

WŁODZIMIERZ PROSNAK

STRUKTURA PŁASKIEJ FALI UDERZENIOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

XXXII

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	361
2. Struktura fali uderzeniowej w świetle równań mechaniki płynu ciągłego	364
3. Grubość fali uderzeniowej w świetle równań mechaniki ośrodków ciągłych	375
4. Struktura fali uderzeniowej w świetle teorii kinetycznej gazów	378
5. Pomiary grubości fali uderzeniowej	381

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie aktualnego stanu wiadomości o płaskiej, ustalonej fali uderzeniowej, występującej w gazie lepkiem i przewodzącym ciepło *).

Szczególną uwagę zwrócono na wyniki uzyskane na gruncie mechaniki ośrodków ciągłych, ponieważ nadają się one do przedyskutowania ze względu na swą przejrzystość, zaś jakościowo są najzupełniej prawidłowe — zwłaszcza w przypadku fal słabych. Wyniki otrzymane w oparciu o teorię kinetyczną gazów oraz prace doświadczalne omówiono bardziej pobieżnie, traktując je — w istocie — jako podstawę do krytyki wyników, jakie daje mechanika ośrodków ciągłych.

1. Wstęp

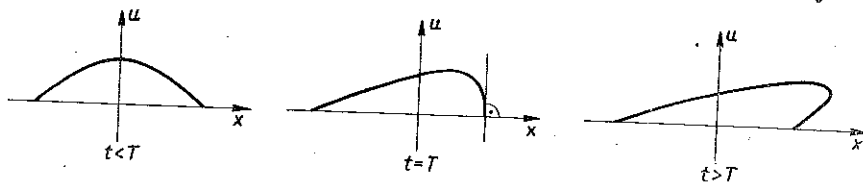
Zjawisko fali uderzeniowej polega na pojawieniu się w obszarze wypełnionym przepływającym gazem bardzo cienkich warstw, w których ulegają gwałtownej zmianie parametry hydrodynamiczne gazu, takie jak prędkość, ciśnienie i temperatura. Grubość tych warstw — jak zobaczymy — jest rzędu swobodnej drogi cząsteczki gazu i z tego względu wspomniana warstwa bywa często traktowana jako *powierzchnia nieciągłości parametrów*.

Na zjawisko pojawiania się nieciągłości w gazie ściśliwym, nielepkiem i nieprzewodzącym ciepła wskazały przede wszystkim badania teoretyczne, przeprowadzone mniej więcej 100 lat temu przez R i e m a n n a, [1]. Badając zjawisko rozchodzenia się w gazie nielepkiem fal płaskich o skończonej amplitudzie R i e m a n n dowiódł, że rozwiązanie określające ruch fal zgęszczeniowych jest jednoznaczna funkcją drogi (x) tylko w skończonym przedziale czasu $0 < t < T$ (rys. 1).

Poczynając od chwili $t = T$ w gazie pojawia się nieciągłość, na co wskazuje nieskończenie wielki gradient parametrów ruchu gazu (np. gradient prędkości $\partial u / \partial x = \infty$ na rys. 1). Dla $t > T$ rozwiązanie staje się wielowartościowe tracąc tym samym sens fizyczny i świadcząc, że po czasie T przebieg zjawiska staje się *jakościowo odmienny*.

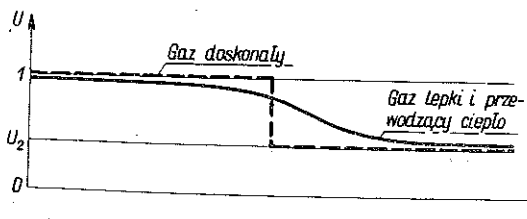
*) Praca przedstawiona na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Międzyzdrojach w sierpniu 1954 r.

Od 1870 roku ukazują się wiele prac teoretycznych, poświęconych badaniu wspomnianej nieciągłości, przy czym — w miarę rozwoju mechaniki płynów — uwzględniano w coraz to wyższym stopniu rzeczywiste właściwości gazu, uzyskując coraz bliższy rzeczywistości obraz zjawiska.



Rys. 1

Najprostszy model fali uderzeniowej, podany przez Hugoniot, przedstawia ją jako powierzchnię nieciągłości, na której zachodzi «skok» parametrów ruchu gazu, między innymi skok temperatury (rys. 2). Model ten obowiązuje tylko dla gazu doskonałego, tzn. nielepkiego i nieprzewodzącego ciepła; zasługuje on jednak na szczególną uwagę, ponieważ ze



Rys. 2

względem na swą prostotę jest bardzo wygodny w praktycznych obliczeniach, a prócz tego nie stoi bynajmniej w sprzeczności z wynikami prostszych doświadczeń, polegających np. na obserwowaniu fali metodą cieniów, metodą Töpplera lub inną.

Jednak już bardzo wcześnie, bo w 1870 r. Rankine, [2], zauważył, że w gazie przewodzącym ciepło nie może występować nieciągłość temperatury. Przypadek ten (gaz nielepkki, ale przewodzący ciepło) został szczegółowiej zbadany przez Prandtl, [4], który istotnie stwierdził ciągłość zmian parametrów określających ruch gazu w fali uderzeniowej, a ponadto oszacował grubość warstwy, w której zachodzi najbardziej gwałtowna zmiana parametrów (tzw. «grubość fali uderzeniowej»). Oszacowana na 0,0005 mm grubość fali uderzeniowej stanowiła teoretyczne potwierdzenie trafności nieciągłego modelu fali.

Po Prandtlu podał Rayleigh, [5], rozwiązanie w postaci skończonej dla gazu lepkiego, ale nieprzewodzącego ciepła, a ponadto dowiódł w sposób przybliżony istnienia rozwiązań ciągłych dla gazu lepkiego i przewodzącego ciepło (stałe współczynniki lepkości i przewodności). Prawie równocześnie z nim, bo również w r. 1910, opublikował Taylor, [6], rozwiązanie przybliżone uwzględniające zarówno lepkość, jak i przewodność cieplną gazu, ale obejmujące tylko zakres słabych fal uderzeniowych. Po nim — w kolejności chronologicznej — ogłosili swe

prace B e c k e r, [8], który podał rozwiązanie w formie skończonej dla stałych współczynników lepkości i przewodności cieplnej przy szczególnej wartości liczby P r a n d t l a $Pr = 3/4$; T h o m a s, [10], który pierwszy uwzględnił zmienność współczynników lepkości μ i przewodności λ z temperaturą ($\mu \sim \sqrt{T}$, $\lambda \sim \sqrt{T}$), nie podając jednak rozwiązania w formie skończonej, lecz tylko dyskutując jego istnienie, i wreszcie M o r d u c h o w i L i b b y, [11], którzy zbadali przypadek stałej liczby P r a n d t l a $Pr = 3/4$ i zmiennych współczynników lepkości i przewodności według prawa $\mu \sim T^n$, $\lambda \sim T^n$, gdzie $0 \leq n \leq 1$. Najnowsze prace (M i s e s a, [13], i G r a d a, [18]) dotyczą bardziej ogólnego przypadku, mianowicie dowolnej wartości liczby P r a n d t l a.

Wszystkie wymienione prace (nie wspominamy tu o mniej ważnych, których obszerny wykaz zamieszczony jest na końcu publikacji) opierają się na równaniach mechaniki ośrodka ciągłego i odnoszą się do fali uderzeniowej ustalonej i płaskiej. Wspólny ich wynik można zamknąć w dwu następujących stwierdzeniach: (1) funkcje opisujące falę uderzeniową w gazie lepkim i przewodzącym ciepło są ciągłe wraz ze swymi pierwszymi pochodnymi względem drogi; (2) grubość fali uderzeniowej, tzn. grubość warstwy, w której zachodzi głównie zmiana parametrów ruchu gazu, jest rzędu swobodnej drogi cząsteczki gazu.

Ten drugi wynik świadczący o tym, że nieciągły model fali uderzeniowej stanowi bardzo dobre przybliżenie rzeczywistości, nasunął jednak już Beckerowi zrozumiałą wątpliwość co do stosowalności równań mechaniki ośrodka ciągłego do opisu zjawiska fali uderzeniowej¹⁾.

Wątpliwość ta stała się — z kolei — impulsem do badań fali uderzeniowej metodami teorii kinetycznej, uwzględniającymi «ziarnistą», molekularną strukturę gazu. Stosunkowo nieliczne prace, [16], [17], [18], z wynikami takich badań ukazują się dopiero od r. 1950, przy czym — w zakresie fal słabych — potwierdzają one na ogół wyniki otrzymane przy założeniu ciągłości gazu.

Jedyną znaną dzisiaj podstawą sprawdzenia wyników wspomnianych wyżej prac teoretycznych drogą ich konfrontacji z doświadczeniem stanowią pomiary grubości fali uderzeniowej, przeprowadzone przez C o w a n a i H o r n i g a, [19] i [20]. Z tego względu — choć obciążone są one błędem około 25% i nic nie mówią o samej strukturze fali — zasługują na bliższą wzmiankę. Jak zobaczymy, wyniki pomiarów potwierdzają wyniki prac teoretycznych, przynajmniej w zakresie fal słabych.

¹⁾ Równania oparte na założeniu ciągłości gazu nie nadają się oczywiście do opisu zmian zachodzących na odległościach rzędu drogi swobodnej.

2. Struktura fali uderzeniowej w świetle równań mechaniki płynu ciągłego

Jako podstawę do rozważań niniejszego p. przyjmiemy znane równania mechaniki gazu ciągłego, lepkiego i przewodzącego ciepło, odniesione do przypadku ruchu ustalonego, jednoparametrowego, prostoliniowego, o równoległych liniach prądu, [12]. Dla uproszczenia założymy, że równanie stanu gazu doskonałego pozostaje w mocy. Ponadto wprowadzimy znany z termodynamiki związek między lepkością i temperaturą, albo — co na jedno wychodzi wobec $c_p = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$ — między lepkością i entalpią. Otrzymamy następujący układ równań:

równanie ciągłości

$$(2.1) \quad \frac{d}{dx}(\rho u) = 0,$$

równanie zachowania pędu (równanie N a v i e r a - S t o k e s a)

$$(2.2) \quad \rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{du}{dx} \right),$$

równanie zachowania energii

$$(2.3) \quad \frac{d}{dx} \left[\rho u \left(i + \frac{u^2}{2} \right) - \mu \frac{d}{dx} \left(\frac{i}{Pr} + \frac{4}{3} \frac{u^2}{2} \right) \right] = 0,$$

równanie stanu gazu doskonałego

$$(2.4) \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} i$$

i związek między lepkością i entalpią

$$(2.5) \quad \frac{\mu}{\mu_1} = \left(\frac{i}{i_1} \right)^n$$

W równaniach tych oznaczają:

- ρ gęstość gazu,
- u prędkość gazu,
- p ciśnienie gazu,
- μ lepkość dynamiczną gazu (zależną od temperatury),
- Pr liczbę P r a n d t l a (niezależną od temperatury),
- λ współczynnik przewodności cieplnej (zależny od temperatury),
- c_p ciepło właściwe gazu przy stałym ciśnieniu (niezależne od temperatury),
- κ wykładnik izentropy,
- i entalpię,
- n wykładnik określający zależność lepkości od entalpii (lub temperatury).

Znajdziemy obecnie rozwiązanie szczególne układu równań (2.1)-(2.5) odpowiadające następującym warunkom: (1) dla $x \rightarrow -\infty$ przepływ ma dążyć asymptotycznie do prądu jednostajnego określonego wartościami $u_1, p_1, \varrho_1, i_1, \mu_1$, (2) dla $x \rightarrow +\infty$ przepływ ma również dążyć asymptotycznie do prądu jednostajnego, określonego wartościami $u_2, p_2, \varrho_2, i_2, \mu_2$ różnymi od poprzednich, (3) rozwiązanie ma być ograniczone w obszarze $-\infty < x < +\infty$.

Żądane rozwiązanie znaleźć można drogą następującego postępowania. Równanie (2.1) posiada widoczną całkę

$$(2.6) \quad \varrho u = \text{const} = \varrho_1 u_1.$$

Podstawiamy (2.6) do (2.2) i całkujemy otrzymując

$$(2.7) \quad \varrho_1 u_1 u = -p + \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} + C_1.$$

Następnie wstawiamy (2.6) do (2.3), całkujemy (2.3) jednokrotnie i po przekształceniach dochodzimy do wyrażenia

$$(2.8) \quad \left(i + \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\lambda}{c_p \varrho_1 u_1} \frac{d}{dx} \left(i + \frac{4}{3} Pr \frac{u^2}{2} \right) = C_2.$$

Liczba Pr a n d t l a przybiera dla gazów, których stan jest odległy od punktu skroplenia, wartości od około 0,66 do około 0,9 i jest dla takich gazów prawie stałą funkcją temperatury. Dla przykładu podamy, iż dla powietrza o temperaturze 0°C wartość $Pr = 0,720$, zaś dla powietrza o temperaturze 1000°C — $Pr = 0,727$, [12].

Przyjmując $Pr = \text{const} = 3/4$, co jest w pełni usprawiedliwione w świetle powyższych danych, otrzymujemy równanie (2.8) w postaci umożliwiającej rozdzielenie zmiennych i znajdujemy jego całkę ogólną

$$(2.9) \quad i + \frac{u^2}{2} = C_2 + C_3 e^{c_p \varrho_1 u_1 \int \frac{dx}{\lambda}}.$$

Całka ta została podana po raz pierwszy przez M o r d u c h o w a i L i b b y ' e g o, [11]; poprzedni badacze ograniczali się do całki szczególnej bez członu ostatniego zawierającego C_3 .

W oparciu o sformułowane uprzednio warunki wyznaczmy obecnie stałe C_1, C_2, C_3 .

Ponieważ dla $x = -\infty$ musi być $u = u_1$, zaś $du/dx = 0$, więc z równania (2.7), odniesionego do $x = -\infty$, wypada

$$(2.10) \quad C_1 = p_1 + \varrho_1 u_1^2.$$

Do określenia stałej C_3 posłużymy się warunkiem ograniczoności rozwiązania. W równaniu (2.9) funkcja $\lambda(x)$ jest ograniczona i dodatnia, wobec czego całka w wykładniku

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\lambda} \rightarrow +\infty,$$

gdy $x \rightarrow +\infty$, a to pociąga za sobą zdążanie całej prawej strony równania (2.9) do nieskończoności, i — odpowiednio do tego — sprzeczny z założonym warunkiem nieograniczony wzrost funkcji i oraz u . Musi być²⁾ zatem

$$C_3 = 0.$$

Stałą C_2 określamy — podobnie jak C_1 — z warunków dla $x = -\infty$ otrzymując

$$(2.11) \quad C_2 = i_1 + \frac{u_1^2}{2}.$$

Rugujemy obecnie z (2.7) wszystkie funkcje oprócz u , wykorzystując przy tym zależność (2.4) i (2.11) i otrzymując jako wynik tych przekształceń równanie

$$(2.12) \quad \frac{4\mu_1}{3\rho_1 u_1} \left(1 + \frac{u_1^2}{2i_1} - \frac{u^2}{2i_1}\right)^n u \frac{du}{dx} = \frac{\kappa+1}{2\kappa} u^2 - \\ - \left(\frac{\kappa-1}{\kappa} i_1 + u_1^2\right) \frac{u}{u_1} + \frac{\kappa+1}{\kappa} \left(i_1 + \frac{u_1^2}{2}\right).$$

Równanie (2.12) doprowadzamy do postaci bezwymiarowej przyjmując jako skalę prędkości wielkość u_1 , a jako skalę długości wielkość

$$(2.13) \quad l_1 = 1,255 \sqrt{\kappa} \frac{\mu_1}{\rho_1 a_1},$$

przedstawiającą średnią drogę swobodną cząsteczki gazu, [12], w warunkach odpowiadających $x = -\infty$.

Wprowadzając nowe funkcje i wielkości bezwymiarowe $U = u/u_1$,

$$X = \frac{x}{l_1}, \quad Ma_1 = \frac{u_1}{a_1}, \quad (\kappa-1)i_1 = a_1^2, \quad \text{gdzie } a_1 \text{ jest prędkością dźwięku}$$

²⁾ Przypadki $C_3 > 0$ i $C_3 < 0$ są szczegółowo przedyskutowane w [11]; odpowiadające im rozwiązania mają sens fizyczny tylko w ograniczonym obszarze zmienności x .

w warunkach odpowiadających $x = -\infty$, otrzymamy ostatecznie

$$(2.14) \quad \frac{4}{3 \cdot 1,255 \sqrt{\kappa}} \frac{1}{Ma_1^2} \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 (1 - U^2) \right]^n U \frac{dU}{dX} = \\ = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} U^2 - \left(1 + \frac{1}{\kappa Ma_1^2} \right) U + \left(\frac{\kappa - 1}{2\kappa} + \frac{1}{\kappa Ma_1^2} \right).$$

Przedyskutujmy obecnie równanie (2.14).

Zauważymy przede wszystkim, że wyróżnik trójmianu kwadratowego stanowiącego prawą stronę równania

$$(2.15) \quad \Delta = \frac{1}{\kappa^2} \left(1 - \frac{1}{Ma_1^2} \right)^2 \geq 0.$$

Wobec tego trójmian można — niezależnie od wartości κ oraz Ma_1 — rozłożyć na czynniki rzeczywiste i przedstawić go w postaci

$$(2.16) \quad \frac{\kappa + 1}{2\kappa} (U - U_1)(U - U_2),$$

przy czym

$$(2.16.1) \quad U_1 = 1,$$

zaś

$$(2.16.2) \quad U_2 = \frac{Ma_1^2(\kappa - 1) + 2}{Ma_1^2(\kappa + 1)}.$$

Rozpatrywany trójmian kwadratowy jest ujemny przy wartościach U zawartych między pierwiastkami U_1 i U_2 , natomiast współczynnik przy dU/dX na lewej stronie równania (2.14) jest dodatni, jeśli tylko $U^2 < 1 + [\kappa/(\kappa - 1)Ma_1^2]$, co jest oczywiście spełnione zawsze przy $U \leq 1$, a także w dostatecznie małym zakresie $U > 1$. Wobec tego pochodna $dU/dX < 0$ między pierwiastkami i jest w tym obszarze ograniczona. Zauważymy ponadto, że $dU/dX \rightarrow 0$ ($dX/dU \rightarrow -\infty$) dla $U \rightarrow U_1, U \rightarrow U_2$. Z tych właściwości pochodnej wynika, że U_1 odpowiada punktowi $X = -\infty$, U_2 — punktowi $X = +\infty$, funkcja $U(X)$ jest stale malejąca i wobec tego

$$(2.17) \quad U_2 < U_1 = 1.$$

Równanie (2.14) daje więc funkcję $U(X)$ odpowiadającą postawionym warunkom (1), (2) i (3). Jej przebieg podany jest na rys. 2 linią ciągłą.

Podstawiając do nierówności (2.17) obliczoną uprzednio wartość U_2 i rozwiązując otrzymaną nierówność względem Ma_1 , stwierdzimy, iż musi być

$$(2.18) \quad Ma_1 > 1.$$

Znaczy to, że przepływ o właściwościach określonych przyjętymi warunkami, asymptotycznie zdążający do jednostajnego przy $x \rightarrow -\infty$ oraz dla $x \rightarrow +\infty$ i przy tym różny od banalnego przepływu, określonego przez $u(x) = \text{const}$, $p(x) = \text{const}$, $\rho(x) = \text{const} \dots$, istnieje tylko wtedy, gdy jest początkowo (tzn. dla $x = -\infty$) naddźwiękowy.

Znajdziemy obecnie zależność między liczbami Macha Ma_1 i Ma_2 określającymi przepływ — odpowiednio — przy $x = -\infty$ oraz $x = +\infty$. Korzystając z równania (2.9) spełnionego dla $x = +\infty$ i uwzględniając $C_3 = 0$ oraz (2.11) otrzymujemy po podzieleniu przez u_1^2

$$\frac{i_1}{u_1^2} + \frac{1}{2} = \frac{i_2}{u_2^2} \frac{u_2^2}{u_1^2} + \frac{1}{2} \frac{u_2^2}{u_1^2},$$

a następnie podstawiając $(\kappa - 1) i_1 = a_1^2$, $(\kappa - 1) i_2 = a_2^2$, $Ma_1 = u_1/a_1$, $Ma_2 = u_2/a_2$

$$\frac{1}{(\kappa - 1) Ma_1^2} + \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{(\kappa - 1) Ma_2^2} + \frac{1}{2} \right] U_2^2.$$

Rozwiązując względem Ma_2^2 po uprzednim wstawieniu wartości U_2 z (2.16.2) otrzymujemy ostatecznie

$$(2.19) \quad Ma_2^2 = \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2}{\kappa Ma_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2}}.$$

Łatwo sprawdzić, że dla $Ma_1 > 1$ zgodnie z warunkiem (2.18) wypadnie $Ma_2 < 1$, co świadczy o tym, że rozpatrywany przepływ ma charakter fali uderzeniowej zgęszczeniowej.

Należy podkreślić, że wniosek ten wysnuliśmy bez stosowania drugiego prawa termodynamiki, co było natomiast rzeczą niezbędną w przypadku badania fal uderzeniowych w gazie nielepkiem i nieprzewodzącym ciepła. Z samych bowiem tylko równań hydrodynamicznych gazu doskonałego wynikała — wskutek ich odwracalności — możliwość istnienia zarówno zgęszczeniowych, jak i rozrzedzeniowych fal uderzeniowych, co wymagało wzięcia pod uwagę dodatkowych kryteriów termodynamicznych.

Zależność (2.19) jest znana z teorii fali uderzeniowej w gazie nielep-
kim i nieściśliwym; podobnie moglibyśmy wykazać, że między wszystkimi
parametrami ruchu gazu dla $x = -\infty$ (wskaźnik 1) oraz dla $x = +\infty$
(wskaźnik 2) zachodzą w przypadku gazu lepkiego i przewodzącego cie-
pło związki identyczne ze znanymi z teorii fali uderzeniowej w gazie
nielepkim i nieściśliwym, w szczególności że związki R a n k i n e' a -
H u g o n i o t a pozostają ważne. Widać więc, że uwzględnienie lepkości
i przewodności cieplnej powoduje ciągłość przejścia parametrów od
jednej wartości granicznej (dla $x = -\infty$) do drugiej (dla $x = +\infty$), nie
zmieniając jednak samych wartości granicznych (rys. 2, linia przerywana).

Na podstawie równania (2.19) możemy ocenić wpływ, jaki wywiera
wartość n na przebieg $U(X)$.

Wykładnik n jest dodatni i waha się w granicach 0,64 - 0,95 dla gazów
rzeczywistych, [12], jest przy tym prawie niezmienny z temperaturą.
Z teorii kinetycznej gazów wynika $n = 1/2$, zaś założenie $n = 0$ jest rów-
noważne z założeniem stałych, niezależnych od temperatury współczyn-
ników lepkości i przewodności cieplnej.

Traktując w równaniu (2.14) pochodną dU/dX jako funkcję n , a pozo-
stałe wielkości jako stałe, stwierdzimy łatwo, iż

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{dU}{dX} \right) = \left(- \frac{dU}{dX} \right) \ln \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 (1 - U^2) \right] > 0$$

dla $U_2 < U < 1$, a zatem dla rosnącego n linia $U(X)$ staje się mniej stro-
ma, co widać wyraźnie na rys. 4 (przypominamy, że $dU/dX < 0$).

Kończąc omówienie równania (2.14) zauważymy jeszcze tylko, że nie
nadaje się ono do przedyskutowania wpływu samej tylko lepkości
($\mu \neq 0$, $\lambda = 0$) lub samej tylko przewodności cieplnej ($\mu = 0$, $\lambda \neq 0$)
na przebieg funkcji $U(X)$. Dzieje się tak dlatego, że μ oraz λ są związane
ze sobą liczbą P r a n d t l a, $Pr = 3/4$, i nie można ich w równaniu (2.14)
oddzielić od siebie.

Wpływ samego tylko μ bądź samego tylko λ przedyskutujemy wpro-
wadzając od razu do równań (2.1) - (2.5) $\mu = 0$ albo $\lambda = 0$, przy czym po
przeprowadzeniu przeróbek i przekształceń analogicznych do tych, które
posłużyły do wyprowadzenia równania (2.14), otrzymamy

$$(2.14.1) \quad \frac{4(\kappa - 1)^n \kappa^{n-1.5}}{3 \cdot 1,255 Ma_1^{1-2n}} \left[\frac{U^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{\kappa Ma_1^2} \right) U + \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(\kappa - 1) Ma_1^2} \right]^n U \frac{dU}{dX} = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} (U - 1)(U - U_2),$$

dla przypadku $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ i zmiennego z temperaturą, oraz

$$(2.14.2) \quad \frac{\lambda}{c_p \rho_1 u_1 l_1} \left[2U - \left(1 + \frac{1}{\kappa Ma_1^2} \right) \right] \frac{dU}{dX} = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} (U - 1)(U - U_2)$$

dla przypadku $\lambda \neq 0$, $\mu = 0^3$.

Prędkość U występująca we wszystkich trzech równaniach [(2.14), (2.14.1) i (2.14.2)] wyraża się wzorem (2.16.1).

Trójmian kwadratowy po lewej stronie równania (2.14.1) jest dodatni, jeśli tylko $Ma_1^2 > (\kappa - 1)/2\kappa \approx 1/7$, co łatwo stwierdzić badając jego wyróżnik. Wobec tego w interesującym nas zakresie $Ma_1 > 1$ pochodna $dU/dX < 0$ i funkcja $U(X)$ ma przebieg identyczny z przedstawionym na rys. 2, wynikłym z dyskusji równania (2.14). Uwzględnienie samej tylko lepkości $\mu \neq 0$ wystarcza więc do uzyskania ciągłości parametrów hydrodynamicznych opisujących falę uderzeniową i to zarówno dla przypadku słabych, jak i mocnych fal.

Nieco inaczej przedstawia się sprawa w przypadku uwzględnienia samej tylko przewodności cieplnej $\lambda \neq 0$.

Wprowadzając oznaczenie

$$(2.20) \quad U_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\kappa Ma_1^2} \right)$$

możemy przepisać równanie (2.14.2) w postaci

$$(2.21) \quad \frac{dU}{dX} = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{c_p \rho_1 u_1 l_1}{2\lambda} \frac{(U - 1)(U - U_2)}{U - U_0}$$

Jeśli w zakresie $U_2 < U < 1$ ma być $dU/dX < 0$, podobnie jak to miało miejsce w równaniach (2.14) i (2.14.1), to musi być

$$U - U_0 > 0$$

w tym zakresie, co pociąga za sobą w sposób oczywisty warunek

$$(2.22) \quad U_0 \leq U_2.$$

³⁾ W równaniu (2.14.2) uzyskano zmienną bezwymiarową X dzieląc x przez l_1 , podobnie jak to miało miejsce w przypadku równań (2.14) i (2.14.1). Wielkość l_1 należy tu jednak traktować — odmiennie niż poprzednio — jako dowolną długość porównawczą, a nie jako średnią drogę swobodną, bo ta ostatnia jest — formalnie rzecz biorąc — zerem wobec $\mu = 0$. Nie wpływa to oczywiście na wyniki dyskusji równania (2.14.2).

Podstawiając do (2.22) wartości (2.20) i (2.16.1) otrzymamy po rozwiązaniu względem Ma_1

$$(2.22.1) \quad Ma_1^2 \leq \frac{3\kappa - 1}{\kappa(3 - \kappa)},$$

co daje $Ma_1 \leq 1,195$ dla $\kappa = 1,4$.

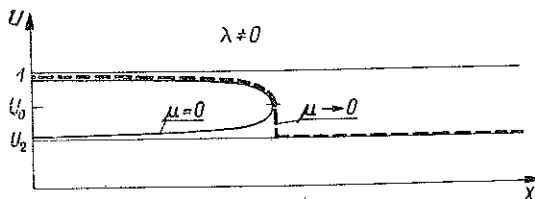
Stąd wniosek, że uwzględnienie samej tylko przewodności cieplnej $\lambda \neq 0$ wystarczy również do uzyskania ciągłości parametrów (wraz z ich pierwszymi pochodnymi), opisujących falę uderzeniową, ale tylko w zakresie fal słabych

$$1 < Ma_1^2 < \frac{3\kappa - 1}{\kappa(3 - \kappa)}.$$

Dla dostatecznie mocnych fal warunek (2.22) nie jest spełniony, wskutek czego pochodna (2.21) zmienia znak w punkcie U_0 , przypadającym wówczas między U_1 i U_2 , stając się w tymże punkcie nieskończenie wielka. W konsekwencji funkcja $U(X)$ ma przebieg podany na rys. 3 linią ciągłą, jest więc dwuwartościowa i nie istnieje w całym obszarze $-\infty < X < +\infty$.

Warto nadmienić, że przy bardziej subtelnym rozpatrzeniu zagadnienia (polegającym na przejściu z lepkością do granicy równej zero zamiast przyjęcia wprost $\mu = 0$) otrzymuje się, [18], w przypadku $\lambda \neq 0$ graniczną funkcję $U(X)$ istniejącą w całym obszarze zmienności X . Funkcja ta jest przedstawiona na rys. 3 linią przerywaną.

W świetle powyższych wywodów słuszne wydaje się stwierdzenie, że wpływ lepkości jest «mocniejszy» od wpływu przewodności cieplnej, jeśli chodzi o uzyskanie ciągłości parametrów opisujących falę uderzeniową.



Rys. 3

Całkę równania (2.14) można podać w postaci skończonej tylko dla pewnych szczególnych wartości wykładnika n , a mianowicie dla $n = 0$, $n = 1/2$, [18], oraz $n = 1$. Dla wartości n innych niż podane trzeba przeprowadzić całkowanie numeryczne.

Ponieważ wartość n nie ma wpływu jakościowego na przebieg funkcji $U(X)$, zaś wpływ ilościowy określiliśmy już uprzednio, więc podamy — dla przykładu — tylko całkę dla $n = 0$. Ma ona postać.

$$(2.23) \quad \frac{3 \cdot 1,255 \sqrt{\kappa}}{4\kappa} Ma_1^2 \left(1 - \frac{1}{Ma_1^2}\right) X = \ln C_4 \frac{1 - U}{(U - U_2)^{U_1}},$$

gdzie C_4 zależy od wyboru układu odniesienia i dla przepływu o zadanych uprzednio warunkach brzegowych musi być dodatnia. (Przypadek $C_4 < 0$ został przedyskutowany w [11]; nie ma on sensu fizycznego, ponieważ dla $x \rightarrow +\infty$ również $U \rightarrow +\infty$, zaś $i \rightarrow -\infty$; ponadto entropia maleje tu ze wzrostem x).

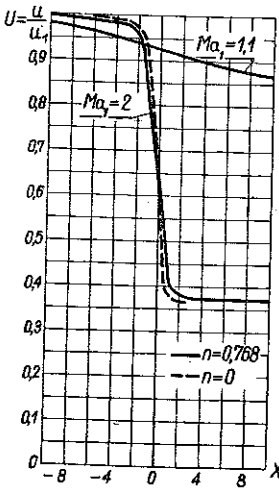
Stałą C_4 określimy przyjmując początek układu odniesienia w punkcie przecięcia $d^2U/dX^2 = 0$; punkt ten odpowiada wartości $U = \sqrt{U_2}$.

Otrzymamy

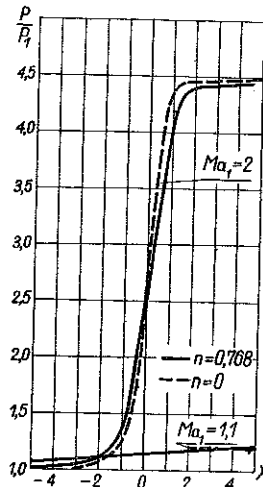
$$(2.24) \quad e^{\frac{3-1,255\sqrt{x}}{4x} Ma_1^2 \left(1 - \frac{1}{Ma_1^2}\right) X} = \frac{(\sqrt{U_2} - U_2)U_2}{1 - \sqrt{U_2}} \frac{1 - U}{(U - U_2)U_2}$$

Łatwo sprawdzić, że całka (2.23) posiada istotnie właściwości przewidziane na podstawie analizy równania (2.14).

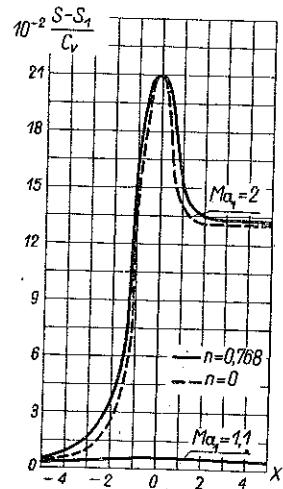
Znając $U(X)$ możemy z łatwością znaleźć pozostałe niewiadome funkcje, a więc $p(x)$, $\rho(x)$, $i(x)$ oraz $\mu(x)$. Powiadamy często, że zespół tych wszystkich funkcji przedstawia (opisuje) *strukturę fali uderzeniowej*.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Rysunek 4, [11], przedstawia wykres $U(X)$ wykonany dla dwu różnych liczb Macha i dwu różnych wartości n . Należy zaznaczyć, że dla $n = 0,768$ (powietrze) znaleziono $U(X)$ drogą całkowania numerycznego.

Rysunki 5 i 6, zaczerpnięte z tego samego źródła, przedstawiają rozkład ciśnienia oraz przebieg entropii w fali uderzeniowej dla tych samych wartości n i Ma_1 .

Jako podstawa do wykonania wykresu ciśień posłużył wzór

$$(2.25) \quad \frac{p}{p_1} = \frac{1}{U} \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 (1 - U^2) \right],$$

stanowiący przekształcenie wzoru (2.4) za pomocą zależności (2.6), (2.9) i (2.11). U oznacza tu funkcję otrzymaną w wyniku scałkowania równania (2.14).

Wzór służący do wykonania wykresu entropii wyprowadza się na podstawie znanej z termodynamiki zależności

$$S - S_1 = c_p \ln \frac{i}{i_1} - (c_p - c_v) \ln \frac{p}{p_1},$$

która po uwzględnieniu (2.6), (2.9) i (2.11) przybiera postać

$$(2.26) \quad \frac{S - S_1}{c_v} = \ln \left(U^\kappa \frac{p}{p_1} \right) = \ln \left(U^{\kappa-1} \frac{i}{i_1} \right).$$

Podstawiając (2.25) do (2.26) otrzymujemy ostatecznie

$$(2.26.1) \quad \frac{S - S_1}{c_v} = \ln \left\{ \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 (1 - U^2) \right] U^{\kappa-1} \right\}.$$

Obrazem funkcji (2.26.1) jest rys. 6, na którym zwraca uwagę fakt spadku entropii w zakresie $X > 0$, co wydaje się na pierwszy rzut oka pogwałceniem drugiej zasady termodynamiki.

M o r d u c h o w i L i b b y, [11], którzy — o ile wiemy — pierwsi stwierdzili ten fakt, wyrazili przypuszczenie, iż może on świadczyć o braku równowagi termicznej gazu w pewnych obszarach, nie zajmowali się nim jednak bliżej.

W gruncie rzeczy zaobserwowany spadek entropii nie stoi bynajmniej w sprzeczności z drugą zasadą termodynamiki, ponieważ elementy gazu nie mogą być — wobec $\lambda \neq 0$ — traktowane jako układy odosobnione. Spadek entropii w obszarze $X > 0$ świadczy jedynie o tym, że każdy element gazu, znajdujący się w tym obszarze, oddaje drogą przewodnictwa więcej ciepła elementowi sąsiedniemu, położonemu «przed nim» (tzn. bliżej początku układu odniesienia na rys. 6), niż go otrzymuje od elementu położonego «za nim» (tzn. dalej od początku układu) ⁴⁾.

Potwierdzimy prawdziwość powyższego rozumowania wykazując, że dla przypadku $\mu \neq 0$, $\lambda = 0$ wspomniany spadek entropii nie występuje.

⁴⁾ Do wniosku tego doszliśmy wspólnie z Z. Szymańskim. Podczas przygotowywania niniejszej pracy do druku stwierdziliśmy, że identyczny pogląd wyraził H. C. L e v e y, [21], nie badając go jednak bliżej.

Przyjmując mianowicie w równaniu (2.3) $\lambda=0$ albo — co na jedno wychodzi — $Pr = \infty$ i całkując je jednokrotnie otrzymamy

$$(2.27) \quad \varrho_1 u_1 \left(i + \frac{u^2}{2} \right) - \frac{4}{3} \mu u \frac{du}{dx} = C_2,$$

gdzie C_2 określone z warunków dla $x = -\infty$ ma wartość (2.11) identyczną jak dla przypadku $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$.

Rugujemy następnie z (2.7) p oraz ϱ korzystając z zależności (2.6) i (2.4); wszystkie te trzy zależności pozostają prawdziwe w przypadku $\lambda=0$, co łatwo spostrzec. Jako wynik rugowania wypada

$$(2.28) \quad \varrho_1 u_1 u = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \varrho_1 u_1 \frac{i}{u} + \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} + C_1.$$

Dodając do (2.27) równanie (2.28) po uprzednim pomnożeniu go przez u otrzymamy

$$\frac{i}{\kappa} = \frac{u^2}{2} + \frac{C_2}{\varrho_1 u_1} - \frac{C_1 u}{\varrho_1 u_1},$$

skąd po podstawieniu (2.10) i (2.11) wynika

$$(2.29) \quad \frac{i}{i_1} = \kappa(\kappa-1) Ma_1^2 \left\{ \frac{U^2}{2} - U \left(1 + \frac{1}{\kappa Ma_1^2} \right) + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(\kappa-1) Ma_1^2} \right] \right\}.$$

Wreszcie — po podstawieniu (2.29) do (2.26) i zróżniczkowaniu otrzymanej zależności względem X — otrzymujemy:

$$(2.30) \quad \frac{dS}{dX} = \frac{dU}{dX} \left[\frac{\kappa-1}{U} - \frac{U - \left(1 + \frac{1}{\kappa Ma_1^2} \right)}{\frac{U^2}{2} - U \left(1 + \frac{1}{\kappa Ma_1^2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{(\kappa-1) Ma_1^2}} \right]$$

lub

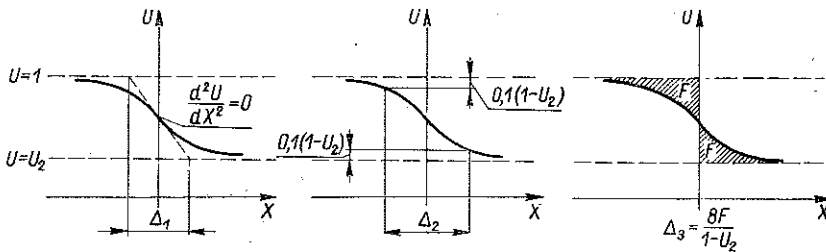
$$(2.30.1) \quad \frac{dS}{dX} = \frac{dU}{dX} \frac{\frac{\kappa+1}{2}(U-1)(U-U_2)}{U \left[\frac{U^2}{2} - U \left(1 + \frac{1}{\kappa Ma_1^2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{(\kappa-1) Ma_1^2} \right]}.$$

Z dyskusji równania (2.14.1) wynikało, że $dU/dX < 0$ w obszarze $U_2 < U < 1$, zaś wyrażenie w nawiasie kwadratowym tegoż równania [wyrażenie to występuje również w mianowniku równania (2.30.1)] jest większe od zera dla $Ma_1^2 > 1/7$. Ponieważ licznik (2.30.1) jest w obszarze $U_2 < U < 1$ stale ujemny, więc z zestawienia tych faktów wynika $dS/dX > 0$; wobec tego dla $\lambda=0$, $\mu \neq 0$ entropia jest funkcją stale rosnącą, co właśnie chcieliśmy wykazać.

Na zakończenie niniejszego rozdziału zauważymy, że przedstawiona w nim struktura fali uderzeniowej w gazie lepkim i przewodzącym ciepło została otrzymana dla szczególnej wartości liczby Prandtla, $Pr = 3/4$. Obraz jej pozostaje jednak prawdziwy (w sensie jakościowym) również dla innych liczb Prandtla, jak o tym świadczą prace Misesa, [13], i Grada, [18]. Obaj autorzy ograniczyli się do czysto jakościowej analizy układu równań (2.1) - (2.5).

3. Grubość fali uderzeniowej w świetle równań mechaniki ośrodków ciągłych

Grubością fali uderzeniowej⁵⁾ nazywamy grubość warstwy, w której zachodzi najbardziej gwałtowna zmiana parametrów hydrodynamicznych gazu. Oczywiście, grubość fali uderzeniowej musi być określona umownie; rys. 7 przedstawia najczęściej stosowane definicje.



Rys. 7

Definicja Δ_1 pochodzi od Prandtla, [4], definicja Δ_2 od Taylora, [6], definicję Δ_3 spotykamy u Łojcjanckiego, [12], i Grada, [18]. Należy podkreślić, że obliczając grubość pewnej fali uderzeniowej na podstawie każdego z podanych trzech schematów dochodzi się do wyników mało różniących się od siebie ([11] i [18]).

Najwygodniejszy w zastosowaniu praktycznym jest jednak schemat Prandtla, ponieważ w oparciu o niego można określić grubość fali uderzeniowej bez potrzeby znajdowania całki równania (2.14). Wystarczy w tym celu obliczyć $[dU/dX]_{max}$ z warunku $d^2U/dX^2 = 0$; otrzymamy wówczas

$$(3.1) \quad \Delta_1 = \frac{1 - U_2}{\left| \left[\frac{dU}{dX} \right]_{max} \right|}$$

⁵⁾ Zdajemy sobie sprawę z niewłaściwości tej nazwy: fala uderzeniowa jest zjawiskiem fizycznym, rozciągającym się w dodatku na obszar nieskończony, nie ma więc sensu mówić o jej «grubości». Nazwę podaną zachowujemy jednak z braku lepszej. Analogiczne nazwy stosowane w literaturze obcojęzycznej (np. *Stossdicke*, *shock front thickness*) również nie są zadowalające i nie dają wobec tego podstaw do utworzenia nazwy prawidłowej.

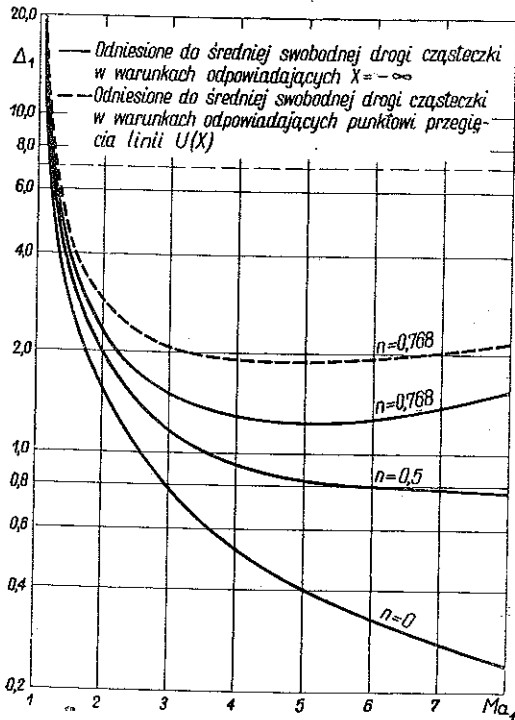
Nadmienimy, że warunek $d^2U/dX^2 = 0$ daje łatwe do rozwiązania równanie tylko w przypadku $n = 0$; dla $n \neq 0$ prowadzi on do równania

$$(3.2) \quad U^4 \left(n - \frac{1}{2} \right) - U^3 n (1 + U_2) + U^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(\kappa - 1) Ma_1^2} + U_2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] - U_2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(\kappa - 1) Ma_1^2} \right] = 0$$

o budowie dość złożonej.

Obliczoną na podstawie wzoru (3.1) grubość fali uderzeniowej przedstawiają wykresy na rys. 8, [11].

Linie ciągłe na tym rysunku oznaczają grubość fali uderzeniowej, odniesioną do średniej swobodnej drogi cząsteczki w warunkach odpowiadających $X = -\infty$. Linia przerywana



Rys. 8

prerywana przedstawia grubość fali, odniesioną do średniej swobodnej drogi cząsteczki w warunkach odpowiadających punktowi przegięcia linii $U(X)$; w tym drugim przypadku grubość fali uderzeniowej wypada nieco większa.

Jak widać, przy $n = 0$ (lepkość μ i przewodność cieplna λ niezależne od temperatury) grubość fali uderzeniowej dąży do zera przy rosnącej liczbie Ma_1 , co doprowadziło Beckera, [8], który badał to zjawisko, do stwierdzenia, że w przypadku dostatecznie silnych fal uderzeniowych grubość ich staje się mniejsza już nie tylko od średniej drogi swobodnej, ale nawet od średniej odległości między cząsteczkami. Wniosek ten został zakwestionowany

przez Thoma, [10], który stwierdził, że przyjęcie bardziej zbliżonego do rzeczywistości modelu gazu, odznaczającego się współczynnikami lepkości i przewodności cieplnej zmiennymi z temperaturą według zależności $\mu \sim \sqrt{T}$, $\lambda \sim \sqrt{T}$, prowadzi do wniosków zupełnie odmiennych, mianowicie (dla $n = 1/2$ grubość fali uderzeniowej dąży przy $Ma_1 \rightarrow \infty$ do wartości stałej, różnej od zera; przy tym wartość ta pozostaje rzędu śred-

niej swobodnej drogi cząsteczki gazu. Późniejsze badania wykazały ponadto, że dla $1/2 < n < 1$ grubość fali uderzeniowej jest niemonotoniczną funkcją liczby Ma_1 , że, mianowicie, grubość fali dąży do nieskończoności dla $Ma_1 \rightarrow \infty$ po przejściu przez minimum, które leży w okolicy $Ma_1 = 5$ i którego wielkość jest rzędu drogi swobodnej. Widać to wyraźnie na rys. 4.

Wyniki obliczeń grubości fali uderzeniowej są może najważniejszym osiągnięciem przedstawionej powyżej teorii. Z jednej strony potwierdzają one, jak już wspomniano, trafność nieciągłego modelu fali uderzeniowej, świadczą bowiem, że grubość fali jest rzędu swobodnej drogi cząsteczki gazu. Z drugiej strony jednak nasuwają pewne zastrzeżenie.

Zastrzeżenie to — niezwykle istotne — dotyczy stosowalności równań mechaniki ośrodków ciągłych do opisu zjawiska fali uderzeniowej, podważając tym samym przedstawione wyżej wnioski; wynika ono z rozważań następujących.

Założenie ciągłości ośrodka jest równoważne warunkowi postulującemu, że skończone zmiany parametrów hydrodynamicznych gazu zachodzą na odległościach dużych w porównaniu z długością średniej swobodnej drogi cząsteczki gazu. Jednak warunek ten, jak widać z rys. 8, jest spełniony tylko dla bardzo słabych (małe Ma_1) fal uderzeniowych, wobec czego wiadomości o strukturze fali uderzeniowej, otrzymane na podstawie równań (2.1) - (2.5) mechaniki ośrodków ciągłych, mogą być bez dalszych zastrzeżeń uznane za prawdziwe tylko dla przypadku dostatecznie słabych fal (np. dla fal określonych przez $Ma_1 \leq 1, 2$, jeśli — w sposób dość dowolny — założymy, że grubość fali równa 10 długościom drogi swobodnej wystarcza do spełnienia warunku ciągłości ośrodka). Natomiast w zakresie $Ma_1 > 1, 2$, traktować należy strukturę fali uderzeniowej, wynikającą z równań mechaniki ośrodków ciągłych, jako niepewną — przynajmniej pod względem ilościowym.

Nawiasem mówiąc na rys. 8 widać, że grubość fali uderzeniowej staje się znowu duża dla liczb Ma_1 , tzn. dla silnych fal uderzeniowych. Wydawać by się więc mogło, że dla takich fal założenie ciągłości jest utrzymane, a więc ich struktura, wynikająca z równań opartych na tym założeniu, odpowiada rzeczywistości. Wniosek taki byłby oczywiście nadzwyczaj niepewny. Wspomniany obszar bardzo dużych liczb Ma_1 leży za zakresem średnich liczb Ma_1 , w którym założenie ciągłości na pewno nie obowiązuje; w obszarze tym równania mechaniki ośrodków ciągłych mogły stracić słuszność nawet z punktu widzenia jakościowego opisu zjawiska, trzeba zatem traktować z dużym zastrzeżeniem zarówno obserwowany na rys. 8 fakt ponownego wzrostu grubości fali w zakresie dużych Ma_1 , jak i — tym bardziej — wypływający zeń wniosek, iż równania «odzyskują» słuszność w tym zakresie Ma_1 .

4. Struktura fali uderzeniowej w świetle teorii kinetycznej gazów

Teoretyczne zbadanie zjawiska fali uderzeniowej poza zakresem stosowalności równań mechaniki ośrodka ciągłego i wyjaśnienie tą drogą wątpliwości, sformułowanych w p. poprzednim, mogło być dokonane tylko w oparciu o teorię kinetyczną, nie korzystającą z założenia ciągłości gazu i uwzględniającą jego «ziarnistą» strukturę.

W punkcie niniejszym zostaną omówione wyniki trzech prac, [16], [17] i [18], opartych na teorii kinetycznej⁶⁾. Dwie z tych prac, mianowicie [16] i [18], opierają się na rozszerzonych równaniach hydrodynamiki, otrzymanych w oparciu o pewne rozwinięcia funkcji rozkładu na szereg i odniesionych do przypadku płaskiej ustalonej fali uderzeniowej. Trzecia praca natomiast sprządza się do bezpośredniego wyznaczenia funkcji rozkładu jako szczególnego rozwiązania równania Boltzmana, rozwiązania odpowiadającego zjawisku płaskiej fali uderzeniowej.

Praca Zollera, [16], stanowi zastosowanie metody Enskog-Chapmana-Burnetta; funkcja rozkładu jest tu rozwinięta na szereg wielomianów Sonina. Otrzymany układ równań różniczkowych zwyczajnych został scałkowany numerycznie dla przypadków $p_2/p_1 = 1,5; 4$ i $6,5$, co odpowiada liczbom Macha $Ma_1 \approx 1,2; 1,89$ i $2,4$. Wyniki całkowania dla przypadku $p_2/p_1 = 6,5$ przedstawia rys. 9.

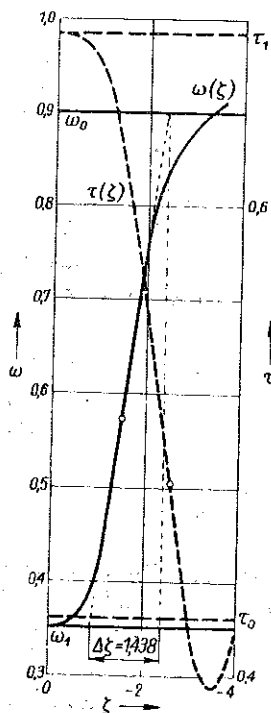
Wprowadzone przez Zollera wielkości bezwymiarowe są związane z wielkościami stosowanymi w mniejszym artykule zależnościami następującymi:

$$\omega = \frac{\kappa Ma_1^2}{1 + \kappa Ma_1^2} U,$$

$$\tau = \frac{\kappa Ma_1^2}{1 + \kappa Ma_1^2} \sqrt{\frac{2R}{u_1^2}} \sqrt{T},$$

$$\zeta = \frac{3 \cdot 1,255 \kappa^2}{4 \sqrt{\kappa}} \frac{Ma_1^3}{(1 + \kappa Ma_1^2)^2} X.$$

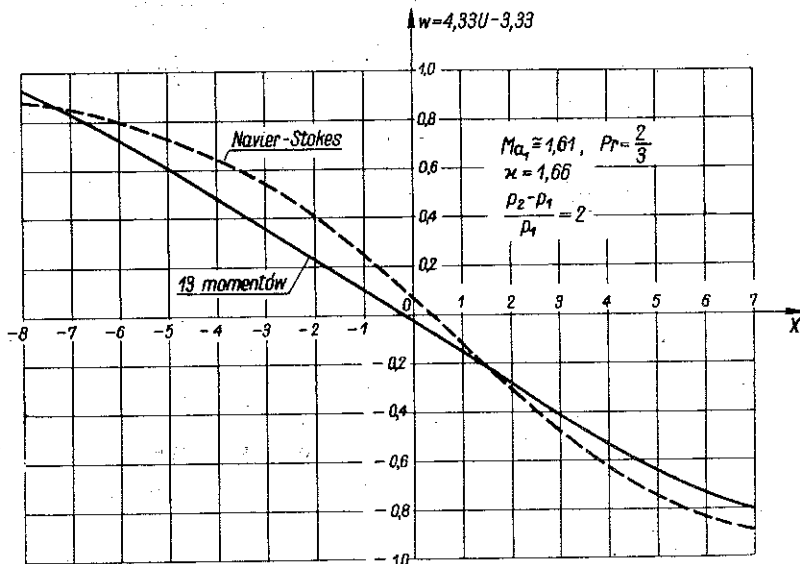
⁶⁾ Na Kursie Naukowym w Międzyzdrojach (sierpień 1954 r.) strona teoretyczna tych prac została omówiona w referacie Z. Szymańskiego *Równanie Boltzmana i jego znaczenie w teorii gazów*.



Rys. 9

Na rysunku 9 zwraca uwagę niemonotoniczność funkcji $\tau(\zeta)$ [dotyczy to również funkcji $\omega(\zeta)$]. Zoller faktu tego nie wyjaśnia. Fakt ten obserwuje się, [16], również w przypadku słabszej fali określonej przez $p_2/p_1 = 4,0$, jednak występuje on w słabszym stopniu. Natomiast dla najslabszej fali ($p_2/p_1 = 1,5$) funkcje ω i τ są monotoniczne i linia $\omega(\zeta)$ ma przebieg zupełnie identyczny jakościowo z przedstawionym na rys. 4 przebiegiem $U(X)$.

Zauważmy jeszcze, że grubości fali uderzeniowej, wynoszące odpowiednio $\Delta\zeta = 5,29, 1,850$ i $1,438$ dla $p_2/p_1 = 1,5; 4$ i $6,5$ są znacznie większe od otrzymanych na podstawie równań mechaniki ośrodków ciągłych. Po przeliczeniu na oznaczenia stosowane w p. poprzednich wynoszą one: $\Delta = 17,5; 6,36$ i $5,5$, podczas gdy według rys. 8 wyniosłyby dla tych samych Ma_1 około 10, 3 i 2.



Rys. 10

Drugi z cytowanych, [18], autorów, G r a d, oparł się na swej metodzie trzynastu momentów, która ostatecznie prowadzi w przypadku płaskiej fali uderzeniowej do układu pięciu równań różniczkowych zwyczajnych.

W wyniku numerycznego całkowania tego układu dla $Ma_1 = 1,611$ otrzymano wykres prędkości podany na rys. 10 linią ciągłą.

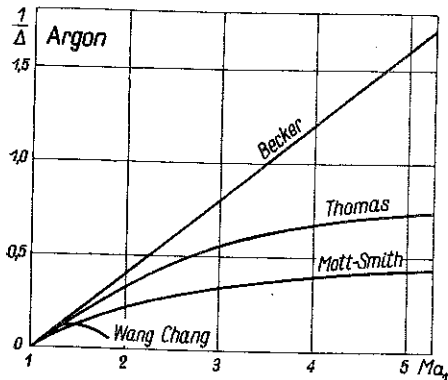
Porównanie go z analogicznym wykresem uzyskanym w oparciu o równania mechaniki ośrodków ciągłych (linia przerywana) wykazuje zupełną zgodność jakościową oraz niewielkie ilościowe różnice, wyrażające się

bardziej łagodnym przebiegiem wykresu otrzymanego na podstawie metody trzynastu momentów.

Grubości fali uderzeniowej, obliczane na podstawie metody trzynastu momentów, także nie różnią się wiele od obliczonych na podstawie równań mechaniki ośrodka ciągłego. Liczbowe różnice wynoszą ok. 2% dla $Ma_1 = 1,18$ i $\approx 15\%$ dla $Ma_1 = 1,61$ z tym, że metoda trzynastu momentów daje grubości większe.

Dla silniejszych fal uderzeniowych (tzn. dla $Ma_1 \geq 1,65$) G r a d nie przeprowadzał obliczeń, ponieważ stwierdził drogą bardzo wnikliwej i drobiazgowej analizy jakościowej wspomnianego układu pięciu równań różniczkowych, że równania te dają *jedyne* rozwiązanie na falę uderzeniową tylko dla $Ma_1 \leq 1,65$. Powyżej tej wartości Ma_1 istnieje mianowicie nieskończenie wiele linii całkowych łączących punkty osobliwe, odpowiadające stanowi gazu w $+\infty$ i $-\infty$. Wykresy prędkości dla $Ma_1 > 1,65$ stają się niemonotoniczne, co pokrywa się z wynikiem Z o l l e r a.

Praca [17] M o t t - S m i t h a zajmuje się wyznaczeniem funkcji rozkładu, będącej sumą dwu makswellowskich funkcji rozkładu, z których jedna określa stan gazu w $-\infty$ (przed falą uderzeniową), druga w $+\infty$ (tzn. za falą). Wyniki ograniczają się do obliczeń grubości fali uderzeniowej w funkcji liczby M a c h a Ma_1 dla dwu różnych równań transportu. Obliczone grubości fali wypadają tu znacznie większe od uzyskanych na podstawie równań mechaniki ośrodków ciągłych (por. rys. 11); różnice wynoszą kilkadziesiąt procent.



Rys. 11

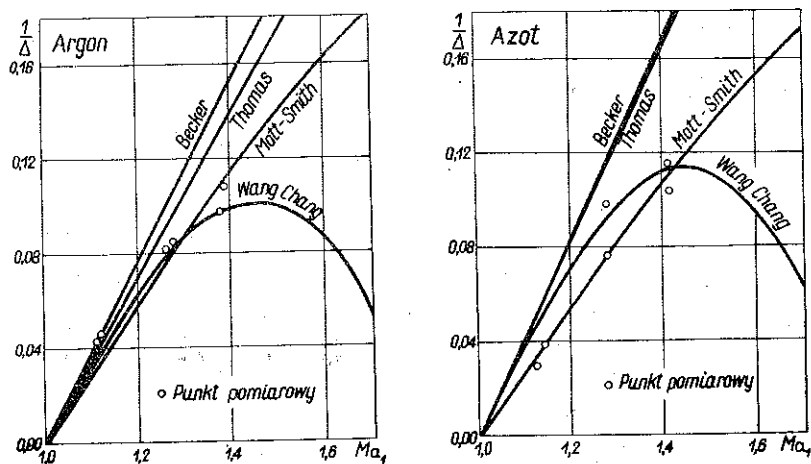
Reasumując wyniki p. 4 stwierdzamy, że teoria kinetyczna potwierdza rezultaty otrzymane dla przypadku słabej płaskiej fali uderzeniowej na podstawie równań mechaniki ośrodków ciągłych: jakościowa zgodność jest zupełna, ilościowo zaś teoria kinetyczna daje większe grubości fali uderzeniowej.

W zakresie silnych fal uderzeniowych teoria kinetyczna daje niemonotoniczne parametry hydrodynamiczne, co stanowi już jakościową różnicę w porównaniu z wynikami mechaniki ośrodków ciągłych. Fakt ten traktować jednak należy z dużą ostrożnością, zważywszy że funkcje rozkładu, zastosowane w omówionych wyżej pracach, [16], [18], obowiązują przy założeniu małych odstępstw gazu od stanu równowagi, które nie jest spełnione w fali uderzeniowej (i to tym mniej, im silniejsza jest fala). Być

może zatem, że funkcje te w ogóle nie nadają się do badania fal silnych. Co prawda, funkcja rozkładu otrzymana przez *Mott-Smitha* jest wolna od wspomnianego założenia, niestety jednak autor nie podał odpowiadającego jej rozkładu prędkości, nie wiemy zatem, czy byłby on — dla dostatecznie silnych fal — również niemonotoniczny.

5. Pomiary grubości fali uderzeniowej

Wyniki przedstawionych wyżej równań teoretycznych nie mogą być oczywiście uznane za pewne, dopóki nie potwierdzi ich doświadczenie. Niestety, nie znamy dotychczas metod, które pozwoliłyby zbadać doświadczalnie strukturę fali uderzeniowej w całej rozciągłości, a więc uzyskać obraz prędkości, temperatury i innych parametrów hydrodynamicznych gazu. Istnieje natomiast metoda pozwalająca zmierzyć grubość fali uderzeniowej i przynajmniej pod tym jednym względem (w pewnym sensie «z grubsza») skonfrontować wyniki teorii z rzeczywistością.



Rys. 12

Metoda, o której mowa, opiera się na zastosowaniu tzw. «rury uderzeniowej» i została opublikowana w pracy *Cowana i Horniga*, [19], z 1950 r. Praca następna, [20], z 1951 r. zawiera konkretne wyniki pomiarów grubości fali uderzeniowej w argonie i azocie dla liczb $Ma_1 \leq 1,4$.

Wyniki tych pomiarów przedstawia rys. 12, zaczerpnięty z [20]. Potwierdzają one, jak widać, wyniki uzyskane na drodze teoretycznej, przy czym najlepszą zgodność z doświadczeniem daje teoria *Mott-Smitha*. Należy podkreślić, że wyniki pomiarów obarczone są błędem dochodzącym do 25%.

Niestety, pomiary obejmują zakres małych liczb Ma_1 , w którym rozbieżności między poszczególnymi teoriami nie są duże, jeśli chodzi o grubość fali uderzeniowej. Byłoby rzeczą o dużym znaczeniu przeprowadzenie pomiarów grubości fal, charakteryzujących się większymi liczbami Ma_1 , i — tym samym — sprawdzenie wyników poszczególnych teorii w zakresie ich większej rozbieżności.

Literatura cytowana w tekście

- [1] B. Riemann, *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*, Abhandl. der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys., Kl. 8, 43 (1860).
- [2] W. J. M. Rankine, *On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance*, Transactions of the Roy. Soc., t. 160 (1870).
- [3] H. Lorenz, *Die stationäre Strömung von Gasen und Dämpfen durch Rohre mit veränderlichem Querschnitt*, Zeitschr. des VDI 47 (1903), str. 1600-1603.
- [4] L. Prandtl, *Zur Theorie des Verdichtungsstosses*, Zeitschr. das gesamte Turbinenwesen 3 (1906), str. 241.
- [5] Lord Rayleigh, *Aerial Plane Waves of Finite Amplitude*, Proc. Roy. Soc., Londyn, A 84 (1910), str. 241.
- [6] G. I. Taylor, *The Conditions Necessary for Discontinuous Motion in Gases*, jw., str. 371.
- [7] G. Hamel, *Das Ausströmen von Gasen durch Düsen*, Zeitschr., des VDI 55 (1911), str. 1895-1898.
- [8] R. Becker, *Stosswelle und Detonation*, Zeitschr. f. Physik, 8 (1922).
- [9] G. I. Taylor i J. W. Maccoll, *The Mechanics of Compressible Fluids*, W. F. Durand, *Aerodynamic Theory*, t. 3, Div. H. Berlin 1935.
- [10] L. H. Thomas, *Note on Becker's Theory of the Shock Front*, Journ. of Chemical Physics 12 (1944), str. 449-453.
- [11] M. Morduchow i P. A. Libby, *On a Complete Solution of the One-Dimensional Flow Equations of a Viscous, Heat-Conducting Compressible Gas*, Journal of the Aeronautical Sci. 16 (1949), str. 674-684.
- [12] L. G. Łojcjancki, *Miechanika židkosti i gaza*, Moskwa-Leningrad 1950, str. 510-515.
- [13] R. Mises, *On a Thickness of a Steady Shock Wave*, Journal of the Aeronautical Sci. 17 (1950), str. 551-554.
- [14] P. Lieber, F. Romano i H. Lew, *Approximate Solutions for Shock Waves in a Steady, One Dimensional, Viscous and Compressible Gas*, Journal of the Aeronautical Sci. 18 (1951).
- [15] R. Brunia k, *Zur Struktur des Verdichtungsstosses*, Österreichisches Ing.-Arch. 7 (1953).
- [16] K. Zoller, *Zur Struktur des Verdichtungsstosses*, Zeitschr. f. Physik 130 (1951).

[17] H. M. Mott-Smith, *The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock-Wave*, Physical Rev. 82 (1951), str. 885-892.

[18] H. Grad, *The Profile of a Steady Plane Shock Wave*, Comm. on Pure and Appl. Math. 5 (1952), str. 257.

[19] G. R. Cowan i D. F. Hornig, *The Experimental Determination of the Thickness of a Shock Front in a Gas*, The Journal of the Chemical Physics 18 (1950).

[20] Greene, G. R. Cowan i D. F. Hornig, *The Thickness of Shock Fronts in Argon and Nitrogen and Rotational Heat-Capacity Lags*, *ibid.*, 19 (1951).

[21] H. C. Levey, *Quarterly of Applied Mathematics*, t. 12, 4 (1954), str. 43.

Резюме

СТРУКТУРА ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Работа является сводкой результатов испытаний структуры плоской установившейся ударной волны в вязком и проводящем тепло газе.

В п. 2-ом, являющемся основной частью работы, рассмотрены результаты, полученные на основании уравнений механики сплошной среды. Обсуждается влияние различных факторов на характер изменчивости гидродинамических параметров, между прочим и влияние одной только вязкости и одной только теплопроводности.

Особенное внимание обращается на факт, что в вязком и проводящем тепло газе, на фоне общего повышения энтропии, выступает ее локальное уменьшение, [11]. Это ни в коем случае не противоречит второму принципу термодинамики, так как элементы проводящего тепло газа не являются изолированными системами. Косвенным подтверждением является доказанный нами факт, что ударная волна — в вязком и непроводящем тепло газе — отличается монотонным повышением энтропии.

Результаты, полученные методами механики сплошной среды, сопоставляются затем с результатами кинетической теории и данными экспериментов.

Установлено, что механика сплошной среды дает, в области достаточно слабых волн (до $Ma_1 \approx 1,6$), правильную качественно изменчивость гидродинамических параметров; впрочем количественные различия невелики и выражаются более отвесными формами кривых соответствующих функций, чем это вытекает из кинетической теории. Весьма вероятно, что в области довольно сильных волн будут выступать каче-

ственные разницы; кинетическая теория, [16], дает здесь — в противоположности механике сплошной среды — немонотонные изменения гидродинамических параметров. Однако результаты кинетической теории, [16] и [18], в области сильных волн ненадежны, так как состояние газа может здесь сильно отклоняться от состояния термического равновесия. Кроме того эти результаты слишком отрывочны, чтобы на их основании можно было бы принять представление о структуре сильной ударной волны и провести критику результатов рассуждений механики сплошной среды (например [17] не содержит образа структуры, а только лишь вычисление толщины волны).

Измерения толщины ударной волны, [20], произведенные для $Ma_1 = 1,4$, являющиеся единственным и несовершенным основанием для сопоставления теории и эксперимента, подтверждают результаты теории.

S u m m a r y

TWO-DIMENSIONAL SHOCK WAVE STRUCTURE

This paper constitutes a summary of results of investigations of steady plane shock wave in a viscous heat conducting gas.

Sec. 2 the principal part of the paper contains a discussion of the results obtained on the basis of the equations of mechanics of continuous media. The influence of various factors on the type of variability of hydrodynamic parameters are discussed, including the influence of viscosity and of heat conductivity.

Special consideration has been given to the phenomenon of local decrease of entropy, [11], accompanying the overall increase of entropy. This phenomenon is not contrary to the second law of thermodynamics, because the elements of a heat conducting gas do not constitute isolated systems. This is confirmed indirectly by the fact that the shock wave in a viscous non conducting gas is characterized by a monotonic increase of entropy.

Next, the results based on the principles of mechanics of continuous media are compared to those of the kinetic theory and to experimental data.

It was found that the principles of mechanics of continuous media yield, for a sufficiently weak shock wave (up to $Ma_1 \approx 1,6$), a qualitatively correct variability of hydrodynamic parameters, the quantitative differences being insignificant and consisting in steeper curves than those

resulting from the kinetic theory. On the other hand, it appears that in the range of sufficiently strong waves qualitative differences will appear: the kinetic theory, [16], indicates here contrarily to the principles of mechanics of continuous media — nonmonotonic variations of hydrodynamic parameters. The results of the kinetic theory, [16] and [18], are uncertain, however, in the range of strong waves, because in this case the state of gas can be different from that of thermal equilibrium; moreover, these results are too fragmentary to be taken as a basis for an opinion on the structure of a strong wave and to allow the results of the mechanics of continuous media to be discussed ([17] does not present any information on the structure, but only calculations of wave thickness).

Measurements of shock wave thickness, [20], for $Ma_1 = 1,4$, which constitute the unique and imperfect basis of comparison between theory and practice, confirm the results of the theory.
