

MICHAŁ ŻYCKOWSKI

PRZYPADEK JEDNOCZESNEGO ROZCIĄGANIA
I SKRĘCANIA PRĘTA O PRZEKROJU KOŁOWYM
W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXX

SPIS TREŚCI

	Str
1. Sformułowanie zagadnienia	287
2. Wyprowadzenie równań podstawowych	288
3. Warunki brzegowe	293
4. Rozwiązanie w zakresie sprężysto-plastycznym. Przybliżenie zerowe	296
5. Rozwiązanie w zakresie czysto plastycznym. Przybliżenie zerowe	300
6. Uzupełnienie rozwiązania na drodze graficznej i numerycznej	303
7. Rozwiązanie w zakresie sprężysto-plastycznym. Przybliżenie pierwsze	314
8. Rozwiązanie w zakresie czysto plastycznym. Przybliżenie pierwsze	319

1. Sformułowanie zagadnienia*)

Teoria nośności granicznej pręta o przekroju kołowym, poddanego jednoczesnemu rozciąganiu i skręcaniu, została opracowana przez N á d a i a, [8], [9], oraz R ż a n i c y n a, [11], którzy posłużyli się równaniami H e n c k y' e g o (teorią odkształceń plastycznych); do analogicznych wyników doszedł H i l l, [4], biorąc za punkt wyjścia równania R e u s s a (teorię płynięcia plastycznego). Rozważania te uogólnił G a y d o n, [3], zajmując się przypadkiem jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym. G a y d o n, podobnie jak i H i l l, posłużył się teorią plastyczności R e u s s a, przyjmując dla uproszczenia, że współczynnik P o i s s o n a ν wynosi $\frac{1}{2}$ i jest stały zarówno w zakresie sprężystym, jak i plastycznym. Rozważył on różne przypadki kolejności działania obciążeń, ograniczając się jednak do wyznaczenia rozkładu naprężeń i znalezienia zależności momentu skręcającego i siły podłużnej od wydłużenia i kąta skręcenia, a nie zajmując się np. równie interesującym wyznaczeniem zależności odwrotnych.

Celem niniejszej pracy jest rozwiązanie inaczej postawionego zagadnienia.

Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta można scharakteryzować pięcioma parametrami: momentem skręcającym M_s , siłą podłużną N , promieniem granicznym c (oddzielającym strefę plastyczną od sprężystej), wydłużeniem względnym ε i kątem skręcenia na jednostkę długości Φ . Parametry te są uzależnione od siebie za pomocą trzech związków — dwóch równań równowagi myślowo odciętej części pręta oraz warunku plastyczności; G a y d o n przyjmuje ε i Φ za zmienne niezależne, ujmując pozostałe jako ich funkcje. W niniejszej pracy posuniemy się dalej; ponieważ wspomniane wyżej związki przedstawione są funkcjami monotonicznymi ze względu na obie występujące w nich zmienne niezależne i dają się, przynajmniej teoretycznie, odwrócić, można nie wyróżniać specjalnie zmiennych zależnych i niezależnych, uważając wszystkie za równouprawnione. Dojdziemy w ten sposób do dzie-

*) Praca przedstawiona na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Międzyzdrojach w sierpniu 1954 r.

sięciu związków uwikłanych, wiążących poszczególne trójki zmiennych M_s, N, c, e i Φ . Każdy z tych związków daje się, przynajmniej teoretycznie, rozwikłać ze względu na wszystkie trzy zmienne, zatem otrzymamy 30 jawnych funkcji dwóch zmiennych. Uzyskane tą drogą rozwiązanie umożliwi efektywne wyznaczanie dowolnych trzech parametrów przy znajomości dwóch pozostałych.

Uogólnienie polegać będzie również na opuszczeniu założenia $\nu = 1/2$ i zbadaniu wpływu współczynnika *P o i s s o n a* na rozkład naprężeń.

Ograniczymy się natomiast do działania obciążenia «prostego» w sensie *I l j u s z i n a*, bowiem oprzemy się na teorii odkształceń plastycznych (*H e n c k y' e g o*).

2. Wyprowadzenie równań podstawowych

Przyjmijmy, że jeden koniec pręta jest utwierdzony, drugi swobodny. Zagadnienie rozwiążemy we współrzędnych walcowych r, θ, z ; początek układu umieścimy w środku przekroju utwierdzonego, oś z skierujemy zgodnie z osią pręta.

Punktem wyjścia naszych rozważań będą następujące założenia odnośnie do przemieszczeń u_r, u_θ i u_z :

(1) w zakresie sprężysto-plastycznym i czysto plastycznym, podobnie jak i w sprężystym, słuszne będą wzory ¹⁾

$$(2.1) \quad u_\theta = \Phi r z,$$

$$(2.2) \quad u_z = \varepsilon z,$$

gdzie kąt skręcenia na jednostkę długości Φ i wydłużenie względne ε nie zależą od współrzędnych;

(2) przemieszczenie u_r zależy jedynie od współrzędnej r :

$$(2.3) \quad u_r = f(r).$$

Przy przyjęciu tych założeń składowe stanu odkształcenia określają wzory (por. np. [5])

$$(2.4) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, & \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_z = \varepsilon = \text{const}, \\ \gamma_{\theta z} = \Phi r, & \gamma_{zr} = 0, & \gamma_{r\theta} = 0. \end{cases}$$

Spośród sześciu składowych stanu odkształcenia cztery są więc w zupełności określone, a pozostałe dwie, ε_r i ε_θ , są związane wynikającym z dwóch pierwszych równań (2.4) warunkiem nierozdzielności

$$(2.5) \quad \varepsilon_r = \frac{d(r\varepsilon_\theta)}{dr}.$$

¹⁾ Zagadnieniem stateczności pręta nie będziemy się zajmowali. Założymy, że poszczególne parametry nie osiągają wartości krytycznych.

Odształcenia wyrazimy teraz przez naprężenia pisząc równania teorii plastyczności H e n c k y' e g o w postaci ^{1a)}

$$(2.6) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \varphi \sigma_r - \left(\varphi - \frac{1}{3K} \right) \sigma_{sr}, & \gamma_{\theta z} = 2\varphi \tau_{\theta z}, \\ \varepsilon_{\theta} = \varphi \sigma_{\theta} - \left(\varphi - \frac{1}{3K} \right) \sigma_{sr}, & \gamma_{zr} = 2\varphi \tau_{zr}, \\ \varepsilon_z = \varphi \sigma_z - \left(\varphi - \frac{1}{3K} \right) \sigma_{sr}, & \gamma_{r\theta} = 2\varphi \tau_{r\theta}, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.7) \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

jest modułem odkształcenia objętościowego (modułem ścisłości), który teoria H e n c k y' e g o przyjmuje za stałą materiałową zarówno w zakresie sprężystym, jak i plastycznym, φ jest wielkością zmienną [można by ją nazwać «funkcją materiałową» ²⁾], równą w zakresie sprężystym

$$(2.8) \quad \varphi = \varphi_s = \frac{1}{2G},$$

a więc w zakresie tym stałą, E , G i ν są stałymi sprężystymi materiału, wreszcie

$$(2.9) \quad \sigma_{sr} = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_{\theta} + \sigma_z).$$

Z trzech ostatnich równań układu (2.6), przy uwzględnieniu związków (2.4), otrzymujemy od razu

$$(2.10) \quad \tau_{\theta z} = \frac{\varphi r}{2\varphi}, \quad \tau_{zr} = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0.$$

Wykorzystamy teraz warunki równowagi wewnętrznej. Z pierwszych trzech równań (2.6) wobec (2.4) wynika, że naprężenia σ mogą być jedynie

^{1a)} Oznaczenia są w większości zgodne z używanymi przez L e j b i e n z o n a, [6], gdzie omyłkowo wydrukowano $K = E/(1-2\nu)$ zamiast związku (2.7). S o k o ł o w s k i, [14], używa oznaczenia β zamiast φ .

²⁾ Podobnie postępuje np. M i e ż ł u m j a n, [7], nazywając współczynnik P o i s s o n a zmienny w zakresie plastycznym, a więc funkcję materiałową, «funkcją odkształcenia poprzecznego».

funkcjami współrzędnej r ; zatem, z uwagi na (2.10), dwa ostatnie równania układu równań równowagi (por. np. [4] lub [5])

$$(2.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} = 0 \end{cases}$$

są spełnione tożsamościowo, a pierwsze możemy przepisać w postaci

$$(2.12) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ pięciu równań, mianowicie (2.5), trzy pierwsze układu (2.6) oraz (2.12) o sześciu funkcjach niewiadomych: ε_r , ε_θ , σ_r , σ_θ , σ_z i φ . Brakujące równanie będzie miało inną postać w strefie sprężystej, inną w plastycznej. W strefie sprężystej będzie to równanie (2.8), zamieniające równania Hencky'ego (2.6) na równania Hooke'a; w strefie plastycznej brakującym równaniem będzie warunek plastyczności.

Zajmiemy się strefą plastyczną. Założymy, że materiał pręta jest idealnie plastyczny (nie podlegający wzmocnieniu plastycznemu), i przyjmiemy warunek plastyczności w postaci Hubera-Misesa-Hencky'ego ($\sigma_{zred}^2 = \sigma_{pl}^2$), który w naszym przypadku zredukuje się do

$$(2.13) \quad \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 - \sigma_r \sigma_\theta - \sigma_\theta \sigma_z - \sigma_z \sigma_r + 3 \tau_{\theta z}^2 = \sigma_{pl}^2,$$

gdzie σ_{pl} oznacza granicę plastyczności przy czystym rozciąganiu lub ściskaniu.

Zanim przystąpimy do kolejnego rugowania niewiadomych, sprowadzimy równania do postaci bezwymiarowej. Oznaczmy najpierw

$$(2.14) \quad 6K\varphi = \frac{1}{\psi}$$

i odpowiednio

$$(2.15) \quad 6K\varphi_s = \frac{1}{\psi_s}.$$

Wprowadzona przez nas wielkość ψ jest więc funkcją materiałową, równą w zakresie sprężystym stałej materiałowej ψ_s . Wykorzystując (2.7) i (2.8) oraz znany związek między E i G otrzymujemy zależność ³⁾

$$(2.16) \quad \psi_s = \frac{1 - 2\nu}{2(1 + \nu)}$$

Stała ψ_s zależy zatem jedynie od stałej P o i s s o n a ν i przyjmuje wartości w granicach od 0 (gdy $\nu = 1/2$) do $1/2$ (gdy $\nu = 0$), stanowiąc jej «negatyw». Wartości funkcji ψ leżą również w przedziale $0 \leq \psi \leq 1/2$. W przypadku materiału nieściśliwego ($\nu = 1/2$): $\psi = \psi_s = 0$; w przypadku nieznaczonej ściśliwości (ν bliskie $1/2$) można przyjąć, że ψ i ψ_s są «nie- skończenie małymi», co umożliwia uzyskiwanie rozwiązań przybliżonych.

Wprowadzimy następnie oznaczenia

$$(2.17) \quad \frac{E}{\sigma_{pl}} \varepsilon = e,$$

$$(2.18) \quad \frac{Ga\sqrt{3}}{\sigma_{pl}} \Phi = g,$$

przy czym przez a oznaczyliśmy promień zewnętrzny pręta; e i g są więc wielkościami bezwymiarowymi, odpowiednio proporcjonalnymi do wydłużenia i kąta skręcenia pręta, przy czym współczynniki proporcjonalności są tak dobrane, że $e = 1$, gdy pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne przy czystym rozciąganiu, natomiast $g = 1$, gdy pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne przy czystym skręcaniu.

Dalej oznaczmy

$$(2.19) \quad \frac{\sigma_r}{\sigma_{pl}} = s_1, \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_{pl}} = s_2, \quad \frac{\sigma_z}{\sigma_{pl}} = s_3$$

oraz wprowadzimy bezwymiarową współrzędną

$$(2.20) \quad \frac{r}{a} = \varrho;$$

pozostałe współrzędne nie będą nam potrzebne. Pochodne względem ϱ będziemy oznaczali przecinkiem u góry.

³⁾ Stałą ψ_s posługuje się np. S o k o ł o w s k i, [14], oznaczając ją przez N . Oznaczenie zmieniono dla uniknięcia nieporozumień, bowiem tą samą literą oznacza się często siłę podłużną.

a z drugiego

$$(2.25) \quad s_3 = \frac{2e(1+\psi_s)p + (1-2\psi_s p)(2s_1 + \varrho s_1')}{2(1+\psi_s p)}$$

Podstawienie (2.24) i (2.25) do dwóch ostatnich równań układu (2.23) doprowadzi nas do układu dwóch równań o dwóch niewiadomych s_1 i p . Po dość żmudnych przeliczeniach otrzymujemy

$$(2.26) \quad \begin{cases} (4\psi_s^2 \varrho p^3 + 5\psi_s \varrho p^2 + \varrho p) s_1' + (-4\psi_s^2 \varrho p^2 p' + 12\psi_s^2 p^3 - 2\psi_s \varrho p p' + \\ + 15\psi_s p^2 - \varrho p' + 3p) s_1' - 6\psi_s^2 p^2 p' s_1 + 2\psi_s (1 + \psi_s) \varrho p^2 p' = 0, \\ (12\psi_s^2 \varrho^2 p^2 + 6\psi_s \varrho^2 p + 3\varrho^2) s_1'^2 + 36\psi_s^2 \varrho p^2 s_1 s_1' + 36\psi_s^2 p^2 s_1^2 - \\ - 12\psi_s (1 + \psi_s) \varrho p^2 (2s_1 + \varrho s_1') + 4g^2 \psi_s^2 \varrho^2 p^4 + 8g^2 \psi_s \varrho^2 p^3 + \\ + [4g^2 \varrho^2 - 4\psi_s^2 + 4(1 + \psi_s)^2 e^2] p^2 - 8\psi_s p - 4 = 0. \end{cases}$$

Równanie pierwsze z otrzymanych jest równaniem różniczkowym liniowym drugiego rzędu ze względu na niewiadomą funkcję s_1 , a równaniem różniczkowym nieliniowym pierwszego rzędu ze względu na niewiadomą funkcję p , drugie natomiast jest równaniem różniczkowym nieliniowym pierwszego rzędu ze względu na s_1 , a równaniem algebraicznym czwartego stopnia ze względu na p .

Ścisłe rozwiązanie układu (2.26) natrafia na poważne trudności; trudności te następują już przy sprowadzaniu układu do jednego równania o jednej funkcji niewiadomej. Ograniczymy się do podania rozwiązań przybliżonych, przy czym wykorzystamy okoliczność, że stała materiałowa ψ_s jest znacznie mniejszą od jedności.

3. Warunki brzegowe

Rozwiązanie układu (2.26) wymaga znajomości dwóch warunków brzegowych. Warunki te uzależnione są od rozpatrywanego zakresu pracy pręta.

W przypadku prostego obciążania pręta, jednocześnie rozciąganego i skręcanego, wykonanego z materiału idealnie plastycznego, wyróżnimy następujące stany:

(1) stan sprężysty — w każdym punkcie ciała naprężenie zastępcze (intensywność naprężeń) $\sigma_0 < \sigma_{pl}$, a funkcja materiałowa $p = 1$;

(2) granica odkształceń sprężystych — w każdym punkcie ciała $\sigma_0 \leq \sigma_{pl}$, $p = 1$, przy czym istnieje co najmniej jeden punkt, w którym $\sigma_0 = \sigma_{pl}$ (tworzy się strefa plastyczna);

(3) stan sprężysto-plastyczny — obszar całego ciała można podzielić na dwa podobszary, przy czym w jednym z nich $\sigma_0 < \sigma_{pl}$, $p = 1$ (strefa sprężysta), w drugim $\sigma_0 = \sigma_{pl}$, $p < 1$ (strefa plastyczna); obszary te rozgranicza powierzchnia o własnościach $\sigma_0 = \sigma_{pl}$, $p = 1$;

(4) granica odkształceń plastycznych — w każdym punkcie ciała $\sigma_0 = \sigma_{pl}$, $p \leq 1$, przy czym istnieje co najmniej jeden punkt, w którym $p = 1$ (strefa sprężysta zanika)⁵⁾;

(5) stan czysto plastyczny — w każdym punkcie ciała $\sigma_0 = \sigma_{pl}$, $p < 1$.

O parametrach, których wartości odpowiadają stanowi sprężystemu, sprężysto-plastycznemu i czysto plastycznemu pręta, będziemy mówili, że znajdują się odpowiednio w zakresie sprężystym, sprężysto-plastycznym itd.

Zajmiemy się najpierw zakresem sprężysto-plastycznym.

W naszym przypadku — pręta o przekroju kołowym — powierzchnią rozgraniczającą strefę plastyczną od sprężystej będzie oczywiście powierzchnia walca kołowego; promień tego walca oznaczymy przez c oraz wprowadzimy oznaczenie

$$(3.1) \quad \frac{c}{a} = w.$$

Strefę sprężystą — walec kołowy pełny — określimy zatem nierównością $0 < \varrho < w$, natomiast strefę plastyczną — walec kołowy drażony (pierścieniowy) — nierównością $w < \varrho < 1$.

Powierzchnia pobocznic pręta musi być wolna od naprężeń promieniowych, zatem pierwszym warunkiem brzegowym będzie

$$(3.2) \quad s_1 = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = 1.$$

Postać matematyczną drugiego warunku brzegowego otrzymamy ze złożenia kilku warunków fizycznych, wynikających ze stykania się strefy plastycznej ze sprężystą wzdłuż powierzchni $\varrho = w$. Wielkości odnoszące się do strefy sprężystej będziemy wyróżniali wskaźnikami s , plastycznej — wskaźnikami p . Na powierzchni styku muszą mianowicie zachodzić równości naprężeń promieniowych w obu strefach,

$$(3.3) \quad \sigma_{rp} = \sigma_{rs},$$

oraz równości przemieszczeń promieniowych, czyli, jak widać z drugiego równania układu (2.4), równości odkształceń obwodowych

$$(3.4) \quad \varepsilon_{\theta p} = \varepsilon_{\theta s};$$

⁵⁾ Pojęcia granic odkształceń sprężystych i plastycznych, związane ze stanem naprężenia w całym ciele, są oczywiście różne od lokalnych (związanych z określonym punktem ciała) pojęć granicy sprężystości czy plastyczności.

wydłużenie strefy sprężystej musi wreszcie wynosić

$$(3.5) \quad \varepsilon_{zs} = \varepsilon = \text{const.}$$

W strefie sprężystej — walcu, poddanym działaniu równomiernego obciążenia ciągłego q_r na pobocznicę i q_z na obu podstawach (jednoczesne skręcanie nie ma tu żadnego wpływu) — panuje jednorodny stan naprężenia, określony składowymi

$$(3.6) \quad \begin{cases} \sigma_{rs} = \sigma_{\theta s} = q_r, \\ \sigma_{zs} = q_z; \end{cases}$$

zatem, zgodnie z prawem H o o k e' a,

$$(3.7) \quad \begin{cases} \varepsilon_{rs} = \varepsilon_{\theta s} = \frac{1}{E} [(1 - \nu) q_r - \nu q_z], \\ \varepsilon_{zs} = \frac{1}{E} (q_z - 2\nu q_r). \end{cases}$$

Po podstawieniu do (3.3), (3.4) i (3.5) odpowiednich wyrażeń, przy uwzględnieniu drugiego z równań (2.6) oraz związku (2.4) i oznaczeń (2.17) i (2.19), otrzymujemy więc układ trzech równań o dwóch niewiadomych q_r i q_z

$$(3.8) \quad \begin{cases} s_1 \sigma_{pl} = q_r, \\ \varphi s_2 \sigma_{pl} - \frac{1}{3} \left(\varphi - \frac{1}{3K} \right) (s_1 + s_2 + s_3) \sigma_{pl} = \frac{1}{E} [(1 - \nu) q_r - q_z], \\ q_z - 2\nu q_r = e \sigma_{pl}, \end{cases}$$

bowiem na powierzchni granicznej

$$(3.9) \quad p = 1 \quad \text{dla} \quad \varrho = w,$$

czyli

$$(3.10) \quad \varphi = \varphi_s = \frac{1}{2G}$$

jest wielkością znaną. Rugując niewiadome q_r i q_z z układu (3.8) otrzymujemy po wykorzystaniu związków (2.24) i (2.25) drugi warunek brzegowy w bardzo prostej postaci

$$(3.11) \quad s'_1 = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = w,$$

przy czym samą wartość w będziemy mogli obliczyć z (3.9) dopiero po rozwiązaniu układu (2.26) (znalezieniu jego całek ogólnych).

W zakresie czysto plastycznym warunki brzegowe przedstawiają się prościej: warunek (3.2) pozostanie bez zmiany, a drugim warunkiem będzie ograniczoność funkcji s_1 w punkcie (a raczej wzdłuż linii) $\varrho = 0$ jak zwykle w zagadnieniach tego typu.

4. Rozwiązanie w zakresie sprężysto-plastycznym. Przybliżenie zerowe

Rozwiążemy najpierw układ (2.26) przy założeniu dodatkowym $\psi_s = 0$. Mamy wtedy $\nu = 1/2$, czyli materiał nieściśliwy, co odpowiada przypadkowi rozważanemu przez G a y d o n a. Równania (2.26) przybiorą postać uproszczoną

$$(4.1) \quad \begin{cases} \varrho p s_1'' + (-\varrho p' + 3p) s_1' = 0, \\ 3\varrho^2 s_1'^2 + 4g^2 \varrho^2 p^2 + 4e^2 p^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

i, jak widać, układem całek szczególnych, spełniających warunki brzegowe (3.2) i (3.11) jest tutaj

$$(4.2) \quad \begin{cases} s_1 = 0, \\ p = \frac{1}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}}, \end{cases}$$

przy czym wykazanie jednoznaczności rozwiązania nie następuje trudności. Promień graniczny określimy teraz z warunku (3.9):

$$(4.3) \quad w = \frac{\sqrt{1-e^2}}{g},$$

a zatem w strefie plastycznej

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{g} < \varrho < 1$$

będziemy mieli następujący rozkład naprężeń:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \sigma_r = \sigma_\theta = 0, \\ \sigma_z = \sigma_{pl} e p = \frac{\sigma_{pl} e}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}}, \\ \tau_{\theta z} = \frac{\sigma_{pl} g \varrho p}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_{pl} g \varrho}{\sqrt{3} \sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}}, \\ \tau_{zr} = \tau_{r\theta} = 0, \end{cases}$$

i odkształceń

$$(4.5) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varphi \sigma_{sr} = -\frac{\sigma_{pl}}{2E} e, \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_{pl}}{E} e, \\ \gamma_{\theta z} = 2\varphi \tau_{\theta z} = \frac{\sigma_{pl} g \varrho}{G\sqrt{3}}, \\ \gamma_{zr} = \gamma_{r\theta} = 0. \end{cases}$$

Powyższe wzory są ściśle w przypadku materiału nieściśliwego, natomiast posłużą nam jako przybliżone w przypadku $\nu \neq 1/2$. Będziemy je wtedy zwali przybliżeniem zerowym.

Wykreślno przedstawienia rozkładu naprężeń w przybliżeniu zerowym nie będziemy zamieszczali, ponieważ podaje je w swej pracy G a y d o n.

Zajmiemy się natomiast szczegółowo związkami, zachodzącymi pomiędzy odkształceniami i wywołującymi je obciążeniami: siłą podłużną N i momentem skręcającym M_s . Wyjdziemy z równań

$$(4.6) \quad \begin{cases} \iint_F \sigma_z dF = N, \\ \iint_F r \tau_{\theta z} dF = M_s, \end{cases}$$

gdzie F jest polem przekroju pręta; ponieważ składowe stanu naprężenia zależą jedynie od zmiennej r , możemy napisać

$$(4.7) \quad \begin{cases} \int_0^a r \sigma_z dr = \frac{N}{2\pi}, \\ \int_0^a r^2 \tau_{\theta z} dr = \frac{M_s}{2\pi}. \end{cases}$$

Wprowadzimy teraz, podobnie jak poprzednio, wielkości bezwymiarowe. Oznaczmy mianowicie

$$(4.8) \quad \frac{N}{a^2 \pi \sigma_{pl}} = n,$$

$$(4.9) \quad \frac{2\sqrt{3} M_s}{a^3 \pi \sigma_{pl}} = m_s.$$

Parametry n i m_s są więc odpowiednio proporcjonalne do siły podłużnej i momentu skręcającego, przy czym współczynniki proporcjonalności są tak dobrane, że $n = 1$, gdy pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne przy czystym rozciąganiu, natomiast $m_s = 1$, gdy pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne przy czystym skręcaniu. Wprowadzając jeszcze bezwymiarową zmienną ϱ , określoną wzorem (2.20), i całkując osobno po strefie sprężystej, osobno po plastycznej, możemy [przy uwzględnieniu oznaczeń (2.17) i (2.18), zależności (2.8), (2.10) i (4.4)] zamiast (4.7) napisać

$$(4.10) \quad \begin{cases} e \int_0^w \varrho d\varrho + e \int_w^1 \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}} = \frac{n}{2}, \\ g \int_0^w \varrho^3 d\varrho + g \int_w^1 \frac{\varrho^3 d\varrho}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}} = \frac{m_s}{4}, \end{cases}$$

a po scałkowaniu

$$(4.11) \quad w^2 + \frac{2}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2} - \frac{2}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2 w^2} = \frac{n}{e},$$

$$(4.12) \quad w^4 + \frac{4}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2} - \frac{8}{3g^4} (e^2 + g^2)^{3/2} - \frac{4w^2}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2 w^2} + \frac{8}{3g^4} (e^2 + g^2 w^2)^{3/2} = \frac{m_s}{g}.$$

Tak więc pięć parametrów: e , g , w , n i m_s związaliśmy trzema równaniami (4.3), (4.11) i (4.12). Równania te są w zasadzie zgodne z wynikami G a y d o n a, otrzymanymi z równań R e u s s a przy założeniu stałego stosunku wydłużenia do kąta skręcenia, a różnią się jedynie tym, iż G a y d o n otrzymuje odkształcenie liniowe wyrażone w mierze logarytmicznej.

Zajmiemy się teraz zbadaniem zakresu ważności rozwiązania. Zgodnie z rozważaniami, przeprowadzonymi w p. 3, stan sprężysto-plastyczny pręta jest zawarty między granicą odkształceń sprężystych a granicą odkształceń plastycznych. Zależności na granicy odkształceń sprężystych otrzymamy podstawiając do równań (4.3), (4.11) i (4.12) $w = 1$, ponieważ odpowiada to tworzeniu się strefy plastycznej. Trzy zależności wiążą teraz cztery zmienne, zatem drogą rugowania możemy otrzymać same funkcje jednej zmiennej. Zostały one zestawione w tablicy 1.

Podobnie, podstawiając $w = 0$, otrzymujemy zależności na granicy odkształceń plastycznych — strefa sprężysta zanika. Z równania (4.3) wy-

nika, że $e = 1$ ⁶⁾, a trzy pozostałe parametry, g , n i m_s , są związane dwoma równaniami (4.11) i (4.12). W wyniku rugowania otrzymujemy więc znowu funkcje jednej zmiennej, jednak tym razem nie wszystkie dadzą się przedstawić w postaci skończonej kombinacji funkcji elementarnych: w dwóch przypadkach otrzymujemy do rozwiązania równania trzeciego stopnia o ujemnym wyróżniku (choć tylko jeden pierwiastek spełnia warunki zagadnienia). Zestawienie podaje tabela 2. Niemożność wyrażenia odpowiedniej zależności za pomocą funkcji elementarnych została zaznaczona w tabelicy kreską poziomą.

Znając granice ważności rozwiązania możemy przystąpić do zestawienia zależności w zakresie sprężysto-plastycznym. Rugując ze związków (4.11) i (4.12) zmienną w , otrzymujemy z łatwością funkcje $n = f(e, g)$ oraz $m_s = f(e, g)$, uzależniające obciążenia od odkształceń. Są to funkcje monotoniczne ze względu na obie zmienne [podobnie, jak funkcja $w = f(e, g)$, określona równaniem (4.3)] i dają się, przynajmniej teoretycznie, odwrócić, określając ważne dla zastosowań zależności odwrotne $e = f(n, m_s)$ oraz $g = f(n, m_s)$.

Niestety praktyczne wykonanie tego odwrócenia jest poważnie utrudnione koniecznością rozwiązywania równań algebraicznych wysokich stopni (do dwunastego włącznie), toteż w celu efektywnego uzyskania poszukiwanych zależności będziemy musieli pójść nieco inną drogą.

Zamiast jawnych funkcji dwóch zmiennych postaramy się najpierw uzyskać związki uwikłane, łączące poszczególne trójki spośród parametrów e , g , n , m_s i w . Łatwo stwierdzić, iż związków tych będzie 10. Napisanie ośmiu spośród nich nie przedstawia zasadniczych trudności; są to równania algebraiczne stopnia 2-12 ze względu na poszczególne zmienne. Pozostałe dwie zależności, mianowicie $F(m_s, n, w) = 0$ oraz $F(m_s, n, g) = 0$, dadzą się otrzymać z tamtych przez rugowanie zmiennych metodą F e r m a t a lub za pomocą wyznaczników S y l w e s t e r a ⁷⁾, jednak metody te prowadzą do nadzwyczaj długich rachunków, a rów-

Tablica 1. Zestawienie zależności na granicy odkształceń sprężystych

Zmienne	Zależności
w	$w = 1 = \text{const.}$
e, g	$e = \sqrt{1 - g^2},$ $g = \sqrt{1 - e^2},$
e, n	$e = n,$ $n = e,$
e, m_s	$e = \sqrt{1 - m_s^2},$ $m_s = \sqrt{1 - e^2},$
g, n	$g = \sqrt{1 - n^2},$ $n = \sqrt{1 - g^2},$
g, m_s	$g = m_s,$ $m_s = g,$
n, m_s	$n = \sqrt{1 - m_s^2},$ $m_s = \sqrt{1 - n^2}.$

⁶⁾ Dla uproszczenia będziemy zakładali $g \geq 0$ oraz $e \geq 0$ (rozciąganie). W przypadku ściskania rozwiązanie nie podlega jednak żadnym zmianom.

⁷⁾ Por. np. [12].

nienia wynikowe z powodu swej zawiłości nie mogą być przydatne dla celów praktyki.

Niektóre z otrzymanych związków dadzą się rozwikłać ze względu na poszczególne zmienne przy użyciu funkcji elementarnych. Zestawienie uzyskanych w ten sposób wzorów podaje tablica 3.

Tablica 2. Zestawienie zależności na granicy odkształceń plastycznych

Zmienne	Zależności
w	$w = 0 = \text{const}$,
e	$e = 1 = \text{const}$,
n, g	$n = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + g^2}}$,
	$g = \frac{2}{n} \sqrt{1 - n}$,
g, m_s	$m_s = \frac{4}{3g^3} [2 - (2 - g^2) \sqrt{1 + g^2}]$,
	$g = f(m_s) : -$,
n, m_s	$m_s = \frac{2}{3} (2 + n) \sqrt{1 - n} = \frac{4}{3} \sqrt{1 - \frac{3}{4} n^2 - \frac{1}{4} n^3}$,
	$n = f(m_s) : -$.

Tak więc uzyskaliśmy jedynie dwanaście spośród trzydziestu możliwych związków. Liczba ta jest niewątpliwie zbyt mała dla zastosowań praktycznych, tym bardziej że brak zależności odkształceń (a więc e i g) od obciążeń (n, m_s). Jednak podane równania stanowią dostateczną podstawę do uzyskania poszukiwanych zależności na drodze numerycznej lub graficznej, czym zajmiemy się w p. 6.

5. Rozwiązanie w zakresie czysto plastycznym. Przybliżenie zerowe

Rozważania nasze uzupełnimy teraz rozwiązaniem postawionego zagadnienia w zakresie czysto plastycznym. Założymy $\psi_s = 0$, uzyskując rozwiązanie ściśle w przypadku materiału nieściśliwego, a przybliżenie zerowe w przypadku ściśliwego.

Układ (2.26) redukuje się znowu do (4.1) przy zmienionych warunkach brzegowych, które omówiliśmy szczegółowo w p. 3. Jednak widać od razu, że układ całek szczególnych (4.2) spełnia i te warunki i w całym obszarze $0 \leq \varrho \leq 1$ stan naprężenia określają wzory (4.4), a stan odkształcenia wzory (4.5).

Tablica 3. Zestawienie zależności obowiązujących w zakresie sprężysto-plastycznym

Zmienne	Zależności
e, g, w	$w = \frac{\sqrt{1-e^2}}{g},$ $g = \frac{\sqrt{1-e^2}}{w},$ $e = \sqrt{1-g^2 w^2},$
e, g, n	$n = \frac{e}{g^2} (2\sqrt{e^2+g^2} - 1 - e^2),$ $g = \frac{\sqrt{e}}{n} \sqrt{2e-n-n e^2 + 2\sqrt{e(1-en)}(e-n)},$ $e = f(g, n) : -,$
e, g, m_s	$m_s = \frac{4}{3g^3} \left[(g^2 - 2e^2)\sqrt{e^2+g^2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{4}e^4 \right],$ $g = f(e, m_s) : -,$ $e = f(g, m_s) : -,$
e, w, n	$n = \frac{ew}{1-e^2} [2\sqrt{1-e^2+e^2 w^2} - w(1+e^2)],$ $w = \frac{1}{\sqrt{e(1-e^2)}} \sqrt{2e-n-n e^2 - 2\sqrt{e(1-en)}(e-n)},$ $e = f(w, n) : -$
e, w, m_s	$m_s = \frac{4w^3}{3(1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{1-e^2-2e^2 w^2}{w^2} \sqrt{1+e^2 w^2 - e^2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{4}e^4 \right),$ $w = f(e, m_s) : -,$ $e = f(w, m_s) : -,$
g, w, n	$n = \frac{\sqrt{1-g^2 w^2}}{g^2} (2\sqrt{1+g^2-g^2 w^2} - 2 + g^2 w^2),$ $w = f(g, n) : -,$ $g = f(w, n) : -,$
g, w, m_s	$m_s = \frac{4}{3g^3} \{ [g^2 + g^2 w^2 - 2] \sqrt{1+g^2-g^2 w^2} + 2 - 3g^2 w^2 + \frac{3}{4}g^4 w^4 \},$ $w = f(g, m_s) : -,$ $g = f(w, m_s) : -,$
e, n, m_s	$m_s = \frac{4}{3[2e-n-n e^2 + 2\sqrt{e(1-en)}(e-n)]^{3/2}} \times$ $\times \left\{ \frac{n^3}{e^{3/2}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{4}e^4 \right) + [2e-n-n e^2 - 2en^2 + \right.$ $\left. + 2\sqrt{e(1-en)}(e-n)] \sqrt{2e-n-n e^2 + en^2 + 2\sqrt{e(1-en)}(e-n)} \right\},$ $e = f(n, m_s) : -,$ $n = f(e, m_s) : -,$
g, n, m_s	$m_s = f(g, n) : -,$ $g = f(n, m_s) : -,$ $n = f(g, m_s) : -,$
w, n, m_s	$m_s = f(w, n) : -,$ $w = f(n, m_s) : -,$ $n = f(w, m_s) : -.$

Zmianie ulegną dopiero zależności między odkształceniami i obciążeniami. Zamiast (4.10) napiszemy teraz

$$(5.1) \quad \begin{cases} e \int_e^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{e^2 + g^2 \rho^2}} = \frac{n}{2}, \\ g \int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{e^2 + g^2 \rho^2}} = \frac{m_s}{4}, \end{cases}$$

a po scałkowaniu

$$(5.2) \quad \frac{2}{g^2} (\sqrt{e^2 + g^2} - e) = \frac{n}{e},$$

$$(5.3) \quad \frac{4}{g^2} \sqrt{e^2 + g^2} - \frac{8}{3g^4} [(e^2 + g^2)^{3/2} - e^3] = \frac{m_s}{g}.$$

Otrzymaliśmy dwa związki między czterema zmiennymi e , g , n i m_s , z których, przez rugowanie, można na ogół uzyskać cztery związki uwikłane, łączące poszczególne trójki zmiennych. Okazuje się jednak, że bez względu na wartości parametrów e i g pomiędzy parametrami n i m_s w całym zakresie plastycznym istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna (ta sama, z którą mieliśmy do czynienia już na granicy odkształceń plastycznych)⁸⁾, co redukuje ilość związków uwikłanych do trzech: $F(e, g, n) = 0$, $F(e, g, m_s) = 0$ oraz $F(n, m_s) = 0$. Niektóre z tych związków dają się rozwikłać ze względu na poszczególne zmienne przy użyciu funkcji elementarnych; uzyskane w ten sposób wzory podaje tablica 4.

Tablica 4. Zestawienie zależności obowiązujących w zakresie czysto plastycznym

Zmienne	Zależności
e, g, n	$n = \frac{2e}{e + \sqrt{e^2 + g^2}},$ $g = \frac{2e}{n} \sqrt{1 - n},$ $e = \frac{gn}{2\sqrt{1 - n}},$
e, g, m_s	$m_s = \frac{4}{3g^3} [2e^3 + (g^2 - 2e^2)\sqrt{e^2 + g^2}],$ $g = f(e, m_s) : -,$ $e = f(g, m_s) : -,$
n, m_s	$m_s = \frac{2}{3} (2 + n) \sqrt{1 - n} = \frac{4}{3} \sqrt{1 - \frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{4}n^3},$ $n = f(m_s) : -.$

⁸⁾ Określa ona nośność graniczną pręta. Por. np. [11].

6. Uzupełnienie rozwiązania na drodze graficznej i numerycznej

Tablice 3 i 4 uzupełnimy teraz na drodze graficznej i numerycznej. Rysując np. wykres funkcji $m_s = f(e, n)$ w płaszczyźnie $e - m_s$ (przy ustalonych wartościach parametru n), otrzymujemy zarazem wykres funkcji odwrotnej, mianowicie $e = f(n, m_s)$; także wartości liczbowe funkcji $e = f(n, m_s)$ uzyskujemy stosunkowo łatwo na drodze interpolacji funkcji jednej zmiennej. Teraz uzyskujemy łatwo wartości funkcji $g = f(n, m_s)$, jako funkcji złożonej $g = f[e(n, m_s), n]$, funkcji $w = f(n, m_s)$, wykorzystując związek (4.3) itd.

Wartości ważniejszych dla zastosowań funkcji $w = f(e, g)$, $n = f(e, g)$, $m_s = f(e, g)$, $w = f(m_s, n)$, $e = f(m_s, n)$ oraz $g = f(m_s, n)$ określonych w zakresie sprężysto-plastycznym (i ewentualnie czysto plastycznym) podają tablice 5-10.

Zamieszczone tablice pozwolą obliczyć odkształcenia pręta przy danych obciążeniach i na odwrót, nie rozwiązują jednak wszystkich zagadnień, związanych z wyznaczaniem parametrów, charakteryzujących przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta. Korzystne okaże się tu wykreślne przedstawienie zależności, bardziej pogładowe, chociaż mniej dokładne. Wykresy wszystkich trzydziestu funkcji w zakresie sprężysto-plastycznym i ośmiu w zakresie czysto plastycznym podają rysunki 1-10. Umożliwiają one łatwe wyznaczenie trzech parametrów za pomocą dwóch pozostałych.

Tablica 5. Wartości funkcji $w = f(e, g)$

$g \backslash e$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
0,0											nieozn.	
0,1											0,000	
0,2											0,000	
0,3											0,000	
0,4											0,000	
0,5			zakres sprężysty, w nie istnieje								0,872	0,000
0,6									1,000	0,726	0,000	
0,7									0,857	0,623	0,000	
0,8							1,000	0,893	0,750	0,545	0,000	
0,9						0,962	0,889	0,793	0,667	0,484	0,000	
1,0	1,000	0,995	0,980	0,954	0,917	0,866	0,800	0,714	0,600	0,436	0,000	
1,2	0,833	0,828	0,816	0,795	0,764	0,722	0,667	0,595	0,500	0,363	0,000	
1,5	0,667	0,663	0,653	0,636	0,611	0,577	0,533	0,476	0,400	0,291	0,000	
2,0	0,500	0,497	0,490	0,477	0,458	0,433	0,400	0,357	0,300	0,218	0,000	
2,5	0,400	0,398	0,392	0,382	0,367	0,346	0,320	0,286	0,240	0,174	0,000	
3,0	0,333	0,332	0,327	0,318	0,305	0,289	0,267	0,238	0,200	0,145	0,000	
5,0	0,200	0,199	0,196	0,191	0,183	0,173	0,160	0,143	0,120	0,087	0,000	
10,0	0,100	0,099	0,098	0,095	0,092	0,087	0,080	0,071	0,060	0,044	0,000	
∞	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

Tablica 6. Wartości funkcji $n = f(e, g)$

$g \backslash e$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0	∞
0,0											1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1											0,998	0,998	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2											0,990	0,993	0,996	0,998	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000
0,3											0,978	0,985	0,990	0,994	0,996	0,998	0,999	1,000	1,000
0,4											0,963	0,974	0,983	0,990	0,994	0,996	0,998	1,000	1,000
0,5									0,897	0,897	0,944	0,960	0,974	0,985	0,990	0,993	0,998	0,999	1,000
0,6									0,800	0,883	0,923	0,944	0,963	0,978	0,986	0,990	0,996	0,999	1,000
0,7									0,793	0,864	0,901	0,927	0,951	0,971	0,981	0,987	0,995	0,999	1,000
0,8									0,600	0,779	0,841	0,877	0,908	0,938	0,963	0,976	0,983	0,994	0,998
0,9									0,499	0,595	0,683	0,759	0,839	0,923	0,954	0,970	0,978	0,992	0,998
1,0	0,000	0,100	0,200	0,299	0,398	0,493	0,583	0,666	0,737	0,793	0,828	0,869	0,908	0,944	0,963	0,974	0,990	0,998	1,000
1,2	0,000	0,097	0,194	0,288	0,381	0,469	0,551	0,626	0,691	0,744	0,781	0,828	0,877	0,923	0,948	0,963	0,986	0,996	1,000
1,5	0,000	0,099	0,177	0,263	0,346	0,425	0,499	0,566	0,626	0,675	0,714	0,769	0,828	0,889	0,923	0,944	0,978	0,994	1,000
2,0	0,000	0,075	0,149	0,222	0,292	0,359	0,422	0,481	0,534	0,580	0,618	0,679	0,750	0,828	0,877	0,908	0,963	0,990	1,000
2,5	0,000	0,064	0,127	0,189	0,250	0,308	0,363	0,415	0,462	0,505	0,542	0,604	0,679	0,769	0,828	0,869	0,944	0,985	1,000
3,0	0,000	0,056	0,111	0,165	0,218	0,268	0,317	0,363	0,406	0,445	0,481	0,542	0,618	0,714	0,781	0,828	0,923	0,978	1,000
5,0	0,000	0,036	0,072	0,107	0,142	0,176	0,209	0,241	0,272	0,301	0,328	0,378	0,446	0,542	0,618	0,679	0,828	0,944	1,000
10,0	0,000	0,019	0,038	0,057	0,075	0,094	0,112	0,130	0,147	0,164	0,181	0,213	0,258	0,328	0,390	0,446	0,618	0,828	1,000
∞	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	nieozn.

Tablica 7. Wartości funkcji $m_s = f(e, g)$

$g \backslash e$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0	∞
0,0											0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1											0,100	0,083	0,067	0,050	0,040	0,033	0,020	0,010	0,000
0,2											0,197	0,165	0,133	0,100	0,080	0,067	0,040	0,020	0,000
0,3											0,291	0,245	0,197	0,149	0,119	0,100	0,060	0,030	0,000
0,4											0,380	0,322	0,261	0,197	0,159	0,133	0,080	0,040	0,000
0,5										0,497	0,463	0,395	0,322	0,245	0,197	0,165	0,100	0,050	0,000
0,6									0,600	0,581	0,540	0,463	0,380	0,291	0,236	0,197	0,119	0,060	0,000
0,7									0,690	0,656	0,610	0,528	0,436	0,337	0,273	0,229	0,139	0,070	0,000
0,8									0,763	0,721	0,673	0,587	0,490	0,380	0,310	0,261	0,159	0,080	0,000
0,9									0,825	0,779	0,730	0,642	0,540	0,422	0,345	0,291	0,178	0,090	0,000
1,0	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,975	0,952	0,919	0,878	0,831	0,781	0,692	0,587	0,463	0,380	0,322	0,197	0,100	0,000
1,2	1,140	1,138	1,131	1,119	1,100	1,074	1,044	1,006	0,963	0,916	0,868	0,781	0,673	0,540	0,447	0,380	0,236	0,119	0,000
1,5	1,235	1,232	1,223	1,208	1,187	1,161	1,129	1,093	1,053	1,011	0,968	0,887	0,781	0,642	0,540	0,463	0,291	0,149	0,000
2,0	1,292	1,289	1,282	1,269	1,253	1,231	1,206	1,177	1,146	1,113	1,079	1,011	0,917	0,781	0,673	0,587	0,380	0,197	0,000
2,5	1,312	1,310	1,304	1,295	1,282	1,266	1,246	1,224	1,200	1,174	1,147	1,092	1,011	0,887	0,781	0,692	0,463	0,245	0,000
3,0	1,321	1,320	1,315	1,308	1,298	1,285	1,270	1,253	1,234	1,213	1,192	1,147	1,079	0,968	0,868	0,781	0,540	0,291	0,000
5,0	1,331	1,330	1,328	1,325	1,321	1,315	1,308	1,301	1,292	1,283	1,272	1,250	1,213	1,147	1,079	1,011	0,781	0,463	0,000
10,0	1,333	1,333	1,332	1,331	1,330	1,329	1,327	1,324	1,322	1,319	1,316	1,309	1,297	1,272	1,244	1,213	1,079	0,781	0,000
∞	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	nieozn.

zakres sprężysty, $m_s = g$

Tablica 8. Wartości funkcji $w = f(m_s, n)$

$m_s \backslash n$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00		
0,00																							
0,05																							
0,10																							
0,15																							
0,20																							
0,25																							
0,30																							
0,35																							
0,40																							
0,45																							
0,50																							
0,55																							
0,60																							
0,65																							
0,70																							
0,75																							
0,80																							
0,85																							
0,90																							
0,95																							
1,00																							
1,05																							
1,10																							
1,15																							
1,20																							
1,25																							
1,30																							
4/3																							

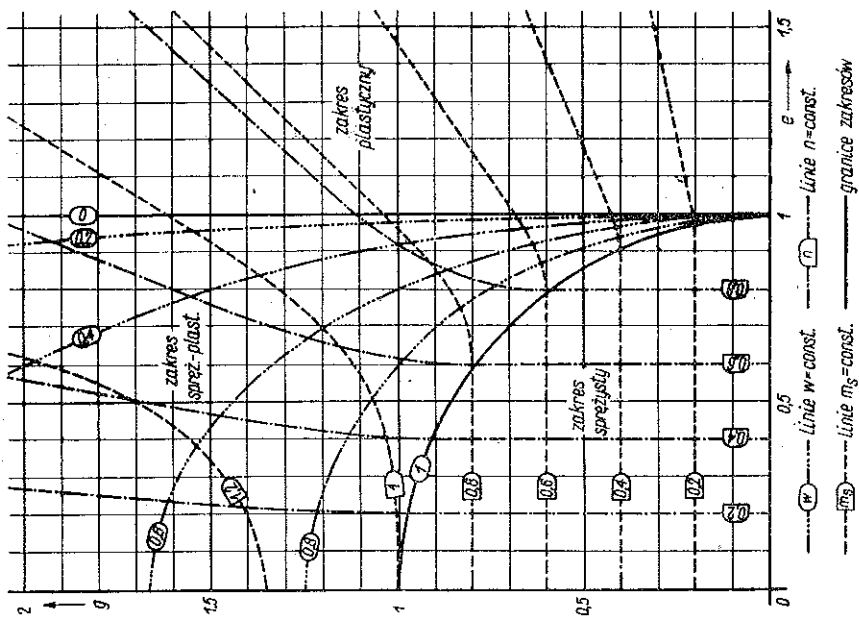
nieozn.

zakres sprężysty, w nie istnieje

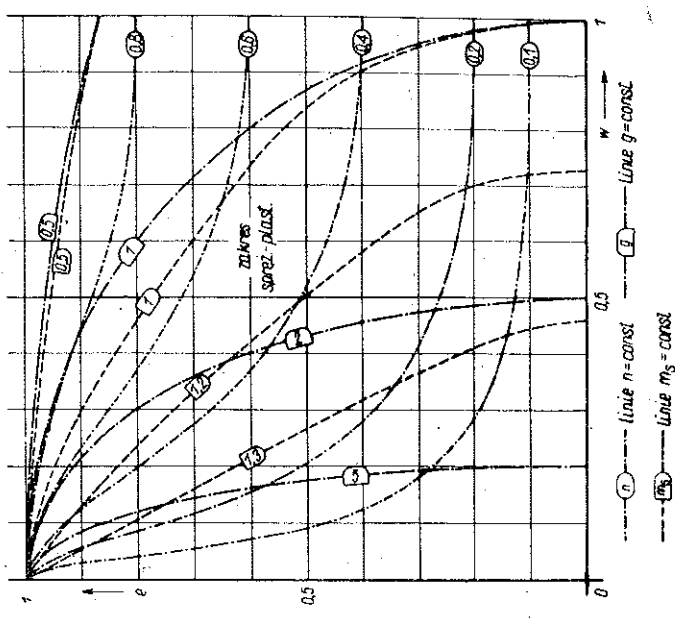
Tablica 10. Wartości funkcji $g = f(m_s, n)$

$m_s \backslash n$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,0	
0,00																						
0,05																						
0,10																						
0,15																						
0,20																						
0,25																						
0,30																						
0,35																					0,351	
0,40																					0,408	
0,45																					0,450	
0,50																					0,503	
0,55																					0,550	
0,60																					0,600	
0,65																					0,654	
0,70																					0,702	
0,75																					0,752	
0,80																					0,800	
0,85																					0,854	
0,90																					0,900	
0,95																					0,950	
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001	1,002	1,004	1,007	1,016	1,028	1,046	1,077	1,129	1,237							0,800	0,803
1,05	1,056	1,056	1,057	1,059	1,062	1,066	1,073	1,083	1,098	1,122	1,158	1,216	1,337								0,850	0,854
1,10	1,126	1,127	1,129	1,133	1,140	1,149	1,163	1,183	1,212	1,258	1,332	1,483									0,900	0,902
1,15	1,221	1,222	1,226	1,234	1,247	1,265	1,291	1,331	1,391	1,494	1,705										0,950	0,952
1,20	1,357	1,360	1,369	1,385	1,409	1,447	1,503	1,593	1,761	2,215											1,009	1,016
1,25	1,587	1,594	1,614	1,651	1,712	1,813	1,993	2,468													1,083	1,098
1,30	2,154	2,183	2,269	2,446	2,873																1,163	1,183
4:3	∞																				1,291	1,331

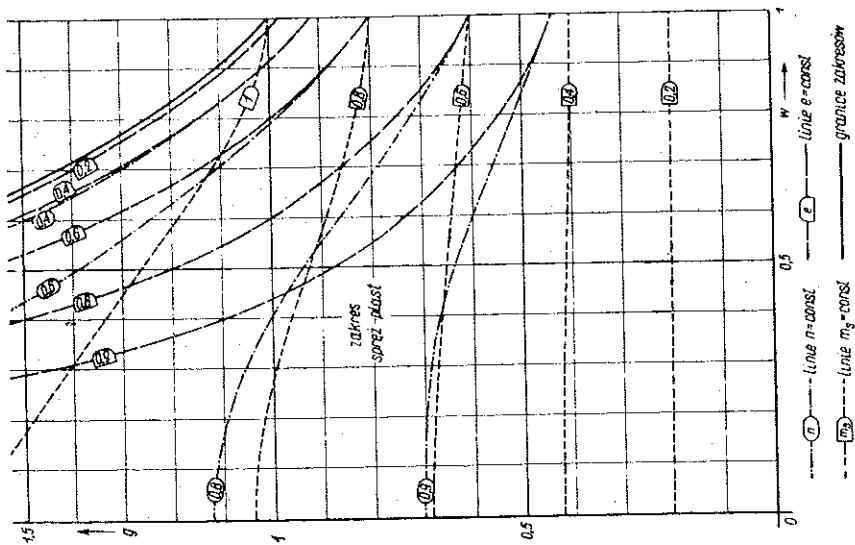
zakres sprężysty, $g = m_s$



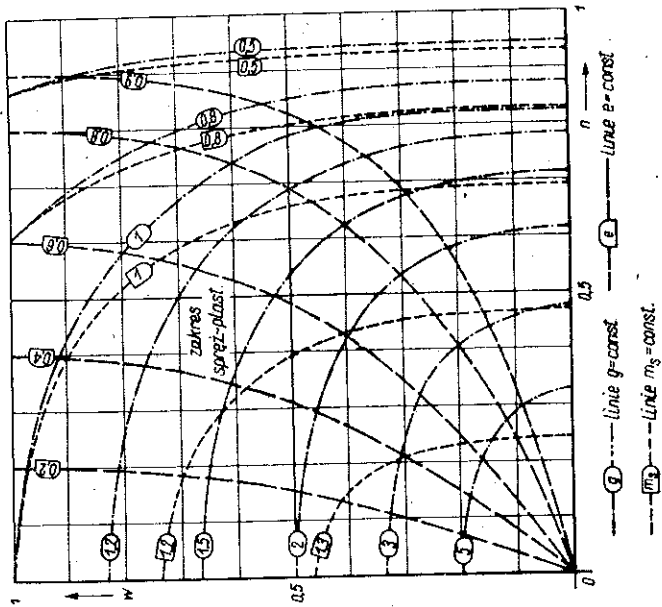
Rys. 1. Wykres w płaszczyźnie e-g



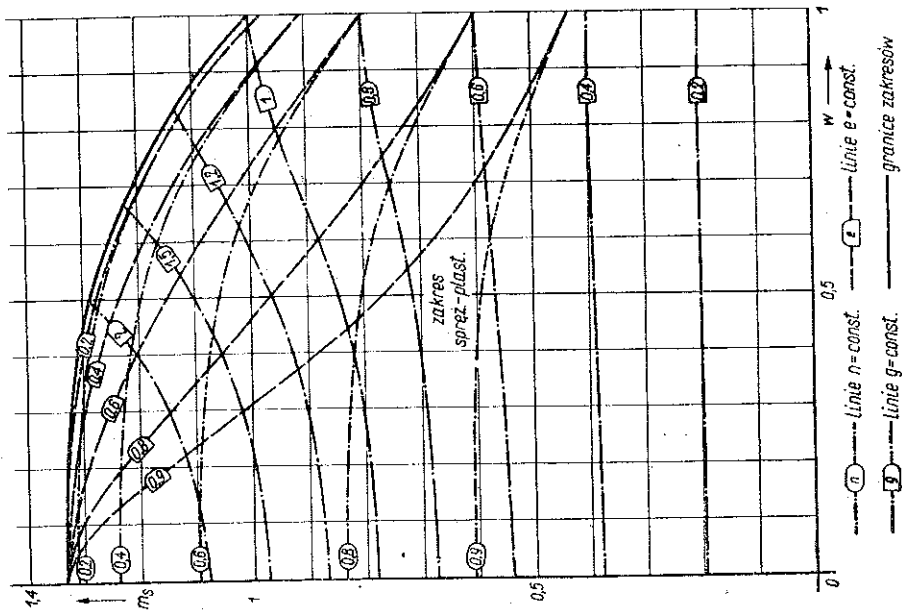
Rys. 2. Wykres w płaszczyźnie w-e



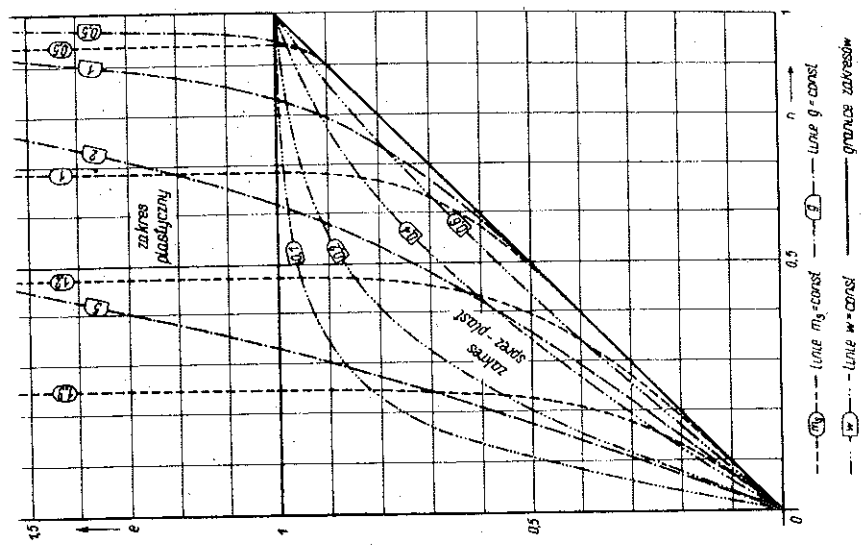
Rys. 3. Wykres w płaszczyźnie w - n



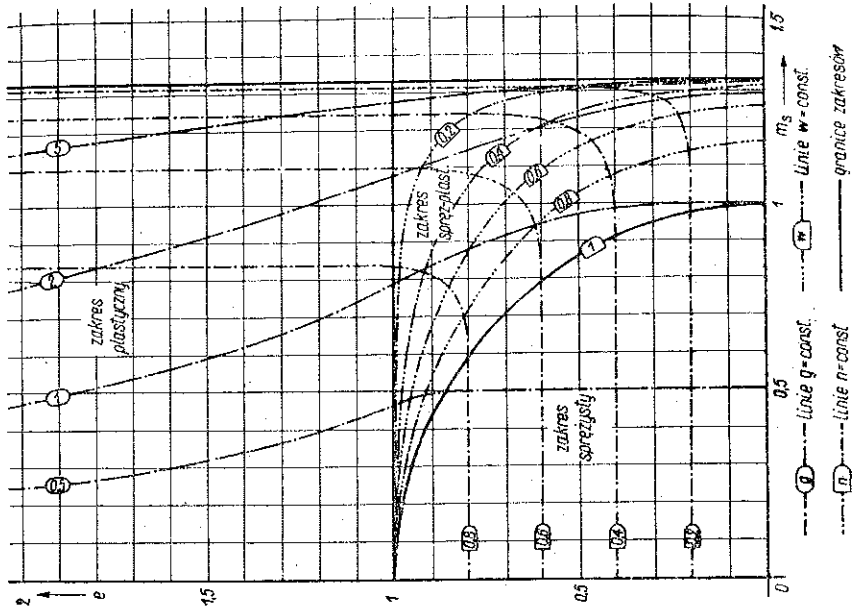
Rys. 4. Wykres w płaszczyźnie n - w



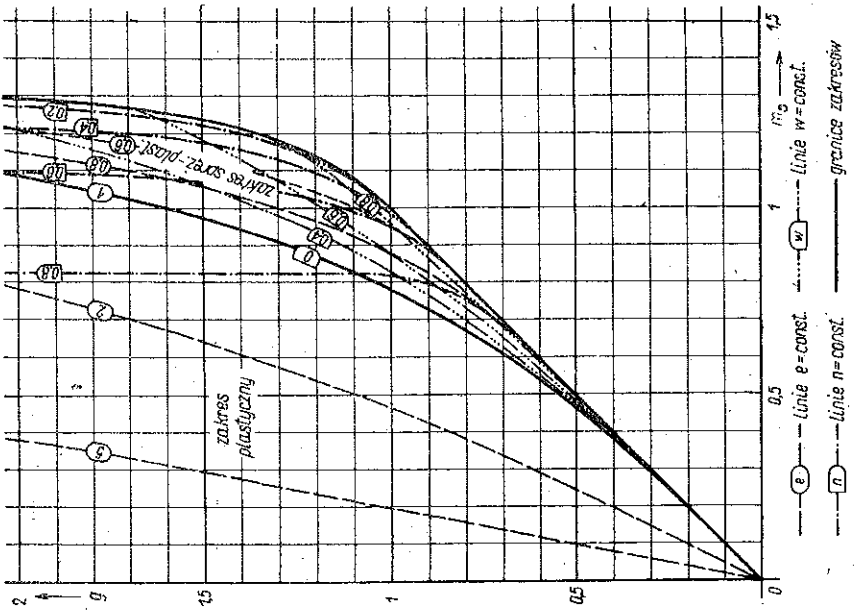
Rys. 5. Wykres w płaszczyźnie $w-m_s$



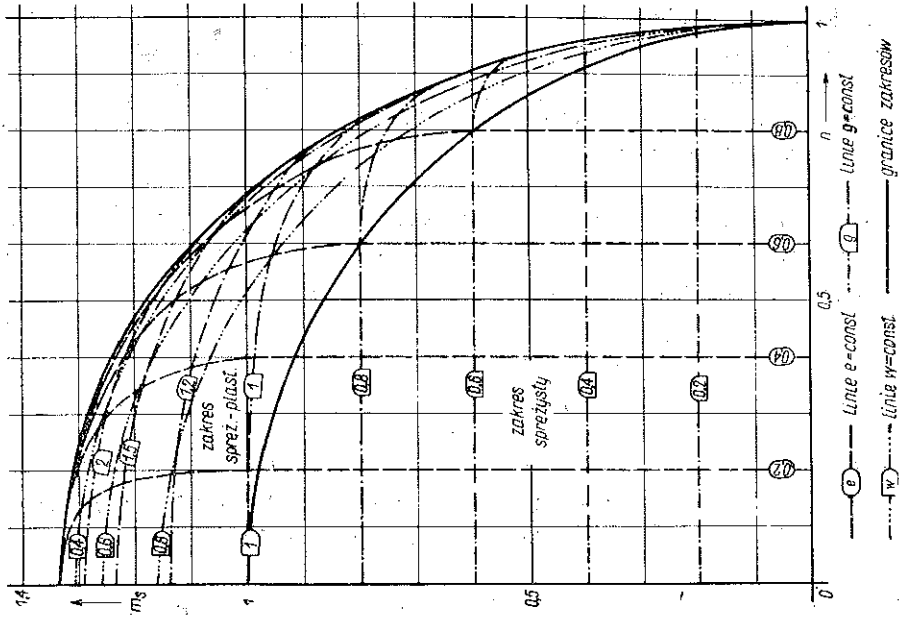
Rys. 6. Wykres w płaszczyźnie $n-e$



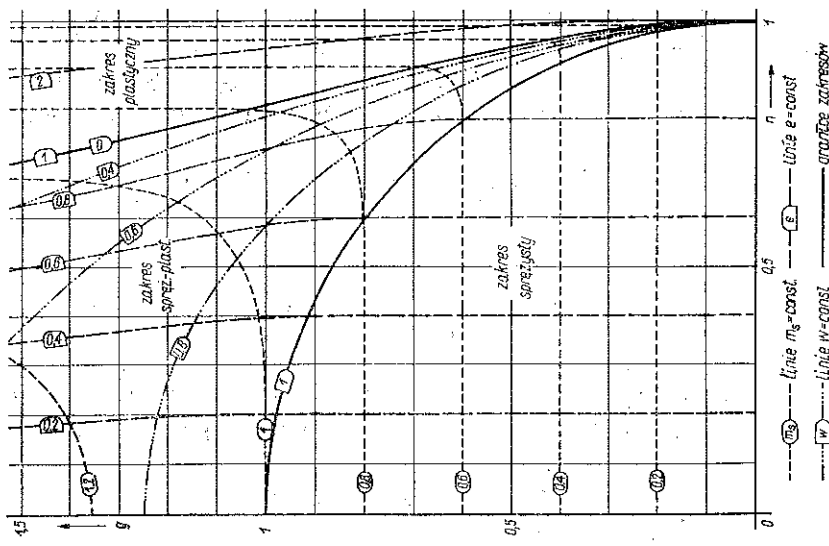
Rys. 8. Wykres w płaszczyźnie m_s-e



Rys. 7. Wykres w płaszczyźnie m_g-g



Rys. 10. Wykres w płaszczyźnie $n-m_s$



Rys. 9. Wykres w płaszczyźnie $n-g$

7. Rozwiązanie w zakresie sprężysto-plastycznym. Przybliżenie pierwsze

Rozwiązanie w zakresie sprężysto-plastycznym, uzyskane w p. 4, jest ściśle tylko w przypadku materiału nieściśliwego ($\psi_s = 0$, $\nu = 1/2$); w przypadku materiałów ściśliwych, z jakimi zazwyczaj mamy do czynienia w praktyce, rozwiązanie to nazwaliśmy przybliżeniem zerowym. Posłuży ono bowiem teraz do uzyskania rozwiązań dokładniejszych, umożliwiających ocenę błędu przybliżenia.

W tym celu zastosujemy metodę pokrewną metodzie «małych parametrów» (zakłóceń)⁹⁾. Założymy mianowicie, że ściśle rozwiązanie układu (2.26) przy warunkach brzegowych (3.2) i (3.11) daje się rozwinąć w szereg potęgowej (M a c l a u r i n a) zmiennej ψ_s , czyli

$$(7.1) \quad \begin{cases} s_1 = s_{10} + s_{11} \psi_s + s_{12} \psi_s^2 + \dots \\ p = p_0 + p_1 \psi_s + p_2 \psi_s^2 + \dots \end{cases}$$

Ponieważ wielokrotnie stwierdzono, że wartość stałej P o i s s o n a ν , a więc i stałej ψ_s [związanej z nią równaniem (2.16)], ma nieznaczny wpływ na rozkład naprężeń¹⁰⁾, możemy się spodziewać szybkiej zbieżności szeregów (7.1).

Podstawiając do (7.1) $\psi_s = 0$, otrzymujemy $s_1 = s_{10}$, $p = p_0$; s_{10} i p_0 są zatem rozwiązaniami, uzyskanymi przez nas w p. 4, określonymi równaniami (4.2). Zajmiemy się teraz wyznaczeniem funkcji s_{11} i p_1 ; będą one stanowiły główną część błędu przybliżenia zerowego, ponieważ dla większości materiałów konstrukcyjnych $\nu = 0,3$, $\psi_s = 0,154$ i wyraz zawierający $\psi_s^2 = 0,023$ możemy już zazwyczaj pominąć wobec jedności. Funkcje powstałe z zachowania w odpowiednim szeregu M a c l a u r i n a zmiennej ψ_s jedynie wyrazów zerowego i pierwszego będziemy zwali pierwszym przybliżeniem.

Do układu (2.26) podstawimy więc

$$(7.2) \quad \begin{cases} s_1 = s_{11} \psi_s, \\ p = \frac{1}{\sqrt{e^2 + g^2 \psi_s^2}} + p_1 \psi_s \end{cases}$$

i przyrównamy do zera wyrażenia przy pierwszej potędze ψ_s . Wygodnie będzie tutaj wprowadzić nową funkcję niewiadomą η , określoną wzorem

$$(7.3) \quad \frac{p_1}{p_0} = p_1 \sqrt{e^2 + g^2 \psi_s^2} = \eta,$$

⁹⁾ Por. np. [2] oraz [13].

¹⁰⁾ Por. np. [10].

bowiem $\eta\psi_s$ będzie wtedy wprost błędem procentowym zerowego przybliżenia funkcji p . Otrzymujemy stosunkowo łatwy do rozwiązania układ dwóch równań niezależnych

$$(7.4) \quad \begin{cases} \varrho (e^2 + g^2 \varrho^2)^2 s''_{11} + (3e^2 + 4g^2 \varrho^2)(e^2 + g^2 \varrho^2) s'_{11} = 2eg^2 \varrho, \\ (e^2 + g^2 \varrho^2)^{3/2} \eta + e^2 \sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2} - e^2 = 0. \end{cases}$$

Najpierw musimy rozwiązać drugie równanie, by sprecyzować warunki brzegowe dla pierwszego (nie znamy promienia granicznego w):

$$(7.5) \quad \eta = -\frac{e^2 (\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2} - 1)}{(e^2 + g^2 \varrho^2)^{3/2}},$$

a stąd

$$(7.6) \quad p = \frac{1}{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}} - \frac{\psi_s e^2 (\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2} - 1)}{(e^2 + g^2 \varrho^2)^2}.$$

Warunek (3.9) napiszemy więc w postaci

$$(7.7) \quad 1 = \frac{1}{\sqrt{e^2 + g^2 w^2}} - \frac{\psi_s e^2 (\sqrt{e^2 + g^2 w^2} - 1)}{(e^2 + g^2 w^2)^2},$$

a rozwiązanie tego równania ze względu na w daje

$$(7.8) \quad w = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{g},$$

czyli że pierwsze przybliżenie pokrywa się w tym przypadku z przybliżeniem zerowym [wzór (4.3)].

Możemy teraz przystąpić do całkowania pierwszego równania (7.4). Całka ogólna tego równania ma postać

$$(7.9) \quad s_{11} = \frac{1}{e} \ln \frac{e^2 + g^2 \varrho^2}{\varrho^2} - \frac{2e}{g^2 \varrho^2} + C_1 \left(\frac{g^2}{e^3} \ln \frac{\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2} + e}{\varrho} - \frac{e^2 + g^2 \varrho^2}{e^2 \varrho^2} \right) + C_2,$$

a warunki brzegowe (3.2) i (3.11) z podstawieniem (7.8) wyznaczają wartości stałych C_1 i C_2

$$(7.10) \quad C_1 = -\frac{e(1+e^2)}{g^2},$$

$$(7.11) \quad C_2 = -\frac{1}{e} \ln(e^2+g^2) + \frac{2e}{g^2} + \\ + (1+e^2) \left[\frac{1}{e^2} \ln(\sqrt{e^2+g^2}+e) - \frac{\sqrt{e^2+g^2}}{eg^2} \right],$$

więc ostatecznie

$$(7.12) \quad s_{11} = - \left\{ \frac{1+e^2}{e^2} \ln \frac{\sqrt{e^2+g^2} \varrho^2 + e}{\varrho (\sqrt{e^2+g^2} + e)} - \frac{1}{e} \ln \frac{e^2+g^2 \varrho^2}{(e^2+g^2) \varrho^2} + \right. \\ \left. + \frac{2e}{g^2} \left(\frac{1}{\varrho^2} - 1 \right) - \frac{(1+e^2)(\sqrt{e^2+g^2} \varrho^2 - \varrho^2 \sqrt{e^2+g^2})}{eg^2 \varrho^2} \right\}.$$

Znamy już zatem rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych, bowiem — w pierwszym przybliżeniu —

$$(7.13) \quad \sigma_r = s_{11} \psi_s \sigma_{pl}$$

oraz, zgodnie z (2.24),

$$(7.14) \quad \sigma_\theta = (s'_{11} + \varrho s''_{11}) \psi_s \sigma_{pl} = s_{21} \psi_s \sigma_{pl},$$

przy czym funkcję s'_{11} określa stosunkowo prosty wzór

$$(7.15) \quad s'_{11} = \frac{2e(\sqrt{e^2+g^2} \varrho^2 - 1)(\sqrt{e^2+g^2} \varrho^2 - e^2)}{g^2 \varrho^3 (e^2 + g^2 \varrho^2)}$$

Naprężenia promieniowe i obwodowe są wynikiem mniejszej wartości współczynnika P o i s s o n a (funkcji odkształcenia poprzecznego) w wewnętrznej, sprężystej strefie pręta niż w zewnętrznej, plastycznej: przy rozciąganiu strefa plastyczna «kurczy» się silniej i wywiera nacisk na strefę sprężystą. Podobny rozkład naprężeń uzyskalibyśmy, rozciągając gumową rurkę, nałożoną na sztywny, pasowany trzpień. Rozkład ten przedstawiają rys. 11 i 12.

Przejdziemy do obliczenia ważniejszych dla nas naprężeń σ_z i $\tau_{\theta z}$ oraz oszacowania błędów przybliżenia zerowego. Podstawienie (7.2) do wzoru (2.25), rozwinięcie uzyskanego wyrażenia na szereg M a c l a u r i n a zmiennej ψ_s i zachowanie jedynie wyrazów zerowego i pierwszego daje

$$(7.16) \quad s_{31} = \frac{e}{\sqrt{e^2+g^2} \varrho^2} + \left[\frac{eg^2 \varrho^2 (\sqrt{e^2+g^2} \varrho^2 - 1)}{(e^2+g^2 \varrho^2)^2} + s_{11} + \frac{1}{2} \varrho s'_{11} \right] \psi_s$$

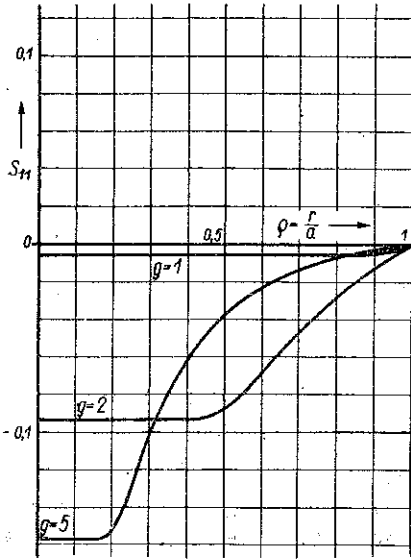
lub inaczej

$$(7.17) \quad s_{31} = s_{30} (1 + \zeta \psi_s),$$

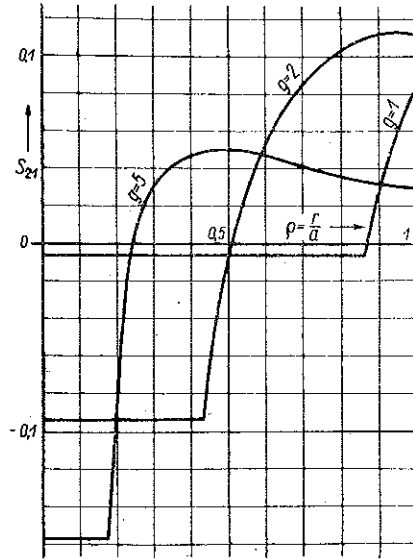
gdzie s_{30} i s_{31} oznaczają, jak zwykle, zerowe i pierwsze przybliżenie funkcji s_2 , natomiast

$$(7.18) \quad \zeta = \frac{g^2 \varrho^2 (\sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2} - 1)}{(e^2 + g^2 \varrho^2)^{3/2}} + \frac{(s_{11} + \frac{1}{2} \varrho s'_{11}) \sqrt{e^2 + g^2 \varrho^2}}{e}$$

decyduje o błędzie zerowego przybliżenia w stosunku do pierwszego w przypadku naprężeń osiowych σ_z .



Rys. 11. Rozkład naprężeń promieniowych σ_r w przypadku $e=0,5$ (zakres sprężysto-plastyczny).
Przybliżenie pierwsze



Rys. 12. Rozkład naprężeń obwodowych σ_θ w przypadku $e=0,5$ (zakres sprężysto-plastyczny).
Przybliżenie pierwsze

Naprężenie styczne $\tau_{\theta z}$ określa wzór

$$(7.19) \quad \tau_{\theta z} = \frac{g \varrho p \sigma_{pl}}{\sqrt{3}},$$

zatem, wykorzystując (7.2) i (7.3), możemy napisać wprost

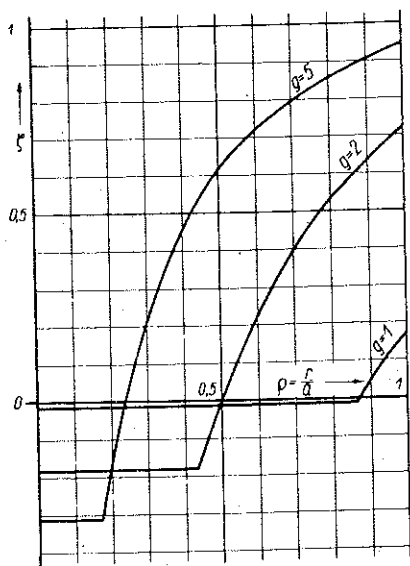
$$(7.20) \quad \tau_{\theta z1} = \tau_{\theta z0} (1 + \eta \psi_s),$$

gdzie poprawkę η określa wzór (7.5). Warto zauważyć, że wobec związku (7.8) η jest równe zero na granicy strefy plastycznej i sprężystej (podob-

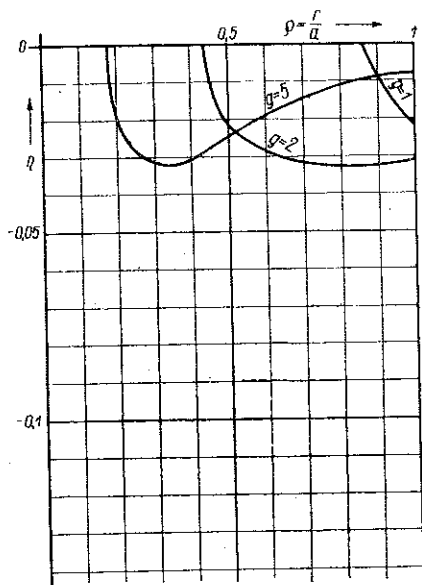
nie jak w całej strefie sprężystej), natomiast w strefie plastycznej jest stale dodatnie; ζ jest w strefie sprężystej ujemne, w strefie plastycznej zmienia znak.

Wykresy funkcji η i ζ podają rysunki 13 i 14.

Jak widać, błędy przy obliczeniu w przybliżeniu zerowym naprężeń σ_z są (w podanym przypadku $e = 0,5$) wielokrotnie większe niż przy obliczaniu naprężeń $\tau_{\theta z}$. Jednak w całym zakresie sprężysto-plastycznym $\zeta < 1$ i błąd nie przekracza ψ_3 , czyli np. 15,4% w przypadku materiału o stałej P o i s s o n a $\nu = 0,3$, a przy niewielkich kątach skrzywienia (np. $g = 1$) jest znacznie mniejszy.



Rys. 13. Błędy przy obliczaniu naprężenia osiowego σ_z w przybliżeniu zerowym w przypadku $e = 0,5$ (zakres sprężysto-plastyczny)



Rys. 14. Błędy przy obliczaniu naprężenia stycznego $\tau_{\theta z}$ w przybliżeniu zerowym w przypadku $e = 0,5$ (zakres sprężysto-plastyczny)

Wspomnimy wreszcie, że zależność siły podłużnej i momentu skręcającego od wydłużenia i kąta skrzywienia daje się w pierwszym przybliżeniu wyrazić za pomocą skończonej kombinacji funkcji elementarnych podobnie jak w przybliżeniu zerowym. Uzyskane wyniki są jednak długie i niewygodne do analizy błędów, którą wygodniej jest przeprowadzić w oparciu o znajomość błędów w rozkładzie naprężeń.

8. Rozwiązanie w zakresie czysto plastycznym. Przybliżenie pierwsze

Przybliżenie pierwsze uzyskamy w zakresie czysto plastycznym podobnie jak w zakresie sprężysto-plastycznym. Podstawiając (7.2) do (2.26) otrzymujemy znowu układ (7.4), bez zmiany pozostają (7.5), (7.6) oraz całka ogólna (7.9). Zmienia się dopiero wartości stałych C_1 i C_2 wobec zmiany warunków brzegowych, musimy bowiem warunek (3.11) zastąpić warunkiem ograniczoności s_{11} , dla $\varrho = 0$:

$$(8.1) \quad C_1 = -\frac{2e^2}{g^2},$$

$$(8.2) \quad C_2 = -\frac{1}{e} \ln(e^2 + g^2) + \frac{2e}{g^2} + \frac{2}{e} \ln(\sqrt{e^2 + g^2} + e) - \frac{2\sqrt{e^2 + g^2}}{g^2},$$

a całka szczególna przybierze postać

$$(8.3) \quad s_{11} = -\left[\frac{2}{e} \ln \frac{(\sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2 + e) \sqrt{e^2 + g^2}}{(\sqrt{e^2 + g^2} + e) \sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2} + \frac{2e}{g^2} \left(\frac{1}{\varrho^2} - 1 \right) - \frac{2}{g^2} \varrho^2 (\sqrt{e^2 + g^2} \varrho^2 - \varrho^2 \sqrt{e^2 + g^2}) \right].$$

W przybliżeniu zerowym układ (2.26) rozwiązywały te same funkcje s_1 i p w obu zakresach: sprężysto-plastycznym i czysto plastycznym; w przybliżeniu pierwszym funkcja s_1 w zakresach tych jest przedstawiona różnymi wzorami. Warto jednak zauważyć, że «przechodzi» ona z zakresu do zakresu w sposób ciągły, bowiem na granicy odkształceń plastycznych, gdy $e = 1$, obie stałe C_1 i C_2 , obliczone ze wzorów (7.10) i (8.1) oraz (7.11) i (8.2), mają te same wartości, a zatem i całka szczególna jest wspólna.

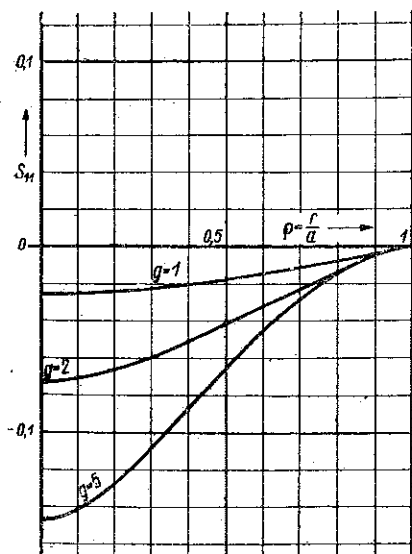
Naprężenia promieniowe i obwodowe są określone wzorami (7.13) i (7.14), do których należy teraz wstawić (8.3). Pochodna s'_{11} jest równa

$$(8.4) \quad s'_{11} = \frac{2eg^2\varrho}{(e^2 + g^2\varrho^2)(\sqrt{e^2 + g^2}\varrho^2 + e)^2}$$

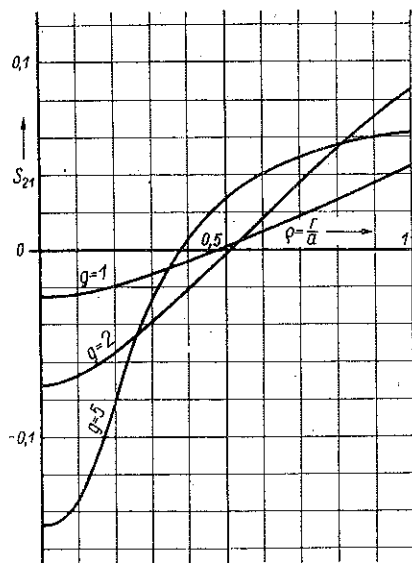
i jest stałe nieujemna, a równa zero, gdy $\varrho = 0$. W tym punkcie funkcja s_{11} osiąga wartość najmniejszą (co do modułu największą), wynoszącą

$$(8.5) \quad [s_{11}]_{\varrho=0} = -\frac{2}{e} \left\{ \ln \left[1 + \frac{g^2}{(\sqrt{e^2 + g^2} + e)^2} \right] - \frac{g^2}{2(\sqrt{e^2 + g^2} + e)^2} \right\}.$$

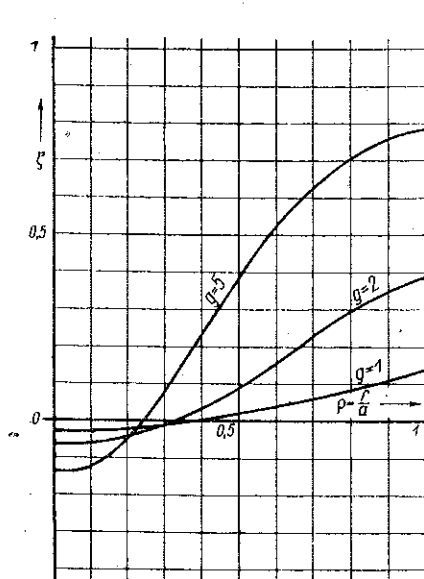
Rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych w przypadku $e = 2$ przedstawiają rys. 15 i 16.



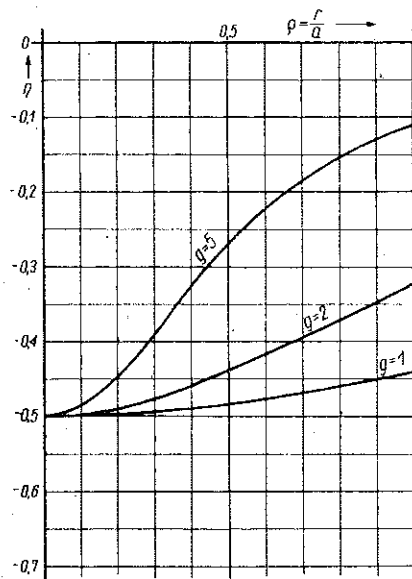
Rys. 15. Rozkład naprężeń promieniowych σ_r w przypadku $e=2$ (zakres czysto plastyczny). Przybliżenie pierwsze



Rys. 16. Rozkład naprężeń obwodowych σ_θ w przypadku $e=2$ (zakres czysto plastyczny). Przybliżenie pierwsze



Rys. 17. Błędy przy obliczaniu naprężenia osiowego σ_z w przybliżeniu zerowym w przypadku $e=2$ (zakres czysto plastyczny)



Rys. 18. Błędy przy obliczaniu naprężenia stycznego $\tau_{\theta z}$ w przybliżeniu zerowym w przypadku $e=2$ (zakres czysto plastyczny)

Funkcje ζ i η , decydujące o wielkości błędów przy obliczaniu naprężeń σ_z i $\tau_{\theta z}$ z przybliżeniem zerowym, są w zakresie czysto plastycznym określone tymi samymi wzorami, co w sprężysto-plastycznym, mianowicie (7.18) i (7.5), z tą różnicą, że do (7.18) należy wstawić (8.3) zamiast (7.12).

Rozkład błędów w przypadku $e = 2$ jest przedstawiony na rys. 17 i 18. Obserwujemy nieznaczne różnice w wartościach ζ , natomiast gwałtowny wzrost (co do modułu) wartości η w porównaniu z zakresem sprężysto-plastycznym. Moduły obu funkcji, ζ i η , w całym zakresie czysto plastycznym nie przekraczają jednak jedności (podobnie jak w zakresie sprężysto-plastycznym), zatem przy $\nu = 0,3$, błędy nie przekraczają 15,4%.

W zakresie czysto plastycznym zależność siły podłużnej i momentu skręcającego od wydłużenia i kąta skręcenia daje się również wyrazić przy pomocy skończonej kombinacji funkcji elementarnych, jednak i tu analizę błędów przybliżenia zerowego łatwiej przeprowadzić w oparciu o znajomość błędów w rozkładzie naprężeń. W przypadku $\nu = 0,3$ można przyjąć, że siła podłużna jest o kilka procent większa, a moment skręcający o kilka procent mniejszy od obliczonego wzorami przybliżenia zerowego.

Literatura cytowana w tekście

- [1] N. I. Biezuchow, *Teorja uprugosti i plasticznosti*, Gostiechizdat, Moskwa 1953.
- [2] L. Collatz, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*, Akad. Verlagsges., Lipsk 1949.
- [3] F. A. Gaydon, *On the Combined Torsion and Tension of a Partly Plastic Circular Cylinder*, Journ. Mech. Appl. Math. 1 (1952) Oksford.
- [4] R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oksford 1950.
- [5] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, t. 1, PAU, Kraków 1948.
- [6] L. S. Lejbienzon, *Kurs teorji uprugosti*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1947.
- [7] R. A. Mieźlumjan, *O funkcji popieriecznoy dieformacji*, Prikl. Mat. Miecz., t. 16, Moskwa 1952, str. 491.
- [8] A. Nádai, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.* 52 (1930), str. 193; cyt. według [4].
- [9] A. Nádai, *Plasticity*, Mc Graw-Hill, New York i Londyn 1931.
- [10] J. Nowiński i W. Olszak, *O podstawach teorii sprężystości ciał fizykalnie nieliniowych*, Arch. Mech. Stos. 1 (1954).
- [11] A. R. Rżanicyn, *Raszot sooruzenij s ucotom plasticzeskich swojstw materiałow*, Strojwojenmorizdat, Moskwa 1949.
- [12] W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, Monogr. Matem., Warszawa-Wrocław 1946.
- [13] M. Sokołowski, *Zastosowania metody małych parametrów w zagadnieniach płyt*, Arch. Mech. Stos. 3 (1953).
- [14] W. W. Sokołowski, *Teorja plasticznosti*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1950.

Резюме

СЛУЧАЙ ОДНОВРЕМЕННОГО РАСТЯЖЕНИЯ И КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Работа решает поставленный вопрос, основываясь на теории пластических деформаций Г е н к и. Выводятся общие уравнения и формируются краевые условия. Общие уравнения интегрируются точно в случае несжимаемого материала, которого коэффициент Пу а с с о н а равен $1/2$, и приближенно, в случае сжимаемого материала, причем приводится оценка погрешности.

Случай одновременного растяжения и кручения стержня можно схарактеризовать пятью параметрами: скручивающим моментом M_s , продольной силой N , предельным радиусом c , отделяющим пластическую зону от упругой, относительным удлинением ε и углом закручивания на единицу длины Φ . В работе подробно рассматриваются зависимости между этими параметрами. Зависимости нагрузок от деформаций выражаются при помощи элементарных функций, обратные же зависимости не обладают этим свойством. Они представляются графически и нумерически.

Результаты работы дают возможность определить три любых параметра, имея два остальных, так в упруго-пластическом состоянии, как и в чисто пластическом.

S u m m a r y

THE PROBLEM OF COMBINED TENSION AND TORSION OF A CIRCULAR BAR IN THE ELASTO-PLASTIC RANGE

The problem is solved on the basis of H e n c k y's theory of plastic deformations. General equations are derived and boundary conditions stated. The general equations are integrated in an exact manner in the case of an incompressible material having P o i s s o n's ratio equal to $1/2$. In the case of a compressible material an approximate integration is carried out together with the evaluation of error.

The problem of simultaneous tension and torsion of a bar can be characterized by means of five parameters: torque M_s , longitudinal force N , radius c of the boundary separating the plastic region from the elastic region, unit elongation ε and unit angle of twist Φ . The relations between these parameters are considered in detail. The stresses can be expressed in terms of strains by means of elementary functions. The inverse relations however have not this property. They are expressed graphically and numerically.

The results permit to determine any three parameters in the elasto-plastic and plastic range, when two other parameters have a known value.