

819
ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

IV

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem
siły krytycznej

W A R S Z A W A

1 9 5 3

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

MICHAŁ ŻYCKOWSKI

UGIĘCIE PRĘTA ŚCISKANEGO MIMOŚRODOWO POD DZIAŁANIEM
SIŁY KRYTYCZNEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

IV

WARSZAWA 1953

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SZKOŁA INŻYNIERSKA W POZNANIU
KATEDRA PRZEMYSŁOWYCH
I BUDOWLANYCH SPRZĘTOW
Poznań, ul. Mroźnicka 11

ZAKŁAD BADAWCZY BUDOWNICTWA
SZKOŁY INŻYNIERSKIEJ W POZNANIU

Nr inwent. 819

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (IV)

Copyright 1953 by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa (Poland). Printed in Poland.

All rights reserved

No part of this book may be translated or reproduced
in any form, by mimeograph or any other means,
without permission in writing from the publishers.

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK

Nakład 1000 + 150 egz. Papier druk. sat. 70x100/16, 70 g Arkuszy wydawniczych 0,85. Arkuszy drukarskich 7,8
Oddano do składania dn. 13.VII.53 r. Druk. ukończono dn. 26.X.53 r. Zam. 133 c. 4-B-55019 Cena 4,-

Dla uniknięcia nieporozumień należy od razu zaznaczyć, że chodzi tu o siłę krytyczną dla pręta ściskanego osiowo, ponieważ dla prętów mimośrodowo ściskanych wprowadzenie pojęcia siły krytycznej trzeba uważać za pozbawione sensu.

Będziemy zakładali sprężystość odkształceń. Analiza przybliżona ściskania mimośrodowego wykazuje w tym przypadku, że strzałka ugięcia pręta pod działaniem siły krytycznej (eulerowskiej) zmierza do nieskończoności. Niektórzy badacze próbują nawet definiować siłę krytyczną dla pręta mimośrodowo ściskanego jako taką, przy której ugięcia pręta zmierzają do nieskończoności. Jest to, oczywiście, podejście błędne, ponieważ przy dużych ugięciach dokonane przybliżenia stają się niedopuszczalne; zresztą, jak słusznie stwierdzają H u b e r, J e ż e k i inni, ugięcie pręta o skończonej długości może mieć tylko wartość skończoną.

Wychodząc ze ścisłego równania różniczkowego zginania otrzymujemy wyniki w postaci skomplikowanej: zależność strzałki ugięcia δ od siły ściskającej P i mimośrodu jej działania e wyraża się funkcją nieelementarną, powstałą z odwrócenia niepełnej całki eliptycznej; ponieważ jest to funkcja dwóch zmiennych, więc ujęcie jej w tablice jest rzeczą trudną i niewygodną. Zastosowanie rachunku różnic skończonych (M u t e r m i l c h) pozwala obliczyć w tym przypadku strzałkę ugięcia, obliczenie jest jednak żmudne i nie daje obrazu zależności $\delta = f(P, e)$. Wzory przybliżone, pozwalające zbadać tę zależność w przypadku, gdy siła P jest bliska eulerowskiej, nie są podawane w literaturze. Zajmiemy się przeto wyprowadzeniem takiego wzoru, zbadaniem jego dokładności i analizą wyników. Wzór ten uzyskamy przez rozwinięcie, w końcowym wyniku teorii ścisłej, pewnych funkcji na szeregi potęgowe i pominięcie dalszych, małych wyrazów tych szeregów wobec kilku wyrazów pierwszych.

Wydziemy ze ścisłego równania zginania

$$(1) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EI},$$

w którym dla łatwiejszego uwzględnienia warunków brzegowych wyrazimy krzywiznę $1/\varrho$ przez ugięcie y i zmienną niezależną s , mierzoną po łuku ugiętej osi pręta. Mamy więc

$$(2) \quad \frac{1}{e} = \frac{\frac{d^2 y}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

Wzór ten wyprowadza np. J a s i ń s k i. Po podstawieniu, stosując dla uproszczenia symbolikę L a g r a n g e ' a, otrzymujemy

$$(3) \quad \frac{y''}{\sqrt{1 - (y')^2}} = \frac{M}{EI}$$

Przyjmijmy układ osi jak na rys. 1. W takim razie moment gnący M wyniesie

$$(4) \quad M = -P y.$$

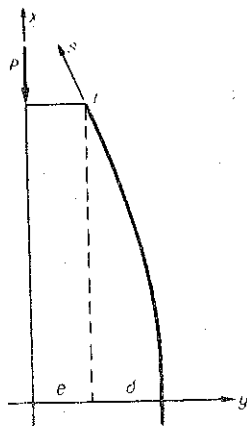
Oznaczając dla krótkości

$$(5) \quad \frac{P}{EI} = \alpha^2$$

otrzymujemy do całkowania równanie

$$(6) \quad \frac{y''}{\sqrt{1 - (y')^2}} = -\alpha^2 y.$$

Równanie to nie zawiera jawnie zmiennej niezależnej s , więc stosujemy podstawienie



$$(7) \quad \begin{cases} y' = p(y), \\ y'' = p p'. \end{cases}$$

Rys. 1

Po scałkowaniu i zmianie znaków otrzymujemy

$$(8) \quad \sqrt{1 - p^2} = \frac{1}{2} \alpha^2 y^2 + C.$$

Stałą C wyznaczamy z warunku $p = 0$ dla $y = \delta + e$ (utwierdzenie dolnego końca pręta). Otrzymujemy

$$(9) \quad C = 1 - \frac{\alpha^2}{2} (\delta + e)^2,$$

więc

$$(10) \quad \sqrt{1 - p^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} [(\delta + e)^2 - y^2].$$

Dla dalszego całkowania obliczamy stąd p :

$$(11) \quad p = \frac{dy}{ds} = \pm \sqrt{1 - \left\{1 - \frac{a^2}{2} [(\delta + e)^2 - y^2]\right\}^2}.$$

Wybieramy znak minus, ponieważ z przyjętego układu osi jest widoczne, że pochodna dy/ds jest stale niedodatnia (y maleje ze wzrostem s). Po uporządkowaniu i rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy stąd

$$(12) \quad \frac{-dy}{\sqrt{[(\delta + e)^2 - y^2] \left\{1 - \frac{1}{4} a^2 [(\delta + e)^2 - y^2]\right\}}} = a ds.$$

Otrzymana po lewej stronie całka jest całką eliptyczną, ponieważ pod pierwiastkiem mamy wyrażenie czwartego stopnia ze względu na zmienną y . Aby całkę tę sprowadzić do postaci normalnej, podstawimy (wprowadzając nową zmienną φ)

$$(13) \quad \begin{cases} y = (\delta + e) \cos \varphi, \\ dy = -(\delta + e) \sin \varphi d\varphi. \end{cases}$$

Wówczas równanie (12) przekształci się na

$$(14) \quad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} a^2 (\delta + e)^2 \sin^2 \varphi}} = a ds.$$

Warunkiem brzegowym będzie tu $y = \delta + e$ dla $s = 0$, czyli $\varphi = 0$ dla $s = 0$. Możemy więc lewą stronę równania (14) scałkować w granicach od 0 do φ , a prawą od 0 do s , uwzględniając w ten sposób od razu warunek brzegowy. Otrzymujemy

$$(15) \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} a^2 (\delta + e)^2 \sin^2 \varphi}} = as.$$

Aby z równania tego otrzymać zależność strzałki ugięcia δ od siły P , musimy uwzględnić, że strzałka ta przedstawia ugięcie w punkcie $s = l$, tzn. ugięcie górnego końca pręta. Musimy więc podstawić $y = e$ dla $s = l$, czyli, jak wynika z podstawienia (13), $\varphi = \arccos [e/(\delta + e)]$ dla $s = l$:

$$(16) \quad \int_0^{\arccos \frac{e}{\delta + e}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} a^2 (\delta + e)^2 \sin^2 \varphi}} = al.$$

Dla uproszczenia tego równania wprowadzimy nowe oznaczenia wielkości bezwymiarowych:

$$(17) \quad \frac{\delta}{l} = \vartheta,$$

$$(18) \quad \frac{e}{l} = \Theta,$$

$$(19) \quad \frac{P}{P_k} = \frac{4Pl^2}{\pi^2 EI} = m,$$

przy czym przez P_k oznaczyliśmy tu siłę krytyczną (eulerowską) dla danego pręta. W takim razie jest

$$(20) \quad a = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{m}.$$

Po wstawieniu tych wielkości do równania (16) otrzymujemy

$$(21) \quad \int_0^{\arccos \frac{\vartheta}{\vartheta + \Theta}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{16} \pi^2 m (\vartheta + \Theta)^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{m}.$$

Jest to poszukiwana zależność $\delta = f(P, e)$, czyli $\vartheta = f(m, \Theta)$, ale w postaci uwikłanej $F(m, \Theta, \vartheta) = 0$. Rozwikłanie jej w ogólnym przypadku jest niemożliwe bez wprowadzenia nowych funkcji nieelementarnych, choć w przypadkach szczególnych, dla danych m i Θ , można z równania (21) obliczyć ϑ posługując się tablicami całek eliptycznych Legendre'a i stosując metodę kolejnych przybliżeń. W ten sposób będziemy mogli sprawdzić dokładność wzorów przybliżonych, które wprowadzimy w dalszym ciągu tej pracy.

Aby wyrazić całkę po lewej stronie wzoru (21) za pomocą funkcji elementarnych, rozwiniemy mianownik w szereg Maclaurina. Będzie to szereg typu

$$(22) \quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \dots$$

Dla zbadania zbieżności tego szeregu i oszacowania błędu w przypadku przybliżenia np. za pomocą dwu pierwszych wyrazów musimy przede wszystkim oszacować x . W naszym przypadku

$$(23) \quad x = \frac{1}{16} \pi^2 m (\vartheta + \Theta)^2 \sin^2 \psi.$$

Z granic całkowania we wzorze (21) wnosimy, że

$$(24) \quad 1 \geq \cos \psi \geq \frac{\vartheta}{\vartheta + \Theta},$$

czyli

$$(25) \quad 1 \geq \cos^2 \psi \geq \frac{\vartheta^2}{(\vartheta + \Theta)^2};$$

w takim razie

$$(26) \quad 0 \leq \sin^2 \psi \leq 1 - \frac{\vartheta^2}{(\vartheta + \Theta)^2}$$

i ostatecznie

$$(27) \quad \sin^2 \psi \leq \frac{\vartheta^2 + 2\vartheta\Theta}{(\vartheta + \Theta)^2}.$$

Po podstawieniu do (23) otrzymujemy oszacowanie

$$(28) \quad x \leq \frac{1}{16} \pi^2 m (\vartheta^2 + 2\vartheta\Theta).$$

Założmy, że będziemy przyjmowali $m \leq 1,2$ oraz $\Theta \leq 0,1$, gdyż z większymi wartościami mamy rzadko do czynienia. Założmy dalej, że będziemy rozpatrywali tylko strzałki ugięcia $\delta \leq 0,5l$, czyli $\vartheta \leq 0,5$. Nie jest to duże ograniczenie, ponieważ, jak wskazuje np. Southwell, dla pręta osiowo ściskanego mamy zawsze $\vartheta \leq 0,8$ (dokładniej 0,8063), a w przypadku ściskania mimośrodowego przekroczenie tej wartości jest nieznaczne.

W takim razie

$$(29) \quad x \leq \frac{1}{16} \pi^2 1,2 (0,25 + 0,1) = 0,259.$$

Szereg (22) jest więc zbieżny. Zastosujemy przybliżenie przy użyciu dwóch pierwszych wyrazów tego szeregu; błąd przybliżenia nie przekroczy wartości

$$B = \left| \sqrt{1 - 0,259} - \left(1 - \frac{0,259}{2} \right) \right| = 0,0097,$$

czyli, procentowo, $0,0097/\sqrt{1 - 0,259} \cdot 100\% = 1,1\%$. Przy uczynionych wyżej założeniach możemy więc z błędem nie przekraczającym 1,1% napisać

$$(30) \quad \sqrt{1 - \frac{1}{16} \pi^2 m (\vartheta + \Theta)^2 \sin^2 \psi} = 1 - \frac{\pi^2 m}{32} (\vartheta + \Theta)^2 \sin^2 \psi.$$

Po wykonaniu całkowania błąd nie zwiększy się, lecz nawet ulegnie zmniejszeniu, bo przy szacowaniu przyjęliśmy największą wartość $\sin^2 \psi$.

Oznaczając dla skrótowania

$$(31) \quad \frac{\pi^2 m}{32} (\vartheta + \Theta)^2 = a$$

i korzystając z przybliżenia (30) napiszemy równanie (21) w postaci

$$(32) \quad \int_0^{\arccos \frac{\Theta}{\vartheta + \Theta}} \frac{d\psi}{1 - a \sin^2 \psi} = \frac{\pi}{2} \sqrt{m}.$$

Teraz możemy już wykonać całkowanie. Całka nieoznaczona wynosi mianowicie

$$(33) \quad \int \frac{d\psi}{1 - a \sin^2 \psi} = \frac{1}{\sqrt{1-a}} \arctg(\sqrt{1-a} \operatorname{tg} \psi).$$

Wstawienie granic wymaga obliczenia wartości $\operatorname{tg} \{\arccos [\Theta/(\vartheta + \Theta)]\}$. Otrzymujemy

$$(34) \quad \operatorname{tg} \left(\arccos \frac{\Theta}{\vartheta + \Theta} \right) = \frac{\sqrt{(\vartheta + \Theta)^2 - \Theta^2}}{\Theta}.$$

Gdy siła działająca jest bliska krytycznej — a zajmujemy się tym właśnie zakresem zmienności siły — strzałka ugięcia jest dużo większa od mimośrod; możemy więc nie popełniając dużego błędu opuścić w liczniku wzoru (34) Θ^2 wobec $(\vartheta + \Theta)^2$, pisząc w przybliżeniu

$$(35) \quad \operatorname{tg} \left(\arccos \frac{\Theta}{\vartheta + \Theta} \right) \approx \frac{\vartheta + \Theta}{\Theta}.$$

Wstawienie dolnej granicy całki (32) daje w wyniku zero, zatem

$$(36) \quad \frac{1}{\sqrt{1-a}} \arctg \left(\sqrt{1-a} \frac{\vartheta + \Theta}{\Theta} \right) = \frac{\pi}{2} \sqrt{m},$$

$$(37) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m} \sqrt{1-a} \right) = \frac{\vartheta + \Theta}{\Theta} \sqrt{1-a},$$

$$(38) \quad \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2} (1 - \sqrt{m} \sqrt{1-a}) \right] = \frac{\vartheta + \Theta}{\Theta} \sqrt{1-a}.$$

Przy uczynionych wyżej założeniach łatwo oszacujemy wielkość a :

$$a = \frac{\pi^2 m}{32} (\vartheta + \Theta)^2 \leq \frac{\pi^2 1,2}{32} 0,6^2 = 0,133.$$

Zatem $0,93 \leq \sqrt{1-a} \leq 1$, a ponieważ badamy obszar siły krytycznej, czyli

przyjmujemy m bliskie jedności; to argument cotangensa jest bliski zera. Możemy przeto zastosować przybliżenie

$$(39) \quad \operatorname{ctg} x \approx \frac{1}{x},$$

tzn. napisać

$$(40) \quad \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1 - \sqrt{m}\sqrt{1-a})} = \frac{\vartheta + \Theta}{\Theta} \sqrt{1-a}.$$

Łatwo sprawdzić, że przyjmując $m > 0,9$ popełniamy tu błąd nie większy od 2%.

Równanie (40) możemy przepisać w postaci

$$(41) \quad \frac{\pi}{2} \frac{\vartheta + \Theta}{\Theta} [\sqrt{1-a} - \sqrt{m}(1-a)] = 1,$$

ale stwierdziliśmy, że $a \leq 0,133$, więc z błędem nie przekraczającym 0,3% możemy napisać

$$(42) \quad \sqrt{1-a} \approx 1 - \frac{a}{2}.$$

Po podstawieniu do (41) i uporządkowaniu otrzymujemy

$$(43) \quad \frac{\pi}{4} \frac{\vartheta + \Theta}{\Theta} [(2\sqrt{m}-1)a + 2(1-\sqrt{m})] = 1.$$

Podstawiając wreszcie a ze wzoru (31) i oznaczając dla skrócenia

$$(44) \quad \vartheta + \Theta = u$$

otrzymujemy równanie trzeciego stopnia ze względu na u :

$$(45) \quad u^3 + \frac{64(1-\sqrt{m})}{\pi^2 m (2\sqrt{m}-1)} u - \frac{128\Theta}{\pi^3 m (2\sqrt{m}-1)} = 0.$$

Równanie to stanowi rozwiązanie zagadnienia, ponieważ obliczając z niego $u = u(m, \Theta)$ możemy na podstawie (44) napisać wprost $\vartheta = u(m, \Theta) - \Theta$, czyli otrzymać szukaną funkcję $\vartheta = \vartheta(m, \Theta)$. Rozwiążemy je najpierw w przypadkach szczególnych.

Jeżeli $\Theta = 0$, tzn. $e = 0$, siła działa osiowo i mamy do czynienia z wyboczeniem. Wtedy $u = \vartheta$ i równanie (45) przybierze postać

$$(46) \quad \vartheta^3 + \frac{64(1-\sqrt{m})}{\pi^2 m (2\sqrt{m}-1)} \vartheta = 0.$$

Równanie to ma zawsze pierwiastek $\vartheta = 0$, gdyż przy osiowym ściskaniu pręta prostoliniowa jego postać jest zawsze postacią równowagi (choć nie zawsze statecznej). W przypadku gdy $m > 1$, tzn. gdy siła przekroczy wartość krytyczną, istnieje jeszcze drugi dodatni pierwiastek równania (46), mianowicie

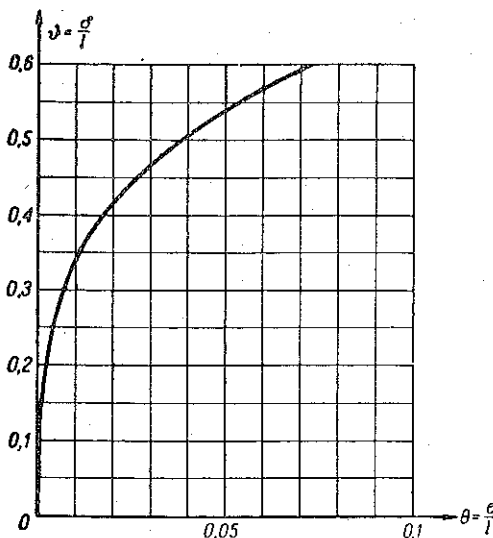
$$(47) \quad \vartheta = \frac{8}{\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{m} - 1}{m(2\sqrt{m} - 1)}}.$$

Otrzymaliśmy więc przybliżony wzór na strzałkę ugięcia pręta osiowo ściskanego, który uległ wyboczeniu. Stosując w mianowniku tego wzoru przybliżenie $m \approx 1$ dochodzimy do znanego wzoru *Poeschla*, który cytuje np. *Huber* w [1]:

$$(48) \quad \vartheta = \frac{8}{\pi} \sqrt{\sqrt{m} - 1}.$$

Należy podkreślić, że wzór (47) jest dużo dokładniejszy od wzoru *Poeschla*.

Bardziej interesujący będzie dla nas przypadek, gdy w równaniu (45)



Rys. 2

założymy $m = 1$; otrzymamy bowiem wtedy zależność ugięcia pręta, znajdującego się pod działaniem siły eulerowskiej, od mimośrodowego działania tej siły. Po odpowiednim podstawieniu równanie (45) przybierze postać

$$(49) \quad u^3 - \frac{128 \Theta}{\pi^3} = 0,$$

skąd

$$(50) \quad u = \frac{4 \sqrt[3]{2}}{\pi} \sqrt[3]{\Theta},$$

oraz

$$(51) \quad \vartheta = \frac{4 \sqrt[3]{2}}{\pi} \sqrt[3]{\Theta} - \Theta = 1,604 \sqrt[3]{\Theta} - \Theta.$$

Otrzymaliśmy bardzo prosty wzór, który ponadto odznacza się wysoką dokładnością; np. dla $\Theta = 0,1$, a więc dla mimośrodu stosunkowo dużego, otrzymujemy $\vartheta = 0,645$, wówczas gdy dokładna wartość, obliczona z równania (21) po żmudnych rachunkach, wynosi $\vartheta = 0,640$; błąd nie

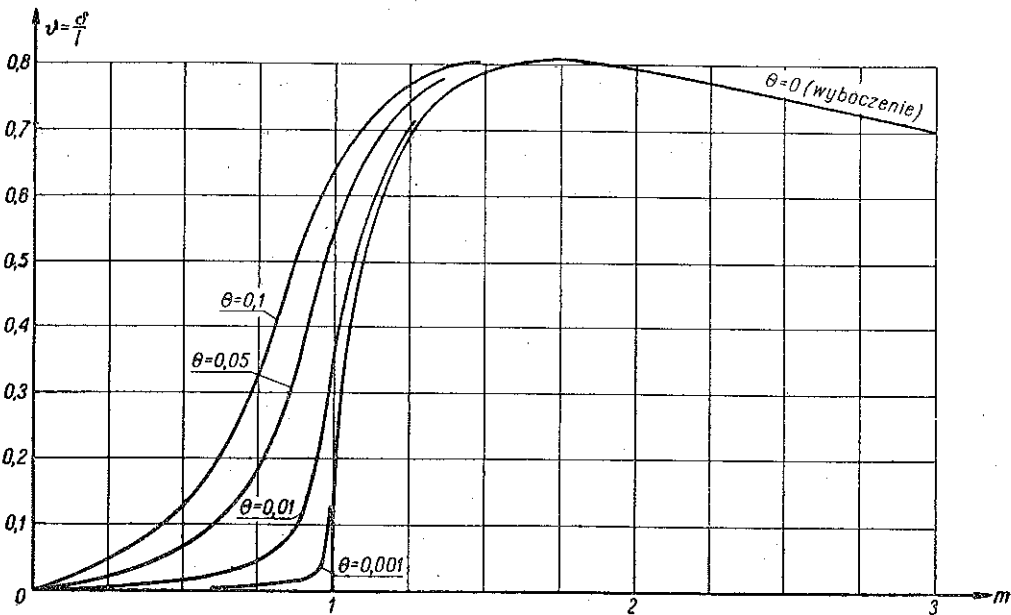
przekracza zatem 1%. Rysunek 2, obrazujący zależność (51), wskazuje dobitnie na to, jak wielkie ugięcia wywołuje siła eulerowska nawet w przypadku niewielkich mimośrodków jej działania.

Rozwiązanie równania (45) w przypadku ogólnym jest trudniejsze, ponieważ wyróżnik jego może być zarówno dodatni, jak i ujemny. Wyróżnik ten wynosi

$$(52) \quad \Delta = \left[\frac{64\Theta}{\pi^3 m (2\sqrt{m}-1)} \right]^2 + \left[\frac{64(1-\sqrt{m})}{3\pi^2 m (2\sqrt{m}-1)} \right]^3.$$

Stwierdzamy, że jest on zawsze dodatni w przypadku, gdy $0,25 < m < 1$, a może być również dodatni, gdy $m \geq 1$, jeżeli tylko mimośrodek Θ jest dostatecznie duży. Wtedy ze wzoru Cardana możemy obliczyć wartość jedynego pierwiastka rzeczywistego u równania (45). Stąd strzałka ugięcia jest równa

$$(53) \quad \vartheta = \frac{4}{\pi} \sqrt[3]{\frac{1}{m(2\sqrt{m}-1)}} \left[\sqrt[3]{\Theta + \sqrt{\Theta^2 + \frac{64(1-\sqrt{m})^3}{27m(2\sqrt{m}-1)}}} + \sqrt[3]{\Theta - \sqrt{\Theta^2 + \frac{64(1-\sqrt{m})^3}{27m(2\sqrt{m}-1)}}} \right] - \Theta.$$



Rys. 3

Jeżeli natomiast wyróżnik (52) jest ujemny, co ma miejsce przy siłach przewyższających krytyczną i bardzo małych mimośrodkach ich działania, równanie (45) nie daje się rozwiązać w ogólnym przypadku i tylko dla danych m i θ można z niego obliczyć u , stosując podstawienia trygonometryczne.

Rysunek 3 podaje zestawienie wyników w postaci wykresu funkcji $\vartheta = f(m, \theta)$, przy czym m przyjęto za zmienną niezależną, a θ za parametr. Wykres ten stwierdza dobitnie, że pojęcie siły krytycznej, niezwykle ważne w przypadku osiowego ściskania prętów, nie może być wprowadzone w przypadku ściskania mimośrodowego.

Literatura cytowana w tekście

- [1] M. T. Huber, *Stereomechanika techniczna*, t. III, P.Z.W.S., Warszawa 1951.
- [2] F. S. Jasiński, *Izbrannyje raboty po ustojczivosti szatych stierżniej*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1952.
- [3] K. Ježek, *Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl*, J. Springer, Wien 1937.
- [4] J. Mutermilch, *Zastosowanie rachunku różnicowego do obliczeń opartych na ścisłym równaniu odkształconej*, cz. III/I mat. nadesł. na Zjazd Nauk. PZTTB w Gdańsku, 1-4 XII 1949.
- [5] A. Pflüger, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, J. Springer, Berlin-Getynga-Heidelberg 1950.
- [6] E. P. Попов, *Nielinieijnyje zadaczi statiki tonkich stierżniej*, Gostiechizdat, Moskwa 1948.
- [7] R. V. Southwell, *Wwiedzenie w teorju uprugosti*, tłum. z ang., Moskwa 1948.
- [8] F. Szelaǳowski, *Wpływ siły krytycznej na stateczność prętów zginałych lub ściskanych mimośrodkowo*, nakł. Przegl. Techn., Warszawa 1927.

Резюме

ПРОГИБ СТЕРЖНЯ СЖИМАЕМОГО ВНЕЦЕНТРЕННО ПОД ДЕЙСТВИЕМ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Результатом приближенного анализа внецентренного сжатия является возрастание стрелки прогиба до бесконечности под действием критической силы (силы Эйлера). Это, очевидно, ошибочный результат, о чем и упоминают многие исследователи. Исходя из точного уравнения упругой линии, получается результат, выраженный неэлементарной функцией двух переменных, затруднительной при табелизации.

Работа приводит вывод приближенной формулы, представляющей зависимость прогибов стержня от значения сжимающей силы P и её эксцентриситета e . Получить такую формулу возможно, исходя из точного уравнения, разлагая в конечном результате некоторые функции в их степенные ряды и пренебрегая дальнейшими членами этих рядов, малыми по отношению к первым.

Исходя из общего случая, работа анализирует частные случаи: (1), $e=Q$ (продольный изгиб под действием осевой силы), и (2), $P=P_k$ (прогиб стержня, сжимаемого внецентренно под действием критической силы). Специально в последнем случае получается очень простая, и вместе с тем точная, приближенная формула, выражающая зависимость прогиба от величины эксцентриситета.

В заключение работа показывает, что в случае внецентренного сжатия нет смысла вводить понятие критической силы. Говоря о критической силе для некоторого стержня, можем подразумевать только силу Эйлера, это значит силу, которая была бы критической в случае осевого сжатия.

Summary

DEFLECTION OF A SHAFT COMPRESSED ECCENTRICALLY BY THE CRITICAL FORCE

An approximate analysis of eccentric compression indicates an infinite increase of deflection under the action of the critical force. This result is evidently erroneous, which has been pointed out by many investigators. Starting from the exact equation of the deflection curve, we obtain a result in terms of a non-elementary function of two variables, difficult to be represented by means of tables.

The paper presents the derivation of an approximate formula, expressing the dependence of the deflection upon the compression force P and its eccentricity e . The formula is based on the exact solution, certain functions being expanded in corresponding power series. The first few terms are accepted, others neglected as small.

Starting from the general case, an analysis is given of the particular cases of $e=0$ (buckling under axial load) and $P=P_k$ (deflection of a beam compressed eccentrically by the critical force). In the last case we obtain a particularly simple and exact formula for the deflection in terms of eccentricity.

It is shown that in the case of eccentric compression the concept of critical force has no reason. Speaking of the critical force of a certain shaft, the Eulerian force alone should be meant, i.e. the force which would be critical in the case of axial compression.