworem kołowym

Dla płyt kołowych z otworem kołowym wydawałoby się naturalne porównanie linii ugięcia promienia płyty (ściśle zaś — jego części pozostałej poza otworem) z osią odkształconą belki wspornikowej, utwierdzonej na obwodzie płyty i skierowanej wzdłuż jej promienia. Jednakże tego rodzaju założenie zawierałoby w sobie zasadniczą nieściśłość, która ujawnia się wyraźnie, gdy średnica otworu maleje do zera i płyta posiadająca otwór przeobraża się w płytę jednolitą bez otworu. W tym przypadku granicznym powierzchnia środkowa odkształconej płyty przy obranym założeniu posiadałaby w środku ostrze, co byłoby sprzeczne z samą istotą zjawiska. W związku z tym wartości pochodnych funkcji ugięcia, które występują we wzorze podstawowym dla energii potencjalnej (1.5), byłyby obciążone znacznymi błędami, co w rezultacie doprowadziłoby do fałszywej oceny wielkości ugięcia, zwłaszcza w przypadku otworów o małej średnicy. Rozwiązane przykłady potwierdzają ten wniosek. Przyjmiemy zatem dla płyt kołowych posiadających otwór te same założenia Ritz'a, które przyjęliśmy poprzednio dla płyt bez otworu, w zależności od rodzaju utwierdzenia brzegu.

4.1. Płyta kołowa z otworem kołowym oparta swobodnie na obwodzie i poddana obciążeniu równomiernie rozłożonemu (rys. 13). Przyjmujemy dla powierzchni odkształconej płyty to samo założenie, które przyjęliśmy poprzednio dla płyty bez otworu opartej swobodnie na obwodzie [por. wzór (2.1)]:

$$(4.1) \quad w = A(r^4 - 6a^2r^2 + 5a^4).$$

Pomijając, oczywiście, powierzchnię otworu otrzymuje się wyrażenie dla energii sprężystej odkształcenia w postaci



Rys. 13

⁹⁾ Por. [3].

$$E_s = \pi D \int_b^a \left[r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2 \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] dr$$

lub po uwzględnieniu założenia (4.1)

$$(4.2) \quad E_s = 16 \pi D A^2 \left\{ \frac{14}{3} a^6 - b^2 \left(\frac{5}{3} b^4 - 6 a^2 b^2 + 9 a^4 \right) + \right. \\ \left. + \nu [4 a^6 - b^2 (b^4 - 6 a^2 b^2 + 9 a^4)] \right\}.$$

Energię potencjalną sił zewnętrznych przedstawia następujący zrozumiały wzór:

$$(4.3) \quad E_z = -2 \pi q \int_b^a w r dr = -\pi q A \left[\frac{7}{3} a^6 - b^2 \left(\frac{1}{3} b^4 - 3 a^2 b^2 + 5 a^4 \right) \right].$$

Oznaczmy wyrażenie w nawiasie figurowym we wzorze (4.2) przez K , a wyrażenie w nawiasie prostokątnym we wzorze (4.3) przez L . Wówczas energia potencjalna układu jest równa

$$(4.4) \quad \mathfrak{E} = 16 \pi D K A^2 - \pi q L A.$$

Przy uwzględnieniu warunku (1.7) otrzymuje się

$$(4.5) \quad A = \frac{L}{32 D K} q$$

i w dalszym ciągu największe ugięcie na brzegu otworu równe

$$(4.6) \quad w_{max} = \frac{(b^4 - 6 a^2 b^2 + 5 a^4) L}{32 D K} q.$$

Gdy $b = 0$, to znaczy gdy płyta nie posiada otworu, wyrażenie powyższe dla ugięcia maksymalnego przybiera postać (2.5), jak być powinno.

Sprawdźmy dokładność otrzymanego wzoru (4.6) np. dla $b = a/2$ oraz $\nu = 1/4$. Otrzymujemy wówczas po wykonaniu prostych obliczeń

$$(4.7) \quad w_{max} = \frac{q a^4}{64 D} 3,96.$$

Wobec tego że współczynnik liczbowy w powyższym wzorze przybiera we wzorze ścisłym wartość 3,93, zatem błąd otrzymanego przybliżenia jest w danym przypadku szczególnym równy 0,8%.

4.2. Płyta kołowa z otworem kołowym oparta swobodnie na obwodzie i obciążona równomiernie wzdłuż brzegu otworu (rys. 14). Wartość energii odkształcenia pozostaje, zgodnie z przyjętym założeniem, taka sama jak w przykładzie poprzednim, to znaczy równa

$$(4.8) \quad E_s = 16 \pi D K A^2.$$

Energia potencjalna sił zewnętrznych jest natomiast równa

$$(4.9) \quad E_z = -(b^4 - 6 a^2 b^2 + 5 a^4) P A,$$

jeżeli wielkość obciążenia całkowitego oznaczyć przez P . Uwzględnienie warunku (1.7) doprowadza do następującej wartości współczynnika A :

$$(4.10) \quad A = \frac{(b^4 - 6 a^2 b^2 + 5 a^4) P}{32 \pi D K}.$$

W dalszym ciągu największe ugięcie na brzegu otworu okazuje się równe

$$(4.11) \quad w_{max} = \frac{(b^4 - 6 a^2 b^2 + 5 a^4)^2 P}{32 \pi D K}.$$

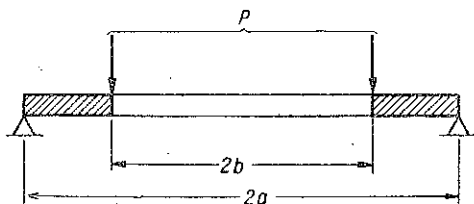
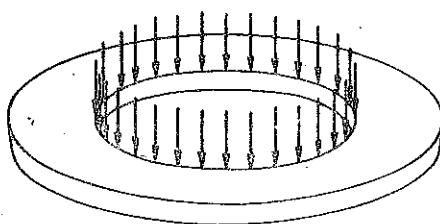
Gdy P pozostaje niezmiennie oraz $b = 0$, to znaczy gdy płyta nie posiada otworu, wyrażenie powyższe przybiera postać (2.12), jak być powinno. W tym bowiem granicznym przypadku zagadnienie dotyczy płyty opartej swobodnie i obciążonej w środku siłą skupioną P .

Sprawdźmy dokładność otrzymanego wzoru (4.11) np. dla $b = a/2$ oraz $\nu = 1/4$. Otrzymujemy wówczas po wykonaniu prostych obliczeń

$$(4.12) \quad w_{max} = \frac{P a^2}{16 \pi D} 2,79.$$

Współczynnik liczbowy występujący w powyższym wzorze przybiera we wzorze ścisłym wartość 3,02. Wynika stąd, że błąd otrzymanego przybliżenia wynosi w danym przypadku 7,6%.

4.3. Płyta kołowa z otworem kołowym utwierdzona sztywnie na obwodzie i poddana obciążeniu równomiernie rozłożonemu (rys. 15). Przyjmu-



Rys. 14

jemy założenie R i t z a w postaci (3.1) odpowiadającej linii ugięcia belki obustronnie sztywnie utwierdzonej.

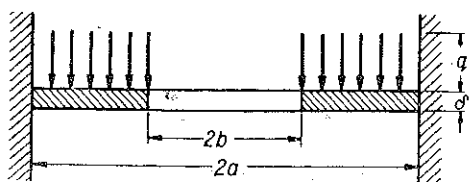
Na energię potencjalną układu składają się w danym przypadku kolejno:

$$(4.13) \quad E_s = 16 \pi D A^2 \int_b^a [10 r^5 - 8 a^2 r^3 + 2 a^4 r + 2 \nu (3 r^5 - 4 a^2 r^3 + a^4 r)] dr$$

oraz

$$(4.14) \quad E_z = -2 \pi q A \int_b^a (r^5 - 2 a^2 r^3 + a^4 r) dr.$$

Po wykonaniu całkowania i prostych przekształceniach otrzymujemy



Rys. 15

$$(4.15) \quad E_s = 16 \pi D K A^2$$

oraz

$$(4.16) \quad E_z = -\pi q L A,$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$(4.17) \quad K = \frac{2}{3} a^6 - \left(\frac{5}{3} b^4 - 2 a^2 b^2 + a^4 \right) b^2 - (b^4 - 2 a^2 b^2 + a^4) \nu b^2,$$

$$(4.18) \quad L = \frac{1}{3} a^6 - \left(\frac{1}{3} b^4 - a^2 b^2 + a^4 \right) b^2.$$

Na podstawie warunku (1.7) otrzymuje się kolejno współczynnik R i t z a A równy

$$(4.19) \quad A = \frac{L}{32 K D} q$$

oraz największe ugięcie na brzegu otworu równe

$$(4.20) \quad w_{max} = \frac{(a^2 - b^2)^2 L}{32 D K} q.$$

Gdy promień otworu staje się równy zero ($b = 0$), to rozpatrywany przypadek przechodzi w przypadek poprzednio rozważony 3.1. Wówczas ugięcie w_{max} określone wzorem (4.20), przybiera wartość

$$(4.21) \quad w_{max} = \frac{3(1 - \nu^2) a^4}{16 E \delta^3} q,$$

która jest identyczna z wartością (3.6) w przypadku 3.1, jak być powinno.

Sprawdźmy dokładność wzoru (4.20) np. dla $b = a/2$ oraz $\nu = 1/4$.
Otrzymujemy w tym przypadku

$$(4.22) \quad w_{max} = \frac{3(1-\nu^2)a^4 q}{4 E \delta^3} 0,082.$$

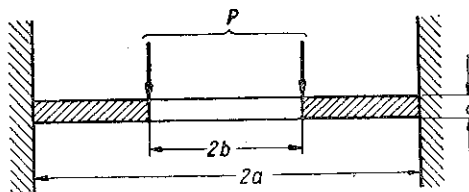
We wzorze ścisłym zamiast współczynnika liczbowego 0,082, jaki otrzymano na drodze obliczeń przybliżonych, występuje współczynnik 0,085. Zatem błąd otrzymanego przybliżenia nie wiele różni się od 3,5%.

4.4. Płyta kołowa z otworem kołowym, utwierdzona sztywnie na obwodzie i obciążona równomiernie wzdłuż brzegu otworu (rys. 16). Energia odkształcenia sprężystego jest, jak w poprzednim przykładzie, równa

$$(4.23) \quad E_s = 16 \pi D K A^2.$$

Natomiast energia potencjalna sił zewnętrznych, o ile przez P oznaczyć całkowite obciążenie płyty, przybiera w danym przypadku wartość

$$(4.24) \quad E_z = -(a^2 - b^2)^2 P A.$$



Rys. 16

Na podstawie warunku (1.7) otrzymujemy

$$(4.25) \quad A = \frac{(a^2 - b^2)^2 P}{32 \pi D K}$$

i w dalszym ciągu największe ugięcie na brzegu otworu równe

$$(4.26) \quad w_{max} = \frac{(a^2 - b^2)^4 P}{32 \pi D K}.$$

Gdy promień otworu b zmierza do zera przy ustalonym P , to rozpatrywany przypadek zdąży do przypadku granicznego rozpatrzonego poprzednio jako 3.2.

W granicy otrzymujemy dla ugięcia maksymalnego (płyty bez otworu obciążonej pośrodku siłą skupioną P) wyrażenie

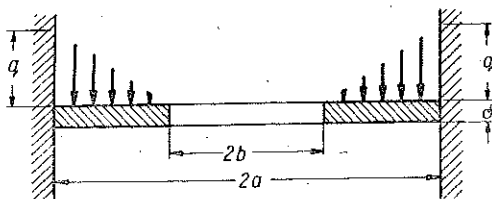
$$(4.27) \quad w_{max} = \frac{9(1-\nu^2)a^2 P}{16 \pi E \delta^3},$$

identyczne z wyrażeniem (3.12), jak być powinno.

Sprawdźmy dokładność otrzymanego wzoru przybliżonego (4.26) dla w_{max} , np. dla $b = a/2$ oraz $\nu = 1/4$. W tym przypadku wzór przybiera postać

$$(4.28) \quad w_{max} = \frac{3(1-\nu^2)a^2 P}{4\pi E \delta^3} 0,33.$$

Współczynnik liczbowy występujący w powyższym wzorze posiada we wzorze ścisłym wartość 0,36. Zatem błąd otrzymanego przybliżenia wynosi 8,3%.



Rys. 17

4.5. Płyta kołowa z otworem kołowym utwierdzona sztywnie na obwodzie i poddana obciążeniu wzrastającemu liniowo ku obwodowi płyty (rys. 17). Energia odkształcenia sprężystego posiada w danym przypadku taką samą wartość jak w przykładzie poprzednim. Jest zatem

$$(4.29) \quad E_s = 16\pi DK A^2.$$

Natomiast energia potencjalna sił zewnętrznych jest równa

$$(4.30) \quad E_z = -\frac{2\pi q}{a-b} A \int_b^a (r-b)(r^5 - 2a^2 r^3 + a^4 r) dr = -\frac{\pi M q}{a-b} A,$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$(4.31) \quad M = \frac{16}{105} a^7 - \frac{1}{3} a^5 b - b^3 \left(\frac{5}{3} a^4 - \frac{9}{5} a^2 b^2 - \frac{1}{21} b^4 \right).$$

Na podstawie warunku (1.7) otrzymujemy

$$(4.32) \quad A = \frac{Mq}{32(a-b)DK}$$

i w dalszym ciągu największe ugięcie na brzegu otworu równe

$$(4.33) \quad w_{max} = \frac{(a^2 - b^2)^2 M q}{32(a-b)DK}.$$

Gdy rozpatrywana płyta przeobraża się w płytę bez otworu, to znaczy gdy przyjęte zostaje $b = 0$, wówczas wzór (4.33) przybiera postać

$$(4.34) \quad w_{max} = \frac{a^4 q}{140 D},$$

która jest zgodna z wynikiem przedstawionym przez wzór (3.24), jak być powinno.

5. Płyty kołowe wspornikowe

Dla płyt kołowych wspornikowych (rys. 18) linię ugięcia promienia płyty upodabniamy do linii ugięcia belki wspornikowej obciążonej równomiernie. Równanie tej ostatniej we współrzędnych r, w (przedstawionych na rys. 18a) posiada następującą postać:

$$(5.1) \quad w = A [(r - b)^4 - 4c(r - b)^3 + 6c^2(r - b)^2].$$

Przyjmujemy zatem wyrażenie (5.1) jako przedstawiające powierzchnię ugięcia płyty wspornikowej.

Obliczamy energię sprężystą odkształcenia na podstawie wzoru (1.5.1) z odpowiednio zmienioną dolną granicą całkowania:

$$(5.2) \quad E_s = \pi D \int_b^a \left[r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2r \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] dr.$$

Uwzględniając wzór (5.1) otrzymujemy po dłuższych przekształceniach

$$(5.3) \quad E_s = 16 \pi D K A^2,$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$(5.4) \quad K = \frac{91}{60} a^6 - 11 a^5 b + 20 a^4 b^2 - \frac{38}{3} a^3 b^3 - \frac{1}{4} a^2 b^4 + \frac{17}{5} a b^5 - b^6 + \\ + (3 a^2 b - 3 a b^2 + b^3)^2 \ln \frac{a}{b} + 6 r \left(\frac{1}{6} a^6 - a^5 b + \frac{5}{2} a^4 b^2 - \right. \\ \left. - \frac{10}{3} a^3 b^3 + \frac{5}{2} a^2 b^4 - a b^5 + \frac{1}{6} b^6 \right).$$

Podamy teraz rozwiązanie dwu przykładów bardziej charakterystycznych.

5.1. Płyta kołowa wspornikowa obciążona równomiernie (rys. 18). W tym przypadku energia potencjalna obciążenia jest równa [por. wzory (1.5) oraz (5.1)]

$$(5.5) \quad E_z = -2 \pi q A \int_b^a [(r - b)^4 - 4(a - b)(r - b)^3 + 6(a - b)^2(r - b)^2] dr$$

lub po wykonaniu odpowiednich przekształceń

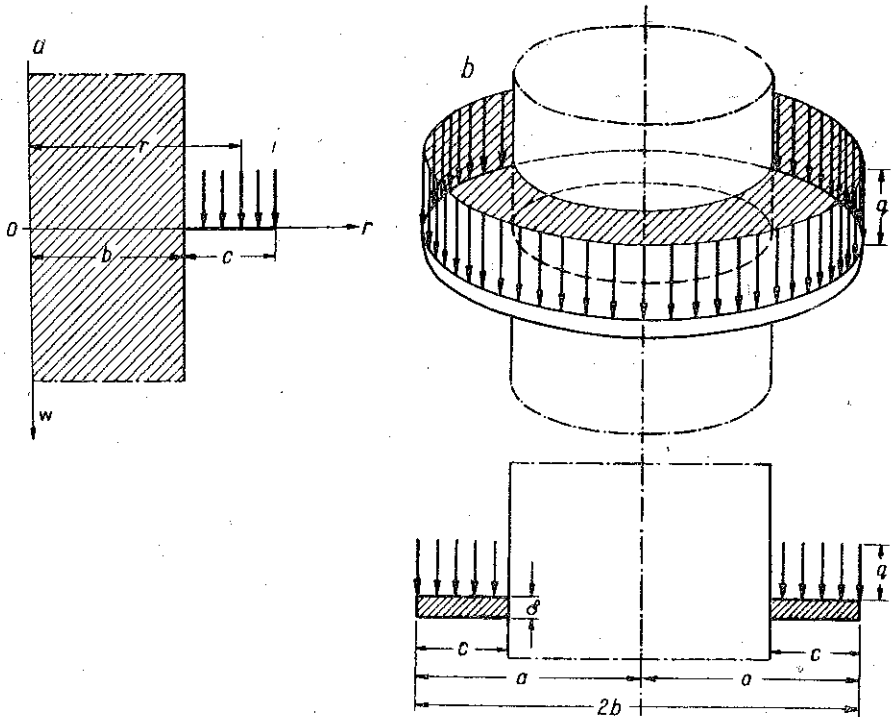
$$(5.6) \quad E_z = -2\pi q L A,$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$(5.7) \quad L = \frac{13}{15} a^6 - 4a^5 b + 7a^4 b^2 - \frac{16}{3} a^3 b^3 + a^2 b^4 + \frac{4}{5} a b^5 - \frac{1}{3} b^6.$$

Zatem jest na podstawie wzorów (5.3) i (5.6)

$$(5.8) \quad \mathfrak{E} = 16\pi DK A^2 - 2\pi q L A.$$



Rys. 18

Uwzględniając warunek (1.7) otrzymuje się wartość parametru A równą

$$(5.9) \quad A = \frac{qL}{16DK}.$$

Wobec tego że największego ugięcia należy oczekiwać na swobodnym konturze płyty, tj. dla $r = a$, otrzymujemy w tym miejscu

$$(5.10) \quad w_{max} = 3A(a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4a b^3 + b^4).$$

Przyjmijmy dla przykładu, że średnica $2b$ słupa, na którym zawieszona jest płyta, wynosi połowę średnicy płyty oraz że jest $\nu = 1/4$. Wówczas otrzymuje się

$$(5.11) \quad w_{max} = \frac{q a^4}{32 D} 0,28.$$

Wartość ta różni się o 3,5% od wartości ugięcia maksymalnego, obliczonej w sposób ścisły [w tym przypadku współczynnik liczbowy we wzorze (5.11) jest równy 0,29]. Gdy średnica $2b$ staje się równa zero, wówczas po obróceniu rys. 18 otrzymuje się przypadek przedstawiony na rys. 20a, jeżeli przez P oznaczyć całkowite obciążenie płyty. Przypadek ten odpowiada obciążeniu stopy fundamentowej okrągłej siłą skupioną P , gdy odpór podłoża traktowany jest jako równomiernie rozłożony wzdłuż całej powierzchni spodniej płyty. Otrzymuje się wówczas

$$(5.12) \quad w_{max} = \frac{q a^4}{D} 0,092.$$

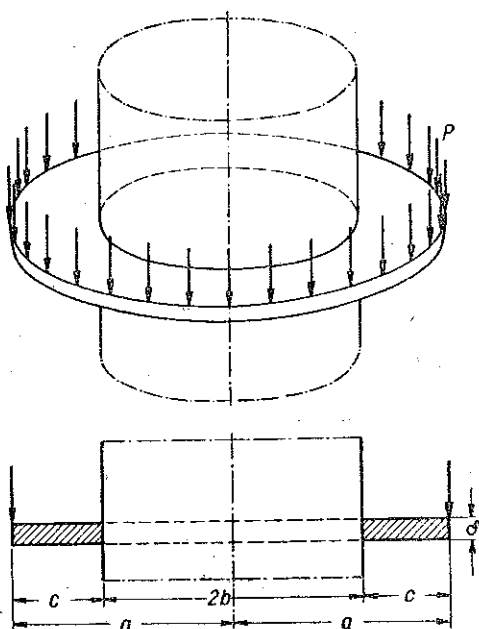
Wartość ta różni się o 5,2% od wartości w_{max} obliczonej w sposób ścisły (współczynnik liczbowy wynosi w tym przypadku 0,097).

5.2. Płyta kołowa wspornikowa poddana obciążeniu równomiernie rozłożonemu na obwodzie płyty (rys. 19). Energia potencjalna sił zewnętrznych jest w danym przypadku równa

$$(5.13) \quad E_z = -P w(a) = -3 P A M,$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenie:

$$(5.14) \quad M = a^4 - 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 - 4 a b^3 + b^4.$$



Rys. 19

Wobec tego energia potencjalna układu jest równa [por. wzór (5.3)]

$$(5.15) \quad \mathcal{D} = 16 \pi D A^2 K - 3 P A M.$$

W dalszym ciągu, uwzględniając warunek (1.7), otrzymuje się wielkość parametru A równą

$$(5.16) \quad A = \frac{3 P M}{32 \pi D K}$$

oraz w miejscu $r = a$ wielkość ugięcia maksymalnego

$$(5.17) \quad w_{max} = \frac{9 P M^2}{32 \pi D K}$$

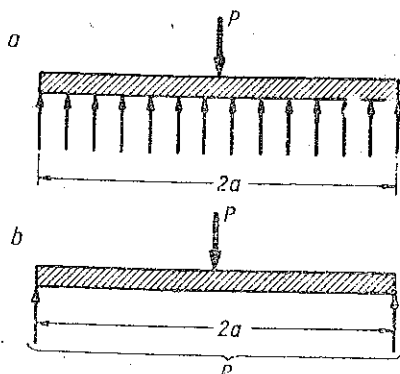
Założmy dla przykładu $b = a/2$ oraz $\nu = 1/4$. Wówczas na podstawie wzorów (5.4), (5.14) oraz (5.17) otrzymujemy się

$$(5.18) \quad w_{max} = \frac{P a^2}{64 \pi D} 1,63.$$

Wartość współczynnika liczbowego w powyższym wzorze wynosi dla wzoru ścisłego 1,65. Zatem błąd uzyskanego przybliżenia jest nieco większy od 1,2%.

Gdy średnica $2b$ staje się równa zero, otrzymujemy przypadek graniczny przedstawiony na rys. 20b (w położeniu obróconym w stosunku do rys. 19). Przypadek ten odpowiada płycie kołowej opartej swobodnie na obwodzie i obciążonej w środku siłą skupioną P . Został on rozpatrzony poprzednio przy omawianiu szczególnych przypadków przykładu 2.2 [por. wzór (2.12)]. W danym razie dla $\nu = 1/4$ otrzymuje się na podstawie wzoru (5.16) przyjmując $b = 0$:

$$(5.19) \quad w_{max} = \frac{P a^2}{16 \pi D} \frac{135}{53}$$



Rys. 20

Przekształćmy wyrażenie dla ścisłej wartości ugięcia (przy $\nu = 1/4$), przedstawione przez pierwszy czynnik wzoru (2.12), do postaci podobnej do (5.19). Otrzymujemy wówczas ścisłą wartość ugięcia równą

$$(5.20) \quad w_{max} = \frac{P a^2}{16 \pi D} \frac{13}{5}$$

Wyrażenie przybliżone (5.19) dla w_{max} otrzymane przy założeniu powierzchni ugięcia płyty według wzoru (5.1) różni się zatem od ścisłej wartości ugięcia maksymalnego (5.20) o 1,9%. Poprzednio stosując w przykładzie 2.2 założenie (2.1) otrzymaliśmy błąd kilkakrotnie większy.

6. Płyty prostokątne

Rozpatrzmy tutaj jedynie płyty oparte swobodnie na obwodzie (rys. 21). Przedstawimy wyrażenie dla energii sprężystej odkształcenia (1.1) w postaci następującej:

$$(6.1) \quad E_s = \frac{D}{2} \int_F \int \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Stosując przyjętą poprzednio analogię pomiędzy ugięciem belek i ugięciem płyt założymy, że płyta ugina się wzdłuż linii równoległych odpowiednio do osi x i y tak jak belka wolnopodparta¹⁰⁾. Zatem ugięcie pasm płyty równoległych do osi x przedstawia w obranym układzie współrzędnych funkcja [por. wzór (2.1)]

$$(6.2.1) \quad w_1 = A_1 (x^4 - 6a^2 x^2 + 5a^4),$$

zaś ugięcie pasm równoległych do osi y funkcja

$$(6.2.2) \quad w_2 = A_2 (y^4 - 6b^2 y^2 + 5b^4).$$

Łącząc oba powyższe wzory obieramy powierzchnię ugięcia płyty w postaci

$$(6.3) \quad w = A (x^4 - 6a^2 x^2 + 5a^4) (y^4 - 6b^2 y^2 + 5b^4),$$

gdzie A jest nieznanym parametrem, który wypadnie wyznaczyć¹¹⁾.

Obliczamy kolejno całki składników funkcji podcałkowej we wzorze (6.1). Otrzymuje się wówczas po prostych przekształceniach:

$$(6.4.1) \quad J_1 = 4 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = 3870,72 a^5 b^9 A^2,$$

$$(6.4.2) \quad J_2 = 4 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = 3870,72 a^9 b^5 A^2,$$

$$(6.4.3) \quad J_3 = 4 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy = 3864,96 a^7 b^7 A^2,$$

¹⁰⁾ Przypominamy, że założenie to nie oznacza bynajmniej, że płyta traktowana jest jako faktyczny zespół krzyżujących się belek; por. uwagi podane w p. 1.

¹¹⁾ W szczególnym przypadku płyt prostokątnych metoda użyta w niniejszej pracy doprowadza do założenia Ritz'a (6.3), identycznego z założeniem przyjętym przez A. i L. Föppl'ów, por. [4].

$$(6.4.4) \quad J_4 = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = 3860,48 a^7 b^7 A^2,$$

Zastępując współczynniki liczbowe występujące w powyższych wzorach jednym współczynnikiem średnim 3865 otrzymujemy następującą przybliżoną wartość E_s :

$$(6.5) \quad E_s = 1933 a^5 b^5 (a^2 + b^2)^2 D A^2.$$

Przedstawmy teraz energię potencjalną obciążenia w ogólnej postaci

$$(6.6) \quad E_z = - A M,$$

gdzie M oznacza dla danej płyty wyrażenie zależne od rodzaju obciążenia. Wówczas energię potencjalną układu przedstawia wzór

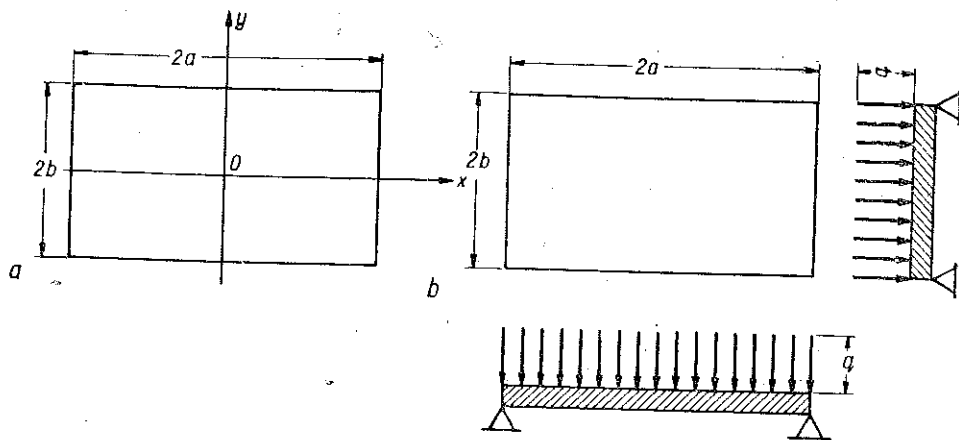
$$(6.7) \quad \mathcal{E} = 1933 a^5 b^5 (a^2 + b^2)^2 D A^2 - A M,$$

z którego przy uwzględnieniu warunku (1.7) otrzymuje się wartość współczynnika A równą

$$(6.8) \quad A = \frac{M}{3865 a^5 b^5 (a^2 + b^2)^2 D}.$$

Dla obliczenia ugięcia płyty wystarczy zatem znać wartość wyrażenia M .

6.1. Płyta prostokątna oparta swobodnie na obwodzie i poddana działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego (rys. 21b). Wyrażenie M we



Rys. 21

wzorroze dla energii potencjalnej obciążenia przyjmuje w danym przypadku następującą wartość:

$$(6.9) \quad M = 4q \int_0^a \int_0^b (x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4)(y^4 - 6b^2y^2 + 5b^4) dx dy \approx 41 a^5 b^5 q.$$

Wobec tego współczynnik A , przedstawiony wzorem (6.8), jest równy

$$(6.10) \quad A = 0,0106 \frac{q}{(a^2 + b^2)^2 D}$$

i w dalszym ciągu największe ugięcie w środku płyty ($x = y = 0$) według wzoru (6.3) jest równe, przy założeniu $\nu = 3/10$.

$$(6.11) \quad w_{max} = \frac{0,18 q B^4}{E \delta^3 (1 + 2\alpha^2 + \alpha^4)},$$

gdzie przyjęto oznaczenia: $B = 2b$, $\alpha = b/a$.

Oznaczmy symbolem β wyrażenie

$$(6.12) \quad \beta = \frac{0,18}{1 + 2\alpha^2 + \alpha^4}$$

Tablica 1

$\frac{1}{\alpha}$ \ β	Według wzoru (6.12)	Według Poradnika [5]
1	0,04	0,04
1 $\frac{1}{2}$	0,08	0,09
2	0,11	0,12
3	0,13	0,15
∞	0,14	0,18

występujące we wzorze (6.11). Wartość tego wyrażenia, zależną od stosunku wymiarów płyty, przedstawia z dokładnością do dwóch znaków dziesiętnych tablica 1, w której dla porównania przytoczono wartości wyrażenia, odpowiadającego współczynnikowi β , według *Poradnika Mechaniki Technicznej* [5].

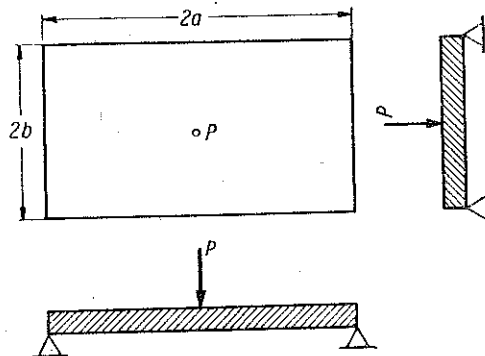
Jak widać, rozbieżności pomiędzy obu kolumnami wartości współczynników β , zwłaszcza dla mniejszych stosunków $a : b$, nie są zbyt znaczne.

6.2. Płyta prostokątna oparta swobodnie na obwodzie i poddana działaniu siły skupionej w środku płyty (rys. 22). W danym przypadku jest

$$(6.13) \quad M = 25 a^4 b^4 P$$

i w dalszym ciągu według wzoru (6.8)

$$(6.14) \quad A = \frac{5}{773} \frac{P}{ab(a^2 + b^2)^2 D}$$



Rys. 22

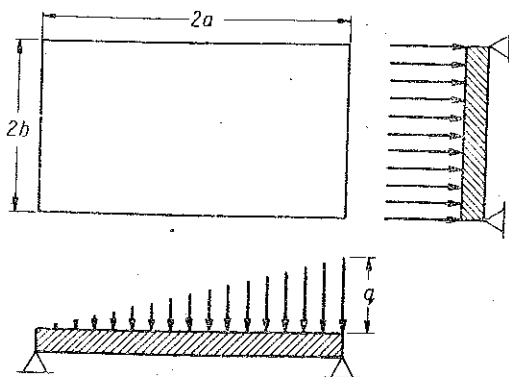
Wobec tego największe ugięcie w środku płyty ($x = y = 0$) jest na podstawie wzoru (6.3) równe, przy założeniu $\nu = 1/4$,

$$(6.15) \quad w_{max} = \frac{1,83 a^3 b^3 P}{E \delta^3 (a^2 + b^2)^2}.$$

Dla płyty kwadratowej ($b = a$) otrzymujemy z powyższego wzoru wartość największego ugięcia

$$(6.16) \quad w_{max} = 0,47 \frac{P a^2}{E \delta^3},$$

która niewiele różni się od wartości uzyskanej przez A. i L. Föppl ó w, [4], i równej 0,46-0,48 w zależności od przyjętego sposobu obliczenia.



Rys. 23

6.3. Płyta prostokątna oparta swobodnie na obwodzie i poddana działaniu obciążenia ciągłego, wzrastającego liniowo w kierunku dłuższych boków płyty (rys. 23). Obciążenie q_x na jednostkę powierzchni płyty w układzie osi współrzędnych, obranych jak na rys. 21, przedstawia następujący wzór:

$$(6.17) \quad q_x = \frac{q}{2a} (x + a).$$

Wyrażenie, oznaczone poprzednio przez M , we wzorze dla energii potencjalnej sił zewnętrznych przybiera w danym przypadku postać

$$(6.18) \quad M = \frac{q}{2a} \int_{-a-b}^{a+b} \int_{-a-b}^{a+b} (x+a)(x^2 - 6a^2x^2 + 5a^4)(y^4 - 6b^2y^2 + 5b^4) dx dy$$

lub po wykonaniu całkowania

$$(6.19) \quad M = \frac{512}{25} a^5 b^5 q.$$

Obliczamy współczynnik A występujący w założeniu R i t z a na podstawie poprzednio wyprowadzonego wzoru (6.8). Po uwzględnieniu wartości M według wzoru (6.19) otrzymuje się

$$(6.20) \quad A = 0,064 \frac{q(1 - \nu^2)}{E \delta^3 (a^2 + b^2)^2}.$$

Wobec tego ugięcie w środku płyty jest równe [por. wzór (6.3) przy założeniu $x = y = 0$]

$$(6.21) \quad w_{sr} = \frac{0,099 q (1 - \nu^2) B^4}{E \delta^3 (1 + 2 a^2 + a^4)},$$

gdzie, jak poprzednio, przyjęto oznaczenia: $a = b/a$ oraz $B = 2b$. Przy założeniu $\nu = 3/10$ wzór powyższy przybiera następującą postać:

$$(6.22) \quad w_{sr} = \frac{0,09 q B^4}{E \delta^3 (1 + 2 a^2 + a^4)}.$$

Tablica 2

$\frac{1}{a} \backslash \beta$	Według wzoru (6.22)	Według Poradnika [5]
1	0,02	0,02
2	0,06	0,06
3	0,07	0,08
4	0,08	0,09

Wartość tego wyrażenia będącego funkcją stosunku wymiarów płyty przedstawia dla różnych stosunków a/b tablica 2, w której dla porównania podano równocześnie odpowiednie wartości ugięcia według *Poradnika* [5].

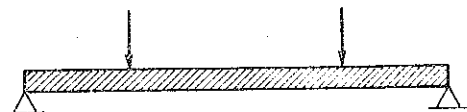
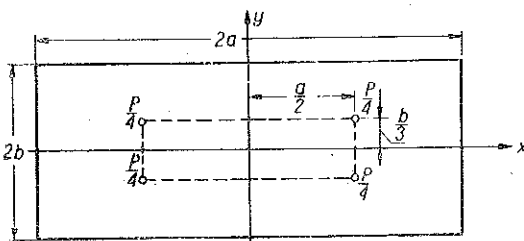
W tablicy 2 symbol β oznacza jak w przykładzie poprzednim iloraz $qB^4/E\delta^3$.

6.4. Płyta prostokątna oparta swobodnie na obwodzie i poddana działaniu czterech równych i symetrycznie rozstawionych sił $P/4$ (rys. 24). Przyjmując wymiary jak na rys. 24 obliczamy część wyrażenia dla energii potencjalnej obciążenia oznaczoną poprzednio przez M [por. wzór (6.6)]:

$$(6.23) \quad M = \frac{418}{27} a^4 b^4 P.$$

Wobec tego parametr A przedstawiony wzorem (6.8) przybiera następującą wartość:

$$(6.24) \quad A = \frac{418}{104355} \frac{P}{a b (a^2 + b^2)^2 D}.$$



Rys. 24

Na podstawie wzoru (6.3), przyjmując w tym wzorze $x = y = 0$, obliczamy największe ugięcie w środku płyty

$$(6.25) \quad w_{max} = \frac{0,1 a^3 b^3 P}{(a^2 + b^2)^2 D}.$$

Przyjmijmy, że w pewnym przypadku szczególnym jest stosunek wymiarów płyty równy $a/b = 4/3$ i oznaczmy szerokość płyty $2b$ przez B .

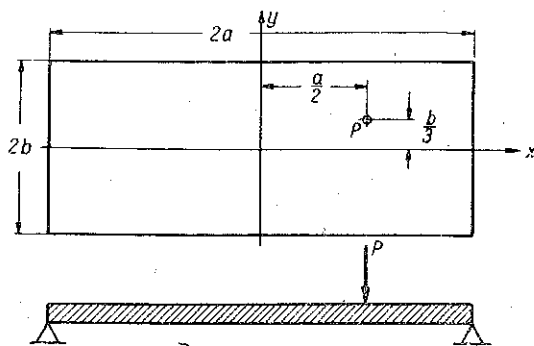
Wówczas ze wzoru (6.25) otrzymuje się następującą, oczywiście jak zawsze przybliżoną, wartość ugięcia maksymalnego

$$(6.26) \quad w_{max} = 0,008 \frac{B^2 P}{D}.$$

Wartość ta różni się niewiele od wartości ugięcia obliczonej przy użyciu rachunku różnic skończonych przez K. B e y e r a, [6]¹²⁾:

$$(6.27) \quad w_{max} = 0,007 \frac{B^2 P}{D}.$$

6.5. Płyta prostokątna oparta swobodnie na obwodzie i poddana działaniu siły skupionej P przyłożonej mimośrodowo (rys. 25). Przyjmujemy wymiary jak na rys. 25. Wartość parametru A obliczona w przykładzie poprzednim [wzór (6.25)] nie ulegnie w danym przypadku zmianie. Zatem na podstawie wzoru (6.3) otrzymujemy wartość ugięcia w miejscu przyłożenia siły równą



Rys. 25

$$(6.28) \quad w_p = \frac{0,06 a^3 b^3 P}{(a^2 + b^2)^2 D}.$$

Założmy, że jest w przypadku szczególnym $a/b = 4/3$.

Wówczas przyjmując oznaczenie $B = 2b$ otrzymujemy

$$(6.29) \quad w_p = 0,005 \frac{B^2 P}{D}$$

lub, jeżeli przestać na dwóch znakach po przecinku,

$$(6.30) \quad w_p \approx 0,01 \frac{B^2 P}{D}.$$

¹²⁾ Formalnie rzecz biorąc różnica jest mniejsza (odpowiednie współczynniki liczbowe wynoszą bowiem 0,0077 oraz 0,0073), jednakże czwarta cyfra po przecinku jest niewątpliwie przy użyciu obu metod niepewna. Należy zwrócić uwagę, że metoda różnic skończonych, dość zresztą żmudna w danym przypadku pod względem rachunkowym, doprowadza również do wyników przybliżonych, podobnie jak metoda Ritz'a. Słusznie jednak pisze w tej sprawie K. B e y e r: «Zastosowaniu teorii zginania w przypadku dowolnego obciążenia i oparcia płyt... stoją na przeszkodzie trudności matematyczne. Zadowolamy się zatem w tych razach z reguły rozwiązaniami przybliżonymi, zwłaszcza że założenia dotyczące fizykalnych własności materiału i sposobu oparcia nie są w żadnej mierze dokładnie spełnione», [6], str. 680.

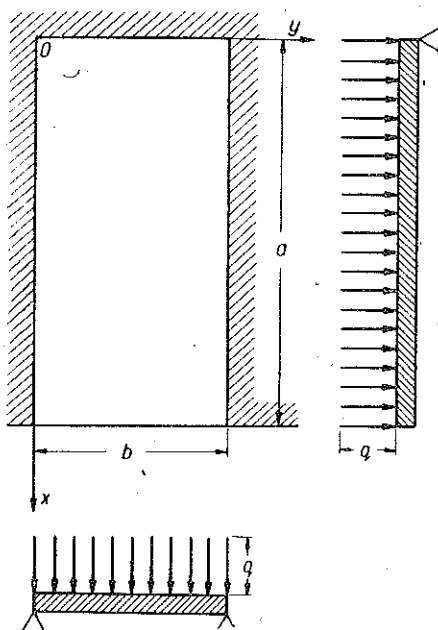
K. B e y e r, [6], otrzymał w danym przypadku współczynnik liczbowy 0,010. Wypada uznać, nie bez podstaw, że metoda różnic skończonych zastosowana przez K. B e y e r a doprowadza w ogólności do rezultatów dokładniejszych, jednakże prostota rachunków i szybkość uzyskania wyników końcowych są w metodzie R i t z a niewątpliwie znacznie większe¹³⁾.

6.6. Płyta prostokątna oparta swobodnie na trzech krawędziach i poddana obciążeniu równomiernie rozłożonemu (rys. 26). Przyjmujemy wymiary płyty oraz układ współrzędnych jak na rys. 26. Stosując przyjętą poprzednio analogię pomiędzy ugięciem płyt i ugięciem belek założymy, że płyta ugina się wzdłuż linii równoległych do osi y jak belka wolnopodparta, zaś wzdłuż linii równoległych do osi x jak belka wspornikowa (choć w istocie wzdłuż krawędzi pokrywającej się z osią y płyta jest oparta przegubowo, a nie utwierdzona sztywnie). Wobec tego ugięcie pasm płyty równoległych do osi y przedstawia w obranym układzie współrzędnych funkcja [por. wzór (6.2.2), w którym należy zastąpić y przez $y - b/2$ oraz b przez $b/2$]

$$(6.31.1) \quad w_1 = A_1 (y^4 - 2b y^3 + b^3 y),$$

a ugięcie pasm równoległych do osi x funkcja [por. wzór (5.1) przyjmując w tym wzorze $b = 0$, $c = a$ oraz $r = x$]

$$(6.31.2) \quad w_2 = A_2 (x^4 - 4 a x^3 + 6 a^2 x^2).$$



Rys. 26

Łącząc oba powyższe wzory obieramy kształt powierzchni ugięcia płyty w postaci

$$(6.32) \quad w = A (x^4 - 4 a x^3 + 6 a^2 x^2) (y^4 - 2 b y^3 + b^3 y).$$

Obliczamy energię odkształcenia sprężystego na podstawie wzoru (6.1), wykonując kolejno całkowanie względem zmiennej x (w granicach

¹³⁾ Dla porównania: rozwiązanie przykładu 6.5 zajmuje w znanym podręczniku K. Beyera, [6], blisko cztery strony, w tym sześć tablic.

od 0 do a) oraz zmiennej y (w granicach od 0 do b). Po prostych przekształceniach otrzymuje się ostatecznie

$$(6.33) \quad E_s = a^5 b^5 D A^2 [5,55 a^4 + 0,71 b^4 + (5,00 - 5,83 \nu) a^2 b^2].$$

Przyjmijmy następujące symboliczne oznaczenie dla energii potencjalnej sił zewnętrznych:

$$(6.34) \quad E_z = -AK.$$

Wówczas z warunku minimum energii potencjalnej układu (1.7) otrzymujemy

$$(6.35) \quad A = \frac{K}{2 a^5 b^5 D L},$$

gdzie symbol L przedstawia wyrażenie objęte nawiasem kwadratowym we wzorze (6.33).

Dla obciążenia równomiernego o wielkości jednostkowej q współczynnik K przybiera następującą wartość:

$$(6.36) \quad K = q \int_0^a \int_0^b (x^4 - 4^2 a x^3 + 6 a^2 x^2) (y^4 - 2 b y^3 + b^2 y) dx dy = \frac{6}{25} a^5 b^5 q.$$

Wobec tego na podstawie wzoru (6.35) otrzymuje się wartość parametru A równą

$$(6.37) \quad A = \frac{3}{25} \frac{q}{D L}.$$

Można przypuszczać, że największe ugięcie płyty zachodzi w miejscu położonym na środku krawędzi swobodnej, czyli dla wartości $x = a$ oraz $y = b/2$. Podstawiając te wartości do wzoru (6.32) otrzymujemy

$$(6.38) \quad w_{max} = \frac{15}{16} a^4 b^4 A$$

i w dalszym ciągu przy uwzględnieniu zależności (6.37)

$$(6.39) \quad w_{max} = \frac{27(1 - \nu^2) a^4 b^4 q}{20 E \delta^3 E}.$$

Jeżeli stosunek wymiarów płyty b/a oznaczyć przez α , wówczas wzór powyższy przyjmuje następującą ostateczną postać:

$$(6.40) \quad w_{max} = \frac{q b^4}{E \delta^3} \frac{1,35(1 - \nu^2)}{0,71 \alpha^4 + (5 - 5,83 \nu) \alpha^2 + 5,55}.$$

Obierzmy wartość współczynnika Poissona ν równą $3/10$. Wówczas jest

$$(6.41) \quad w_{max} = \frac{q b^4}{E \delta^3} \beta,$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$(6.42) \quad \beta = \frac{1,23}{0,71 a^4 + 3,25 a^2 + 5,55}$$

Wartość współczynnika β dla kilku wartości a podano w tablicy 3, w której pomieszczono równocześnie odpowiednie wartości według danych *Poradnika* [5].

Tablica 3

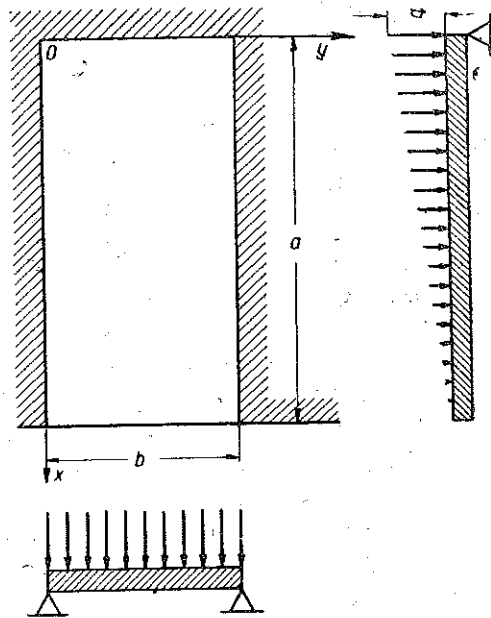
$a \backslash \beta$	Według wzoru (6.42)	Według <i>Poradnika</i> [5]
1	0,13	0,14
$1/2$	0,19	0,16
$1/4$	0,21	0,17

6.7. Płyta prostokątna oparta swobodnie na trzech krawędziach i poddana obciążeniu malejącemu liniowo ku wolnej krawędzi płyty (rys. 27). Wartość energii odkształcenia sprężystego obliczona w przykładzie poprzednim nie ulega już w danym razie zmianie. Natomiast współczynnik K [por. wzory (6.34) i (6.36)] przyjmuje inną wartość, gdyż obciążenie jednostkowe q_x przedstawia funkcję współrzędnej x , mianowicie

$$(6.43) \quad q_x = q \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Ostatecznie więc jest

$$(6.44) \quad K = q \int_0^a \int_0^b \left(1 - \frac{x}{a}\right) (x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2)(y^4 - 2by^3 + b^3y) dx dy = \frac{1}{15} a^5 b^5 q.$$



Rys. 27

Obliczamy z kolei wartość parametru A na podstawie wzoru (6.35) i otrzymujemy

$$(6.45) \quad A = \frac{1}{30} \frac{q}{DL}$$

Wobec tego wielkość ugięcia maksymalnego [por. wzór (6.38)] jest równa

$$(6.46) \quad w_{max} = \frac{3(1-\nu^2)a^4 b^4 q}{8 E \delta^3 L}$$

Przekształcamy powyższy wzór, podobnie jak w przykładzie poprzednim, kładąc w nim $a = b/a$. Otrzymujemy wówczas

$$(6.47) \quad w_{max} = \frac{q b^4}{E \delta^3} \frac{0,37(1-\nu^2)}{0,71 a^4 + (5 - 5,83\nu) a^2 + 5,55}$$

i w szczególności dla $\nu = 3/10$

$$(6.48) \quad w_{max} = \frac{q b^4}{E \delta^3} \beta,$$

gdzie przyjęto oznaczenie

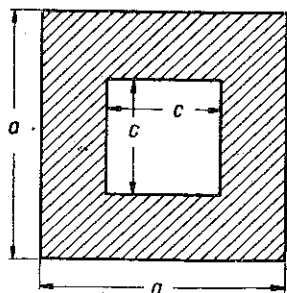
$$(6.49) \quad \beta = \frac{0,34}{0,71 a^4 + 3,25 a^2 + 5,55}$$

Obliczamy teraz wartość współczynnika β kolejno dla wartości a równych np. 1, $1/2$ i $1/4$. Uzyskane wyniki liczbowe podaje tablica 4, w której dla porównania pomieszczono równocześnie dane według *Poradnika* [5].

Tablica 4

a/β	Według wzoru (6.49)	Według <i>Poradnika</i> [5]
1	0,04	0,04
$1/2$	0,05	0,06
$1/4$	0,06	0,07

Na zakończenie wspomniemy jeszcze o jednym zadaniu, którego rozwiązanie pozostawiamy czytelnikowi. Dotyczy to zadania płyty kwadratowej posiadającej symetrycznie położony otwór kwadratowy (rys. 28); według opinii O. Föppla, [4], nie zostało ono dotychczas rozwiązane (mowa o 1933 r.).



Rys. 28

Przyjmijmy, że płyta jest oparta swobodnie na obwodzie i poddana działaniu obciążenia rozłożonego równomiernie. Wówczas stosując dla ugięcia płyty wzór (6.3), w którym należy przyjąć $b = a$, i przeprowadzając obliczenia analogiczne do obliczeń podanych w przykładzie 4.1, znajdziemy bez zasadniczych trudności ugięcie maksymalne na brzegu

otworu. W podobny sposób postąpić można przy odmiennym sposobie oparcia brzegów płyty i odmiennym sposobie obciążenia.

Prace wymienione w tekście

- [1] T. Iwiński, J. Nowiński, S. Turski, *Zastosowanie metody Ritz'a do wyznaczenia ugięcia belek*, Inż. i Bud. 4 i 5 (1952).
- [2] S. Timoshenko, *Theory of Elasticity*, New York-Londyn 1934.
- [3] *Taschenbuch für Bauingenieure*, t. I, Berlin 1943.
- [4] A. i O. Föppl, *Drang und Zwang*, t. I, tłum. ros. 1933.
- [5] *Sprawocznik po technicznej mechanice*, pod red. akad. A. N. Dinnika, OGIZ, Moskwa-Leningrad 1949.
- [6] K. Beyer, *Die Statik im Eisenbetonbau*, t. II, Berlin 1934.
- [7] K. B. Biezeno i R. Grammel, *Technische Dynamik*, t. I, tłum. ros. 1950.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ПРОГИБА ПЛАСТИНОК С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА РИТЦА

Работа представляет собой расширение метода, примененного автором в работе [1] относительно приближенного определения прогиба пластинок.

Функции, выступающие в предпосылке Р и т ц а (1. 6), определяются путём сравнения изгиба пластинок с изгибом балок (примеры такого образа действия приведены уже в [4]). Использование этой аналогии, впрочем чисто формально, дает возможность получить сравнительно точное решение уже при употреблении одной функции (многочлена).

В первой части работы рассмотрены круглые пластинки опёртые и нагруженные осесимметрично.

В параграфе 2 приведены решения для круглых пластинок, опёртых свободно по контуру и нагруженных либо равномерно по всей своей поверхности (фиг. 2), либо только в своей центральной части (фиг. 3); далее — с нагрузкой расположенной по концентричной окружности (фиг. 4) или уменьшающейся линейно от центра к краям пластинки (фиг. 5).

В параграфе 3 рассмотрены круглые пластинки защемленные по контуру и нагруженные также, как пластинки рассмотренные в параграфе 2 (фиг. 8, 9, 11, 12).

Параграф 4 занимается кольцеобразными пластинками (опирающимися свободно или защемленными) с разнообразными нагрузками (фиг. 13, 14, 15, 16 и 17).

Для расчета прогиба кольцеобразных консольных пластинок (параграф 5) принято функцию Р и т ц а в форме (5.1), т. е. такой же, как для нагруженной равномерно консольной балки.

Приведены детальные решения более характерных примеров представленных на фиг. 18 и 19.

Во второй части (начиная с шестого параграфа) рассмотрены прямоугольные пластинки, для которых предпосылка Р и т ц а представлена формулой (6. 3). Решенные примеры относятся к системам представленным на фиг. 21b, 22, 23, 24, 25, 26 и 27. Сравнение с решениями, полученными методом конечных разностей, [6], приводит к заключению (примеры 6.4 и 6.5), что хотя последний метод более точен, то простота вычислений и скорость получения результатов по методу Р и т ц а гораздо больше. Впрочем нет принципиальных затруднений даже при решении сложных примеров (как например прямоугольная пластинка с отверстием, упомянутая в [4]).

Summary

APPLICATION OF THE RITZ'S METHOD FOR APPROXIMATE CALCULATION OF DEFLECTION OF PLATES

The present paper is a development of the method used by the author in the paper Ref. [1], for approximate determination of deflection of plates.

The functions in Ritz's assumption (1.6) are chosen by confronting bending of plates with that of beams (examples of such procedure have been already given in the paper Ref. [4]). Using formally that analogy it is sufficient to take only one function (a polynome) to obtain a comparatively exact solution.

In the first part of the paper circular plates are investigated with circularly symmetrical supports and loads.

In Sec. 2 the solution is given for circular plates simply supported on the periphery and subjected to a load uniformly distributed over the whole surface (Fig. 2), or its central part (Fig. 3), or uniformly distributed along a concentric circle (Fig. 4), or linearly diminishing from the centre to the edge of the plate (Fig. 5).

In Sec. 3 circular plates are discussed, fixed along the periphery and loaded in the same manner as in Sec. 2 (Figs 8, 9, 11 and 12).

Sec. 4 presents an investigation of circular plates simply supported or fixed with one concentric circular hole, loaded in various manners (Figs 13, 14, 15, 16 and 17).

To calculate the deflections of circular cantilever plates (Sec. 5) the function Ritz's is taken in the form of (5.1), i. e. as for an uniformly loaded cantilever beam.

For more characteristic problems, presented in Figs 18 and 19, detailed solutions are given.

In the second part (beginning with Sec. 6) rectangular plates are investigated, for which R i t z' s assumption is expressed by Eq. (6.3). The problems solved concern Figs 21b, 22, 23, 24, 25, 26 and 27. A comparison with the solution obtained by means of the method of finite differences, [6], leads to the conclusion [problems (6.4) and (6.5)] that although the latter method is more exact, R i t z' s method involves a more simple and quick calculation, presenting no major difficulties even in more complicated cases like of a rectangular plate with a hole, mentioned in [4].

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 czerwca 1953 r.