

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

II

J. NALESZKIEWICZ i A. SZANIAWSKI

Drgania i stateczność masztów oraz iglic

W A R S Z A W A

1 9 5 3

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

J. NALESZKIEWICZ i A. SZANIAWSKI

DRGANIA I STATECZNOŚĆ MASZTÓW ORAZ IGLIC

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

II

WARSZAWA 1953

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Nr. inw. 1058

WYDZIAŁ INŻYNIERSTWA
I BUDOWNICTWA

Warszawa, ul. Szczęśliwca 11

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (II)

Copyright 1953 by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa (Poland). Printed in Poland.

All rights reserved

No part of this book may be translated or reproduced
in any form, by mimeograph or any other means,
without permission in writing from the publishers.

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK

Nakład 1000 + 150 egz. Papier druk. sat. 70x100 16, 70 g. Arkuszy wydawniczych 3. Arkuszy drukarskich 2,52
Oddano do składania dn. 30.VI.53 r. Druk ukończono dn. 20.XI.53 r. Zam. 131. 4-B-55193 Cena zł 8,—

I. UŁOŻENIE RÓWNANIA CAŁKOWEGO DLA MASZTU DRGAJĄCEGO

Wstęp

Zastosowanie równań całkowych do rozwiązania różnych zagadnień technicznych, jak obliczenia częstości drgań, siły krytycznej, linii ugięcia belek itp., zajmuje coraz więcej miejsca w literaturze. Jednym z pierwszych podręczników tego rodzaju jest podręcznik G. Wiardy, [11]. Przykład praktycznego obliczenia dźwigara skrzydła samolotu podany jest również w artykule A. Grzędzielskiego i R. Sereżyńskiego, [2]. W artykule tym oprócz teoretycznych podstaw równań całkowych szeroko została omówiona i poparta przykładami praktyczna strona zagadnienia. Ponadto podany jest przykład układania funkcji wpływowej dla belki wspornikowej zamocowanej sztywno o przekroju zmieniającym się w sposób ciągły, jednak bez uwzględnienia wpływu sił tnących.

Z nowszych prac metoda równań całkowych omówiona została najobszerniej w książce Nudielmana, [9]. Książka ta zajmuje się układami prętów, podaje ogólne zasady tworzenia funkcji wpływowej i własności jej pochodnych cząstkowych oraz zasady układania równań całkowych.

Praca niniejsza oparta jest na wymienionych źródłach i zawiera obliczenie masztu pionowego o zmiennym w sposób nieciągły przekroju z masami skupionymi. Jednakże wobec uwzględnienia wpływu siły tnącej przy układaniu równania całkowego już pierwsza pochodna cząstkowa funkcji wpływowej jest nieciągła; okoliczność ta nie była uwzględniona w wymienionych pracach. Dla nadania zwięzłości algorytmom matematycznym wprowadzona została funkcja Heaviside'a.

Ogólne równanie całkowe wprowadzone w pierwszej części nie zostało wykorzystane w podanym przykładzie, gdyż, jak to wykazały przeliczenia szacunkowe, wpływ sił tnących i momentów bezwładności w danym przypadku można było pominąć. Ten wynik otrzymuje się dzięki temu, że omawiany maszt jest konstrukcją bardzo smukłą; natomiast wpływ siły tnącej, a zatem i ogólne równanie całkowe, trzeba uwzględniać w przypadkach małej sztywności na ścinanie oraz dużych wymiarów poprzecznych, jak np. w prętach kratowych lub masztach cienkościennych, w masztach niosących na swym szczycie ciężkie elementy itp.

Oznaczenia

- x Współrzędna bieżąca, dla której jest mierzone ugięcie.
- s Współrzędna bieżąca, dla której jest założone obciążenie.
- u Współrzędna bieżąca, dla której jest określony moment lub siła tnąca.
- l Długość masztu.
- i, j Liczby określające punkty podziału.
- l_i Długość odcinka masztu między punktami podziału: $l_i = x_i - x_{i-1}$.
- y Ugięcie całkowite.
- y_M Ugięcie częściowe przy uwzględnieniu wpływu samych momentów zginających.
- y_T Ugięcie częściowe przy uwzględnieniu wpływu samych sił tnących.
- y_Q Ugięcie częściowe, wywołane wpływem jednego ciężaru skupionego, przy odkształceniu całkowitym masztu.
- α Kąt obrotu w punkcie utwierdzenia.
- ρ Ramię bezwładności przekroju.
- B Współczynnik sztywności na zginanie.
- D Współczynnik sztywności na ścinanie.
- β Współczynnik sztywności utwierdzenia.
- ω Częstota kątowa drgań.
- g Przyspieszenie ziemskie: $g = 981 \text{ cm/sek}^2$.
- P Siła obciążająca poprzeczna.
- Q Siła obciążająca podłużna (ciężar konstrukcji).
- Q_i Ciężary skupione.
- ρ_i Ramiona bezwładności ciężarów skupionych.
- N Momenty obciążające zewnętrzne.
- $p(u)$ Obciążenie poprzeczne na jednostkę długości.
- $q(u)$ Ciężar jednostki długości.
- $M(u)$ Moment sił wewnętrznych.
- M_0 Moment utwierdzenia.
- $T(u)$ Siła tnąca.
- $H(z)$ Funkcja Heaviside'a [por. odsyłacz¹⁾].
- $G(x, s)$ Funkcja wpływowa (Greena).
- $G_M(x, s)$ Funkcja wpływowa bez uwzględnienia wpływu sił tnących.
- $G_T(x, s)$ Funkcja wpływowa bez uwzględnienia wpływu momentów gnących.

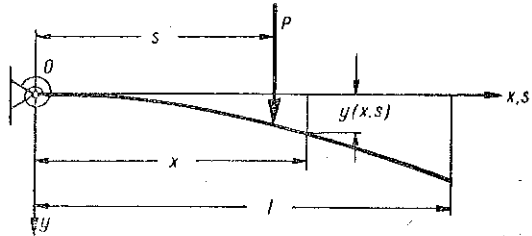
1. Ułożenie funkcji wpływowej dla obciążenia poprzecznego

1.1. Założenia. W punkcie O przyjmujemy utwierdzenie sprężyste o współczynniku sztywności utwierdzenia równym

$$\beta = \frac{M_0}{\alpha}$$

Sztywności na zginanie i ścinanie $B(u)$ i $D(u)$ są zmienne wzdłuż długości masztu w sposób nieciągły. W miejscach nieciągłości u_i wartość funkcji jest określona umownie jako średnia arytmetyczna obustronnych granic.

Dla małych odkształceń można obliczać oddzielnie ugięcia pochodzące od sprężystości utwierdzenia, od momentów gnących oraz od sił tnących, a następnie całkowite ugięcie traktować jako sumę tych ugięć.



Rys. 1

1.2. Uwzględnienie momentów gnących. Ugięcie pochodzące od momentów gnących składa się z dwóch części:

(1) ugięcia powstałego na skutek sprężystości utwierdzenia; jest ono równe $M_0 x/\beta$, oraz

(2) ugięcia powstałego przez odkształcenie sprężyste masztu.

Przy obciążeniu masztu samym tylko momentem $M(u)$, działającym na element długości du , elementarne ugięcie w miejscu x będzie

$$dy_M(x,u) = \begin{cases} 0, & x < u, \\ \frac{M(u)(x-u)}{B(u)} du, & x > u \end{cases}$$

lub wprowadzając funkcję Heaviside'a¹⁾

$$dy_M(x,u) = \frac{M(u)(x-u)H(x-u)}{B(u)} du.$$

Jeżeli moment $M(u)$ jest zmienny wzdłuż długości masztu, to

$$(1.1.1) \quad y_M(x) = \int_0^l \frac{M(u)(x-u)H(x-u)}{B(u)} du.$$

Przy obciążeniu siłą P w odległości s moment zginający $M(u)$ będzie przedstawiony wzorem

$$M(u,s) = P(s-u)H(s-u).$$

¹⁾ Zastosowana tutaj funkcja Heaviside'a jest określona w następujący sposób:

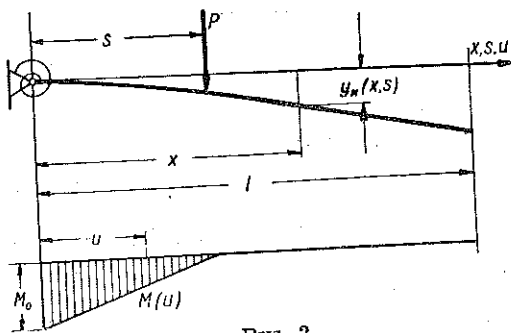
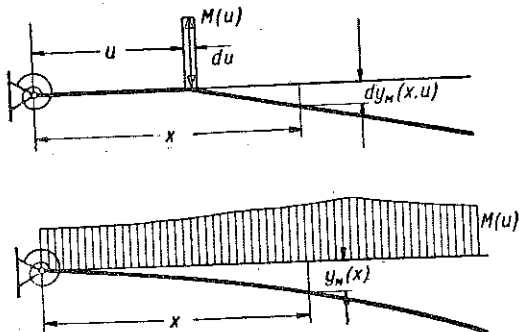
$$H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{2}, & z = 0, \\ 1, & z > 0. \end{cases}$$

Po podstawieniu otrzymanego wyrażenia dla momentu do wzoru (1.1.1) oraz po uwzględnieniu sprężystości utwierdzenia, obciążonego momentem $M_0 = Ps$, ugięcie w miejscu x będzie równe

$$y_M(x, s) = \frac{Psx}{\beta} + \int_0^l \frac{P(s-u)H(s-u)(x-u)H(x-u)}{B(u)} du,$$

a funkcja wpływowa odpowiadająca samemu zginaniu będzie równa

$$(1.1.2) \quad G_M(x, s) = \frac{xs}{\beta} + \int_0^l \frac{(x-u)(s-u)}{B(u)} \times H(x-u)H(s-u) du.$$



Rys. 2

13. Uwzględnienie sił tnących. Siła tnąca nie może istnieć samodzielnie bez jednoczesnego obciążenia momentem zginającym, jednakże w celu uproszczenia rozumowania można rozpatrywać oddzielnie ugięcie pod wpływem momentu i oddzielnie ugięcie pod wpływem siły tnącej.

Przy obciążeniu masztu samą siłą tnącą $T(u)$, działającą na element długości du , elementarne ugięcie w miejscu x będzie

$$dy_T(x, u) = \frac{T(u)}{D(u)} H(x-u) du.$$

Gdy maszt jest obciążony na całej długości zmienną siłą tnącą, to linia ugięcia pochodząca od ścinania będzie przedstawiona wzorem

$$(1.1.3) \quad y_T(x) = \int_0^l \frac{T(u)}{D(u)} H(x-u) du.$$

Przy obciążeniu siłą P w odległości s siłą tnącą przedstawia wzór

$$T(u, s) = PH(s-u).$$

Po podstawieniu otrzymanego wyrażenia dla siły tnącej do wzoru (1.1.3) ugięcie w miejscu x będzie równe

$$y_T(x, s) = \int_0^l \frac{P H(s-u) H(x-u)}{D(u)} du,$$

a funkcja wpływowa, odpowiadająca samemu ścinaniu, będzie równa

$$(1.1.4) \quad G_T(x, s) = \int_0^l \frac{1}{D(u)} H(x-u) H(s-u) du.$$

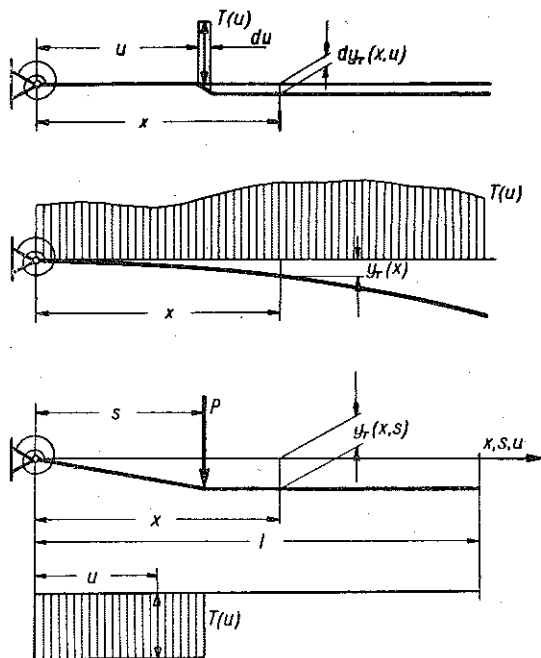
1.4. Funkcja wpływowa wynikowa. Funkcja wpływowa przy równoczesnym uwzględnieniu omówionych czynników jest sumą dwóch wyżej otrzymanych funkcji wpływowych:

$G(x, s) = G_M(x, s) + G_T(x, s)$,
czyli

$$(1.1.5) \quad G(x, s) = \frac{x s}{\beta} +$$

$$+ \int_0^l \left[\frac{(x-u)(s-u)}{B(u)} + \frac{1}{D(u)} \right] \times \\ \times H(x-u) H(s-u) du.$$

Pierwszą pochodną cząstkową funkcji $G(x, s)$ względem s należy obliczyć uwzględniając nieciągłości funkcji podcałkowej²⁾ (x jest w tym przypadku wielkością niezmienną):



Rys. 3.

²⁾ Jeżeli funkcja dwóch zmiennych $\varphi(x, s)$ jest nieciągła dla pewnej linii $s_i = s_i(x)$ znajdującej się w obszarze, w którym $\varphi(x, s)$ jest określona, to

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^l \varphi(x, s) ds = \int_0^l \frac{\partial \varphi(x, s)}{\partial x} ds - s'_i(x) \Delta_s \varphi(x, s_i),$$

gdzie

$$\Delta_s \varphi(x, s_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \{ \varphi[x, s_i(x) + h] - \varphi[x, s_i(x) - h] \}.$$

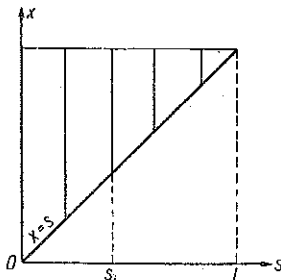
Wzór ten można wyprowadzić z definicji pochodnej rozpatrując całkę funkcji nieciągłej jako sumę dwóch całek funkcji ciągłych:

$$\int_0^l = \int_0^{s_i} + \int_{s_i}^l.$$

Dla większej liczby linii nieciągłości należy wszystkie te wyrazy zsumować.

$$(1.1.6) \quad \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} = \frac{x}{\beta} + \int_0^l \frac{(x-u)}{B(u)} H(x-u) H(s-u) du + \frac{H(x-s)}{D(s)}$$

Jeżeli $1/D(u) = 0$, to $\partial G(x, s)/\partial s$ jest ciągła. Jeżeli zaś $1/D(u) \neq 0$, to funkcja dwóch zmiennych $\partial G(x, s)/\partial s$ posiada podane na rys. 4 linie nieciągłości.



Rys. 4

Drugą pochodną cząstkową względem s należy obliczyć w analogiczny sposób jak pierwszą pochodną, ponieważ funkcja podcałkowa posiada te same linie nieciągłości.

Jest więc

$$(1.1.7) \quad \frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial s^2} = \left[\frac{x-s}{B(s)} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{D(s)} \right) \right] H(x-s)$$

Funkcja ta jest nieciągła i niesymetryczna i posiada te same linie nieciągłości, co $\partial G(x, s)/\partial s$.

1.5. Zestawienie wzorów. Zestawmy otrzymane wzory:

$$(1.1.5) \quad G(x, s) = \frac{xs}{\beta} + \int_0^l \left[\frac{(x-u)(s-u)}{B(u)} + \frac{1}{D(u)} \right] H(x-u) H(s-u) du,$$

$$(1.1.6) \quad \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} = \frac{x}{\beta} + \int_0^l \frac{x-u}{B(u)} H(x-u) H(s-u) du + \frac{H(x-s)}{D(s)},$$

$$(1.1.7) \quad \frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial s^2} = \left[\frac{x-s}{B(s)} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{D(s)} \right) \right] H(x-s).$$

Wzory powyższe podają wartości funkcji wpływowej dla obciążenia poprzecznego oraz jej pochodnych cząstkowych dla całego obszaru

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq s \leq l.$$

2. Założenia przyjęte przy układaniu ogólnego równania całkowego drgań masztu

Do założeń podanych poprzednio przy układaniu funkcji wpływowej $G(x, s)$ dochodzą jeszcze założenia dodatkowe.

Ramię bezwładności $\rho(u)$ przekroju, mierzone względem osi przechodzącej przez środek ciężkości przekroju i równoległej do osi obrotu, jest zmienne podobnie jak współczynniki sztywności.

W n punktach nieciągłości s_i są umieszczone ciężary skupione Q_i o ramionach bezwładności ρ_i .

Maszt jest umieszczony pionowo, dolnym końcem utwierdzony sprężysto i w czasie drgań obciążony:

- (1) pionowo, ciężarem własnym (obciążenie wzdłużne statyczne),
- (2) poziomo, siłami bezwładności (obciążenie poprzeczne dynamiczne),
- (3) momentami sił bezwładności pochodzącymi od obrotu przekrojów o skończonych wymiarach (obciążenie dynamiczne).

Założono drgania sinusoidalne o fali stojącej w postaci

$$y(x, t) = y(x) \sin \omega t.$$

Przy obliczaniu ugięcia został uwzględniony zarówno wpływ momentów gnących, jak i wpływ sił tnących.

Dla uproszczenia przeróbek matematycznych obliczenie przeprowadzono w ten sposób, że w pierwszej fazie obliczeń przyjęto istnienie tylko jednego ciężaru skupionego, o danym ramieniu bezwładności $q(s)$, w odległości s .

Po obliczeniu ugięcia częściowego $y_Q(x, s)$, spowodowanego przez obciążenie siłą Q masztu, którego ugięcie jest ugięciem całkowitym $y(x)$, odkształcenie całkowite można otrzymać w drugiej fazie obliczeń jako sumę odkształceń częściowych.

3. Ciężar górnej części masztu

Ciężar górnej części masztu, rozważany również jako funkcja nieciągła argumentu s , podaje wzór

$$(1.3.1) \quad \Phi(s) = \sum_{i=1}^n Q_i H(u_i - s) + \int_0^l q(u) H(u - s) du,$$

przy czym

$$\Phi'(s) = -q(s)$$

dla wartości $0 \leq s \leq 1$ [por. odsyłacz²⁾].

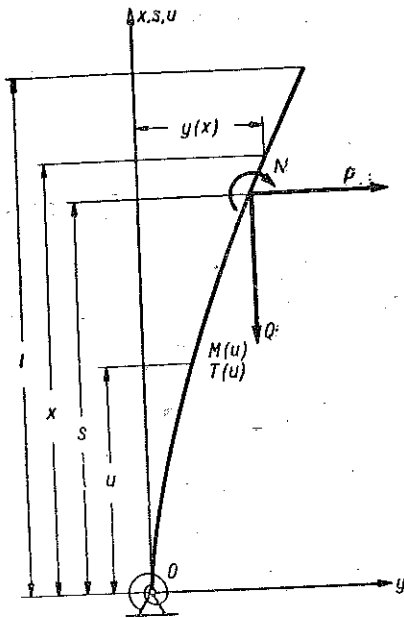
4. Obliczenie ugięcia częściowego $y_Q(x, s)$

Jeżeli linia ugięcia masztu $y = y(x)$ jest dana i jest on obciążony w miejscu s :

- (1) siłą wzdłużną Q ,
- (2) siłą poprzeczną P oraz
- (3) momentem skupionym zginającym N ,

to ugięcie cząstkowe $y_Q(x, s)$ na zasadzie wzorów (1.1.1) i (1.1.3) będzie równe ³⁾

$$y_Q(x, s) = \frac{M_0}{\beta} x + \int_0^l \frac{M(u)(x-u)}{B(u)} H(x-u) du + \int_0^l \frac{T(u) H(x-u)}{D(u)} du + \frac{N(x)}{D(s)} H(x-s).$$



Rys. 5

Z rysunku 5 wynika, że wartości M_0 , $M(u)$ i $T(u)$ są równe odpowiednio

$$M_0 = Q y(s) + P s + N,$$

$$M(u) = \{Q [y(s) - y(u)] + P(s-u) + N\} H(s-u),$$

$$T(u) = [Q \frac{dy(u)}{du} + P] H(s-u).$$

Po podstawieniu otrzymanych wielkości do wzoru na ugięcie oraz po przekształceniu go drogą całkowania przez części ⁴⁾ i zastosowaniu wzorów (1.1.5), (1.1.6) i (1.1.7) na funkcję wpływową, otrzymujemy

³⁾ Ostatni wyraz równania uwzględnia wpływ siły tnącej przy obciążeniu momentem skupionym N . Moment skupiony N , poza ugięciem wywołanym zginaniem, przy uwzględnieniu wpływu sił tnących powoduje dodatkowe ugięcie pod wpływem ścinania. To dodatkowe ugięcie można obliczyć zastępując moment skupiony parą sił, której ramię dąży do zera (rys. 6).

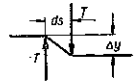
Ponieważ na długości ds stała siła tnąca T wywołuje dodatkowe ugięcie $T ds/D = \Delta y$, więc cpierając się na tym, że $T ds = N$ otrzymujemy $\Delta y = N/D$.

⁴⁾ Dla dwóch nieciągłych funkcji $\varphi(u)$ i $\psi(u)$ wzór na całkowanie przez części można podać w postaci

$$\int_0^l \varphi \frac{\partial \psi}{\partial u} du = - \int_0^l \psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} du - \sum_{\Delta} \Delta_u (\varphi \cdot \psi),$$

gdzie $\sum_{\Delta} \Delta_u (\varphi, \psi)$ oznacza, że suma obejmuje wszystkie nieciągłości iloczynu φ, ψ wraz z granicami obszaru, poza którym zakładamy $\varphi = \psi = 0$, i jest ponadto

$$\Delta_u (\varphi \cdot \psi) = \lim_{h \rightarrow 0} [\varphi(u+h) \psi(u+h) - \varphi(u-h) \psi(u-h)].$$



Rys. 6.

$$(1.4.1) \quad y_Q(x, s) = PG(x, s) + N \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} +$$

$$+ Q \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} y(s) + Q \left\{ - \int_0^l \frac{\partial^2 G(x, u)}{\partial u^2} H(s-u) y(u) du + \frac{H(s-x)}{D(x)} y(x) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^n H(x-u_i) H(s-u_i) \Delta \frac{1}{D(u_i)} y(u_i) - \frac{y(u)}{4} \Delta_u H(x-u) \Delta_u H(s-u) \Delta_u \frac{1}{D(u)} \right\}.$$

Ostatni wyraz wzoru (1.4.1) jest tylko dla $x=s=u_i$ różny od zera i równy

$$\frac{y(s_i)}{4} \Delta \frac{1}{D(s_i)}.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że założone obciążenie masztu odpowiada umieszczeniu w miejscu s pewnego ciężaru skupionego Q o ramieniu bezwładności ϱ , sztywno związanego z masztem, to pozostałe rodzaje obciążenia będą równe odpowiednio

$$P = - \frac{Q}{g} \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2},$$

$$N = - \frac{Q}{g} \varrho^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial y(s, t)}{\partial s}.$$

Przy obciążeniu dynamicznym wszystkie ugięcia we wzorze (1.4.1) będą, oczywiście, funkcją nie tylko położenia, ale i czasu. Dla założonych drgań sinusoidalnych jest więc

$$y(x, t) = y(x) \sin \omega t,$$

$$y(x, s, t) = y(x, s) \sin \omega t.$$

Stąd pochodne cząstkowe są równe

$$\frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(s) \sin \omega t,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \right) = -\omega^2 y'(s) \sin \omega t.$$

Po podstawieniu do równania (1.4.1) — w którym należy uwzględnić zmienność obciążeń i ugięć w czasie — obliczonych obciążeń

$$P = \frac{Q}{g} \omega^2 y(s) \sin \omega t,$$

$$N = \frac{Q}{g} \rho^2 \omega^2 y'(s) \sin \omega t,$$

oraz po podzieleniu otrzymanego równania obustronnie przez $\sin \omega t$, linia ugięcia częściowego będzie ostatecznie przedstawiona wzorem

$$(1.4.2) \quad y_Q(x, s) = \frac{Q}{g} \omega^2 \left[G(x, s) y(s) + \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \rho^2 y'(s) \right] + \\ + Q \left\{ \frac{H(s-x)}{D(x)} y(x) + \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} y(s) - \int_0^x \frac{\partial^2 G(x, u)}{\partial u^2} H(s-u) y(u) du - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n H(x-u_i) H(s-u_i) \Delta \frac{1}{D(u_i)} y(u_i) - \frac{y(u)}{4} \Delta_u H(x-u) \Delta_u H(s-u) \Delta_u \frac{1}{D(u)} \right\}.$$

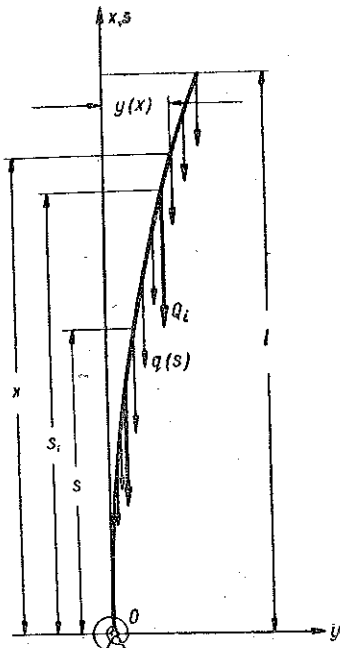
5. Ułożenie ogólnego równania całkowego

Jeżeli maszt jest obciążony n ciężarami skupionymi Q_i , umieszczonymi w miejscach s_i , oraz zmiennym ciężarem jednostki długości $q(s)$, to ugięcie całkowite będzie równe sumie ugięć częściowych:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{Q} y_Q(x, s_i) + \int_0^l \frac{q(s)}{Q} y_Q(x, s) ds.$$

Po podstawieniu do tego wzoru wartości $y_Q(x, s)$ z (1.4.2) otrzymujemy

$$(1.5.1) \quad y(x) = \frac{\omega^2}{g} \left\{ \sum_{i=1}^n G(x, s_i) Q_i y(s_i) + \right. \\ + \int_0^l G(x, s) q(s) y(s) ds + \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(x, s_i)}{\partial s} Q_i \rho_i^2 y'(s_i) + \\ \left. + \int_0^l \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} q(s) \rho^2(s) y'(s) ds \right\} +$$



Rys. 7.

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \frac{H(s_i-x)}{D(x)} y(x) Q_i + \int_0^l \frac{H(s-x)}{D(x)} y(x) q(s) ds + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(x, s_i)}{\partial s} Q_i y(s_i) + \\
& + \int_0^l \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} q(s) y(s) ds - \sum_{i=1}^n Q_i \int_0^l \frac{\partial^2 G(x, u)}{\partial u^2} H(s_i-u) y(u) du - \\
& - \int_0^l q(s) \int_0^l \frac{\partial^2 G(x, u)}{\partial u^2} H(s-u) y(u) du ds - \\
& - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H(x-u_i) H(s_j-u_i) \Delta \frac{1}{D(u_i)} Q_i y(u_i) - \int_0^l \sum_{i=1}^n H(x-u_i) H(s-u_i) \times \\
& \times \Delta \frac{1}{D(u_i)} q(s) y(u_i) ds - \sum_{i=1}^n Q_i \frac{y(u)}{4} \Delta_u H(x-u) \Delta_u H(s_i-u) \Delta_u \frac{1}{D(u)} - \\
& - \int_0^l q(s) \frac{y(u)}{4} \Delta_u H(x-u) \Delta_u H(s-u) \Delta_u \frac{1}{D(u)} ds.
\end{aligned}$$

Jest to równanie jednorodne, w którym niewiadomymi są funkcja $y(x)$ oraz parametr $\omega^2/g \equiv \lambda$.

Można je wyrazić w następującej formie bardziej zwartej:

$$\begin{aligned}
(1.5.2) \quad y(x) = & \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n K_1(x, s_i) y(s_i) + \int_0^l k_1(x, s) y(s) ds + \right. \\
& + \sum_{i=1}^n K_2(x, s_i) y'(s_i) - \sum_{\Delta} \Delta_s [k_2(x, s)] y(s) - \int_0^l \frac{\partial k_2(x, s)}{\partial s} y(s) ds \left. \right\} - \\
& - \sum_{\Delta} \Delta_s [k_3(x, s)] y(s) - \int_0^l \frac{\partial k_3(x, s)}{\partial s} y(s) ds,
\end{aligned}$$

gdzie jest

$$K_1(x, s_i) = G(x, s_i) Q_i,$$

$$K_2(x, s_i) = \frac{\partial G(x, s_i)}{\partial s} Q_i Q_i^2,$$

$$k_1(x, s) = G(x, s) q(s),$$

$$k_2(x, s) = \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} q(s) \varrho^2(s),$$

$$k_3(x, s) = \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \Phi(s).$$

Ze równanie powyższe jest równoważne z (1.5.1), można się przekonać wykonując działania podane w (1.5.2) i uwzględniając nieciągłości funkcji [por. odsyłacz 4)]; wynikiem będzie równanie (1.5.1).

W obu równaniach poza niewiadomą funkcją $y(x)$ występują jeszcze wyrazy zawierające jej pierwszą pochodną $y'(s_i)$, co komplikuje rachunki. Również uciążliwe jest dokładne obliczenie pochodnej, gdy są podane tylko wartości funkcji dla kilku wartości zmiennej niezależnej.

6. Przypadki szczególne równania całkowego

Równanie całkowe przedstawione wzorem (1.5.1) lub (1.5.2) jest równaniem ogólnym, zgodnym z przyjętymi poprzednio założeniami. W szczególnych przypadkach, lub przy założeniach upraszczających, daje się ono znacznie uprościć. Najbardziej upraszcza rachunek pominięcie siły tnącej, tzn. założenie, że sztywność na ścinanie $D(u)$ jest nieskończenie wielka; jest to tym bardziej usprawiedliwione, że w praktyce ugięcie wywołane ścinaniem jest na ogół dużo mniejsze niż ugięcie pod wpływem zginania.

6.1. Swobodne drgania masztu z pominięciem wpływu siły ciężkości. Można je obliczyć z równania całkowego

$$(1.6.1) \quad y(x) = \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n K_1(x, s_i) y(s_i) + \int_0^l k_1(x, s) y(s) ds + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n K_2(x, s_i) y'(s_i) - \sum_{\Delta} \Delta_s [K_2(x, s)] y(s) - \int_0^l \frac{\partial k_2(x, s)}{\partial s} y(s) ds \right\}.$$

Równanie to można otrzymać, jeżeli przy układaniu równania całkowego założyć siłę pionową $Q = 0$ [np. we wzorze (1.4.1)]; pozostałe wyrazy po uwzględnieniu poprzednio wyprowadzonych związków muszą zawierać parametr ω^2/g . Siła ciężkości Q (rys. 5) jest jedyną siłą niezależną od parametru, pozostałe są wywołane bezwładnością.

Równanie to można jeszcze uprościć przyjmując dodatkowe założenia upraszczające $\rho = 0$ i $1/D = 0$, tzn. pomijając wpływ wymiarów poprzecznych masztu oraz wpływ siły tnącej.

Stąd po podstawieniu odpowiednich wielkości otrzymujemy

$$(1.6.1.1) \quad y(x) = \frac{\omega^2}{g} \left\{ \sum_{i=1}^n G_M(x, s_i) Q_i y(s_i) + \int_0^l G_M(x, s) q(s) y(s) ds \right\}.$$

6.2. Wyboczenie masztu. Można je obliczyć z równania (1.5.2) przyjmując $\lambda = \omega^2/g = 0$ oraz

$$\Phi_1(s) = \Phi(s) + Q,$$

gdzie Q jest siłą obciążającą maszt, przyłożoną w jego wierzchołku.

Mamy wtedy

$$(1.6.2) \quad y(x) = - \sum_{\Delta} \Delta_s \left[\frac{\partial G(x, s)}{\partial s} (\Phi(s) + Q) \right] y(s) - \\ - \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial G(x, s)}{\partial s} (\Phi(s) + Q) \right] y(s) ds$$

lub

$$y(x) = Q \left[- \sum_{\Delta} \Delta_s \left(\frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \right) y(s) - \int_0^l \frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial s^2} y(s) ds \right] - \\ - \sum_{\Delta} \Delta_s \left[\frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \Phi(s) \right] y(s) - \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \Phi(s) \right] y(s) ds.$$

Q jest tutaj parametrem równania całkowego.

Jeżeli teraz pominąć wpływ sił tnących, to uproszczone równanie całkowe wyboczenia przybierze postać

$$(1.6.2.1) \quad y(x) = Q \left[\frac{\partial G_M(x, l)}{\partial s} y(l) - \int_0^l \frac{\partial^2 G_M(x, s)}{\partial s^2} y(s) ds \right] + \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G_M(x, s_i)}{\partial s} Q_i y(s_i) - \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial G_M(x, s)}{\partial s} \Phi(s) \right] y(s) ds.$$

6.3. Drganie pionowego masztu bez uwzględnienia wpływu sił tnących oraz wymiarów poprzecznych. Odpowiada to założeniom $\varrho = 0$ oraz $1/D = 0$.

Po uwzględnieniu tych założeń otrzymujemy na podstawie wzoru (1.5.2) następujące równanie całkowe:

$$(1.6.3) \quad y(x) = \frac{\omega^2}{g} \left\{ \sum_{i=1}^n G_M(x, s_i) Q_i y(s_i) + \int_0^l G_M(x, s) q(s) y(s) ds \right\} + \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G_M(x, s_i)}{\partial s} Q_i y(s_i) - \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial G_M(x, s)}{\partial s} \Phi(s) \right] y(s) ds.$$

II. OBLICZENIE OKRESU DRGAŃ I SIŁY KRYTYCZNEJ MASZTU NA PRZYKŁADZIE «IGLICY WROCŁAWSKIEJ»

1. Przyjęcie danych podstawowych

Przed przystąpieniem do obliczeń można z grubsza oszacować wpływ sił tnących i momentów bezwładności.

Ponieważ siły tnące są uwzględnione w wielkości $1/D$, a momenty bezwładności w wielkości ϱ , to w równaniu całkowym występują one w następujących wyrażeniach:

$$\frac{Q}{D}, \quad \frac{\Phi}{D}, \quad \frac{\omega^2}{g} q \varrho^2 \frac{1}{D}, \quad \frac{\omega^2}{g} q \varrho^2 \frac{\partial G}{\partial s}.$$

Można zatem oszacować rząd wielkości wymienionych wyrażen w sposób przybliżony.

Wymienione wielkości zmieniają się w sposób następujący:

	U podstawy	U wierzchołka
$1/D$	$2 \cdot 10^{-9} \text{ kG}^{-1}$	$430 \cdot 10^{-9} \text{ kG}^{-1}$
ϱ^2	$1,15 \text{ m}^2$	$0,0002 \text{ m}^2$
q	950 kG/m	$4,9 \text{ kG/m}$
Φ	$30\,000 \text{ kG}$	0
$1/B$	$0,05 \cdot 10^{-12} \text{ 1/kG/cm}^2$	$40 \cdot 10^{-9} \text{ 1/kG cm}^2$
	<i>stąd można obliczyć</i>	
Φ/D	$6 \cdot 10^{-5}$	0
$q \varrho^2/D$	$2,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$0,42 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

Funkcję

$$\frac{\partial G(x,s)}{\partial s} = \frac{x}{\beta} + \int_0^l \frac{x-u}{B(u)} H(x-u) H(s-u) du + \frac{H(x-s)}{D(s)}$$

można oszacować przyjmując $\partial G(0,0)/\partial s = 0$ oraz

$$\frac{\partial G(l,l)}{\partial s} < \frac{l}{\beta} + \frac{l^2}{2B(l)} + \frac{1}{D(l)}$$

Ponieważ z obliczeń sztywności utwierdzenia $\beta = 2 \cdot 10^{10}$ kGcm i $l = 100$ m, więc

$$\frac{\partial G(l,l)}{\partial s} < (0,5 \cdot 10^{-6} + 2 + 0,43 \cdot 10^{-6}) \text{ kG}^{-1} = 2 \text{ kG}^{-1}$$

Przewidując, że wartość $\omega^2 g$ będzie rzędu 1 m^{-1} , można oszacować w sposób przybliżony następujące wielkości:

$$\frac{Q}{D} < \frac{\Phi}{D} < 10^{-4},$$

$$\frac{\omega^2 q \varrho^2}{g D} < 10^{-5}.$$

Największa wartość u wierzchołka jest

$$\frac{\omega^2 q \varrho^2}{g} \frac{\partial G}{\partial s} < 2,5 \cdot 10^{-3}.$$

Wynika stąd, że rząd wielkości powyższych wyrażeń w porównaniu z jednością jest bardzo mały i można wpływ sił tnących oraz momentów bezwładności pominąć bez większego znaczenia na wynik liczbowy obliczeń. Wskutek założenia, że $1/D = 0$ i $\varrho = 0$, równanie całkowe znacznie się uprości.

Początek układu współrzędnych, w którym iglica jest utwierdzona sprężysto, przyjęty został na wysokości 2,25 m nad poziomem ziemi. Odpowiada to w przybliżeniu położeniu najniższego węzła.

Współczynnik sprężystości utwierdzenia przyjęty został jako równy w przybliżeniu $\beta = 2 \cdot 10^{10}$ kG cm.

Obrane punkty podziału (nieciągłości) i odpowiadają w zasadzie rzeczywistym punktom nieciągłości z tym, że inaczej jest obrane s_i dla $i = 1$, a wielkości odpowiadające temu podziałowi są przyjęte w przybliżeniu przez interpolację z wykresu 1.

Przyjęte współczynniki sztywności i ciężary na podstawie tablicy 1 oraz wykres 1 zestawione zostały w tablicy 2.

Tablica 1

Wysokość nad ziemią	Rodzaj przekroju poprzecznego	q	Q _i	φ	$\frac{1}{D}$	$\frac{1}{B}$	q ³	
m		kG/m	kG	kG	10 ⁻⁹ 1/kG	10 ⁻¹² 1/kGcm ²	cm ²	
100	konstrukcja rurowa			0				
		4,903			430,2	40070	2,074	
		4,903			430,2	40070	2,074	
96		10 573		19,62	201,0	5090	7,62	
		10,573			201,0	5090	7,62	
92		13 44		61,91	152,2	2214,2	13,28	
		13,44			152,2	2214,2	13,28	
87		33 63		129,12	57,95	587,7	19,04	
		33,63		49	297,26	57,95	587,7	19,04
82		42,21		50	346,26	47,12	168,18	54,0
	42,21			47,12	168,18	54,0		
75,6	58 77		616,42	33,67	53,98	120,3		
	58,77			33,67	53,98	120,3		
70	153 0		995,53	19,316	18,413	141		
	192,2			11,810	5,769	365,5		
55	224,0		3586	11,468	4,520	400		
	285,5			7,560	1,632	902,5		
41,75	347,8		6949	6,572	1,173	1018		
	439,8							
29,25	480,7		11876	4,897	0,4536	2163		
	504,1							
25	588,3		13818					
18	590,4		17645	3,466	0,1874	4225		
4,5	896,9		27670	2,187	0,05475	10310		
2,23*)	950,3		29770	2,073	0,4677	11500		

*) Dane dla tego przekroju obliczono przez ekstrapolację.

2. Wzory sumacyjne (całkowanie przybliżone)

W rozpatrywanym przykładzie ze względu na nierówność podziałów będzie zastosowany wszędzie wzór sumacyjny trapezowy, z wyjątkiem pierwszych dwóch odcinków, dla których można zastosować wzór Simpsona. Przypomnijmy oba te wzory.

Wzór trapezowy dla odcinka l_i . Dla dowolnej funkcji $f(s)$ nieciągłej, określonej w punktach nieciągłości umownie wzorami

$$f_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(s_i + h) + f(s_i - h)]$$

oraz

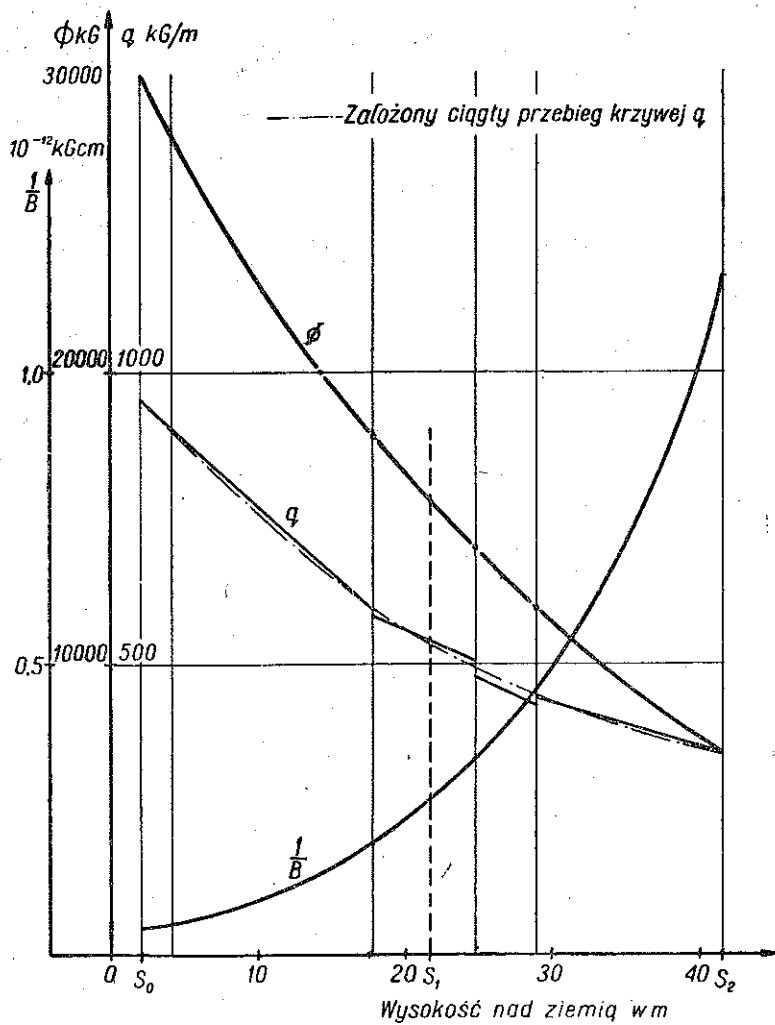
$$\Delta f_i = \lim_{h \rightarrow 0} [f(s_i + h) - f(s_i - h)],$$

dla odcinka między punktami nieciągłości s_{i-1} i s_i jest

$$\begin{aligned} (2.2.1.1) \quad \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s) ds &\approx \left[\frac{1}{2} (f_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta f_{i-1}) + \frac{1}{2} (f_i - \frac{1}{2} \Delta f_i) \right] l_i = \\ &= \left(\frac{l_i}{2} f_{i-1} + \frac{l_i}{2} f_i \right) + \left(\frac{l_i}{4} \Delta f_{i-1} - \frac{l_i}{4} \Delta f_i \right) = \\ &= i g'_{i-1} f_{i-1} + i g'_i f_i + i g''_{i-1} \Delta f_{i-1} + i g''_i \Delta f_i. \end{aligned}$$

Tablica 2

i, j		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wysok. nad ziemią	m	2,25	22,00	41,75	55,00	70,00	75,60	82,00	87,00	92,00	96,00	100,00
x_i, s_j	10^2 cm	0	19,75	39,50	52,75	67,75	73,35	79,75	84,75	89,75	93,75	97,75
l_i	10^2 cm		19,75	19,75	13,25	15,00	5,6	6,4	5,0	5,0	4,0	4,0
$\frac{I}{B(s_j)}$	$\frac{10^{-12}}{\text{kGcm}^2}$	0,0467	0,262	1,402	5,144	36,20	111,08	377,9	1400,9	3652	22580	40070
$\Delta \frac{I}{B(s_j)}$	$\frac{10^{-12}}{\text{kGcm}^2}$	0	0	0,459	1,249	35,56	114,20	419,5	1626,5	2876	34980	0
$q(s_j)$	$10^{-2} \frac{\text{kG}}{\text{cm}}$	950	537	317	208	106	52,5	37,9	23,5	12,1	7,7	4,9
$-\Delta q(s_j)$	$10^{-2} \frac{\text{kG}}{\text{cm}}$	0	0	62	32	94	16,6	8,6	20,2	2,9	5,7	0
$\Phi(s_j)$	kG	29700	15300	6949	3586	971	616	322	129,1	61,9	19,6	0
$-\Delta \Phi(s_j)$ $= Q_j$	kG	0	0	0	0	50	0	50	0	0	0	0



Wykres 1

Wzór Simpsona dla odcinka $l_i + l_{i+1}$. Wzór ten można zastosować, gdy $l_i = l_{i+1}$ oraz gdy w punkcie s_i nie ma nieciągłości. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
 (2.2.1.2) \quad \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} f(s) ds &= \frac{l_i}{3} \left[(f_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta f_{i-1}) + 4f_i + (f_{i+1} - \frac{1}{2} \Delta f_{i+1}) \right] = \\
 &= \frac{l_i}{3} f_{i-1} + \frac{2(l_i + l_{i+1})}{3} f_i + \frac{l_{i+1}}{3} f_{i+1} + \frac{l_i}{6} \Delta f_{i-1} + 0 \cdot \Delta f_i - \frac{l_{i+1}}{6} \Delta f_{i+1} = \\
 &= {}_{i+1}g'_{i-1} f_{i-1} + {}_{i+1}g'_i f_i + {}_{i+1}g'_{i+1} f_{i+1} + {}_{i+1}g''_{i-1} \Delta f_{i-1} + {}_{i+1}g''_i \Delta f_i + {}_{i+1}g''_{i+1} \Delta f_{i+1}.
 \end{aligned}$$

W obu powyższych wzorach $i g'_j$ i $i g''_j$ oznaczają współczynniki wzoru sumacyjnego dla odpowiedniego odcinka.

Tablica 3. Wartości $i g'_j$ oraz κ^j (10^2 cm)

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$1 g'_j$ *)	9,875	9,875									
$2 g'_j$	6,583	26,333	6,583								
$3 g'_j$			6,625	6,625							
$4 g'_j$				7,500	7,500						
$5 g'_j$					2,800	2,800					
$6 g'_j$						3,200	3,200				
$7 g'_j$							2,500	2,500			
$8 g'_j$								2,500	2,500		
$9 g'_j$									2,000	2,000	
$10 g'_j$										2,000	2,000
κ^j **)	9,875	19,750	16,500	14,125	10,300	6,000	5,700	5,000	4,500	4,000	2,000
κ^j	6,583	26,333	13,208	14,125	10,300	6,000	5,700	5,000	4,500	4,000	2,000

*) Tylko przy całkowaniu pierwszego odcinka (wzór trapezowy).

**) Tylko dla przypadku, gdy nieciągłość wypada dla $j = 1$.

Obliczenie całki oznaczonej $\int_0^l f(s) ds$ następuje na podstawie wzorów obliczonych dla poszczególnych odcinków l_i :

$$(2.2.2) \quad \int_0^l f(s) ds = \sum_{i=0}^{10} \kappa_i f_i + \kappa_i'' \Delta_s f_i.$$

Współczynniki κ_i i κ_i'' są sumami odpowiednich współczynników $i g'_j$ i $i g''_j$.

Współczynniki wzorów sumacyjnych są podane w tablicach 3 i 4.

Tablica 4. Wartości ${}_i g_j''$ oraz κ'' (10^2 cm)

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$1g_j''$ *)	4,937	-4,937									
$2g_j''$	3,292	0	-3,292								
$3g_j''$			3,312	-3,312							
$4g_j''$				3,750	-3,750						
$5g_j''$					1,400	-1,400					
$6g_j''$						1,600	-1,600				
$7g_j''$							1,250	-1,250			
$8g_j''$								1,250	-1,250		
$9g_j''$									1,000	-1,000	
$10g_j''$										1,000	-1,000
$\kappa''^{**})$	4,937	0	-1,625	0,438	-2,350	0,200	-0,350	0	-0,25	0	-1,000
κ''	3,292	0	0,020	0,438	-2,350	0,200	-0,350	0	-0,25	0	-1,000

*) **) Por. tablicę 5.

3. Sprowadzenie równań całkowych do równań sumacyjnych przybliżonych

Przy podanych założeniach upraszczających rozważane przypadki drgań oraz siły krytycznej sprowadzają się do obliczenia równań całkowych (1.6.1.1), (1.6.2.1) i (1.6.3).

Przybliżony sposób rozwiązania tych równań polega na sprowadzeniu ich do równań sumacyjnych. Następnie, po obliczeniu stałych współczynników przy niewiadomej funkcji (jądra równania całkowego), funkcję tę $y(x)$ oraz parametr należy obliczyć metodą iteracyjną z równań sumacyjnych.

3.1. Swobodne drgania masztu z pominięciem wpływu siły ciężkości. Ponieważ funkcja $G_M(x, s)$ jest ciągła, więc stosując wzór (1.1.2) do równania całkowego (1.6.1.1) otrzymujemy przybliżone równanie sumacyjne w postaci

$$(2.3.1) \quad y(x_i) = \frac{\omega^2}{g} \sum_{j=0}^{10} L_1(x_i, s_j) y(s_j),$$

gdzie

$$(2.3.1.1) \quad L_1(x_i, s_j) = G_M(x_i, s_j) [Q_j + \kappa_j' q(s_j) + \kappa_j'' \Delta q(s_j)].$$

3.2. Wyboczenie masztu. W analogiczny sposób na podstawie równania (1.6.2.1) oraz po podstawieniu wartości $\partial^2 G_M(x, s)/\partial s^2$ ze wzoru (1.1.7) otrzymujemy ($1/D = 0$)

$$(2.3.2) \quad y(x_i) = Q \sum_{j=0}^{10} L_2(x_i, s_j) y(s_j) + \sum_{j=0}^{10} L_3(x_i, s_j) y(s_j),$$

gdzie jest

$$L_2(x_i, s_j) = -(x_i - s_j) H(x_i - s_j) \left[\kappa'_j \frac{1}{B(s_j)} + \kappa''_j \Delta \frac{1}{B(s_j)} \right] + \begin{cases} 0, & s_j \neq l \\ \frac{\partial G_M(x_i, l)}{\partial s}, & s_j = l \end{cases}$$

oraz

$$(2.3.2.1) \quad L_3(x_i, s_j) = \frac{\partial G_M(x_i, s_j)}{\partial s} [Q_j + \kappa'_j q(s_j) + \kappa''_j \Delta q(s_j)] - \\ - (x_i - s_j) H(x_i - s_j) \left[\kappa'_j \left(\frac{1}{B(s_j)} \Phi(s_j) \right) + \kappa''_j \Delta \left(\frac{1}{B(s_j)} \Phi(s_j) \right) \right].$$

3.3. Drgania masztu pionowego przy uwzględnieniu ciężaru własnego. Można je otrzymać podobnie z równania (1.6.3) uwzględniając poprzednie wzory. Otrzymujemy zatem

$$(2.3.3) \quad y(x_i) = \frac{\omega^2}{g} \sum_{j=0}^{10} L_1(x_i, s_j) y(s_j) + \sum_{j=0}^{10} L_3(x_i, s_j) y(s_j).$$

4. Obliczenie tablicy wartości funkcji wpływowej $G_M(x_i, s_j)$ oraz jej pochodnych cząstkowych

W oparciu o wzory (1.1.5), (1.1.6) i (1.1.7) oraz przyjmując

$$\mu = \begin{cases} x, & x < s, \\ s, & x > s, \end{cases}$$

można napisać wzory na funkcję wpływową w postaci następującej:

$$G_M(x, s) = \frac{x s}{\beta} + \int_0^s \frac{(x-u)(s-u)}{B(u)} du,$$

$$\frac{\partial G_M(x, s)}{\partial s} = \frac{x}{\beta} + \int_0^s \frac{(x-u)}{B(u)} du,$$

$$\frac{\partial^2 G_M(x, s)}{\partial s^2} = \frac{x-s}{B(s)} \quad (s < x)$$

Całkę

$$N(x, s) = \int_0^s \frac{(x-u)(s-u)}{B(u)} du$$

można przekształcić przez zamianę zmiennych. Podstawiając mianowicie $x-u = \xi$ całkę tę można przedstawić w formie bardziej dogodnej do obliczeń:

$$\begin{aligned} N(x, s) &= \int_0^x \frac{(x-u)(s-u)}{B(u)} du = - \int_x^{x-u} \frac{\xi(s-x+\xi)}{B(x-\xi)} d\xi = \\ &= (x-s) \int_x^{x-u} \frac{\xi d\xi}{B(x-\xi)} - \int_x^{x-u} \frac{\xi^2 d\xi}{B(x-\xi)} = -(x-s) \int_0^x \frac{(x-u)}{B(u)} du + \int_0^x \frac{(x-u)^2}{B(u)} du. \end{aligned}$$

Obliczenia należy zacząć od $\partial^2 G_M(x, s)/\partial s^2$. Ponieważ $1/B(s)$ jest funkcją nieciągłą, więc $(x-s)B(s)$ zgodnie z przyjętą umową będzie określone za pomocą dwóch tablic: tablicy 5 dla $\partial^2 G_M(x_i, s_j)/\partial s^2$ oraz tablicy 6 dla $\Delta_s \partial^2 G_M(x_i, s_j)/\partial s^2$.

Tablicę wartości funkcji ciągłej $\partial G_M(x_i, s_j)/\partial s$ najlepiej obliczać za pomocą wzorów sumacyjnych według danych z tablic 5 i 6. Jest

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_M(x_i, s_j)}{\partial s} &= \frac{\partial G_M(x_i, s_{j-1})}{\partial s} + \rho'_{j-1} \frac{\partial^2 G_M(x_i, s_{j-1})}{\partial s^2} + \rho'_j \frac{\partial^2 G_M(x_i, s_j)}{\partial s^2} + \\ &+ \rho''_{j-1} \Delta_s \frac{\partial^2 G_M(x_i, s_{j-1})}{\partial s^2} + \rho''_j \Delta_s \frac{\partial^2 G(x_i, s_j)}{\partial s^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G_M(x_i, 0)}{\partial s} = \frac{x_i}{\beta}.$$

Podobnie tablicę wartości $G_M(x, s)$ można otrzymać obliczając tablice przybliżonych wartości całek

$$\int_0^x \frac{x-u}{B(u)} du \quad \text{i} \quad \int_0^x \frac{(x-u)^2}{B(u)} du,$$

jak wyjaśniono wyżej, następnie $N(x_i, s_j)$ i wreszcie $G_M(x_i, s_j)$.

Ponieważ $N(x_i, s_j)$ jest funkcją symetryczną, więc zaobserwowane niezgodności wynikają z błędów rachunkowych i zastosowania przybliżonych metod obliczenia. Wyniki bezpośredniego obliczenia wartości N są podane w tablicy 8. Dla dalszych obliczeń na podstawie tablicy 8 została ułożona tablica symetryczna w ten sposób, że jej wartości są równe w przybliżeniu średniej arytmetycznej wartości danych oraz tworzą jednocześnie funkcję ciągłą. Tablica 9 podaje obliczoną w ten sposób funkcję G_M .

Tablice wartości $L_1(x_i, s_j)$, $L_2(x_i, s_j)$, $L_3(x_i, s_j)$ można łatwo ułożyć na podstawie wzorów (2.3.1.1) i (2.3.2.1) mając dane wartości poszczególnych funkcji według tablic 2, 5, 6, 7 i 9. Wyniki ujęte są w tablicach 10, 11 i 12.

Tablica 5. Wartości $\frac{\partial^2 G_M(x_i, s_j)}{\partial s^2}$ ($10^{-10} \text{ kG}^{-1} \text{ cm}^{-1}$)

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	4,565	20,436	81,666	231,50	1085,7	2711	6802	18213	29216	90320	0
9	4,378	19,388	76,058	210,92	940,9	2266	5291	12609	14608	0	
8	4,191	18,340	70,450	190,35	796,2	1822	3779	7005	0		
7	3,958	17,030	63,440	164,62	615,2	1267	1889	0			
6	3,724	15,720	56,430	138,90	434,3	711,0	0				
5	3,425	14,043	47,458	105,98	202,7	0					
4	3,164	12,576	39,606	77,17	0						
3	2,463	8,646	18,576	0							
2	1,8446	5,1745	0								
1	0,9223	0									
0	0										

Tablica 6. Wartości $\Delta_s \frac{\partial^2 G_M(x_i, s_j)}{\partial s^2}$ ($10^{-10} \text{ kG}^{-1} \text{ cm}^{-1}$)

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	26,74	56,20	1067	2786	7551	21138	23008	139920	0
9	0	0	24,90	51,21	924,7	2330	5873	14634	11504	0	
8	0	0	23,06	46,21	782,4	1873	4195	8150	0		
7	0	0	20,77	39,97	604,6	1302	2098	0			
6	0	0	18,47	33,72	426,8	731	0				
5	0	0	15,54	25,73	199,2	0					
4	0	0	12,97	18,73	0						
3	0	0	6,08	0							
2	0	0	0								
1	0	0									
0	0										

Tablica 7. Wartości $\frac{\partial G_M(x_i, s_j)}{\partial s}$ (10^{-8} kG^{-1})

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	49	295	1067	3044	9132	17357	40174	85728	201963	324143	644695
9	47	282	1005	2819	8182	15194	33708	67506	139462	180182	180182
8	45	267	943	2594	7233	13037	27245	49261	76361	76361	76361
7	42	249	866	2313	6044	10338	13164	26509	26509	26509	26509
6	40	232	789	2133	4858	7639	11086	11086	11086	11086	11086
5	37	209,2	690,3	1673,1	3338	4184	4184	4184	4184	4184	4184
4	33	188,3	602,9	1357,5	2006,5	2006,5	2006,5	2006,5	2006,5	2006,5	2006,5
3	26,4	134,4	372,5	515,7	515,7	515,7	515,7	515,7	515,7	515,7	515,7
2	20,0	89,3	168,4	168,4	168,4	168,4	168,4	168,4	168,4	168,4	168,4
1	9,9	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0
0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0

Tablica 8. Wartości $N(x_i, s_j)$ ($10^{-6} \text{ kG}^{-1} \text{ cm}$)

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	957	11795	33621	107800	269685	366750	699694	1487781	2621173	5199813
9	0	830	11228	31689	99915	167524	334811	605996	1192340	1912907	2633447
8	0	852	10650	29743	91984	150872	290544	500136	884591	1192255	1499919
7	0	578	10204	27279	82123	130116	235312	367656	499991	605859	711727
6	0	725	8841	24815	72237	109381	180082	235297	290512	334684	378856
5	0	626	8190	21708	59548	82720	109261	129996	150731	167319	183907
4	0	637	7372	18360	48567	59619	72250	82118	91986	99881	107775
3	0	534	5113,5	11625	18964	21705	24836	27283	29729	31686	33643
2	0	348	3167	5133	7359	8190	9140	9882	10624	11218	11811
1	0	178	358	479	615	666	724	770	815	852	888
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tablica 9. Wartości $G_M(x_i, s_j)$ ($10^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}$)

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	1,85	13,74	36,22	111,1	187,5	382,8	715,8	1504,4	2638,0	5204,8
9	0	1,78	13,07	34,16	103,1	170,7	338,4	610,0	1196,5	1917,3	2638,0
8	0	1,71	12,39	32,10	95,0	154,0	294,1	503,8	888,6	1196,5	1504,4
7	0	1,61	11,55	29,51	85,0	133,1	238,7	371,3	503,8	610,0	715,8
6	0	1,51	10,71	26,93	74,9	112,2	183,3	238,7	294,1	338,4	382,8
5	0	1,39	9,64	23,64	62,1	85,4	112,2	133,1	154,0	170,7	187,5
4	0	1,29	8,70	20,75	50,9	62,1	74,9	85,0	95,0	103,1	111,1
3	0	1,00	6,17	13,01	20,75	23,64	26,93	29,51	32,10	34,16	36,22
2	0	0,75	3,95	3,17	8,70	9,64	10,71	11,55	12,39	13,07	13,74
1	0	0,37	0,75	1,00	1,29	1,39	1,51	1,61	1,71	1,78	1,85
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tablica 10. Wartości $L_1(x_i, s_j)$ (cm)

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	26,16	58,90	105,91	151,44	58,50	102,97	84,11	83,00	81,25	51,01
9	0	25,17	56,03	99,88	140,53	53,26	91,03	71,67	66,01	59,05	25,85
8	0	24,18	53,12	93,86	129,48	48,05	79,11	59,20	49,02	36,85	14,74
7	0	22,77	49,51	86,29	115,85	41,53	64,21	43,63	27,79	18,79	7,015
6	0	21,35	45,91	78,74	102,09	35,01	49,31	28,05	16,23	10,42	3,75
5	0	19,65	41,33	69,12	84,64	26,64	30,18	15,64	8,50	5,26	1,837
4	0	18,24	37,30	60,67	69,38	19,38	20,15	9,99	5,24	3,175	1,089
3	0	14,14	26,45	38,04	28,28	7,38	7,24	3,47	1,771	1,052	0,355
2	0	10,60	16,93	9,27	11,86	3,01	2,88	1,36	0,684	0,403	0,135
1	0	3,924	3,998	2,92	1,76	0,434	0,406	0,189	0,0943	0,0548	0,0181
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tablica 11. Wartości $-L_2(x_i, s_j)$ (10^{-8}kg^{-1})

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	30,05	538,0	1079,2	3292	8679	16821	36126	91065	125720	361280	-644695
9	28,82	510,5	1005,1	3002	7522	14064	28098	63045	62860	0	-180182
8	27,59	482,9	931,0	2709	6364	11306	20070	35025	0		-76961
7	26,05	448,4	838,3	2343	4918	7859	10035	0			-26509
6	24,52	413,9	745,7	1977	3471	4412	0				-11083
5	22,55	369,7	627,1	1508	1620	0					-4184
4	20,83	331,1	523,4	1098	0						-2006,5
3	16,22	227,6	245,5	0							-515,7
2	12,14	136,2	0								-168,4
1	9,109	0									-19,0
0	0										0

Tablica 12. Wartości $L_3(x_i, s_j)$ (10^{-8})

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	-8,93	-40,63	-29,23	-29,11	40,28	-49,48	-3,94	-16,83	33,66	29,03	63,18
9	-8,54	-38,25	-26,74	-25,19	38,56	-39,24	+3,55	-2,07	38,07	55,5	17,66
8	-8,18	-36,15	-24,24	-21,27	36,86	-28,38	5,68	12,67	42,48	23,70	7,542
7	-7,69	-33,41	-21,11	-16,37	34,68	-16,17	20,44	31,15	14,63	8,165	2,598
6	-7,17	-30,54	-17,38	-8,50	32,52	-3,35	29,81	13,023	6,118	3,414	1,086
5	-6,59	-27,00	-13,97	-5,15	29,79	13,05	11,255	4,916	2,310	1,289	0,410
4	-5,75	-24,00	-10,51	0,32	27,35	6,26	5,40	2,358	1,1076	0,618	0,1966
3	-4,05	-15,84	-1,11	15,08	7,029	1,609	1,387	0,606	0,2847	0,1588	0,05054
2	-2,75	-8,22	7,219	4,924	2,295	0,5254	0,453	0,1970	0,0930	0,0519	0,0165
1	-1,65	2,015	1,013	0,5556	0,2590	0,0593	0,0511	0,0223	0,0105	0,00585	0,00186
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5. Obliczenie okresu drgań swobodnych «Iglicy Wrocławskiej» oraz odpowiedniej linii ugięcia

Na podstawie wzoru (2.3.1) i tablicy wartości funkcji $L_1(x, s)$ funkcję niewiadomą $y(x)$ oraz parametr ω^2/g oblicza się metodą kolejnych przybliżeń (iteracji).

Mając jedno z przybliżeń funkcji $y(x)$ podane w formie tablicy liczbowej $y_{k-1}(s_j)$, następne przybliżenie $y_k(x_i)$ oraz przybliżoną wartość parametru ω_k^2/g należy obliczyć ze wzoru (2.3.1) tak, aby $y_{k-1}(l) = y_k(l)$.

Przy oznaczeniu

$$(2.5.1) \quad \eta_{1k}(x_i) = \sum_{j=0}^{10} L_1(x_i, s_j) y_{k-1}(s_j)$$

przybliżona wartość parametru będzie równa

$$\frac{\omega_k^2}{g} = \frac{y_k(l)}{\eta_{1k}(l)}$$

Odpowiednie przybliżenie funkcji $y(x)$ będzie równe

$$y_k(x_i) = \frac{\omega_k^2}{g} \eta_{1k}(x_i).$$

Zakładając umownie $y(l) = 100$ cm mamy

$$\frac{\omega_k^2}{g} = \frac{100 \text{ cm}}{\eta_{1k}(l)}$$

Jeżeli ciąg wartości funkcji $y(x_i)$ jest wolnozbieżny, to dobrze jest zrobić wykres iteracyjny $y_n(x_i) = f[y_{n-1}(x_i)]$ i do dalszych obliczeń przyjmując takie wartości $y_{10}(x_i)$, które odpowiadają przecięciu się linii wykresu z prostą $y_n = y_{n-1}$.

Przeliczenia i ich wyniki podane są w tablicy 13.

Wartości $y_0(s_j)$ zostały przyjęte dowolnie, możliwie zbliżone do rzeczywistych; po przeprowadzeniu trzech iteracji y_1 , y_2 oraz y_3 został narysowany wykres iteracyjny 2; wartości y_{10} zostały przyjęte z tego wykresu. Dwie następne iteracje dały już wystarczającą dokładność.

6. Obliczenie siły krytycznej dla «Iglicy Wrocławskiej»

W analogiczny sposób na podstawie wzoru (2.3.2) oblicza się siłę krytyczną Q oraz odpowiadającą jej linię ugięcia.

Wprowadzamy oznaczenia

$$(2.6.1) \quad \eta_{2k}(x_i) = \sum_{j=0}^{10} L_2(x_i, s_j) y_{k-1}(s_j), \quad \eta_{3k}(x_i) = \sum_{j=0}^{10} L_3(x_i, s_j) y_{k-1}(s_j).$$

Wzory do obliczenia kolejnych przybliżeń będą miały postać

$$Q_k = \frac{y_k(l) - \eta_{3k}(l)}{\eta_{2k}(l)},$$

$$y_k(x_i) = Q_k \eta_{2k}(x_i) + \eta_{3k}(x_i).$$

Przyjęto jak poprzednio ugięcie na końcu $y(l) = 100$ cm.

Jako krzywa wyjściowa y_0 została przyjęta krzywa z wykresu interpolacyjnego 2; po trzech iteracjach y_1 , y_2 i y_3 linia ugięcia y_{10} została przyjęta z wykresu interpolacyjnego 3; następna iteracja dała już wystarczającą dokładność. Przeliczenia i ich wyniki podano w tablicy 14.

Tablica 13. Wartości y (cm) oraz η_1 (10^3 cm²)

$\frac{\omega^2/g}{10^{-3} \text{ cm}^{-1}}$	i, j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y_0	0	0	0	0	2	4	7	14	30	52	100
	$(\eta_1)_1$	0	0,018	0,130	0,328	0,928	1,419	2,485	3,969	5,866	9,771	14,251
7,017	y_1	0	0,13	0,91	2,30	6,50	9,93	17,40	27,78	41,06	68,40	100
	$(\eta_1)_2$	0	0,048	0,302	0,773	1,988	2,866	4,628	6,868	10,614	14,636	20,060
4,985	y_2	0	0,24	1,51	3,85	9,91	14,29	23,07	34,24	52,91	72,96	100
	$(\eta_1)_3$	0	0,068	0,416	1,067	2,683	3,802	5,982	8,671	13,025	17,569	23,515
4,253	y_3	0	0,29	1,77	4,54	11,41	16,17	25,44	36,88	55,40	74,72	100
	y_{10}	0	0,3	2,0	5,4	12,2	17,2	25,7	37,8	55,5	75,8	100
	$(\eta_1)_{11}$	0	0,082	0,491	1,265	3,123	4,374	6,764	9,667	14,285	19,063	25,243
3,9615	y_{11}	0	0,32	1,95	5,01	12,37	17,32	26,80	38,30	56,59	75,52	100
	$(\eta_1)_{12}$	0	0,0824	0,4931	1,266	3,144	4,412	6,836	9,773	14,434	19,243	25,455
3,9285	y_{12}	0	0,324	1,94	4,97	12,35	17,33	26,86	38,39	56,70	75,60	100

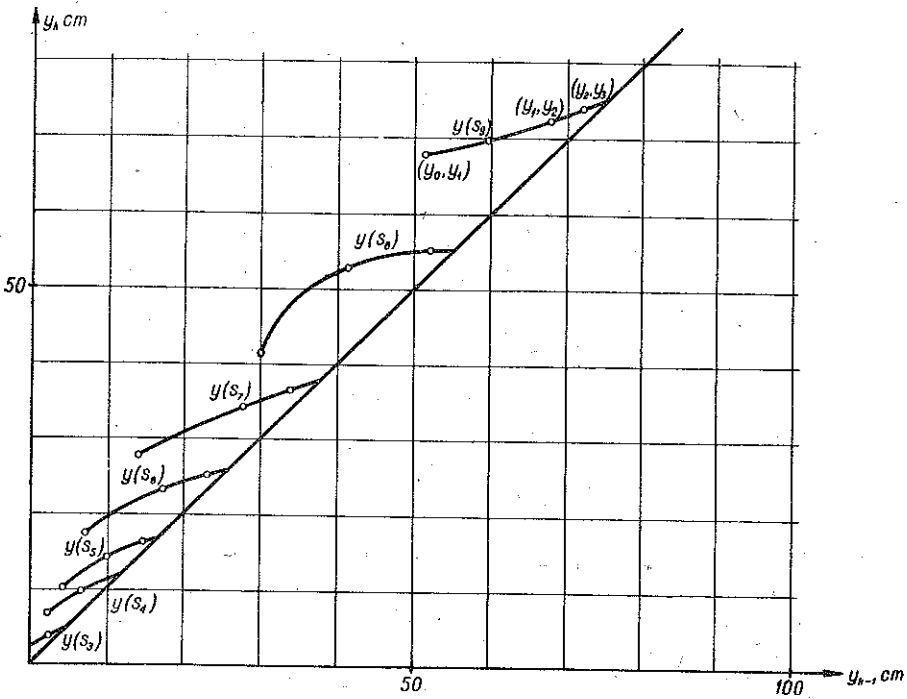
7. Obliczenie okresu drgań «Iglicy Wrocławskiej» z uwzględnieniem ciężaru własnego

Po uwzględnieniu wprowadzonych oznaczeń (2.5.1) i (2.6.1) wzory dla obliczenia kolejnych przybliżeń na podstawie wzoru (2.3.3) będą miały postać

$$\frac{\omega_k^2}{g} = \frac{y_k(l) - \eta_{3k}(l)}{\eta_{1k}(l)},$$

$$y_k(x_i) = \frac{\omega_k^2}{g} \eta_{1k}(x_i) + \eta_{3k}(x_i).$$

Po przyjęciu y_0 z wykresu interpolacyjnego 2 dwie iteracje dają już wystarczającą dokładność. Przeliczenia i ich wyniki podane są w tablicy 15.



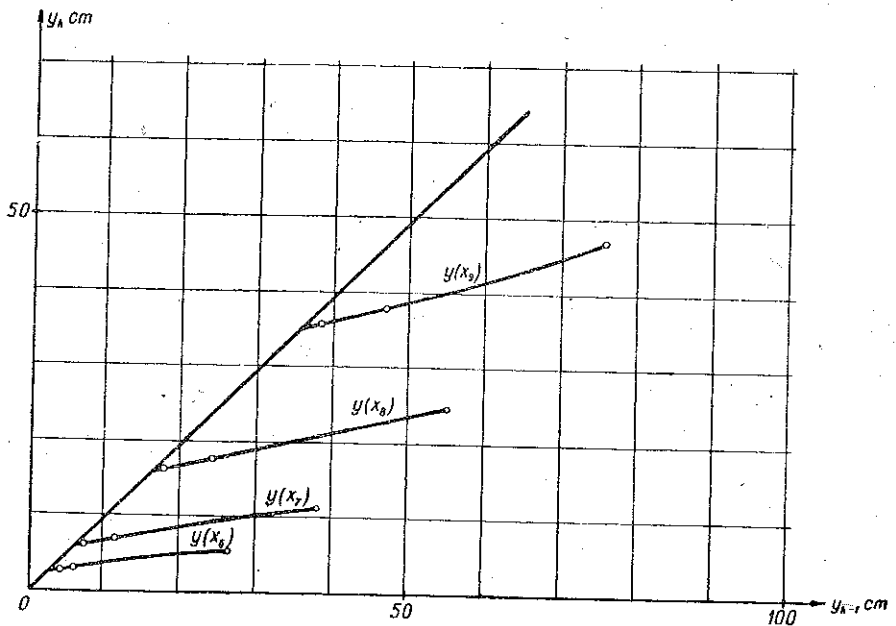
Wykres 2

Tablica 14. Wartości y (cm) oraz η_2 ($10^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}$) i η_3 (cm)

Q 10^3 kg^{-1}	i, j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,358	y_0	0	0,3	2,0	5,4	12,2	17,2	25,7	37,8	55,5	75,8	100
	$(\eta_2)_1$	0	0,019	0,17	0,52	1,9	3,9	9,8	21,8	56,4	110,7	253,7
	$(\eta_3)_1$	0	0,0132	0,105	0,279	0,771	1,266	2,214	3,398	5,310	7,693	9,062
0,214	y_1	0	0,020	0,165	0,47	1,45	2,66	5,73	11,20	25,52	47,37	100
	$(\eta_2)_2$	0	0,019	0,168	0,516	2,00	4,15	10,90	25,6	71,5	155,0	428,6
	$(\eta_3)_2$	0	0,0023	0,0191	0,0737	0,189	0,353	0,774	1,481	3,097	5,298	8,248
0,194	y_2	0	0,006	0,056	0,184	0,617	1,230	3,107	6,959	18,398	38,468	100
	$(\eta_2)_3$	0	0,019	0,168	0,516	2,004	4,17	11,00	26,1	73,8	163,1	474,9
	$(\eta_3)_3$	0	0,00138	0,0115	0,079	0,121	0,235	0,549	1,120	2,535	4,567	7,881
0,1885	y_3	0	0,005	0,044	0,179	0,510	1,043	2,683	6,183	16,850	36,208	100
	y_{10}	0	0	0	0,2	0,5	1,0	2,6	5,8	16,5	35,5	100
	$(\eta_2)_{11}$	0	0,019	0,168	0,516	2,004	4,17	11,02	26,1	74,3	165,3	489,3
	$(\eta_3)_{11}$	0	0,00112	0,0100	0,0307	0,108	0,210	0,495	1,022	2,369	4,335	7,758
	y_{11}	0	0,0047	0,042	0,128	0,486	0,996	2,572	5,942	16 375	35,494	100

Tablica 15. Wartości y (cm) oraz η_1 (10^3 cm^2) i η_3 (cm)

$\frac{\omega^2/g}{10^{-3} \text{ cm}^{-1}}$	i, j											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3,60	y_0	0	0,3	2,0	5,4	12,2	17,2	25,7	37,8	55,5	75,8	100
	$(\eta_1)_1$	0	0,082	0,491	1,265	3,123	4,374	6,764	9,687	14,285	19,063	25,243
	$(\eta_3)_1$	0	0,0132	0,105	0,279	0,771	1,266	2,214	3,398	5,310	7,693	9,062
3,575	y_1	0	0,31	1,87	4,84	12,02	17,02	26,58	38,22	56,77	76,37	100
	$(\eta_1)_2$	0	0,0807	0,485	1,245	3,099	4,357	6,771	9,705	14,372	19,192	25,415
	$(\eta_3)_2$	0	0,0128	0,102	0,317	0,773	1,278	2,256	3,460	5,400	7,793	9,132
3,575	y_2	0	0,302	1,84	4,76	11,85	16,86	26,47	38,16	56,79	76,41	100



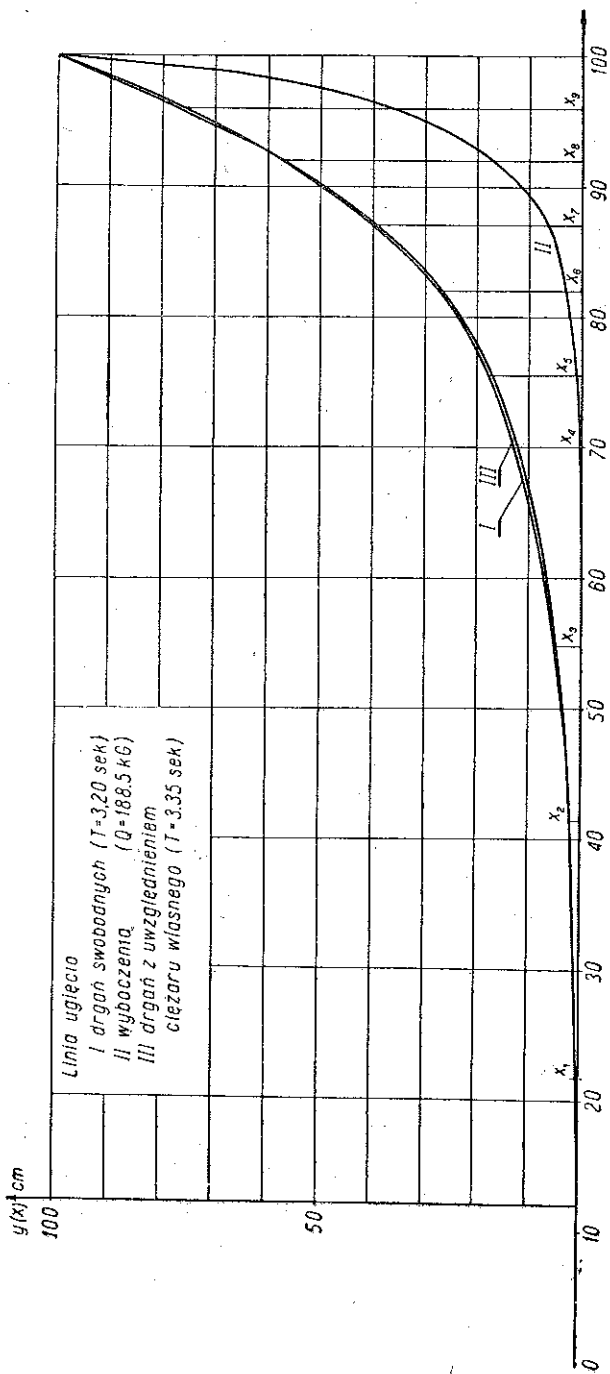
Wykres 3

8. Wyniki obliczeń

Znając przybliżoną wartość parametru $\lambda = \omega^2/g$ można obliczyć okres drgań ze wzoru

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda g}} \approx \frac{0,2 \text{ sek}}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\text{cm}}}$$

Ostatecznie otrzymujemy:



Wykres 4

(1) okres drgań swobodnych

$$T = \sim 3,20 \text{ sek.}$$

(2) siłę krytyczną

$$Q = \sim 188 \text{ kG.}$$

(3) okres drgań z uwzględnieniem ciężaru własnego

$$T = \sim 3,35 \text{ sek.}$$

Wykres 4 przedstawia kształt linii ugięcia.

Literatura cytowana w tekście

- [1] I. N. Ananjew, *Sprawocznik po rasczetu sobstwiennykh kolebanij uprugich sistiem*, Gostiechizdat, O. G. I. Z., 1946.
- [2] A. Grzędzielski i R. Seredyński, *Zastosowanie metody równań całkowych w obliczaniu konstrukcji lotniczych*, Sprawozd. Inst. Techn. Lotn. I (1935).
- [3] Ł. W. Kantorowicz i W. I. Kryłow, *Pribliżennyye metody wysszewo analiza*, Moskwa-Leningrad 1950.
- [4] G. Kowalewski, *Integralgleichungen*, Lipsk 1930.
- [5] A. N. Kryłow, *Lekcji o pribliżennykh wyczislenjach*, Leningrad-Moskwa 1935.
- [6] S. G. Michlin, *Intiegralnyje urawnienja*, Moskwa-Leningrad 1949.
- [7] J. Naleszkiewicz, *On the Cooperation of Two Cantilever Spars with a Shear-Resisting Skin*, Arch. Mech. Stos. 2 (1949), str. 143.
- [8] J. Naleszkiewicz, *Wytrzymałość konstrukcji lotniczych*, Państw. Zakł. Wyd. Szkoln., 1950.
- [9] H. Nudielman, *Mietody opriedielenja sobstwiennykh czastot i kriticzeskich sił dla stierżniewykh sistiem*, Gostiechizdat, 1949.
- [10] I. G. Pietrowski, *Lekcji po teorji intiegralnykh urawnienij*, Moskwa-Leningrad 1951.
- [11] G. Wiarda, *Integralgleichungen*, Lipsk 1932.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ МАЧТ И ОБЕЛИСКОВ

Предлагаемая работа состоит из двух частей. В первой из них выводится общее интегральное уравнение для вычисления колебаний и критического значения силы для мачт, а во второй — в качестве примера — производится вычисление периода колебаний и критического значения силы для «Вроцлавской Иглы».

При положенной скачкообразно переменной жесткости изгиба упруго закрепленной консольной балки вычисляется функция влияния

для поперечной нагрузки и ее частные производные. Затем на некоторой высоте мачты принимается следующая нагрузка:

- (1) вертикальная — грузом Q ,
- (2) горизонтальная — силой инерции P , и
- (3) сосредоточенным моментом инерции N .

При этих положениях вычисляется частичный прогиб $y_Q(x, s)$.

Принимая теперь во внимание действительную нагрузку сосредоточенными грузами Q_i (радиус инерции которых равен ρ_i) и весом единицы длины $q(s)$ [радиус инерции равен $\rho(s)$] и слагая все частичные прогибы, образуемые нагрузками, получается уравнение для общего прогиба, которое, после произведения соответствующих преобразований, является искомым интегральным уравнением.

Во второй части, используя вычисленные из конструкционного чертежа «Иглы»: жесткости, радиусы инерции и размещение нагрузки, приближенно определяется влияние поперечных сил и моментов инерции. Так в предлагаемом конкретном случае, как и в большинстве практических применений, можно воспользоваться упрощенным интегральным уравнением, в котором пренебрегают влиянием поперечных сил и поворотов сечений.

В вычислениях интегрирование заменено приближенно формулами суммирования. Для отдельных случаев вычисления периода колебаний и значения критической силы составлены численные уравнения, из которых методом последовательных приближений вычисляются искомые величины.

S u m m a r y

OSCILLATIONS AND STABILITY OF MASTS AND OBELISKS

The paper is composed of two parts: the first containing the derivation of the general integral equation of oscillation and stability of a mast, and the second containing an example of computation of the period of oscillation and of the critical force of the obelisk erected in Wrocław in 1947.

Taking an elastically fixed cantilever whose flexural rigidity varies inconspicuously, the influence function is calculated for a transverse load and its partial derivatives. The load at a certain height is assumed to be composed of

- (1) a vertical load Q ,
- (2) a horizontal load by the force of inertia P , and
- (3) a concentrated moment of inertia N .

These assumptions permit to find the partial deflection $y_Q(x, s)$. For the real load, composed of the concentrated loads Q_i , the radii of

inertia being equal to ρI , and the weight of the cantilever, $q(s)$ and $\rho(s)$ denoting the weight of unit length and the radius respectively, we sum up all the partial deflections. After some transformations we obtain the desired integral equation of the resulting deflection.

In the second part the influence of shearing forces and moments of inertia is approximately estimated, the values of rigidity, the radii of inertia and the weights being calculated from the drawing of the obelisk. In the case considered and in many other practical applications a simplified integral equation can be used, neglecting the influence of shearing forces and that of rotation of cross section.

The process of integration is replaced here by approximate numerical formulae, approximate equations being established for the period of oscillations and for the critical load. Hence the required quantities are found by the method of successive approximations.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 listopada 1952 r.
