

WITOLD WIERZBICKI

ZAGADNIENIE DYNAMICZNE
W OBLICZENIACH STATYCZNYCH BUDOWLI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXXVI

Przedmowa

Obliczenia mechaniczne konstrukcji budowlanych dotyczą obiektów znajdujących się w spokoju. Z tego powodu wszystkie rozważania mechaniki budowli opierają się przede wszystkim na statyce. Zagadnienia dynamiczne występują tu dopiero wówczas, gdy obciążenia budowli nabierają charakteru dynamicznego. Ma to miejsce w nowoczesnym budownictwie przemysłowym w związku z obciążeniem budynków maszynami w ruchu, a w budownictwie komunikacyjnym w związku z dużym wzrostem szybkości ruchu pociągów i samochodów.

Oddziaływanie maszyn i pociągów na obiekty budowlane sprowadza się w zasadzie do uderzeń i drgań.

Zagadnienie uderzeń w pracy konstrukcji budowlanych polega głównie na ustaleniu punktu zaczepienia do budowli sił zaczepionych w sposób nagły, przede wszystkim sił hamowania.

Zagadnienie drgań polega tu na zastosowaniu takich metod obliczeniowych, które pozwoliłyby przy opracowaniu szeregu odmian projektów budowli na szybkie sprawdzenie, w jakim stopniu grozi budynkom rezonans między drganiami własnymi a zmianami sił wymuszających.

Zagadnienia uderzeń i drgań łącznie występują w interpretacji dynamicznej przybliżonej metody Ritz'a i Timoszenki wyznaczania odkształceń i sił krytycznych.

Rozprawa niniejsza jest poświęcona oddziaływaniom dynamicznym obciążeń na budowle, oddziaływaniom rozumianym w sposób wyżej przedstawiony.

Przy opracowaniu rozprawy korzystałem z moich dawniejszych obliczeń zawartych przede wszystkim w następujących publikacjach:

- (1) *Interpretacja dynamiczna przybliżonej metody wyznaczania odkształceń sprężystych w konstrukcjach budowlanych*, Przegląd Techniczny, 1928,
- (2) *Działanie ruchu pociągu na przyczółki i filary mostowe*, Sprawozdania i Prace Warsz. Tow. Pol., 1930,
- (3) *Z dziedziny odkształcenia i stateczności układów prętowych*, Sprawozdania i Prace Warsz. Tow. Pol., 1933,

(4) *Obliczenia drgań własnych belek za pomocą momentów wtórnych*, Inżynieria i Budownictwo, 1948.

Doceniając całkowicie wagę dyskusji prowadzonej na terenie Politechniki Warszawskiej na temat podstawowych pojęć mechaniki, nie mogłem tu wyników tej dyskusji w całości uwzględnić obawiając się, że nowa, niedostatecznie spopularyzowana jeszcze *manière de parler* mogłaby w pracy o charakterze technicznym spowodować szereg nieporozumień.

AUTOR

WYDZIAŁ INŻYNIERSTWA
MISIA
KATEDRA MECHANIKI
MATEMATYCZNEJ

SPIS TREŚCI

	Str.
Przedmowa	557
1. Punkt zaczepienia sił hamowania	559
2. Arytmetyzacja zagadnienia drgań	573
3. Interpretacja dynamiczna metody Ritza i Timoszenki	591

WYDZIAŁ INŻYNIERSTWA
MISIA
KATEDRA MECHANIKI
MATEMATYCZNEJ

1. Punkt zaczepienia sił hamowania

Przy badaniu stateczności i wytrzymałości przyczółków i filarów mostowych muszą być brane pod uwagę zarówno siły pionowe, jak i poziome. Siły poziome występują tu pod postacią sił wywołanych hamowaniem pociągu na moście lub też pod postacią siły pociągowej lokomotywy. Siły te mają charakter obciążeń dynamicznych.

Działanie ruchu pociągu na przyczółki i na filary jest w zasadzie takie samo. Przy badaniu stateczności przyczółków zadanie komplikuje jednak parcie ziemi i dlatego w dalszych obliczeniach mówiąc o podporach mostowych będziemy mieli przede wszystkim na widoku filary pomimo to, że szerokość filara liczona wzdłuż osi mostu może być niekiedy niedostateczna, aby pomieścić choćby dwie osie taboru. W związku z tym zastosowanie wyników dalszych obliczeń do poszczególnych rodzajów konstrukcji zostanie omówione oddzielnie.

Ponieważ posadowienie podpór mostowych nie ma wpływu na sposób działania na nie pociągu, będziemy zakładali w schematach obliczeniowych, że przyczółki i filary przedstawiają bryły w dwóch punktach swobodnie podparte, inaczej mówiąc bryły podparte liniowo.

Hamowanie jednostek taboru kolejowego polega na tym, że klocki hamulcowe wywierają nacisk N na koła powodując tarcie potoczyste na obwodach kół i stwarzając w ten sposób dodatkowy opór pociągu (rys. 1). Opór hamowania wyraża się wzorem

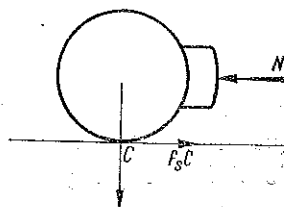
$$(1.1) \quad H = f_r N,$$

gdzie f_r oznacza współczynnik tarcia stali po stali w ruchu.

Koła wagonu toczą się pomimo hamowania dotąd, dopóki tarcie klocka hamulcowego o koło jest mniejsze od tarcia posuwistego w spokoju koła po szynie. Z chwilą unieruchomienia kół

$$(1.2) \quad H = f_s C,$$

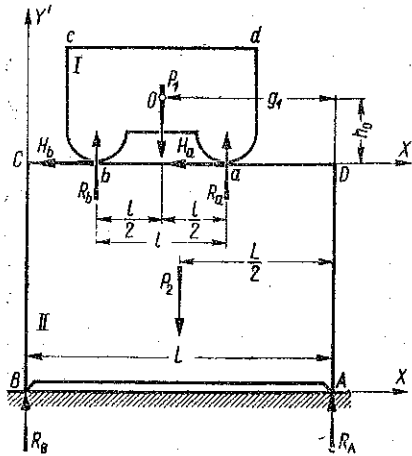
gdzie C oznacza nacisk na koło, a f_s współczynnik tarcia stali po stali w spokoju. Siły hamowania stają się więc w tym wypadku równe siłom



Rys. 1

tarcia unieruchomionych kół taboru po szynach. Siły te odgrywają przeważnie decydującą rolę w działaniu ruchu pociągu na podpory mostowe.

Zajmiemy się przede wszystkim przypadkiem, gdy jednostka taboru znajdująca się bezpośrednio na filarze ulega zahamowaniu z unieruchomieniem kół. Jest to przypadek najniebezpieczniejszy dla podpór mostowych. Schemat tego przypadku przedstawiony jest na rys. 2. Tu bryła ABCD podparta w punktach A i B i oznaczona na rysunku liczbą II przedstawia filar mostu. Jednostkę taboru o kołach unieruchomionych przedstawiamy sobie jako bryłę *abcd* przesuwającą się po bryle ABCD w kierunku CD (na rysunku bryła I).



Rys. 2

Zakładamy, że nagłe zatrzymanie się na filarze bryły *abcd* nie może spowodować jej obrotu dookoła punktu *a*, co zostanie omówione dalej. Wobec takiego założenia wyłączamy możliwość przesuwania się środka ciężkości bryły *abcd* w stosunku do płaszczyzny CD w kierunku osi CY.

Ponieważ przyjęliśmy, że jednostka taboru przedstawiona na rys. 2 jako bryła *abcd* ulega zahamowaniu z unieruchomieniem kół i zatrzymaniu, możemy uważać, że dwie bryły *abcd* i ABCD tworzą układ materialny, między elementami którego działają więzy dające reakcję równą wypadkowej sił tarcia *H*, występujących w płaszczyźnie *ab* i zaczepionych w punktach *a* i *b*.

Dla układu osi współrzędnych *BX* i *BY* ustawiamy równanie momentów ilości ruchu w chwili rozpoczynania się ruchu układu materialnego złożonego z brył *abcd* i ABCD względem punktu A dla środków ciężkości tych brył.

W ogólnej postaci równanie momentów ilości ruchu układu materialnego przedstawia się, jak wiadomo, w sposób następujący:

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum \sum (xY - yX),$$

gdzie *m* oznacza masę poszczególnych elementów układu materialnego, a *X* i *Y* rzuty sił zewnętrznych, działających na układ, na osie współrzędnych *BX* i *BY*. Tu sumowanie po lewej stronie równania dotyczy wszystkich elementów układu materialnego, a sumowanie po prawej stronie

równania dotyczy, z jednej strony, wszystkich sił zewnętrznych działających na układ, a z drugiej — wszystkich elementów układu.

Stosując równanie (1.3) w naszym wypadku, oznaczamy przez x' i y' współrzędne środka ciężkości bryły $abcd$, a przez x'' i y'' współrzędne środka ciężkości bryły $ABCD$. Siły działające na układ materialny i ich ramiona podane są na rys. 2; w szczególności P_1 oznacza tu ciężar bryły $abcd$, a P_2 ciężar bryły $ABCD$. W ten sposób znajdujemy

$$(1.4) \quad \frac{d}{dt} \left[m_1 \left(\frac{dy'}{dt} g_1 + \frac{dx'}{dt} s_1 \right) + m_2 \left(\frac{dy''}{dt} \frac{L}{2} + \frac{dx''}{dt} s_2 \right) \right] = \\ = R_B L - P_2 \frac{L}{2} - P_1 g_1,$$

gdzie R_B oznacza reakcję pionową bryły $ABCD$ w punkcie B , a symbole m_1 i m_2 dotyczą odpowiednio mas brył $abcd$ i $ABCD$.

Ponieważ przyjęliśmy, że bryła $abcd$ nie może się obrócić względem punktu A , więc $dy'/dt = 0$. Również nieprzesuwność środka ciężkości bryły $ABCD$ w kierunku osi BX i BY uważamy za zabezpieczoną, a tym samym $dx''/dt = 0$ i $dy''/dt = 0$.

W tych warunkach równanie (1.4) przybiera postać

$$(1.5) \quad R_B L - P_2 \frac{L}{2} - P_1 g_1 - m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} s_1 = 0.$$

Ostatni dodatek lewej strony równania przedstawia moment względem punktu A siły bezwładności bryły $abcd$. Z drugiej strony, ustawiając dla bryły $abcd$ równanie rzutów ilości ruchu na oś CX znajdujemy

$$(1.6) \quad m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} = -H.$$

Wstawiając wynik (1.6) w równanie (1.5) mamy

$$(1.7) \quad R_B L - P_2 \frac{L}{2} - P_1 g_1 + H s_1 = 0.$$

Równanie (1.7) należy uważać za warunek równowagi filara w chwili zatrzymania się na nim jednostki taboru. Natomiast przy

$$(1.8) \quad R_B L - P_2 \frac{L}{2} - P_1 g_1 + H s_1 < 0$$

bryła $ABCD$ rozpoczyna wraz ze związaną z nią tarcie bryłą $abcd$ ruch obrotowy względem punktu A .

Ze wzorów (1.7) i (1.8) wynika, że przy badaniu stateczności i wytrzymałości filara, na którym zatrzymała się mieszcząca się na nim całkowi-

uległa obrotowi względem punktu a ; możliwość takiego obrotu wyłączyliśmy wyżej w naszych rozumowaniach. Postulatowi temu możemy nadać postać podobną do wzoru (1.10):

$$(1.12) \quad \frac{\mathfrak{M}_{pz}}{\mathfrak{M}_{zp} + H h_0} > 1,$$

gdzie \mathfrak{M}_{pz} i \mathfrak{M}_{zp} oznaczają odpowiednio moment powstrzymujący i moment wywracający dla bryły I.

Wszystkie rozważania dotyczące przypadku, gdy na podporze mostowej uległy całkowitemu zahamowaniu dwie osie pewnej jednostki taboru, zachowują swą moc oczywiście i wówczas, gdy liczba tych osi jest większa od dwóch.

Przechodzimy z kolei do przypadku, gdy zahamowanie jednostki taboru na filarze przy całkowitym unieruchomieniu kół następuje w ten sposób, że jedna oś znajduje się na filarze, a druga na dźwigarze (rys. 4).

Równanie (1.3) ustawione dla układu materialnego I, II przybiera w danych warunkach i przy przyjętych wyżej oznaczeniach postać

$$(1.13) \quad m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} s_1 = \\ = R_b g_1 - P_2 \frac{L}{2} + H_b h_0,$$

gdzie $d^2 x'/dt^2$ oznacza część siły bezwładności bryły I wywierającą wpływ na stateczność bryły II.

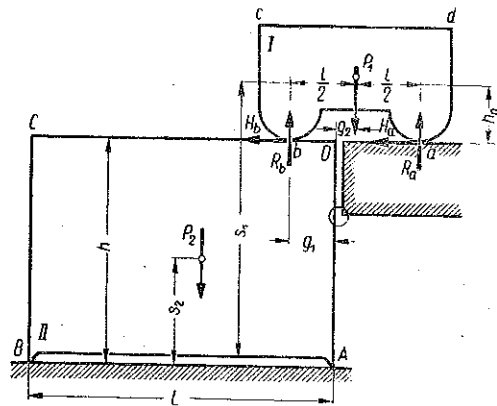
Moment $H_b h_0$ odgrywa w tym wypadku w stosunku do bryły I rolę momentu zewnętrznego. Moment ten powstaje w sposób następujący.

Równanie rzutów ilości ruchu na kierunek poziomy daje w rozpatrywanym przypadku

$$(1.14) \quad m_1 \frac{d^2 x'}{dt^2} = -H_b - H_a,$$

gdzie H_b i H_a oznaczają odpowiednio siły tarcia w punktach a i b bryły I, tzn. siły tarcia między bryłą I a bryłą II, z jednej strony, i między bryłą I a bryłą III, z drugiej strony.

Siła bezwładności $m_1 d^2 x'/dt^2$ oraz suma sił tarcia $H_b + H_a$ tworzą łącznie parę $(H_b + H_a) h_0$, którą można uważać za sumę dwóch momentów $H_b h_0$



Rys. 4

oraz $H_a h_0$, z których pierwszy działa na układ materialny I, II, a drugi na układ II, III.

Nadajemy równaniu (1.13) postać

$$(1.15) \quad H_b s_1 = R_b g_1 - P_1 \frac{L}{2} + H_b h_0,$$

co doprowadza do równania

$$(1.16) \quad -H_b h + R_b g_1 - P_1 \frac{L}{2} = 0,$$

gdzie $h = s_1 - h_0$ wyraża odległość pionową od bieguna A do poziomu szyny.

Równanie (1.16), jak w poprzednim wypadku, możemy zastąpić przez nierówność

$$(1.17) \quad n = \frac{\mathfrak{M}_{pz}}{\mathfrak{M}_{zp} + Hh} > 1.$$

Z rozpatrzonych wyżej dwóch przypadków hamowania pociągu na podporze mostowej wynika, że w razie gdy na podporze zatrzymują się przynajmniej dwie osie pewnej jednostki taboru, przy badaniu stateczności podpory należy przyjmować, że siły hamowania zaczepione są w środku ciężkości tej jednostki, w razie zaś gdy tylko jedna oś zatrzymuje się na podporze, siła hamowania powinna być uważana za zaczepioną w poziomie szyn.

Rozpatrzmy wreszcie przypadek, kiedy jednostka taboru zostaje zahamowana z unieruchomieniem kół na dźwigarze swobodnie podpartym na dwóch podporach mostowych (rys. 5).

Stosując równanie (1.3) do brył I (jednostka taboru) i II (dźwigar) oraz do brył I, II, III (podpora) i powtarzając rozważania przytoczone wyżej dochodzimy do wniosku, że siła hamowania

$$(1.18) \quad H = m \frac{d^2 x'}{dt^2}$$

jednostki taboru powinna być zaczepiona do podpory mostowej w poziomie podpory dźwigara. Jeżeli podpora jest nieprzesuwna, siła ta będzie równa H , jeżeli zaś przesuwna, siła hamowania w ogóle nie będzie działała na podporę.

Taki stan rzeczy jest całkowicie zrozumiały, gdyż dźwigar, na którym odbywa się hamowanie, i przycółek lub filar mają tu jeden tylko punkt wspólny.

W chwili całkowitego zahamowania taboru na dźwigarze tabor i dźwigar będą tworzyły dzięki siłom tarcia niejako jedną bryłę, do której na po-

ziomie środka ciężkości taboru będzie zaczepiona siła hamowania H . Siła ta spowoduje powiększenie nacisku pionowego na jedną podpórę dźwigara i odciążenie drugiej podpory.

Wielkości dodatkowego obciążenia podpory B' (rys. 5) obliczamy z równania momentów sił działających na dźwigar względem punktu A' :

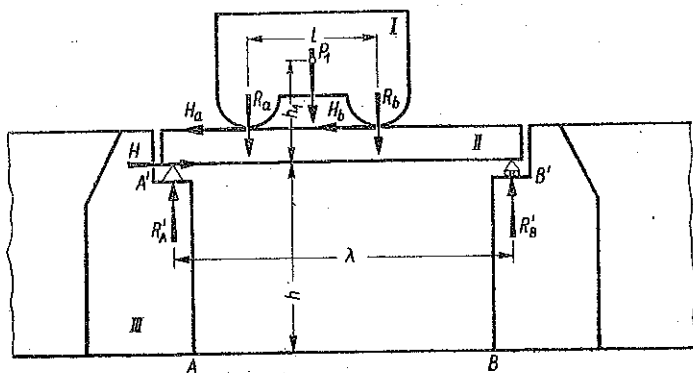
$$(1.19) \quad R'_B l + H h_1 = 0,$$

gdzie R'_B oznacza poszukiwane przeciążenie podpory R'_B , a h_1 odległość pionową podpór dźwigara od płaszczyzny poziomej przechodzącej przez środek ciężkości taboru.

W podobny sposób z równania

$$(1.20) \quad R'_A l - H h_1 = 0$$

znajdujemy spowodowane przez hamowanie odciążenie R'_A podpory A' .



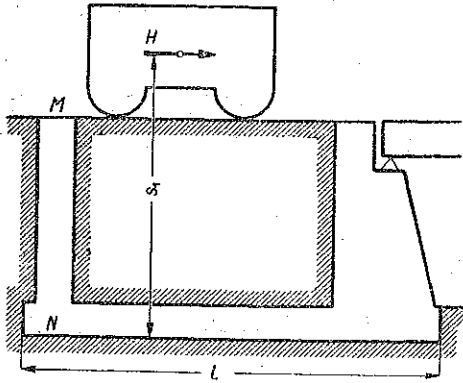
Rys. 5

Wyżej udowodniliśmy, iż siła H tarcia unieruchomionych kół taboru kolejowego po szynach przyczółka lub filara (siła hamowania) powinna być zaczepiona w obliczeniu statycznym podpory mostowej w poziomie środka ciężkości danej jednostki taboru, o ile jednostka ta dotyka podpory co najmniej w dwóch punktach, w poziomie główki szyny, o ile dotyka ona podpory mostowej w jednym tylko punkcie, wreszcie w poziomie przegubu podpory dźwigara, o ile hamowany tabor znajduje się na przegubowo podpartym dźwigarze.

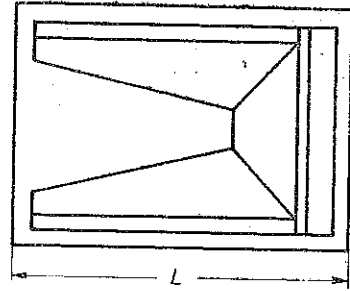
Porównajmy tu w świetle tych twierdzeń poszczególne rodzaje przyczółków.

Wzór (1.10) wyprowadzony został dla przyczółków w rodzaju przedstawionego na rys. 6, tj. takich, na których tor ułożony jest bezpośrednio na murze przyczółka.

Jeżelibyśmy ze środka bryły przyczółka usunęli część muru i zapełnili otrzymaną w ten sposób studnię ziemią, to otrzymalibyśmy przyczółek w rodzaju przedstawionego na rys. 7. O ile by tabor hamowany na takim przyczółku opierał się na nim w dwóch punktach, to wzór (1.10) przy obliczeniu takiego przyczółka zachowałby swoją moc.

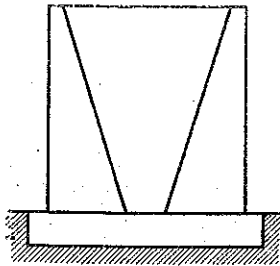


Rys. 6

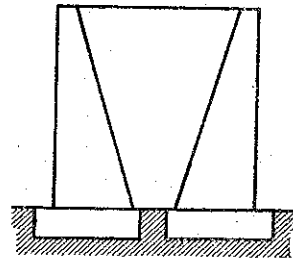


Rys. 7

Usunięcie tylnej ściany *MN* przyczółka przedstawionego na rys. 6 nie spowodowałoby żadnej zmiany zasadniczej w warunkach jego pracy (rys. 7 i 8), gdyż ziemia zapełniająca jego wnętrze pozostałaby w równowadze, podtrzymywana przez ziemię nasypu za przyczółkiem. W tym więc przypadku wzór (1.10) powinien mieć również zastosowanie, tym bardziej że przestrzeń między murami przyczółka typu przedstawionego na rys. 7 i 8 (widok od tyłu) jest zwykle mała i wypełniona ziemią ze szczególną starannością.



Rys. 8

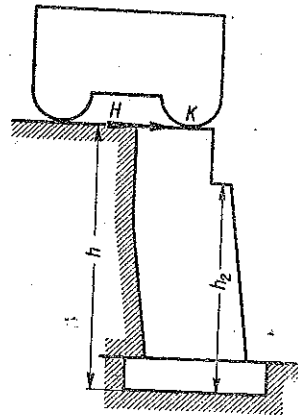


Rys. 9

Usunięcie wspólnego fundamentu pod skrzydłami i przednim murem przyczółka też nie powoduje zmian istotnych w warunkach równowagi przyczółka jako całości, w szczególności pod względem sposobu zaczepienia siły *H* (rys. 9). W tym wypadku nacisk taboru znajdującego się nad przyczółkiem przekazuje się za pomocą ziemi murom przyczółka prawie

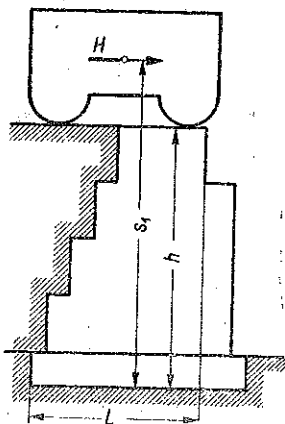
całkowicie lub w razie ziemi spoistej nawet całkowicie, tym bardziej że przestrzeń *mn* wolna od fundamentu jest na ogół mała. Uważamy więc przyczółki przedstawione na rys. 7 i 8 niejako za bryły złożone z murów i ziemi zapelniającej przestrzeń między nimi.

Weźmy teraz pod uwagę przyczółek w postaci muru o przekroju poprzecznym przedstawionym na rys. 10. Na murze przyczółka stoi bezpośrednio jedna tylko oś taboru, druga zaś oś tej samej jednostki taboru opiera się na nasypie za przyczółkiem i nie pozostaje z nim w łączności. W tym wypadku siła tarcia między hamowanym na przyczółku taborem (jedna oś) a szyna powinna być zaczepiona do przyczółka w poziomie punktu *K*, jak to zostało przedstawione we wzorze (1.17).



Rys. 10

Inaczej rzecz się ma w przypadku przyczółka przedstawionego na rys. 11. Tu nacisk lewej (na rysunku) osi znajdującej się na przyczółku jednostki taboru przekazuje się za pośrednictwem szyn, podkładów i podsypki na ziemię za przyczółkiem, a przez nią wywiera ciśnienie w kierunku pionowym na odsadzki przyczółka. Wobec tego jednostka taboru stojąca dwiema przynajmniej osiami nad fundamentem przyczółka, w szczególności nad jego

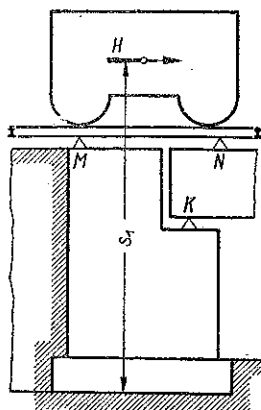


Rys. 11

częścią *L*, może być rozpatrywana, zgodnie ze schematem na rys. 2, jako bryła *abcd* posuwająca się po bryle *ABCD*, a więc siła *H* powinna być w obliczeniu przyczółka zaczepiona w jego środku ciężkości. Jeżeli tylna powierzchnia przyczółka nie posiada odsadzek, lecz jest pochylona, w przekazywaniu pionowego ciśnienia taboru na przyczółek odgrywa rolę tarcia między ziemią a murem, dzięki czemu nie zmienia się zasadniczo sposób zaczepienia do przyczółka siły hamowania pociągu w porównaniu z przypadkiem poprzednim.

Weźmy teraz pod uwagę przyczółek o pionowej powierzchni tylnej oraz o wąskim parapecie mieszczącym na sobie jedną tylko oś pociągu i przypuśćmy, że z parapetu została przerzucona na nieprzesuwny koniec dźwigara beleczka *MN* (rys. 12), połączona z nim w sposób nieprzesuwny. Mamy więc w ten sposób do czynienia z układem niezmiennym *MNK* sztywno złączonym z przyczółkiem, wobec czego jednostka taboru

znajdująca się na belce MN odpowiada schematowi rys. 2 i siła H powinna być tu w obliczeniu przyczółka zaczepiona do środka ciężkości taboru. Rolę beleczki MN spełnia w wielu wypadkach szyna przerzucona z parapetu przyczółka na dźwigar.



Rys. 12

Wreszcie może się zdarzyć w okolicznościach podobnych do przedstawionych wyżej, że chociaż parapet nie mieści na sobie więcej ponad jedną oś pociągu, to jest jednak dosyć szeroki na to, aby szyna podparta za pomocą dwóch przynajmniej podkładów mogła wspornikowo utrzymać dwie osie pociągu (rys. 13). W ten sposób powstałyby znowu okoliczności odpowiadające warunkom schematu 2.

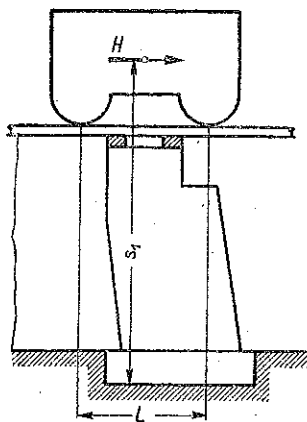
Z powyższego zestawienia widzimy, że dla poszczególnych typów murów przyczółkowych należy przyjmować odcinek L za pewnego rodzaju sprowadzoną długość przyczółka posiadającą tę własność, że jednostka taboru stojąca na tej długości dwiema osiami znajduje się w warunkach

bryły $abcd$ w schemacie na rys. 2 i siła H powinna tu być zaczepiona w obliczeniu statycznym przyczółka w środku ciężkości taboru. Ponieważ długość L jest prawie zawsze większa od rozstawu osi parowozu, należy przy obliczaniu przyczółków uwzględniać wpływ hamowania na przyczółki znajdującego się na nim taboru zawsze według wzoru (1.10).

Jeżeli przyczółki lub filary mostowe podtrzymują dźwigary przegubowo, to, jak uzasadniono wyżej, siła H musi być zaczepiona w tych wypadkach w obliczeniu statycznym w poziomie przegubów podpór nieprzesuwnych.

W razie gdy przyczółki i filary podtrzymują inne rodzaje dźwigarów, poza przegubowymi dźwigarami belkowymi, hamowanie pociągu na dźwigarach odbija się na stateczności podpór w różny sposób w zależności od typu dźwigarów lub układu całej konstrukcji mostowej.

A więc w mostach wspornikowych (rys. 14) wsporniki nie mogą się na ogół obracać względem filarów, tak że stanowią one z nimi jakby jedną całość. W mostach tego typu jednostka taboru stojąca dwiema osiami na wsporniku i zahamowana z unieruchomieniem kół znajduje się w warunkach bryły $abcd$ z rys. 2 i w obliczeniu stateczności filara (lub przyczółka) siła H powinna być tu zaczepiona w środku ciężkości taboru.

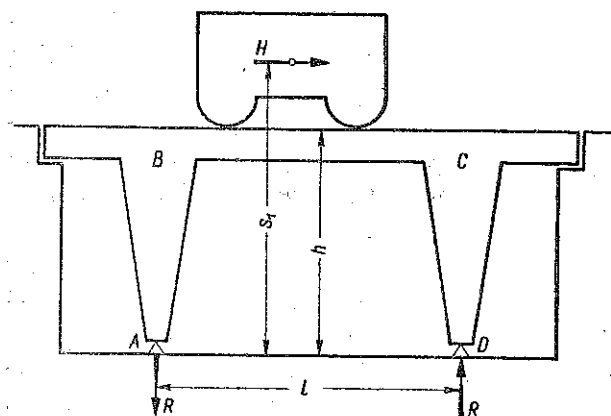


Rys. 13

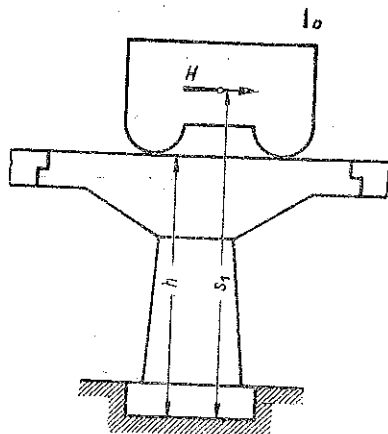
Wsporniki miewają jednak zastosowanie przeważnie w mostach dużych, dla których siła hamowania ma mały wpływ na stateczność podpór, z mostów zaś o małych rozpiętościach zdarzają się one prawie tylko w mostach żelbetowych typu belki zawieszanej.

Filary (słupy) mostów ramowych również nie w jednakowy sposób podlegają działaniu siły hamowania. Sposób zaczepienia siły H zależy tu od typu ram danego mostu.

Przypuśćmy więc, iż mamy do czynienia z ramą dwuprzegubową przedstawioną na rys. 15. Rama ta pod względem stateczności odpowiada warunkom bryły $ABCD$ z rys. 2. Wynika stąd, że siły hamowania należy tu zaczepiać w środku ciężkości hamowanego na ramie taboru. Moment Hs_1 , równoważąc się tu z momentem Rl wywołuje dodatkowe (poza reakcjami sił pionowych) reakcje podpór R i dodatkowe naprężenia ściskające w słupach.



Rys. 15



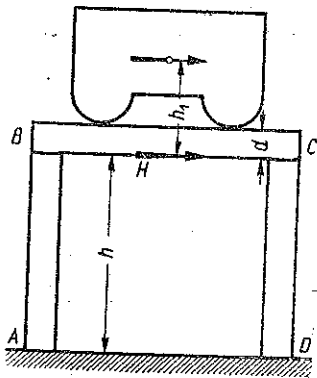
Rys. 14

Rama bezprzegubowa w stosunku do działających na nią sił hamujących znajduje się w tych samych warunkach co rama poprzednia. Odpowiada ona również schematowi na rys. 2, należy więc i w tym wypadku przyjmować punkt zaczepienia siły H w środku ciężkości taboru.

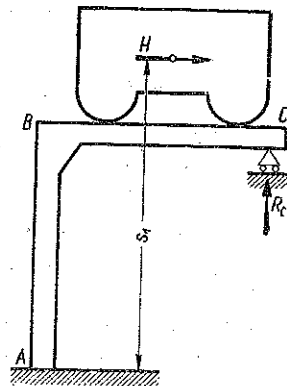
W układzie przedstawionym na rys. 16 dwa słupy połączone bezprzegubowo z fundamentem podtrzymują dźwigar podparty na obydwóch słupach w sposób przegubowy, lecz nieprzesuwny. Siła H spowodowana hamowaniem taboru poruszającego się po rozporze BC powinna być w tym wypadku zaczepiona do słupów AB i CD w poziomie przegubów B i C , gdyż rozpora znajduje się tu w warunkach podobnych do dźwigara z rys. 5. Jeżeli oba przeguby są nieprzesuwne, a roz-

pora ramy jest nieściśliwa, to można przyjmować, że w punktach B i C działają równe sobie siły poziome $H/2$.

W warunkach podobnych do rozpry BC z rys. 16 znajdują się dźwigary belkowych mostów żelbetowych, jeżeli na skutek dużego tarcia na podporach ich końce nie mogą się przesuwać po przyczółkach. W tych wypadkach można siłę hamowania na dźwigarze rozłożyć na dwa przyczółki.



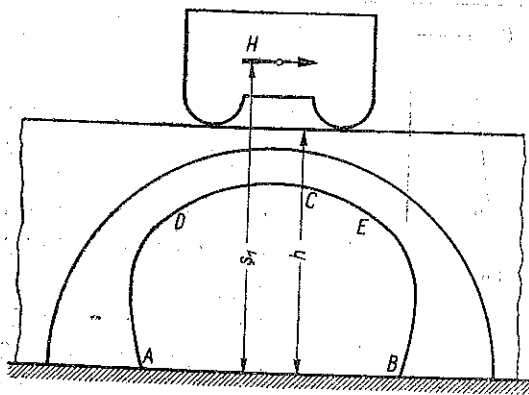
Rys. 16



Rys. 17

Weźmy dla przykładu układ ramowy przedstawiony na rys. 17. Podpora C jest tu podporą przegubowo przesuwaną. Układ posiada jedną wielkość statycznie niewyznaczalną, za którą przyjmujemy zwykle reakcję R_c podpory C .

Po wprowadzeniu tej wielkości uważamy belkę BC za wspornik, a siłę hamowania (siłę H) przechodzącego po niej taboru za zaczepioną w środku ciężkości taboru.



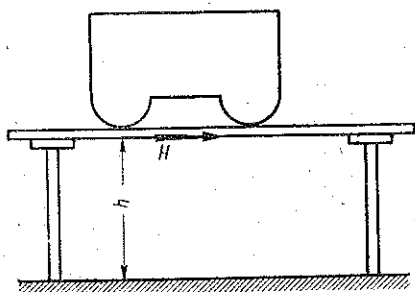
Rys. 18

Most łukowy bezprzegubowy przedstawiony na rys. 18 znajduje się pod względem działania na niego sił hamowania w warunkach analogicznych do warunków ramy bezprzegubowej, a więc

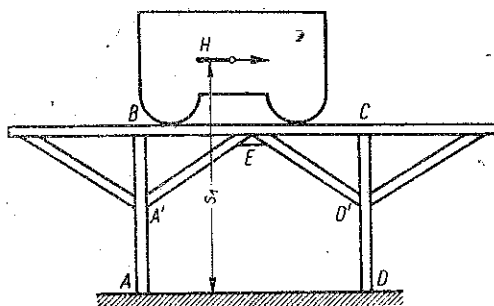
Most łukowy bezprzegubowy przedstawiony na rys. 18 znajduje się pod względem działania na niego sił hamowania w warunkach analogicznych do warunków ramy bezprzegubowej, a więc

Przypuśćmy wreszcie, że hamowanie pociągu odbywa się na moście drewnianym typu leżajowego przedstawionym na rys. 19. Ponieważ pod-

pory takiego mostu uważamy za przegubowe, to będziemy tu mieli do czynienia z tym samym schematem co na rys. 16 i wobec tego przy obliczeniu słupów siłę hamowania należy uważać w danym razie za zaczepioną w poziomie legara (na wysokości h_1).



Rys. 19

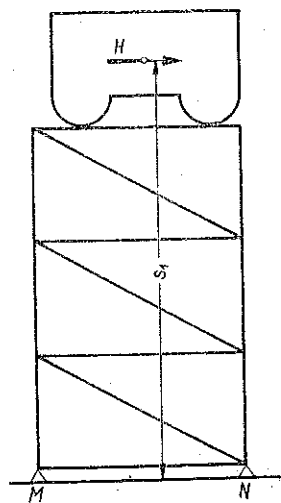


Rys. 20

W drewnianym moście zastrzałowym (rys. 20) trójkąty $A'BE$ i ECD' tworzą niejako geometrycznie niezmiennie wsporniki, wobec czego, zgodnie ze schematem na rys. 2, powinniśmy przyjmować tu siłę hamowania za zaczepioną w środku ciężkości pociągu.

W razie gdy hamowanie pociągu ma miejsce na kratowym filarze stalowym (rys. 21), należy w obliczeniu statycznym przy dwóch przynajmniej kołach unieruchomionych przyjmować siłę hamowania w środku ciężkości taboru. Dotyczy to zarówno obliczenia współczynnika stateczności, jak i obliczenia sił w prętach filara.

Przypuśćmy, że na przyczółku belkowego mostu przegubowego stoi kołami napędowymi parowóz (rys. 22). Ciśnienie pary w cylindrach parowozu przeniesione w postaci siły pociągowej na obwód kół napędnych wywołuje niejako odpychanie się parowozu od przyczółka. Siła pociągowa odpycha parowóz od nieruchomego przyczółka powodując przesuwanie się parowozu i wywołując w kierunku przeciwnym nacisk poziomy na przyczółek równy sile pociągowej.



Rys. 21

Ponieważ w tym wypadku parowóz i przyczółek stykają się w poziomie szyn, siła pociągowa będzie zaczepiona w tym właśnie poziomie. Odpowiedni moment wywracający będzie tu równy Sh .

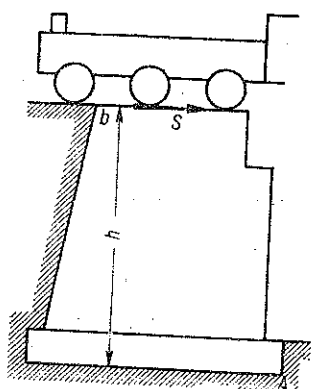
Siła pociągowa dosięga swej wartości największej

(1.21)

$$S = f_s C,$$

o ile za parowozem znajduje się pociąg, zwłaszcza pociąg posuwający się po wzniesieniu (rys. 23).

Może się zdarzyć, że pociąg uległ zatrzymaniu i że wagony utrzymywane są na spadku tylko dzięki tarcii między unieruchomionymi kołami parowozu a szynami przytwierdzonymi do przyczółka. W tych warunkach siła tarcia między parowozem a przyczółkiem stwarza z nich jak gdyby

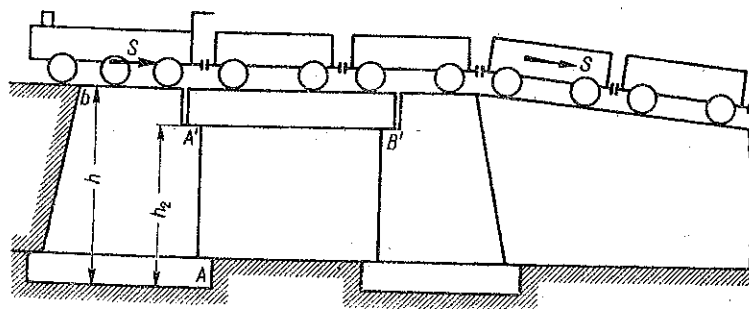


Rys. 22

jedną bryłę. Siła ta równa się w danym wypadku składowej S siły ciężkości, która wywoływałaby ruch wagonów w kierunku spadku w razie, gdyby nie były one utrzymywane w spokoju przez zahamowany na przyczółku parowóz. Ponieważ jedynym punktem wspólnym dla wagonów i parowozu jest w danym razie środek sprzęgła parowozu, należy uważać, że siła $S = f_s C$ powinna być w tym wypadku przyjmowana w obliczeniu statycznym przyczółka w poziomie sprzęgła parowozu.

Przy sprawdzaniu stateczności przyczółka na wywracanie należy we wzór (1.10) wstawiać ten z momentów Hs_1 lub Sh , który jest większy.

Siła hamowania oraz siła pociągowa niezależnie od tego, czy tabor znajduje się na samym przyczółku, czy też na dźwigarze lub na przylegającym do przyczółka nasypie, są siłami zaczepionymi do konstrukcji



Rys. 23

w sposób wyraźnie nagły, gdyż w sposób nagły zostają unieruchamiane koła pociągu. Ponieważ wszystkie wzory mechaniki budowli wyprowadzone są w założeniu, że siły zaczepione do budowli wzrastają w sposób ciągły i nieskończenie powolny, jest rzeczą konieczną dla korzystania z tych wzorów w przypadku sił zaczepionych nagle mnożyć te siły przez pewien współczynnik dynamiczny θ .

Rozważania tego rozdziału stwarzają podstawę do ustalenia tego współczynnika w różnych warunkach pracy konstrukcji.

2. Arytmetyzacja zagadnienia drgań

Przez arytmetyzację rozumiemy taką metodę obliczeń przybliżonych, przy której przejście od postawienia zagadnienia do rachunków liczbowych odbywa się w drodze jak najkrótszej i kiedy na te obliczenia przetrzuca się główny ciężar całego obliczenia statycznego.

Wymiarowanie konstrukcji podtrzymujących pociągi lub maszyny w ruchu wymaga nieraz długiego szeregu prób w dziedzinie obliczeń tych konstrukcji. Z tego powodu ważna jest możliwość przeprowadzenia obliczeń prędko, choćby mniej dokładnie. Taką możliwość daje arytmetyzacja zagadnienia drgań, znajdująca wyraz w stosowaniu tzw. metody kolejnych przybliżeń, metody momentów wtórnych i różnic skończonych. Główny ciężar obliczeń przypada na drgania własne, których poznanie pozwala zabezpieczyć budowlę przed rezonansem.

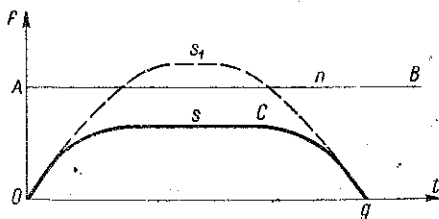
Ustalimy przede wszystkim zakres stosowalności metod przybliżonych w teorii drgań.

Częstotliwość wahań c siły wymuszającej drgania w konstrukcji zmienia się z czasem i jest najmniejsza przy puszczeniu maszyny w ruch i przy jej zatrzymaniu, częstotliwość n drgań własnych konstrukcji natomiast od czasu nie zależy. Przedstawione to jest schematycznie na rys. 24, gdzie krzywa Osg przedstawia zależność c od t , a prosta AB częstotliwość drgań własnych; częstotliwości odkładane są tu równoległe do osi Of .

Przy projektowaniu konstrukcji podtrzymującej pociąg lub maszynę w ruchu musimy dla uniknięcia niebezpieczeństwa rezonansu dbać o to, aby

$$(2.1) \quad n = (1 + z) \max c,$$

gdzie liczba z oparta na obserwacjach wynosi od 0,30 do 0,50. W tych warunkach znajdujemy się jeszcze daleko od tzw. sfery rezonansu i możemy sobie pozwolić przy obliczaniu częstotliwości drgań własnych konstrukcji na niedokładności dochodzące do 5%, co może mieć miejsce przy stosowaniu metody kolejnych przybliżeń i sposobu momentów wtórnych. Jeżeli dla tych lub innych powodów n zbliża się do c , to dokładność obliczeń przybliżonych może się okazać niedostateczna; takich wypadków przy projektowaniu konstrukcji staramy się jednak unikać. Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić i dla przypadku, gdy (rys. 24) krzywa Osg zostanie zastąpiona przez krzywą Os_1g .



Rys. 24

Badanie drgań konstrukcji budowlanych polega na ustaleniu typu drgań, ich częstotliwości i amplitud. Sposoby badania zależą od stopni swobody układu drgającego. Rozróżniamy więc układy o jednym stopniu swobody, o większej, lecz skończonej liczbie stopni swobody i o nieskończonej liczbie stopni swobody.

Przez układ o ν stopniach swobody rozumiemy taki układ, którego położenie w danym momencie czasu określa ν parametrów. Układ o ν stopniach swobody możemy sobie przedstawić jako nieważki układ sprężysty z zaczepionymi do niego w różnych punktach różnymi masami skupionymi, każda w jednym punkcie. Liczba różnych możliwych częstotliwości drgań takiego układu równa się liczbie jego stopni swobody dynamicznej.

Siła wymuszająca zaczepiona do pewnego układu sprężystego wywołuje w nim drgania wymuszone, a jednocześnie staje się przyczyną powstawania drgań własnych. Z tego powodu amplituda drgań układu sprężystego, wywołanych przez siłę wymuszającą, może być przedstawiona jako suma amplitud drgań własnych y_{wl} i drgań wymuszonych y_{wym} , czyli

$$(2.2) \quad y = y_{wl} + y_{wym}.$$

Na skutek oporów wewnętrznych w materiale lub oporów zewnętrznych drgania własne szybko zanikają i amplituda drgań wymuszonych równa się wówczas

$$(2.3) \quad y_{wym} = \vartheta y_{st},$$

gdzie y_{st} jest ugięciem wywołanym działaniem statycznym siły równej największej wartości siły wymuszającej.

Współczynnik ϑ jest to współczynnik dynamiczny, który w razie braku przyczyn tłumiących drgania wyraża się dla układów o jednym stopniu swobody wzorem

$$(2.4) \quad \vartheta = \frac{1}{1 - \frac{c^2}{n^2}},$$

gdzie c oznacza częstotliwość wahań siły wymuszającej, a n częstotliwość drgań własnych układu sprężystego.

W przypadku gdy drgania doznają tłumienia w ten sposób, że opór stawiany drganiom można uważać za proporcjonalny do prędkości ruchu układu drgającego, współczynnik dynamiczny wyraża się wzorem

$$(2.5) \quad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{n^2}\right)^2 + \frac{4c^2h^2}{n^4}}},$$

gdzie wielkość h charakteryzuje opór stawiany drganiom.

Znając współczynnik ϑ , możemy na podstawie ze wzoru (2.3) wyznaczyć odkształcenia i naprężenia wywołane w konstrukcji przez siłę wymuszającą. Do wyznaczenia współczynników dynamicznych i uniknięcia rezonansu potrzebna jest znajomość wielkości n , którą obliczamy na podstawie teorii drgań własnych. Tu oddają duże usługi metody arytmetyzacyjne, w szczególności metoda momentów wtórnych.

Równanie różniczkowe drgań własnych pręta prostego w dwóch punktach swobodnie podpartego ma postać

$$(2.6) \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} + n^2 \eta = 0,$$

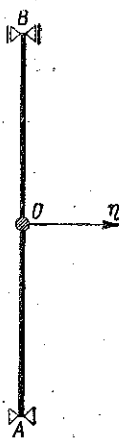
gdzie n oznacza częstotliwość kołową, a η odchylenia poszczególnych punktów pręta od położenia równowagi, za które przyjmujemy dla pręta ustawionego pionowo położenie wyjściowe (rys. 25), a dla pręta poziomego krzywą odkształconą ugięcia statycznego (krzywa AO_0 na rys. 26).

Równanie (2.6) jest z matematycznego punktu widzenia identyczne z równaniem dotyczącym wyboczenia pręta prostego

$$(2.7) \quad EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0.$$

Nasuwa to możliwość zastosowania do wyznaczenia częstotliwości drgań własnych sposobu momentów wtórnych. Niektóre z obliczeń wykonanych tym sposobem mają charakter obliczeń ścisłych, a niektóre przybliżonych.

Aby w tym ostatnim wypadku wyznaczyć częstotliwość kołową n , przyjmujemy dla osi pręta wygiętego pod wpływem sił bezwładności pewną czyniącą zadość warunkom brzegowym dowolną krzywą, której równanie zawiera nieznaną amplitudę δ jako parametr. Na podstawie tej krzywej wyznaczamy odchylenia belki η od położenia równowagi, a na podstawie odchyleń odpowiadające im siły bezwładności. Na podstawie wyznaczonych w ten sposób sił obliczamy sposobem momentów wtórnych



Rys. 25



Rys. 26

rzędne nowej krzywej odkształconej osi pręta i porównujemy tę krzywą z krzywą przyjętą a priori. Przyrównując, mianowicie, bądź największe rzędne obydwóch krzywych, bądź też pola

ograniczone przez te krzywe, znajdujemy poszukiwaną częstotliwość z równania

$$(2.8) \quad \max y_1 = \max y_2,$$

bądź z równania

$$(2.9) \quad \Omega_1 = \Omega_2,$$

gdzie znaczki 1 i 2 dotyczą dwóch kolejnych krzywych.

Otrzymamy w ten sposób częstotliwość n w pierwszym przybliżeniu. Drugie przybliżenie znajdziemy powtarzając przytoczony schemat obliczenia z tym, że rolę krzywej przyjętej a priori odegrać ma tu druga z wymienionych krzywych. Tak samo postępujemy przy poszukiwaniu dalszych przybliżeń.

Przedstawiony schemat postępowania bywa nazywany metodą kolejnych przybliżeń, chociaż nazwa powyższa nie charakteryzuje go dobrze, gdyż nieraz już pierwsze przybliżenie daje wynik ścisły. Istotą metody stanowi właściwie określanie tej samej wielkości przez tę samą (*idem per idem*).

Przybliżony sposób obliczenia drgań własnych nie pozwala na jednoczesne wyznaczenie częstotliwości pierwszego, drugiego, trzeciego i dalszych rzędów. Do wyznaczania częstotliwości każdego rzędu należy przyjmować inną krzywą jako pierwszą postać drgań własnych. Nie jest to duża wada metody, gdyż do niedawna prędkości ruchu pociągów i maszyn nie dawały podstaw do oczekiwania rezonansu wahań sił wymuszających z drganiami własnymi wyższego rzędu niż pierwszy. Obecnie wobec dużych prędkości pociągów i ruchu maszyn wahania sił wymuszających mogą wprawdzie łatwo wpaść w rezonans z drganiami własnymi konstrukcji podtrzymujących drugiego rzędu, ma to już jednak rzadko miejsce z drganiami trzeciego rzędu.

Niżej omówione będą przypadki drgań własnych 1 i 2 rzędu układów o 1 do 4 stopni swobody i ciał sprężystych. Odchylenia η od położenia równowagi będą odkładane dla uproszczenia rysunków od nieodkształconej osi pręta, niezależnie od tego czy oś ta jest pionowa, czy pozioma.

Bierzemy pod uwagę pręt nieważki w dwóch punktach swobodnie podparty z zaczepionym w jego środku C ciężarem o masie m (rys. 27). Prosta AB w myśl tego, co powiedzieliśmy wyżej, uważamy za położenie równowagi, a nieznaną amplitudę drgań własnych układu w punkcie C oznaczamy przez δ . Wobec tego odchylenie η ciężaru C od położenia równowagi wyraża się wzorem

$$(2.10) \quad \eta = \delta \sin nt,$$

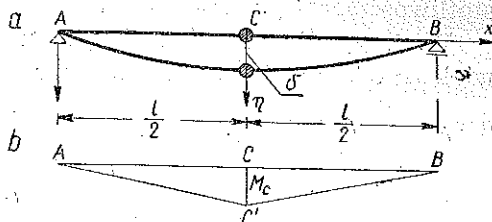
gdzie n oznacza częstotliwość drgań własnych, a t czas liczony od chwili, kiedy pręt zaczyna się wyginać w stosunku do położenia równowagi.

Siła bezwładności ciężaru C odpowiadająca odchyleniu η wynosi $(P/g)(d^2\eta/dt^2)$ dla $P = mg$; przy największym odchyleniu δ , tzn. przy $\sin nt = 1$, siła bezwładności

$$(2.11) \quad P'_c = \frac{P}{g} n^2 \delta.$$

Siła (2.11) wywołuje w środku pręta moment zginający

$$(2.12) \quad M_c = \frac{l}{4} P'_c l,$$



Rys. 27

czemu odpowiada wykres momentów zginających, czyli wykres obciążeń wtórnych w pręcie AB , przedstawiony na rys. 27 jako trójkąt ABC' .

Pole wykresu obciążeń wtórnych

$$(2.13) \quad p = \frac{1}{2} M_c l,$$

a odpowiedni moment wtórny w punkcie C

$$(2.14) \quad M_c = \frac{1}{48} \frac{P}{g} n^2 \delta l^3.$$

Dzieląc ten moment przez sztywność pręta EJ znajdujemy, że największe odchylenie ciężaru C

$$(2.15) \quad \max \eta = \frac{M_c}{EJ}.$$

A więc przyjąwszy za punkt wyjścia do obliczeń amplitudę δ drgań własnych ciężaru C doszliśmy do nowej wartości amplitudy, tzn. że

$$(2.16) \quad \max \eta = \delta.$$

Z równania tego znajdujemy poszukiwaną częstotliwość kołową n drgań własnych ciężaru C :

$$(2.17) \quad n = \sqrt{\frac{48 EJg}{Pl^3}}.$$

Otrzymany wynik jest w tym wypadku wynikiem ścisłym.

Przechodząc do układów o dwóch stopniach swobody dynamicznej bierzemy pod uwagę pręt nieważki AB , na którym w punktach C i D rozmieszczonych według rys. 28 zaczepione są dwa ciężary o równych masach m .

Ponieważ mamy do czynienia z układem o dwóch stopniach swobody, będą tu miały miejsce dwa różne rodzaje drgań własnych o różnych częstotliwościach (rys. 28b i 28c).

W przypadku przedstawionym na rys. 28b oznaczamy przez δ największe odchylenia rozpatrywanego układu w punktach C i D. Odpowiadają temu dwie siły bezwładności ciężarów C i D

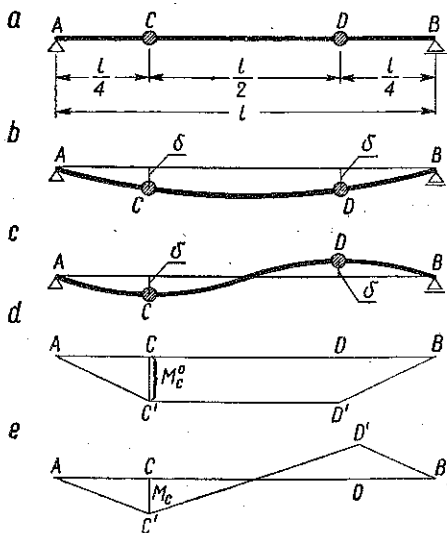
$$(2.18) \quad P'_C = P'_D = \frac{P}{g} n^2 \delta$$

oraz wykres momentów zginających w przęcie CD przedstawiony na rys. 28d.

Przyjmując wykres AC'D'B za wykres obciążeń wtórnych znajdziemy momenty wtórne $M'_C = M'_D$ w punktach C i D i odpowiednio odchylenia

$$(2.19) \quad \max \eta_C = \max \eta_D = \frac{M'_C}{EJ}$$

Ponieważ odchylenia te równe są przyjętym z góry amplitudom punktów C i D, więc $\max \eta_C = \delta$, skąd



Rys. 28

można obliczyć częstotliwość kołową pierwszego rzędu rozpatrywanego układu

$$(2.20) \quad n_1 = \sqrt{\frac{48 EJg}{Pl^3}}$$

Aby wyznaczyć częstotliwość drugiego rzędu tego układu, odpowiadającą typowi drgań przedstawionemu na rys. 28c, przyjmujemy, że amplitudy drgań punktów C i D są równe δ i odłożone w przeciwne strony. W związku z tym zaczepiamy w tych punktach dwie siły wyrażone wzorem (2.18) i skierowane w przeciwne strony. Odpowiedni wykres momentów zginających przedstawiony jest na rys. 28e. Uważając ten wykres za wykres obciążenia wtórnego znajdujemy ugięcia pręta AB w punktach C i D a tym samym największe odchylenia od położenia równowagi:

$$(2.21) \quad \max \eta_C = \frac{Pl^3}{192 EJ}$$

Przyrównując do siebie dwa różne wyrażenia na to samo odchylenie znajdujemy z równania $\max \eta_C = \delta$

$$(2.22) \quad n_2 = \sqrt{\frac{192 EJg}{Pl^3}}$$

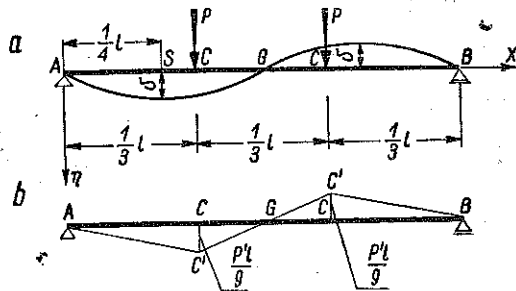
Z porównania częstotliwości pierwszego i drugiego rzędu widzimy, że częstotliwość n_2 jest dwa razy większa od częstotliwości n_1 .

Dalej podamy ogólniejsze rozwiązanie zadania podobnego do poprzedniego.

Bierzemy mianowicie pod uwagę pręt nieważki AB w dwóch punktach swobodnie podparty, do którego w punkcie C w odległościach równych $l/3$ od podpór zaczepione są dwa ciężary o dwu równych masach, i wyznaczamy częstotliwość drgań drugiego rzędu (rys. 29a).

Przyjmujemy w pierwszym przybliżeniu, że przy drganiach drugiego rzędu pręt wygina się według sinusoidy

$$(2.23) \quad \eta = \delta \sin \frac{2\pi x}{l},$$



Rys. 29

gdzie δ oznacza amplitudę w punkcie S położonym w odległości $l/4$ od podpory.

Największe siły bezwładności mas ciężarów zaczepionych w punktach C wynoszą

$$(2.24) \quad P' = \frac{P}{g} n^2 \eta_C,$$

gdzie η_C są ugięciami (amplitudami) odpowiadającymi największym siłom bezwładności. Siły te są zwrócone w każdym z punktów C w przeciwne strony. Ugięcia η_C otrzymamy wstawiając w równanie (2.23) $x = l/3$:

$$(2.25) \quad \eta_C = 0,86603 \delta.$$

Wykres momentów zginających w belce AB , odpowiadający działaniu dwóch sił P' skierowanych w przeciwne strony, przedstawiony jest na rysunku 29b. Uważając wykres ten za wykres obciążenia wtórnego znajdujemy reakcję \mathfrak{A} podpory A belki AB od tego obciążenia:

$$(2.26) \quad \mathfrak{A} = \frac{P' l^2}{81}.$$

Moment wtórny w punkcie S wynosi w tych warunkach

$$(2.27) \quad \mathfrak{M}_S = \frac{P' l^2}{81} \frac{l}{4} - \frac{P' l}{12} \frac{1}{4} l \frac{1}{2} \frac{1}{4} l \frac{1}{3} = 0,00192 P' l^3.$$

Ugięcia w punktach S równe sobie, lecz skierowane w przeciwne strony równają się.

$$(2.28) \quad \eta_s = \frac{M_s}{EJ} = \frac{0,00192 P' l^3}{EJ} = \frac{0,00192 l^3}{EJ} \frac{P}{g} n^2 \cdot 0,86603 \delta.$$

Przyrównując ugięcia δ do założonego z góry ugięcia η_s dochodzimy do równania

$$(2.29) \quad \eta_s = \delta,$$

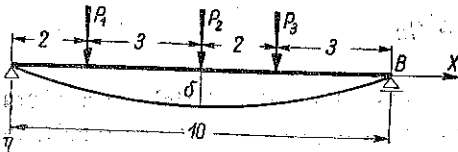
z którego znajdujemy

$$(2.30) \quad n = 22,8 \sqrt{\frac{EJg}{Pl^3}}$$

Dalsze przybliżenie dla n moglibyśmy otrzymać przez powtórzenie przytoczonego toku obliczenia przyjmując w nim zamiast δ ugięcie η_s i zastępując przyjętą wyżej sinusoidę krzywą odkształconą belki, wyznaczoną na podstawie wykresu obciążeń wtórnych.

Przypadek drgań układu o trzech stopniach swobody rozważymy na przykładzie przedstawionym na rys. 30. Obliczymy mianowicie częstość drgań podstawowych układu.

Bierzemy dla przykładu belkę w dwóch punktach swobodnie podpartą o rozpiętości $l = 10$ m. W punktach 1, 2, 3 zaczepione są ciężary $P_1 = 10$ t, $P_2 = 20$ t, $P_3 = 10$ t. Belka jest nieważka.



Rys. 30

Wobec tego, że obciążenie pręta niezbyt odbiega od symetrycznego względem środka belki, przyjmujemy za oś odkształconą krzywą

$$(2.31) \quad \eta = \delta \sin \frac{\pi x}{l},$$

gdzie δ oznacza ugięcie belki w środku. Podobnie jak w przypadkach rozpatrzonych wyżej przyjmujemy

$$(2.32) \quad P'_1 = \frac{P_1}{g} n^2 \eta_1 = s_1 \eta_1$$

oraz odpowiednio

$$(2.33) \quad P'_2 = s_2 \eta_2, \quad P'_3 = s_3 \eta_3.$$

Wstawiając w równanie (2.31) kolejno $x = 0,2 l$, $x = 0,5 l$ i $x = 0,7 l$ znajdujemy

$$(2.34) \quad \eta_1 = 0,588 \delta, \quad \eta_2 = \delta, \quad \eta_3 = 0,808 \delta.$$

Reakcja podpory A spowodowana przez siły P' wynosi

$$(2.35) \quad R_A = 0,8 P'_1 + 0,5 P'_2 + 0,3 P'_3 = 17,12 \frac{n^2}{g} \delta, \quad (11.4)$$

a wobec tego momenty zginające pod poszczególnymi ciężarami będą równe

$$(2.36) \quad M_1 = 34,24 \frac{n^2}{g} \delta, \quad M_2 = 67,96 \frac{n^2}{g} \delta, \quad M_3 = 50,40 \frac{n^2}{g} \delta.$$

Rozkład momentów zginających przyjmujemy dalej według prawa

$$(2.37) \quad M = M_{sr} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Wobec małej liczby ciężarów skupionych na belce rzeczywisty wykres momentów zginających jest bardziej stromy niż wykres (2.37) (przy $M_2 = M_{sr}$). Aby to nie odbiło się na momentach wtórnych, bierzemy pod uwagę, że średnia z rzeczywistych momentów powinna się równać średniej z momentów w tych samych punktach obliczonych według wzoru (2.37). Stosunek średniej momentów (2.36) do momentu M_2 wynosi 0,74, a stosunek średniej odpowiednich rzędnych krzywej (2.37) do M_{sr} równa się 0,80. Wobec tego zastępujemy równanie (2.37) przez równanie

$$(2.38) \quad M = \frac{0,74}{0,80} M_{sr} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Moment M_{sr} będzie w tych warunkach równy

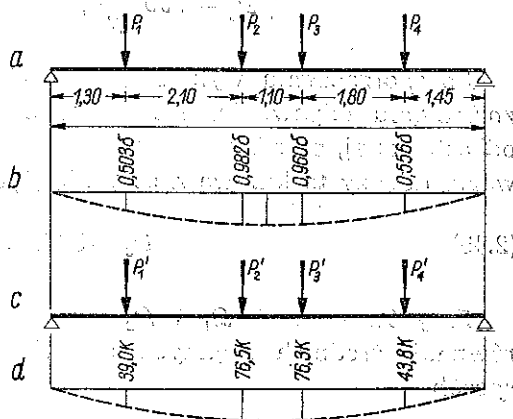
$$(2.39) \quad M_{sr} = 0,93 M_{sr} \frac{l^2}{\pi^2} = 63,80 \frac{n^2}{g} \delta.$$

Dzieląc ten moment przez EJ i przyrównując iloraz do δ znajdujemy

$$(2.40) \quad n = 0,0398 \sqrt{EJg}$$

wobec dokładnej wartości współczynnika przy pierwiastku 0,0401 podanej przez K. S. Z a w r i e w a.

Wyznaczenie częstotliwości drgań własnych układu o czterech stopniach swobody dynamicznej przeprowadzamy dla przypadku przedstawionego na rys. 31, gdzie $P_1 = P_4 = 4,5 \text{ t}$ i $P_2 = P_3 = 3 \text{ t}$ oraz $l = 7,75 \text{ m}$.



Rys. 31

Za równanie pierwszej przybliżonej postaci osi odkształconej przyjmujemy równanie

$$(2.41) \quad \eta = \delta \sin \frac{\pi x}{l},$$

gdzie δ oznacza nieznaną ugięcie belki w środku, mierzone względem położenia równowagi (względem tzw. poziomu statycznego). Rysunek 31b przedstawia wykres sinusoidy (2.41) ze wskazaniem rzędnych wyrażających przesunięcia punktów zaczepienia poszczególnych ciężarów P . Pole Ω_1 zawarte między sinusoidą a osią odciętych wynosi

$$(2.42) \quad \Omega_1 = \frac{2}{\pi} l \delta.$$

Największe wartości sił bezwładności znajdujemy ze wzoru

$$(2.43) \quad P' = \eta \frac{P}{g} n^2,$$

a więc

$$(2.44) \quad \begin{cases} P'_1 = 2,26 \frac{\delta n^2}{g}, & P'_3 = 2,91 \frac{\delta n^2}{g}, \\ P'_2 = 2,95 \frac{\delta n^2}{g}, & P'_4 = 2,50 \frac{\delta n^2}{g}. \end{cases}$$

Po sporządzeniu wykresu momentów zginających dla sił (2.44) i po znalezieniu odpowiednich momentów wtórnych dochodzimy do nowej odkształconej, przedstawionej na rysunku 31d; znajdujemy nowe pole zawarte między tą krzywą a osią odciętych

$$(2.45) \quad \Omega_2 = 384,40 \frac{\delta n^2}{EJg}.$$

Przyrównanie pól Ω_1 i Ω_2 zastępujemy w tym wypadku przez przyrównanie średnich rzędnych obydwóch krzywych; znajdujemy w ten sposób

$$(2.46) \quad n = 0,113 \sqrt{EJg}.$$

Przechodząc do obliczenia częstotliwości drgań własnych ciał sprężystych, a więc układów o nieskończenie wielkiej liczbie stopni swobody, wykażemy przede wszystkim, że najniższej częstotliwości odpowiada w tych wypadkach największa amplituda, co ma miejsce przy drganiach podstawowych.

Jeżeli belka sprężysta ma stały przekrój poprzeczny, to zależność między odchyleniem η pewnego punktu jej osi od położenia równowagi a czasem t wyraża się równaniem

$$(2.47) \quad EJ \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie x oznacza odcięta punktu, którego odchylenie jest η .

Po ustaleniu warunków brzegowych dla belek w dwóch punktach swobodnie podpartych, belek utwierdzonych na końcach i belek-wsporników wyznaczamy częstotliwości drgań własnych tych trzech rodzajów belek odpowiednio z równań

$$(2.48) \quad \sin ul = 0,$$

$$(2.49) \quad \cos ul \cosh ul = 1,$$

$$(2.50) \quad \cos ul \cosh ul = -1,$$

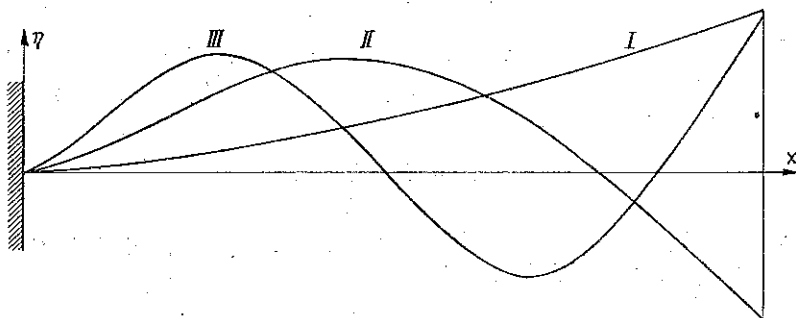
gdzie

$$u = \sqrt{\frac{n}{a}} \quad \text{oraz} \quad a = \sqrt{\frac{EJg}{q}}.$$

Każdej wartości ul odpowiada inna częstotliwość n i inne równanie fali stojącej:

$$(2.51) \quad X(x) = D_1 \sin ux + D_2 \cos ux + D_3 \sinh ux + D_4 \cosh ux.$$

Przyjmując jedną ze stałych całkowania D za równą 1 otrzymujemy dla każdej z wymienionych wyżej belek wykresy ugięć odpowiadających różnym częstotliwościom drgań, obliczonym z równań (2.48)-(2.50).



Rys. 32

A więc np. dla belki-wspornika po uwzględnieniu warunków brzegowych mamy

$$(2.52) \quad X(x) = D_2 [(\cos ux - \cosh ux) + 0,731 (\sin ux - \sinh ux)],$$

co doprowadza do wykresu na rys. 32, na którym krzywa I odpowiada $ul = 1,875$, krzywa II $ul = 4,694$, krzywa III $ul = 7,855$. Z wykresu wynika, że największe amplitudy odpowiadają drganiom podstawowym, co potwierdzają obliczenia dla dalszych, wyższych częstotliwości i dla innych typów belek. Pozwala to na ograniczenie się w wielu wypadkach drgań konstrukcji budowlanych do badania samych tylko drgań podstawowych. Możemy to wykonać sposobem momentów wtórnych. Podajemy dwa przypadki tego rodzaju obliczenia.

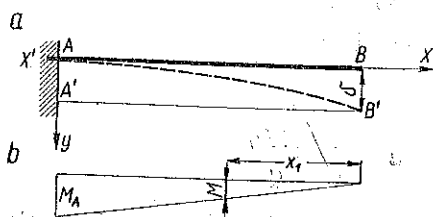
Bierzemy pod uwagę pręt utwierdzony w przekroju A i swobodny w przekroju B; ciężar własny pręta q kG/cm (kilogramów na centymetr bieżący), $EJ = \text{const}$ (rys. 33).

Oznaczamy przez δ amplitudę drgań podstawowych w punkcie B i przyjmujemy dla osi odkształconej pręta w czasie drgań równanie paraboli

$$(2.53) \quad y = \delta \frac{x^2}{l^2}.$$

Wykres obciążeń pręta siłami bezwładności będzie się wyrażał wzorem

$$(2.54) \quad q' = s \delta \frac{x^2}{l^2}.$$



Rys. 33

Największy moment zginający, spowodowany przez siły bezwładności, występuje w przekroju A i wynosi

$$(2.55) \quad M_A = s \left(\frac{\delta l^2}{2} - \frac{2}{3} \delta l \frac{3}{8} l \right) = \frac{s \delta l^2}{4}.$$

Gdyby chodziło o siłę bezwładności jednego ciężaru zaczepionego w końcu B pręta, mielibyśmy do czynienia z następującym rozkładem obciążeń wtórnych (rys. 33b):

$$(2.56) \quad M = M_A \frac{x_1}{l}.$$

Odpowiadałby temu następujący moment statyczny obciążenia wtórnego pręta względem punktu B:

$$(2.57) \quad M'_B = M_A \frac{l^2}{3}.$$

Ponieważ główna część sił bezwładności pręta, jak to wynika z postaci krzywej odkształconej, będzie skupiona około punktu B, moment statyczny M'_B w danym zadaniu będzie miał wartość zbliżoną do wartości (2.57):

Wobec tego przyjmujemy, że

$$(2.58) \quad \eta_B = \frac{M_A l^3}{3 EJ}$$

Przyrównując to nowe wyrażenie na ugięcie pręta w punkcie B do pierwotnie przyjętego δ znajdujemy

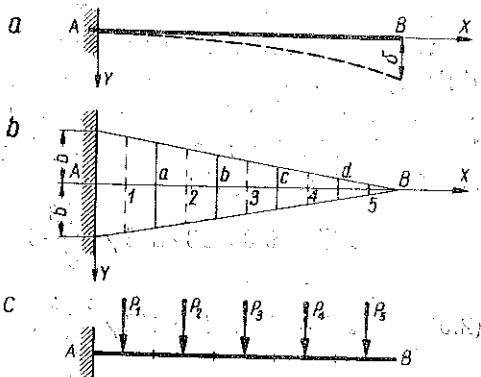
$$(2.59) \quad n = \frac{\pi^2}{(1,69 l)^2} \sqrt{\frac{EJg}{q}}$$

Wynik ścisły różniłby się od powyższego tylko tym, że współczynnik przy l byłby tu równy 1,67.

Omówimy dalej obliczenie częstotliwości drgań własnych w kolejnych przybliżeniach. Wykonamy to na przypadku drgań podstawowych pręta o kształcie klina utwierdzonego w punkcie A i swobodnego w punkcie B, o wysokości w przekroju utwierdzenia $2b$, o szerokości l i o ciężarze jednostkowym γ (rys. 34).

Dzielimy pręt na odcinki $\Delta x = 0,2 l$ i w granicach tych odcinków zastępujemy w przekroju podłużnym trapezy prostokątami. Poszczególne odcinki Δx rozpatrywanego pręta mają w tych warunkach następujące ciężary (rys. 34c):

$$(2.60) \quad \begin{cases} P_1 = 0,18 \cdot 2 b l \gamma, \\ P_2 = 0,14 \cdot 2 b l \gamma, \\ P_3 = 0,10 \cdot 2 b l \gamma, \\ P_4 = 0,06 \cdot 2 b l \gamma, \\ P_5 = 0,02 \cdot 2 b l \gamma. \end{cases}$$



Rys. 34

Przejsie od sił P do największych działających na pręt sił bezwładności odbywa się na podstawie wzoru

$$(2.61) \quad P' = P \frac{n_1^2}{g} \eta,$$

gdzie η oznacza przesunięcie punktów zaczepienia sił, które obliczamy w pierwszym przybliżeniu według paraboli

$$(2.62) \quad \eta = \delta \frac{x^2}{l^2}$$

Mnożąc siły (2.60) przez przesunięcia $\eta = 0,01 \delta$, $\eta = 0,09 \delta$ itd. znajdujemy:

$$(2.63) \quad \begin{cases} P'_1 = 0,0018 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g}, \\ P'_2 = 0,0126 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g}, & P'_4 = 0,0294 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g}, \\ P'_3 = 0,0250 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g}, & P'_5 = 0,0162 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g}. \end{cases}$$

Siły P' wywołują następujące momenty zginające w poszczególnych przekrojach 1, 2, 3, 4 i 5:

$$(2.64) \quad \begin{cases} M_1 = 0,04312 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l, \\ M'_2 = 0,02648 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l, & M_4 = 0,00324 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l, \\ M'_3 = 0,01236 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l, & M'_5 = 0,00041 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l. \end{cases}$$

Wobec zmienności przekroju poprzecznego rozpatrywanego pręta znajdujemy jego obciążenie wtórne na podstawie wykresu momentów M' zmieniając rzędne (2.64) w stosunku odwrotnym do trzecich potęg wysokości klina. W ten sposób dochodzimy do następujących rzędnych wykresu obciążeń wtórnych:

$$(2.65) \quad \begin{cases} M''_1 = 0,05933 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l, \\ M''_2 = 0,07719 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l, & M''_4 = 0,11988 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l, \\ M''_3 = 0,09888 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l, & M''_5 = 0,40500 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l. \end{cases}$$

Przyjmujemy, że na powierzchni poszczególnych odcinków momenty M'' nie ulegną zmianie, i znajdujemy następujące wartości powierzchni pól obciążenia wtórnego na tych odcinkach:

$$(2.66) \quad \begin{cases} \mathcal{P}_1 = 0,01187 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^3, \\ \mathcal{P}_2 = 0,01544 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^3, & \mathcal{P}_4 = 0,02398 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^3, \\ \mathcal{P}_3 = 0,01978 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^3, & \mathcal{P}_5 = 0,08100 \cdot 2bl\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^3. \end{cases}$$

Pola \mathfrak{P} przyjmujemy dalej za siły skupione w punktach 1, 2, 3, 4 i 5, wobec czego moment statyczny tych sił względem punktu B wynosi

$$(2.67) \quad \mathfrak{M}'_B = 0,04667 \cdot 2b\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^3.$$

Wreszcie z równania

$$(2.68) \quad \eta_B = \delta,$$

czyli z równania

$$(2.69) \quad \frac{\mathfrak{M}'_B}{EJ} = \delta,$$

gdzie J dotyczy przekroju utwierdzenia, dochodzimy do następującej częstotliwości kołowej drgań własnych klina w pierwszym przybliżeniu:

$$(2.70) \quad n_1 = \frac{4,629 b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}.$$

Aby znaleźć częstotliwość drgań podstawowych w drugim przybliżeniu, musimy przede wszystkim wyznaczyć na podstawie otrzymanej częstotliwości drgań w pierwszym przybliżeniu nowe wartości amplitud pręta w czasie drgań podstawowych. W tym celu obliczamy kolejno momenty statyczne \mathfrak{M}' dla poszczególnych punktów pręta:

$$(2.71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}'_1 = 0,00030 \cdot 2b\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^4, \\ \mathfrak{M}'_2 = 0,00237 \cdot 2b\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^4, \\ \mathfrak{M}'_3 = 0,00782 \cdot 2b\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^4, \\ \mathfrak{M}'_4 = 0,01724 \cdot 2b\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^4, \\ \mathfrak{M}'_5 = 0,03144 \cdot 2b\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^4. \end{array} \right.$$

Stąd mając na uwadze, że w przekroju utwierdzenia $J = (2b)^3/12$, znajdujemy poszukiwane ugięcia:

$$(2.72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \frac{0,00030}{EJ} \cdot 2b\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^4 = 0,00045 \frac{2\gamma n_1^2 \delta l^4}{Eg b^3}, \\ \eta_2 = \frac{0,00237}{EJ} \cdot 2b\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^4 = 0,00356 \frac{2\gamma n_1^2 \delta l^4}{Eg b^3}, \\ \eta_3 = \frac{0,00782}{EJ} \cdot 2b\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^4 = 0,01173 \frac{2\gamma n_1^2 \delta l^4}{Eg b^3}, \\ \eta_4 = \frac{0,01724}{EJ} \cdot 2b\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^4 = 0,02586 \frac{2\gamma n_1^2 \delta l^4}{Eg b^3}, \\ \eta_5 = \frac{0,03144}{EJ} \cdot 2b\gamma \frac{n_1^2 \delta}{g} l^4 = 0,04716 \frac{2\gamma n_1^2 \delta l^4}{Eg b^3}. \end{array} \right.$$

Odpowiednio największe siły bezwładności w drugim przybliżeniu wynoszą (n_2 oznacza tu częstotliwość pierwszego rzędu w drugim przybliżeniu):

$$(2.73) \quad \left\{ \begin{array}{l} P'_1 = P_1 \frac{n_2^2}{g} \eta_1 = 0,0000810 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_1^2 \delta l^5}{g^2 E b}, \\ P'_2 = P_2 \frac{n_2^2}{g} \eta_2 = 0,0004984 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_1^2 \delta l^5}{g^2 E b}, \\ P'_3 = P_3 \frac{n_2^2}{g} \eta_3 = 0,0011730 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_1^2 \delta l^5}{g^2 E b}, \\ P'_4 = P_4 \frac{n_2^2}{g} \eta_4 = 0,0015516 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_1^2 \delta l^5}{g^2 E b}, \\ P'_5 = P_5 \frac{n_2^2}{g} \eta_5 = 0,0009432 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_1^2 \delta l^5}{g^2 E b}. \end{array} \right.$$

Siły te wywołują następujące momenty zginające w poszczególnych przekrojach 1, 2, 3, 4 i 5:

$$(2.74) \quad \left\{ \begin{array}{l} M'_1 = 0,0022545 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_1^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\ M'_2 = 0,0014209 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_1^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\ M'_3 = 0,0006876 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_1^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\ M'_4 = 0,0001886 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_1^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\ M'_5 = 0,0000236 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_1^2 \delta l^6}{g^2 E b}. \end{array} \right.$$

Zmieniając te momenty odwrotnie proporcjonalnie do trzecich potęg wysokości klina dochodzimy do następujących rzędnych nowego wykresu obciążeń wtórnych:

$$(2.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} M''_1 = \frac{M'_1}{0,729} = 0,003092 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\ M''_2 = \frac{M'_2}{0,343} = 0,004142 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\ M''_3 = \frac{M'_3}{0,125} = 0,005500 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\ M''_4 = \frac{M'_4}{0,027} = 0,006985 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^6}{g^2 E b}, \\ M''_5 = \frac{M'_5}{0,001} = 0,023600 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^6}{g^2 E b}. \end{array} \right.$$

Znajdujemy dalej nowe wartości pół-nowego obciążenia wtórnego dla poszczególnych odcinków pręta:

$$(2.76) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= M_1'' \cdot 0,2l = 0,000618 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^7}{g^2 E b}, \\ \mathfrak{P}_2 &= M_2'' \cdot 0,2l = 0,000828 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^7}{g^2 E b}, \\ \mathfrak{P}_3 &= M_3'' \cdot 0,2l = 0,001100 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^7}{g^2 E b}, \\ \mathfrak{P}_4 &= M_4'' \cdot 0,2l = 0,001397 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^7}{g^2 E b}, \\ \mathfrak{P}_5 &= M_5'' \cdot 0,2l = 0,004720 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^7}{g^2 E b}. \end{aligned} \right.$$

Uważając znowu pola \mathfrak{P} za siły skupione w punktach 1, 2, 3, 4 i 5 obliczamy nowy moment statyczny tych sił względem punktu B:

$$(2.77) \quad \mathfrak{M}'_B = 0,002577 n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^8}{g^2 E b}.$$

Daje to nową wartość amplitudy drgań podstawowych w punkcie B:

$$(2.78) \quad \eta_B = \frac{0,002577}{EJ} n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^8}{g^2 E b},$$

dzięki czemu równanie (2.68) przybiera postać:

$$(2.79) \quad \frac{0,002577}{EJ} n_2^2 \frac{4 \gamma^2 n_2^2 \delta l^8}{g^2 E b} = \frac{0,04667}{EJ} 2 b \gamma \frac{n_1^2 \delta l^4}{g}.$$

Stąd znajdujemy n_2 częstotliwość drgań podstawowych w drugim przybliżeniu:

$$(2.80) \quad n_2 = \frac{5,2109 b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3 \gamma}}.$$

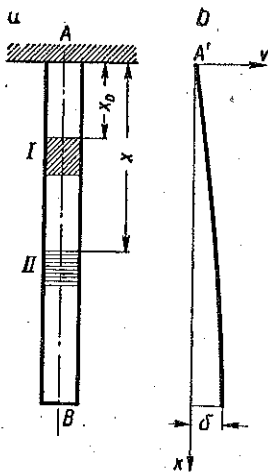
Częstotliwość drgań podstawowych w trzecim przybliżeniu n_3 otrzymać możemy według amplitud wyznaczonych na podstawie częstotliwości w drugim przybliżeniu; wynosi ona

$$(2.81) \quad n_3 = \frac{5,374 b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3 \gamma}},$$

obliczenie zaś ściśle wykonane przy użyciu funkcji Bessela daje w tym wypadku

$$(2.82) \quad n = \frac{5,315 b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3 \gamma}}. \quad (13.)$$

W przypadku podłużnych podstawowych drgań własnych prętów prostych rolę poprzednio przyjmowanych a priori krzywych odkształconych przy zginaniu odgrywają krzywe wyrażające zależność przesunięć sprężystych v poszczególnych przekrojów pręta od ich położenia początkowych. Omówimy to w przypadku przedstawionym na rys. 35.



Rys. 35

Oznaczamy przez δ pionowe przesunięcie przekroju B i przyjmujemy, że przesunięcia v poszczególnych przekrojów pręta wzdłuż jego długości będą się zmieniały według równania (rys. 35b)

$$(2.83) \quad v = \delta \sin \frac{\pi x}{2l}.$$

Na element I pręta (na rysunku zaciemniony ukośnie) działa siła rozciągająca S , na którą składają się siły bezwładności elementów II (na rysunku zaciemnienie poziome) zawartych w granicach od $x = x_0$ do $x = l$.

Masa jednego elementu II wynosi $(A/g) dx$, a odpowiednia największa wartość siły bezwładności $A \gamma dx n^2 v$. W związku z tym

$$(2.84) \quad S = \int_{x_0}^l \frac{A \gamma}{g} n^2 \delta \sin \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{A \gamma}{g} n^2 \delta \frac{2l}{\pi} \cos \frac{\pi x_0}{2l}.$$

Wydłużenie elementu I pod działaniem siły S równa się

$$(2.85) \quad \Delta dx_0 = \frac{S dx_0}{EA}.$$

W tych warunkach całkowite największe wydłużenie pręta AB wynosi

$$(2.86) \quad v_B = \int_0^l \Delta dx_0 = \int_0^l \frac{A \gamma}{g} n^2 \delta \frac{2l}{\pi} \frac{1}{EA} \cos \frac{\pi x_0}{2l} dx = \frac{\gamma}{g} n^2 \delta \left(\frac{2l}{\pi} \right)^2 \frac{1}{E}.$$

Przyrównując to wydłużenie do przyjętego z góry największego przesunięcia δ znajdujemy

$$(2.87) \quad \frac{\gamma}{g} n^2 \delta \left(\frac{2l}{\pi} \right)^2 \frac{1}{E} = \delta,$$

skąd

$$(2.88) \quad n = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$$

Aby znaleźć wartość częstotliwości n w drugim przybliżeniu, należy granice całkowania we wzorze (2.86) «od 0 do l » zastąpić przez granice «od 0 do x », dzięki czemu wzór ten da wartości v przesunąć poszczególnych przekrojów poprzecznych wyrażone przez częstotliwość n w pierwszym przybliżeniu. W ten sposób zamiast krzywej rys. 35b będziemy mogli zbudować nową krzywą. Postępując z nią w ten sam sposób jak poprzednio dojdziemy do nowej wartości n . W danym wypadku szczególnym częstotliwości n w pierwszym i w drugim przybliżeniu są sobie równe.

Obliczenia częstotliwości drgań własnych sposobem arytmetyzacji tych obliczeń w przypadkach wymagających dłuższych rachunków omówione są w zbiorze zadań autora.

3. Interpretacja dynamiczna metody Ritz'a i Timoszenki

Analiza zjawisk dynamicznych w pracy konstrukcji inżynierskich może być wyzyskana do wyjaśnienia i pogłębienia niektórych teorii statycznych, w szczególności przybliżonej metody Ritz'a i Timoszenki wyznaczenia odkształceń układów sprężystych i sił krytycznych.

W zastosowaniu do wyznaczenia odkształceń ogłoszony przez W. Ritz'a w 1909 roku pomysł matematyczny polega na szukaniu takiej funkcji $w = F(x)$ wyrażającej odkształcenie, aby całka

$$(3.1) \quad U = \int_a^b f(x, w, w', \dots) dx$$

w granicach od a do b czyniła zadość warunkowi ekstremum.

Aby znaleźć funkcję $w = F(x)$, należy przede wszystkim przedstawić ją w postaci szeregu

$$(3.2) \quad w = \psi(x) + A_1 \psi_1(x) + A_2 \psi_2(x) \dots$$

o skończonej liczbie wyrazów, w którym symbole ψ oznaczają pewne znane funkcje x odpowiadające tym samym warunkom brzegowym co funkcja w , a A_1, A_2, A_3, \dots pewne nieznanne i od x niezależne współczynniki (parametry).

Wstawiamy następnie we wzór (3.1) zamiast w i jej pochodnych szereg (3.2) lub szereg odpowiednio zróżniczkowany i po wykonaniu całkowania

otrzymanej w ten sposób funkcji $f(x)$ przedstawiamy całkę U jako funkcję współczynników A_1, A_2, A_3, \dots :

$$(3.3) \quad U = \int_a^b f(x) dx = F(A_1, A_2, A_3, \dots).$$

Współczynniki A_1, A_2, A_3, \dots konieczne do należytego określenia odkształceń za pomocą szeregu (3.2) powinny być wyznaczone z równań

$$(3.4) \quad \frac{\partial U}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial A_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial A_3} = 0,$$

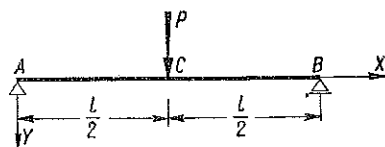
wyrażających warunek ekstremum funkcji $F(A_1, A_2, A_3, \dots)$, a tym samym i ekstremum całki U .

S. Timoszenko w 1910 roku wprowadził jako szereg (3.2) szereg Fouriera, dzięki czemu omawiana tu metoda znalazła szerokie zastosowanie przy obliczeniu odkształceń belek, płyt, zbiorników itd.; w szczególności stosuje on często łatwe w użyciu szeregi sinusowe typu

$$(3.5) \quad w = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots$$

W konkretnych obliczeniach statycznych rolę całki U odgrywa całkowita energia potencjalna układu.

Istotę zagadnienia, które ma być w tym rozdziale omówione, przedstawimy na najprostszym przypadku zastosowania metody Ritz'a i Timoszenki do belki w dwóch punktach swobodnie podpartej i obciążonej w środku siłą skupioną P (rys. 36). Przebieg obliczenia jest tu następujący.



Rys. 36

Przyjmujemy dla ugięcia belki $y = w$ wyrażenie

$$(3.6) \quad y = A \sin \frac{\pi x}{l},$$

przedstawiające pierwszy wyraz szeregu (3.5).

Energię sprężystą układu obliczamy ze wzoru

$$(3.7) \quad V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2 EJ},$$

gdzie M oznacza moment zginający w przekroju poprzecznym belki oddalonym o x od podpory A , a pracę sił zewnętrznych ze wzoru

$$(3.8) \quad T = P y_{sr}.$$

W tych warunkach

$$(3.9) \quad f(x, w, w', \dots) dx = dV - dT = d(V - T) = \\ = d \left(\int_0^l \frac{M^2 dx}{2 EJ} - P y_{sr} \right)$$

Wstawiamy we wzór (3.7) wyrażenie

$$(3.10) \quad M = EJ y'',$$

gdzie z kolei y'' obliczamy na podstawie równania (3.6). Również na podstawie równania (3.6) znajdujemy y_{sr} . W ten sposób dochodzimy do następujących wyrażen na V i T oraz na $U = V - T$:

$$(3.11) \quad V = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} A^2,$$

$$(3.12) \quad T = PA,$$

$$(3.13) \quad U = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} A^2 - PA.$$

Wielkość U posiada w danym wypadku ten sam sens co we wzorach (3.1) i (3.3), gdyż

$$(3.14) \quad U = \int_0^l f(x) dx = \int_0^l d(V - T).$$

Aby znaleźć współczynnik A we wzorze (3.6), ustawiamy równanie

$$(3.15) \quad \frac{\partial U}{\partial A} = 0,$$

skąd znajdujemy, że

$$(3.16) \quad A = \frac{Pl^3}{48,7 EJ}.$$

Przebieg przytoczonego obliczenia narzuca pytanie, dlaczego korzystaliśmy wyżej ze wzoru (3.7) na energię sprężystą, ustawionego w założeniu, że siła P wzrasta od 0 do swej wartości ostatecznej w sposób ciągły i nieskończenie powolny, podczas gdy zastosowany jednocześnie wzór (3.8) na pracę sił zewnętrznych przewiduje nagle zaczepienie siły P , tzn. zaczepienie siły o jej wartości ostatecznej. Do wyjaśnienia tej sprawy zmierzając będziemy dwiema drogami, podając, z jednej strony, formalne uzasadnienie równania

$$(3.17) \quad d(V - T) = 0,$$

którego bezpośrednią konsekwencją jest równanie (3.15), oraz badając, z drugiej strony, przebieg zginania belki w przypadku szczególnym dopiero co omówionym (rys. 36).

Uzasadnienie wzoru (3.17) przeprowadzamy dla zwięzłości na sprężystym układzie kratowym i rozpowszechniamy je na wszystkie układy sprężyste.

O ile kratownica znajduje się w położeniu równowagi, musi być spełnione równanie

$$(3.18) \quad \sum_1^k P v - \sum_1^r S \Delta l = 0,$$

gdzie k oznacza liczbę węzłów w kratownicy, r liczbę prętów, P siły zaczepione do poszczególnych węzłów, S siły w poszczególnych prętach, v przesunięcia poszczególnych węzłów i Δl sprężyste wydłużenia lub skróty (zmiany długości) poszczególnych prętów. Równanie (3.18) wyraża w przypadku kraty zasadę prac wirtualnych.

Jeżeli siły P wzrastają od zera do swych wartości ostatecznych w sposób ciągły i nieskończenie powolny, otrzymują one w każdej chwili dokonywanego się odkształcenia takie wartości, że są w stanie zrównoważyć powstające w układzie siły wewnętrzne, lecz nie mogą spowodować drgań układu. W ten sposób praca sił zewnętrznych zamienia się całkowicie w energię sprężystą układu, czyli że ma tu miejsce zależność

$$(3.19) \quad V = T_e,$$

gdzie T_e oznacza pracę sił zewnętrznych w założeniu, że siły te wzrastają w sposób ciągły i nieskończenie powolny od zera do swej wartości ostatecznej.

Jeżeli natomiast siły P posiadają wartości stałe i skończone, wówczas przewaga pracy sił zewnętrznych nad energią sprężystą przetworzy się w energię kinetyczną i układ dozna drgań, przy czym poszczególne jego punkty będą ulegały wahaniom względem pewnych położeń równowagi, które się ostatecznie ustalą jako odpowiadające danemu obciążeniu.

Ilość energii sprężystej nagromadzonej w danym układzie po ustaleniu się stanu równowagi nie jest zależna od dróg, którymi układ zmierza do tego stanu. Istotnie, wyrażenia na energię sprężystą jednostkową, tzn. nagromadzoną w sześcianie o wymiarach $1 \times 1 \times 1$ mają postać

$$(3.20) \quad V_1 = \frac{1}{2} \sigma^2 E, \quad V_1 = \frac{1}{2} \varepsilon^2 E,$$

gdzie σ oznacza naprężenie normalne występujące na płaszczyznach ograniczających sześcian, a ε wydłużenie jednostkowe jego krawędzi; energia

sprężysta nagromadzona w całym układzie sprężystym wyraża się wobec tego wzorem

$$(3.21) \quad V = \iiint V, dx dy dz,$$

gdzie całkowanie dotyczy objętości rozpatrywanego ciała.

Ze wzorów (3.20) i (3.21) wynika, że energia sprężysta układu wzrasta w sposób ciągły, o ile w ten sam sposób wzrastają wydłużenia jednostkowe ϵ , a więc i odkształcenia. Ponieważ z doświadczenia wiemy, że ciało sprężyste odkształca się w sposób ciągły niezależnie od tego, czy siły zewnętrzne zostały zaczepione jako wzrastające w sposób ciągły i nieskończenie powolny, czy też nagle, o swej wartości ostatecznej, możemy więc twierdzić, że nie zależy od tego również i sposób, w jaki wzrasta energia sprężysta układu. A więc ilość energii sprężystej nagromadzonej w danej chwili w odkształconym elemencie konstrukcyjnym zależy wyłącznie od stanu jego wygięcia w tym czasie.

Ponieważ przy zaczepieniu do kratownicy sił P o wartościach stałych i przy związanych z tym drganiach układu poszczególne pręty będą doznawały okresowych zmian długości w sposób ciągły, więc i siły w nich występujące będą, w myśl prawa Hooke'a, również zmieniały się w sposób ciągły.

Po uspokojeniu się drgań układu w stanie równowagi ustala się takie samo odkształcenie układu, jakie miałyby miejsce, gdyby siły P zostały zaczepione jako wzrastające od zera do swej ostatecznej wartości w sposób ciągły i nieskończenie powolny. Również i energia sprężysta układu jest w obydwóch wypadkach ta sama, jednak w poszczególnych stadiach dokonywanego się odkształcenia zależność między energią sprężystą układu a pracą sił zewnętrznych nie odpowiada równaniu (3.19).

Wobec tego, że w równaniu (3.18) w postaci ogólnej wielkości v zależą tylko od wielkości Δl i odwrotnie, możemy wstawić w nie zamiast v i Δl nieskończenie małe przesunięcia dv węzłów kratownicy z położenia równowagi i odpowiadające im nieskończenie małe przyrosty zmian długości $d(\Delta l)$ prętów. W ten sposób znajdujemy, że

$$(3.22) \quad \sum_1^h P dv - \sum_1^r S d(\Delta l) = 0.$$

Nieskończenie małym przyrostom $d(\Delta l)$ zmian długości poszczególnych prętów kratownicy odpowiadają nieskończenie małe przyrosty sił w tych prętach, tzn. że

$$(3.23) \quad d(\Delta l) = \frac{dSl}{EA},$$

wobec czego prawy składnik lewej strony równania (3.22) przybiera postać

$$(3.24) \quad \sum_1^r S d(\Delta l) = \sum_1^r S \frac{dSl}{EA}$$

lub postać

$$(3.25) \quad \sum_1^r S d(\Delta l) = d \sum_1^r \frac{S^2 l}{2EA}$$

skąd

$$(3.26) \quad \sum_1^r S d(\Delta l) = dV,$$

gdyż suma po prawej stronie wyrażenia (3.25) przedstawia energię sprężystą układu kratowego.

Podczas odchylenia się układu kratowego od położenia równowagi siły P jako niezmiennie pozwalają na następujące przekształcenia lewego dodajnika w równaniu (3.22):

$$(3.27) \quad \sum_1^k P dv = d \sum_1^k P v;$$

skąd

$$(3.28) \quad \sum_1^k P dv = dT,$$

gdzie przez T rozumiemy pracę sił zewnętrznych jako sumę iloczynów przesunięć poszczególnych węzłów kratownicy przez odpowiednie siły.

Równanie (3.22) przybiera w tych warunkach postać

$$(3.29) \quad dV - dT = 0;$$

skąd

$$(3.30) \quad d(V - T) = 0$$

lub

$$(3.31) \quad dU = 0,$$

gdzie $U = V - T$ jest funkcją parametrów A .

Równanie (3.31) wyprowadzone dla układów kratowych może być rozszerzone i na układy pełne. Wyraża ono, że o ile układ sprężysty pod dzia-

łaniem sił zaczepionych jako siły stałe, a nie jako wzrastające od zera do swej ostatecznej wartości w sposób ciągły i nieskończenie powolny — znajdzie się, po zaniku drgań, w stanie równowagi — to funkcja U przybiera wartość ekstremalną.

Całkowanie równania (3.31) daje

$$(3.32) \quad V - T = C.$$

Przy $C > 0$ mamy $V > T$ i równowaga układu sprężystego jest stateczna, a przy $C < 0$ mamy $V < T$ i równowaga jest niestateczna. Przy $V = T$ następuje przejście ze stanu równowagi statecznej do stanu równowagi niestatecznej i równanie

$$(3.33) \quad V = T$$

służy wówczas do wyznaczenia sił krytycznych.

Równanie (3.33) różni się od równania (3.19), ponieważ tu mamy na widoku siły zaczepione w sposób nagły, a tam w sposób ciągły i nieskończenie powolny.

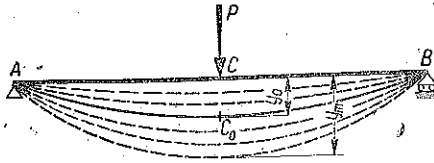
Metodę Ritz'a i Timoszenki stosujemy do wyznaczenia odkształceń pewnego elementu konstrukcyjnego lub do badania jego wyboczenia. Interesują tu nas wówczas przypadki, gdy $V > T$ i gdy $V = T$.

Wyznaczenie odkształcenia może mieć też miejsce i na podstawie równania (3.19), czyli tzw. równania Clapeyrona, ale w zasadzie tylko wówczas, gdy poszukiwane uogólnione przesunięcie występuje w punkcie zaczepienia uogólnionej siły i gdy chodzi o wyznaczenie odkształcenia w tym właśnie punkcie. Przy większej liczbie sił uogólnionych możemy wyznaczyć odkształcenie układu na podstawie twierdzenia Clapeyrona tylko wówczas, kiedy się zadowolimy w równaniach typu (3.5) jednym współczynnikiem A i obliczymy go z równania (3.19). Przy większej liczbie współczynników A nie daje się to już wykonać i musimy wówczas skorzystać z zależności między energią sprężystą układu a pracą sił zewnętrznych w ujęciu dynamicznym znajdującym wyraz w równaniu (3.31).

Przechodząc do zbadania zginania belki w dwóch punktach swobodnie podpartej i obciążonej w środku jedną siłą skupioną zaczepioną w sposób nagły, tzn. od razu przy jej wartości ostatecznej, interesujemy się przede wszystkim jakością stroną zjawiska i nie badamy charakteru drgań, które występują i z czasem zanikają.

Siła P zaczepiona do belki w sposób nagły wykonywa pracę, która zostaje częściowo zużyta na odkształcenie belki, częściowo zaś na nadanie poszczególnym jej punktom pewnych prędkości, czyli przechodząc w energię kinetyczną znajdującą wyraz w drganiach belki około pewnego położenia równowagi. W ten sposób oś odkształcona belki będzie zajmowała kolejno nieskończenie bliskie do siebie położenia (rys. 37). Położenie rów-

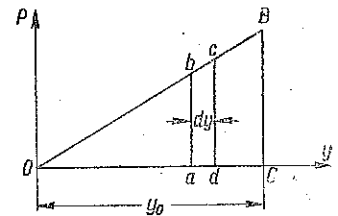
nowagi będzie tym położeniem, które zajęłaby oś odkształcona belki, gdyby siła P wzrastała w sposób ciągły i nieskończenie powolny od zera do swej wartości ostatecznej; ugięcie belki pod ciężarem oznaczamy w tym wypadku przez y_0 , a największe jej ugięcie przez y_m . Wielkość y_0 , którą uważamy za ostateczne ugięcie belki, nie zależy więc od sposobu, w jaki została zaczepiona siła P . Potwierdza to zresztą doświadczenie.



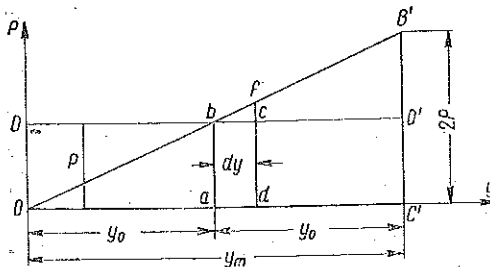
Rys. 37

Zaczeplenie do belki siły P w sposób nagły należy uważać za równoznaczne z zetknięciem się z belką ciężaru P posiadającego prędkość 0, czyli ze szczególnym przypadkiem uderzenia. Z tego powodu największe ugięcie belki pod działaniem nagle zaczepionej siły wynosi $y_m = 2y_0$. Daje to podstawę do porównania ze sobą zależności, jakie zachodzą między energią sprężystą nagromadzoną w belce, a pracą sił zewnętrznych — z jednej strony, w przypadku zaczepienia sił w sposób ciągły i nieskończenie powolny i, z drugiej strony, w sposób nagły. Robimy to porównanie na wykresach rys. 38 i 39, na których na osi pionowej odkładamy zmienne wartości siły P , a na osi poziomej odpowiednio ugięcia y belki w środku.

Przy ciągłym i nieskończenie powolnym wzroście sił P od zera do ich wartości ostatecznej zależność między P a y wyraża się za pomocą linii prostej OB . Na rys. 38 nieskończenie małe pole $abcd$ przedstawia przyrost pracy sił zewnętrznych dT , a tym samym i równy mu przyrost energii sprężystej dV . Podobnie i pole trójkąta OBC wyraża tu zgodnie z równaniem (3.19) jednocześnie pracę sił



Rys. 38



Rys. 39

zewnętrznych i energią sprężystą nagromadzoną w belce.

Przy nagłym zaczepieniu siły P , jak wykazano wyżej, energia sprężysta nagromadza się w ten sam sposób, jak przy ciągłym i nieskończenie powolnym wzroście tej siły, a więc w sposób ciągły. Zależność między P a y będzie się tu wyrażała za pomocą tej samej prostej OB' (rys. 39) zarówno przed przekroczeniem położenia równowagi, jak i po tym przekroczeniu, a więc zarówno przy $y < y_0$, jak i przy $y > y_0$. Przy $y = 2y_0$ energia nagromadzona w belce będzie równa

tej energii, która by się tu nagromadziła przy sile P wzrastającej w sposób ciągły i nieskończenie powolny od zera do $2P$, a więc energii sprężystej równej polu $OB'C'$, a przy $y = y_0$ będzie się ona wyrażała polem Oab równym polu OBC na rys. 38.

Praca siły zewnętrznej P , niezmiennej podczas odkształcenia belki, wyraża się za pomocą prostokąta $ODD'C'$. Różnica pól $OB'C'$ i $ODD'C'$, czyli pola trójkątów Odb i $bB'D'$ wyrażają różnicę $V - T$, a więc ilość energii potencjalnej, która w czasie odkształcenia belki przechodzi w energię kinetyczną.

Przyrost dV energii sprężystej belki przy nieskończenie małym przyroście dy ugięcia w stosunku do ugięcia odpowiadającego położeniu równowagi równa się na rys. 39 polu trapezu $adfb$, a odpowiedni przyrost dT pracy siły zewnętrznej P polu prostokąta $adcb$. Różnica tych pól, czyli różnica $dV - dT$ wyraża się za pomocą trójkąta bfc ; równa się ona iloczynowi $\frac{1}{2} dy dP$, który przedstawia wielkość nieskończenie małą drugiego rzędu, i musi być przyjmowana za zero. Wynika stąd, że przy nieskończenie małym odchyleniu belki od położenia równowagi $dV = dT$, czyli

$$d(V - T) = 0.$$

Przy wszystkich innych wartościach ugięcia, poza ugięciem odpowiadającym położeniu równowagi, przyrosty dV i dT nie będą sobie równe, wobec czego otrzymane równanie, jak to zostało już udowodnione w inny sposób, może być podstawą do ustalenia ugięcia odpowiadającego stanowi równowagi, czyli ugięcia mającego miejsce przy ciągłym i nieskończenie powolnym wzroście siły P od zera do jej wartości ostatecznej, o które właśnie chodzi w zwykłych obliczeniach wytrzymałościowych.

Interpretacja dynamiczna równania (3.17), na którym opiera się metoda Ritz'a i Timoszenki wyznaczenia odkształceń i sił krytycznych, polega na podstawie rozważań tego rozdziału na następującym rozumowaniu.

Siły P zaczepione do danej konstrukcji uważamy za zaczepione w sposób nagły. Siły te wprowadzają belkę w ruch wahadłowy zanikający.

Energia sprężysta V będzie się tu nagromadzała w ten sposób, jak gdyby każda z sił P wzrastała w sposób ciągły i nieskończenie powolny od zera do tej wartości, której odpowiada największe możliwe odkształcenie układu.

Praca sił zewnętrznych T będzie się równała w każdym momencie dokonywanego się odkształcenia sumie iloczynów poszczególnych sił P przez przesunięcia ich punktów zaczepienia.

Różnica $U = V - T$, całkowita energia potencjalna układu, zmienia się jako funkcja parametrów A dla poszczególnych stadiów odkształcenia układu i osiąga maksimum po zaniku drgań w chwili nastania równowagi stałej.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ В СТАТИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ СООРУЖЕНИИ

В главе I рассматривается вопрос, где следует, при расчете береговых устоев и мостовых быков, принимать точку приложения тормозных усилий и тяговой силы паровоза. Доказывается, что, в случае заторможения на опоре двух осей подвижного состава, точку приложения сил торможения следует принимать на высоте центра тяжести подвижного состава; в случае же торможения только одной оси — на уровне головки рельса. Тяговую силу следует прикладывать вообще на уровне головки рельса. Однако, бывают случаи, когда следует их принимать на высоте соединительной муфты; это может случиться особенно, когда за мостом линия железной дороги находится на наклоне. Приводится анализ мостовых конструкций с точки зрения определения для них, в статических расчетах, места приложения тормозных усилий.

Глава II содержит приближенный расчет собственных колебаний. Для этого применяется метод, основанный на последовательных приближениях и на способе вторичных моментов Мор а. Рассматриваются колебания систем обладающих 1, 2, 3 и 4 степенями свободы, а также колебания упругих тел, продольные и поперечные. Вычисляются частоты колебаний первого и второго порядков и первые и вторые приближения этих частот.

Глава III посвящена динамической интерпретации уравнения $d(V - T) = 0$, являющегося основой метода приближенного определения деформаций; здесь V обозначает упругую энергию элемента, а T — работу внешних сил, представляемую в виде суммы произведений сил P на соответственные перемещения их точек приложения. Динамическая интерпретация уравнения $d(V - T) = 0$ состоит в том, что силы P считаются приложенными внезапно, что вызывает затухающее колебательное движение конструкции. Ввиду этого, исследуемое уравнение выражает условие экстремума функции $U = V - T$, соответствующего состоянию равновесия конструкции, т. е. ее статической деформации.

Summary

DYNAMICAL PROBLEMS IN STRUCTURAL ANALYSIS

In Sec. I the problem of the attachment points of braking force and tractive force of a locomotive in computation of bridge abutments and piers is considered. It is shown that if two axles are braked over the considered support, the centre of gravity of rolling stock should be assumed as the attachment point of the force. In the case when only one axle is

braked, the attachment should be taken at the level of the rail head. In general, the tractive force should be taken as acting at the level of the rail head. There are cases, however, in which it should be assumed to act at the level of the couplers. This is, for instance, the case when the track beyond the bridge runs down an incline. An analysis of bridge structures is given, from which attachment points of braking forces can be established in statical computations.

Sec. II contains approximate calculation of free vibration. A method based on successive approximations and on the method of secondary moments is used. Vibrations of 1, 2, 3 and 4 degrees of freedom are discussed as well as transversal and longitudinal vibrations of elastic bodies. The frequencies of vibrations of first and second order as well as first and second approximations of those frequencies are calculated.

Sec. III is devoted to the dynamic interpretation of the equation $d(V - T) = 0$, which constitutes the basis of the method of approximate determination of deformations. V denotes here the elastic energy of the element and T the work of external forces, assumed in the form of a sum of products of forces P and the corresponding displacements of their attachment point. The dynamic interpretation of the equation $d(V - T) = 0$ consists in that the forces P are considered to be attached in a sudden manner which provokes damped vibration of the structure. It follows therefore that this equation expresses the condition for a minimum of the function $U = V - T$, corresponding to the state of equilibrium of the structure — in other words — to its static deformation.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 marca 1955 r.
