

ANTONI SAWCZUK

ZAGADNIENIA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ  
ELEMENTÓW ROZCIĄGANÝCH I ZGINANYCH  
W ZASTOSOWANIU  
DO TEORII ZBIORNIKÓW PROSTOKĄTNYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
XXIX

## SPIS TREŚCI

	Str.
1. Uwagi ogólne	257
2. Nośność graniczna elementów rozciąganych i zginanych	259
3. Ortotropia wymuszona	265
4. Niejednorodność struktury elementu	267
5. Zagadnienie sił węzłowych	271
6. Stany graniczne zbiorników prostokątnych	276

## 1. Uwagi ogólne \*)

1.1. Podstawowe założenia teorii nośności granicznej płyt znalazły zadowalające potwierdzenie doświadczalne w szeregu przeprowadzonych dotychczas badań laboratoryjnych. Obserwacje linii załomów elementów płytowych, znajdujących się pod działaniem złożonych obciążeń, pozwalają przypuszczać, że również przypadki zginania, połączonego z działaniem sił rozciągających, rozpatrywać można ze stanowiska teorii nośności granicznej.

Zastosowanie jednak teorii nośności granicznej do płaskich układów, poddanych rozciąganiu i zginaniu, wymaga wstępnego wyjaśnienia szeregu zagadnień oraz określenia zakresu stosowalności teorii.

Zajmiemy się analizą stanu równowagi granicznej płyt poddanych działaniu obciążenia, rozłożonego w sposób ciągły i skierowanego prostopadle do ich powierzchni, oraz sił rozciągających, działających w płaszczyźnie tych płyt. Ścisłejsze sprecyzowanie miejsca działania sił rozciągających w przekroju poprzecznym zostanie dokonane później. Co do warunków podparcia nie ma potrzeby wprowadzania tu jakichkolwiek ograniczeń.

1.2. Należy na wstępie zaznaczyć, że nie będzie tu spełnione, ogólnie rzecz biorąc, założenie stałości momentu łamiącego na jednostkę długości linii załomu, a tym samym będziemy mieli do czynienia z układami niejednorodnymi, charakteryzującymi się w każdym punkcie inną wartością momentu łamiącego. Ponieważ jednak przedmiot naszych rozważań stanowią elementy, zbudowane z materiałów ciągliwego i kruchego, przy czym zakłada się, że materiał kruchy zdolny jest przenosić jedynie naprężenia ściskające, zaś ciągliwy umieszczony jest w sposób pozwalający na wykorzystywanie go dla przejścia naprężeń rozciągających, przeto niejednorodność ta dla elementów zginanych może być ściśle określona. Działanie sił rozciągających skomplikuje nieco zagadnienie niejednorodności, nie uniemożliwi jednak analizy stanu równowagi granicznej.

---

\*) Praca przedstawiona na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Międzyzdrojach w sierpniu 1954 r.

Rozpatrywanie układów niejednorodnych ze stanowiska teorii nośności granicznej narzuca automatycznie przyjęcie sztywno-plastycznego schematu odkształcenia, tzn. pominięcie wszystkich odkształceń sprężystych. Taki bowiem schemat leży u podstaw tej teorii. Wynika stąd również konieczność rozpatrywania ustroju w takiej chwili, gdy naprężenia w materiale poddanym rozciąganiu osiągnęły na całej długości linii załomu, ściślej, na długościach wszystkich linii załomów, wartość równą granicy plastyczności, niezależnie od koncentracji włókien rozciąganych na odpowiednich odcinkach, a więc niezależnie od funkcji, określającej niejednorodność struktury (w sensie zdolności przenoszenia momentów łamiących). Niejednorodność struktury elementu ma duże znaczenie przy traktowaniu zagadnienia według sprężysto-plastycznego modelu odkształcenia, pozwalającego na uwzględnienie wszystkich faz, jakie ustrój przechodzi od chwili rozpoczęcia działania obciążeń aż do chwili jego zniszczenia. W tym przypadku niejednorodność budowy ma znaczenie dlatego, że są od niej uzależnione odkształcenia sprężyste. Zagadnienia niejednorodności nie będą tu jednak stanowiły przedmiotu naszych zainteresowań i są one omówione jedynie ogólnie w zakresie niezbędnym do dalszych rozważań, a szczególnie do określenia wpływu sił podłużnych na wielkość jednostkowego momentu łamiącego.

1.3. Nasuwa się tu jeszcze pytanie, czy układy niejednorodne charakteryzować się będą załomami prostoliniowymi, czy też będzie tu należało rozpatrywać załomy krzywoliniowe. Ograniczymy się do omówienia przypadków obciążeń rozłożonych w sposób ciągły na całej powierzchni płyty. Jest to ważne z uwagi na fakt, że w przypadku występowania sił skupionych bądź też obciążeń działających tylko na pewną część powierzchni płyty, geometrycznie możliwa siatka zniszczenia nie składa się wyłącznie z samych tylko linii prostych.

Przy naszych założeniach i dla sztywno-plastycznego schematu odkształcenia można przyjąć, z taką samą dokładnością jak w przypadku stałego momentu łamiącego, że załomy są prostoliniowe, bowiem jedynie linie proste stanowią geometrycznie możliwe formy zniszczenia dla obciążeń ciągłych.

1.4. Teoria nośności granicznej płyt, zbudowanych z materiału ciągłego, rozciąganego oraz kruchego, ściskanego — opiera się na założeniu, że we wszystkich punktach leżących na linii załomu naprężenia w materiale, przenoszącym siły rozciągające, osiągnęły granicę plastyczności  $\sigma_{pl}$  i wyrażają się jako funkcje wielkości charakteryzujących strukturę elementu oraz momentu, występującego w liniach załomów bądź też przez jego składowe, w postaci

$$(1.4.1) \quad \sigma_u = f_1(M_v, s) = \sigma_{pl}, \quad \sigma_v = f_2(M_u, s) = \sigma_{pl}.$$

Symbole  $\sigma_u$  i  $M_u$  oznaczają odpowiednio składowe naprężenia i momentu na osi  $u$  w układzie współrzędnych  $(u, v)$ , zaś  $\sigma_v$  i  $M_v$  odpowiednie składowe na osi  $v$ ;  $s$  jest wielkością określającą strukturę elementu.

W przypadku płyty jednorodnej i stałych naprężeń we włóknach rozciąganych uzyskujemy moment łamiący stały; nie badamy przy tym bliżej rozkładu wewnętrznego naprężeń w materiale przenoszącym ciśnienia.

1.5. Podobnie rozpatrując elementy poddane nie tylko zginaniu, ale również działaniu sił osiowych, można stwierdzić, że siły te muszą spełniać pewien warunek. Mianowicie muszą one wywoływać w elemencie taki stan naprężeń, aby w punktach linii załomu naprężenia wypadkowe warstwy dolnej posiadały ten sam znak jak w przypadku zginania. Przypadek sił rozciągających warunek taki spełnia. Można tu będzie nie wnioskując na razie w zależności między momentem a siłą w stanie wyczerpania nośności stwierdzić, że w przypadku działania sił rozciągających  $N_u$  i  $N_v$ , skierowanych zgodnie z układem osi odniesienia, stan graniczny będzie osiągnięty, gdy naprężenia we włóknach rozciąganych przedstawia się w postaci

$$(1.5.1) \quad \begin{cases} \sigma_u = f(M_v, N_u, s) = \sigma_{pl}, \\ \sigma_v = f(M_u, N_v, s) = \sigma_{pl}. \end{cases}$$

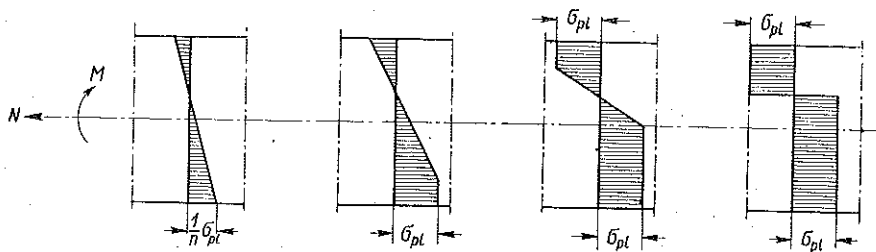
Zależności (1.4.1) i (1.5.1) określają naprężenia jedynie w stanie granicznym, nie można ich natomiast stosować dla fazy przejścia od stanu nieobciążonego (przez obszar odkształceń sprężystych) do stanu wyczerpania nośności.

1.6. Powyższe uwagi pozwalają na rozpatrywanie problemu nośności elementów rozciąganych i zginanych na podstawie teorii nośności granicznej, odnoszącej się do analizy stanu zniszczenia elementów zginanych. Jeśli natomiast chcielibyśmy rozpatrywać układy zginane oraz dodatkowo ściskane i rozciągane w kierunkach wzajemnie prostopadłych, to (pomiijając problem stateczności) istniałyby ograniczenia w stosowaniu teorii nośności granicznej do takich układów. Ogólnie biorąc naprężenia powstające na skutek zginania musiałyby być większe co do bezwzględnej wartości od naprężeń, wywołanych przez siły ściskające.

## 2. Nośność graniczna elementów rozciąganych i zginanych

2.1. W przypadku pręta, zbudowanego z materiału elasto-plastycznego, obciążonego momentem zginającym i siłą podłużną, stan graniczny osiągnięty zostanie z chwilą, kiedy w całym przekroju naprężenia osiągną granicę plastyczności (ściśle biorąc pozostanie pewien rdzeń sprężysty wokół punktu, w którym naprężenia zmieniają znak; pomijając ten rdzeń nie

robimy dużego błędu). Sposób narastania naprężeń i przechodzenia od fazy sprężystej w plastyczną dla materiału elasto-plastycznego bez uwzględnienia ewentualnego «utwardzenia» materiału przedstawiony jest na rys. 1 (przy zginaniu symetrycznym).

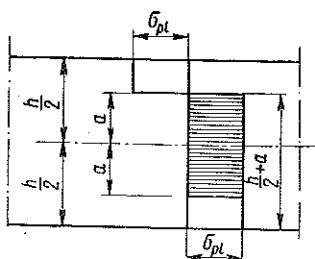


Rys. 1

Warunki równowagi zastosowane do stanu granicznego przekroju dadzą równania

$$(2.1.1) \quad \int_A \sigma_{pl} dA = N, \quad \int_A \sigma_{pl} y dA = M.$$

Równania te pozwolą wyznaczyć zależność między momentem a siłą podłużną w chwili osiągnięcia stanu równowagi granicznej, jak również położenie osi obojętnej, jeśli znany jest kształt geometryczny przekroju. War-



Rys. 2

to przypomnieć, że w przypadku przekrojów o jednej tylko osi symetrii zmienić się będzie punkt działania siły osicwej; przesuwać się on będzie po osi symetrii i nie zawsze leżeć będzie w środku ciężkości figury przedstawiającej przekrój. Utrudnia to rozpatrywanie zależności między siłą a momentem w stadium granicznym. Dodać należy, że w fazie sprężysto-plastycznej nie jest zachowana w ogólnym przypadku zasada niezależności działania sił<sup>1)</sup>.

Ograniczając się do rozpatrzenia przekroju prostokątnego o bokach  $h$  i  $b$  można będzie uważać, że siłę podłużną przenosi część przekroju, położona wokół środka ciężkości o wysokości równej  $2a$ , zaś moment zginający reprezentowany jest przez pozostałe części wykresu naprężeń (rys. 2).

Równania równowagi przedstawiają się w postaci

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} N = 2 a b \sigma_{pl}, \\ M = b \sigma_{pl} \left( \frac{h^2}{4} - a^2 \right). \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Zagadnienia te analizuje np. A. A. Gwozdiew, [5].

Wyznaczając z pierwszego wartość  $a$  i wstawiając ją do drugiego z powyższych równań otrzymamy

$$(2.1.3) \quad M = \frac{bh^2}{4} \sigma_{pl} - \frac{N^2}{4 \sigma_{pl} b}$$

Uzyskaną zależność przedstawia rys. 3 w postaci paraboli. Na osi pionowej podane są stosunki momentu do momentu granicznego, na osi zaś poziomej analogiczne zależności dla siły niszczącej.

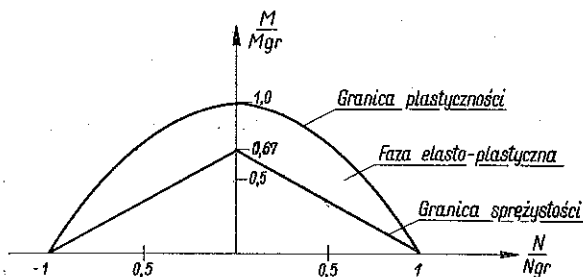
W przypadku rozpatrywania jedynie fazy sprężystej warunków na maksymalną wartość momentu w chwili osiągnięcia w skrajnych włóknach naprężeń równych granicy plastyczności przedstawić można w postaci

$$(2.1.4) \quad M = \frac{\sigma_{pl} bh^2}{6} - \frac{Nh}{6}$$

Odpowiedni wykres (rys. 3) ma postać trójkąta, którego wewnątrz charakteryzuje fazę sprężystą pracy pręta.

Dla przypadku zmiany znaku momentu wykresić można analogiczną zależność poniżej osi  $N/N_{gr}$ .

Tak więc w przypadku pręta z materiału elasto-plastycznego możemy dla każdej wartości siły  $N < N_{gr}$  określić odpowiednią wartość momentu, który dla rozpatrywanego przykładu będzie momentem łamiącym; będzie on mniejszy od momentu łamiącego w przypadku, gdy siła podłużna nie działa.



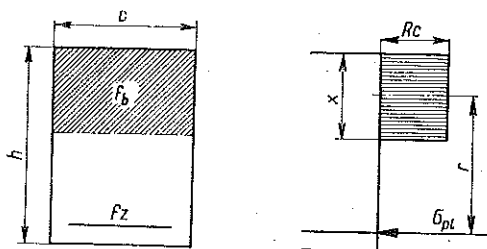
Rys. 3

2.2. Zastanówmy się, jak przedstawiać się będzie zależność momentu od siły podłużnej dla elementów, w których naprężenia rozciągające występować mogą jedynie we włóknach z materiału ciągłego, zaś materiał kruchy pracuje tylko na ściskanie. Znajomość tej zależności pozwoli na sprowadzenie zagadnienia rozciągania połączonego ze zginaniem do zagadnienia samego zginania o innej jednak wartości momentu łamiącego. Spowodowane to jest zmniejszeniem momentu na skutek działania podłużnych sił rozciągających.

Najpierw należy sprecyzować założenia dotyczące rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym określonego wyżej elementu. Choć zagadnienie to należy — ściśle biorąc — do teorii żelbetu, która zajmuje się właśnie

ustrojami zbudowanymi z materiałów kruchych i ciągliwych w założeniu właściwego ich wykorzystania, to jednak krótkie omówienie tego zagadnienia potrzebne jest dla ujęcia całości kształtu rozpatrywanego problemu.

W przypadku zginania bez działania sił podłużnych dany przekrój materiału kruchego i materiału ciągliwego (np. betonu i stali) w stadium zniszczenia zdolny jest przenieść pewną wartość momentu, którą uważamy



Rys. 4

my za moment graniczny. Tak rozumiany moment jednostkowy oznaczamy przez  $M$ . Przyjmując dla uproszczenia prostokątny wykres naprężeń ściskających w materiale kruchym<sup>2)</sup> oraz prostokątny przekrój elementu, moment łamiący wyrazimy zależnością (rys. 4)

$$(2.2.1) \quad M = \sigma_{pt} f_z r = R_c x b r.$$

Gdy rozpatrzmy przekrój rozciągany siłą zaczepioną mimośrodowo, przy czym mimośród jest stały (co spotykamy np. w przypadku zbiorników prostokątnych obliczanych jako ramy poziome), otrzymamy (rys. 5) zależności

$$(2.2.2) \quad \sigma_{pt} f_z - N - R_c b x_1 = 0,$$

$$(2.2.3) \quad N e - R_c b x_1 r_1 = 0,$$

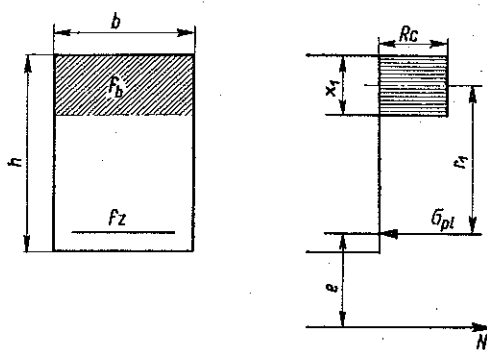
gdzie  $R_c$  oznacza wytrzymałość materiału na ściskanie.

Na podstawie zależności, podanych wzorami (2.2.1) i (2.2.2), można uzyskać związek

$$x_1 = x - \frac{N}{R_c b}$$

oraz

$$r_1 = r + \frac{N}{2 R_c b}$$



Rys. 5

Uwzględniając powyższe zależności we wzorze (2.2.3) oraz uważając wartość  $N e$  za jednostkowy moment łamiący dla przypadku zginania łącz-

<sup>2)</sup> Wiadomo, na podstawie np. prac A. F. Lolejta, że kształt wykresu naprężeń w ściskanej strefie belki żelbetowej przy zginaniu nie ma istotnego wpływu na wyniki obliczeń; por. [5].



nie z rozciąganiem (wartość tę oznaczymy przez  ${}_N M$ ) otrzymamy

$$(2.2.4) \quad {}_N M = R_c \left( x - \frac{N}{R_c b} \right) \left( r + \frac{N}{2 R_c b} \right) = R_c x r - \frac{N r}{b} + \frac{N x}{2 b} - \frac{N^2}{2 R_c b^2}.$$

Biorąc pod uwagę wartość jednostkowego momentu w przypadku samego tylko zginania z równania (2.2.1) uzyskujemy poszukiwaną zależność na wielkość momentu jednostkowego przy obecności sił osiowych

$$(2.2.5) \quad {}_N M = M - \frac{N M}{\sigma_{pl} f_z} + \frac{N}{2 R_c b^2} (\sigma_{pl} f_z - N) = M - M \frac{N}{N_{gr}} + \frac{N}{2 R_c b^2} (N_{gr} - N).$$

Powyższy wzór przedstawia analogiczną zależność dla elementów, zbudowanych z materiałów ciągliwego i kruchego, do podanej przy pomocy wzoru (2.1.3) dla elementów z materiałów elasto-plastycznych.

Bezpośrednio z podanego wzoru wynika, że w przypadku gdy

$$(1) \quad N = 0, \quad \text{to} \quad {}_N M = M_{gr} = M;$$

$$(2) \quad N = \sigma_{pl} f_z = N_{gr}, \quad \text{to} \quad {}_N M = 0.$$

Ilustrację zależności (2.2.5) przedstawia rys. 6.

Wykres taki dotyczy związanych ze sobą wartości  $M_{gr} = M$ ,  $N_{gr}$ ,  $N$  oraz  $R_c$ . Rysunek 6 został wykonany dla stosunku  $\sigma_{pl}/R_c = 11,5$  oraz  $N_{gr}/M = 13,1 \text{ m}^{-1}$ . Nie

należy do naszego tematu zagadnienie, w jaki sposób zależy moment graniczny od wartości  $R_c$ .

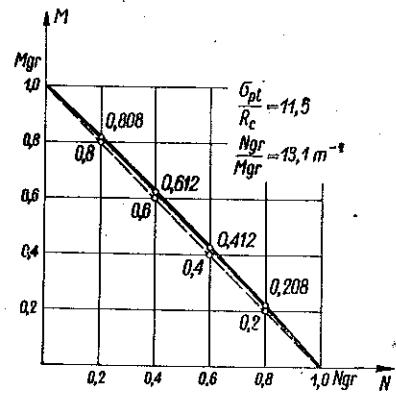
2.3. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że wyrażenie

$$\frac{N}{2 R_c b^2} (N_{gr} - N)$$

w przypadkach praktycznych wpływa niewiele na wartość  ${}_N M$ . Dla uzasadnienia tego wniosku przytoczymy następujący przykład liczbowy.

Płyta o grubości  $h = 10 \text{ cm}$  wykonana z betonu  $R_c = 200 \text{ kg/cm}^2$  zbrojona jest na metr bieżący prętami ze stali o granicy plastyczności  $2300 \text{ kg/cm}^2$  o łącznym przekroju  $6 \text{ cm}^2$ , tzn.  $N_{gr} = 13800 \text{ kG}$ . Jednostkowy moment łamiący obliczony dla tego przykładu wyniesie

$$M = 6 \cdot 2300 \cdot 0,95 (10 - 2) \approx 105000 \text{ kGcm/m.}$$



Rys. 6

Jeśli pasmo płyty poddane jest działaniu sił rozciągających o wielkości 4000 kG/mb, to moment jednostkowy  ${}_N M$  wyniesie

$${}_N M = 1050 - \frac{4000 \cdot 1050}{2300 \cdot 6} + \frac{4000}{2 \cdot 200 \cdot 100^2} (2300 \cdot 6 - 4000) = 756 \text{ kGm/m.}$$

Wpływ badanego trzeciego składnika będzie tym mniejszy, im bardziej wielkość siły  $N$  zbliżać się będzie do wartości granicznej. Wpływ ten będzie również niewielki, gdy  $N \rightarrow 0$ .

Największe znaczenie ma omawiany czynnik, jak łatwo się przekonać z warunku ekstremum — dla  $N = 1/2 N_{gr}$ . Dla omawianego wyżej przykładu maksymalna wartość liczbowa tego czynnika wyniesie 12 kGm/m.

2.4. Należy tu zwrócić uwagę na jedno jeszcze zagadnienie wiążące się z przyjęciem prostokątnego wykresu naprężeń w materiale kruchym (np. w betonie). Bliższa analiza wpływu wykresu naprężeń na wielkość momentu  ${}_N M$  wykazuje, że w przypadku nieprostokątnego wykresu następuje zmiana ostatniego składnika we wzorze (2.2.5). Odpowiednia wartość momentu zwiększa się nieznacznie (orientacyjnie dla betonu w stosunku około 1,2 zależnie od stosunku  $R_w/R_m$ ). Można uważać, że przez zastąpienie wielkości  $R_c$  przez wielkość  $R_m$  korekta ta jest uwzględniona należycie.

2.5. Przeprowadzona wyżej analiza wielkości momentu łamiącego w przypadku zginania łącznie z rozciąganiem wykazała wpływ wielkości siły podłużnej na wartość tego momentu. Odrzucenie ostatniego składnika w otrzymanym wzorze doprowadza do zależności liniowej między momentem a siłą podłużną (na rys. 6 linia przerywana). Na pytanie, czy składnik ten istotnie można pominąć, odpowiedzieć może jedynie doświadczenie. Pomijając go działamy na korzyść bezpieczeństwa ustroju. Stopień zwiększenia współczynnika bezpieczeństwa waha się — w zależności od parametrów  $\sigma_{pl}/R_c$  oraz  $N_{gr}/N$  — teoretycznie w granicach do około 10% dla zmieniającego się w żelbecie stosunku  $\sigma_{pl}/R_c$  od 9,0 do około 25,0.

2.6. Omawianą zależność (2.2.5) dobrze będzie dla dalszych rozważań przedstawić w nieco innej, następującej formie:

$$(2.6.1) \quad {}_N M = M [1 - \Psi(N, s)],$$

gdzie przez  $\Psi(N, s)$  oznaczono wielkość

$$\Psi(N, s) = \frac{N}{N_{gr}} - \frac{N}{2 M R_c b^2} (N_{gr} - N).$$

Wzór (2.6.1) pozwala stwierdzić, że moment jednostkowy dla przypadku zginania łącznie z rozciąganiem przedstawić można jako funkcje momentu jednostkowego, obliczonego dla elementu zginanego, przy czym moment ten należy zmniejszyć tak, jak to określa funkcja  $\Psi(N, s)$ .

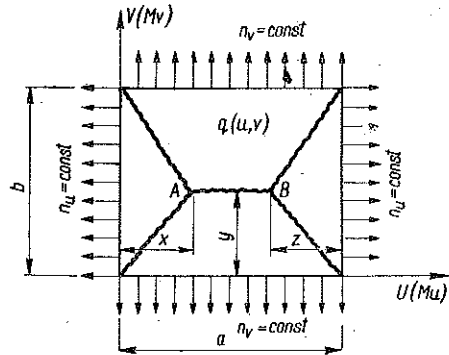
### 3. Ortotropia wymuszona

3.1. Przejdźmy teraz do rozpatrzenia stanów granicznych układów płytowych. Rozpocznijmy od najprostszego układu, mianowicie od płyty o zbrojeniu krzyżowym mocy  $f_u$  w kierunku równoległym do osi  $u$  i  $f_v$  w kierunku osi  $v$ . Moc zbrojenia jest stała, jak to przyjmuje się w założeniach teorii nośności granicznej, a więc odpowiednim kierunkom przyporządkowane są składowe momentu łamiącego  $M_v$  i  $M_u$ .

Założmy, że płyta jest swobodnie podparta oraz że na mimośrodku  $e$  liczonym od osi zbrojenia dolnego na podporze (to znaczy, że pomijamy zmianę mimośrodu wskutek odkształcenia ustroju) zaczepione są siły rozciągające  $n_u$  i  $n_v$  skierowane odpowiednio zgodnie z kierunkami osi  $u$  i  $v$  (rys. 7).

Natężenie sił rozciągających  $n_u$  i  $n_v$  jest stałe, można więc oznaczyć siły, przypadające na jednostkę długości obwodu odpowiednio przez  $N_u$  i  $N_v$  (rys. 7).

Na płytę działa prostopadle do jej powierzchni obciążenie ciągłe o natężeniu  $q(u, v) = \text{const}$ .



Rys. 7

Zakładając z kolei, że odkształcenia w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni płyty są rzędu pozwalającego pominąć je w stosunku do mimośrodu  $e$ , możemy napisać odpowiednie wyrażenia dla pracy przygotowanej sił zewnętrznych i wewnętrznych (rozpatrywanych jako funkcje parametrów  $x, y, z$ ) na możliwym przesunięciu  $\delta w$  odcinka  $AB$  linii zamkniętej.

Równanie pracy sił zewnętrznych będzie tu takie samo, jak dla przypadku płyty zginanej, natomiast siły podłużne pojawią się w wyrażeniu dla pracy sił wewnętrznych przez wprowadzenie zamiast momentów  $M_u$  i  $M_v$  odpowiednich momentów  ${}^N M_u$  oraz  ${}^N M_v$  na podstawie wzoru (2.6.1). Tak więc zagadnienie nośności granicznej w przypadku stałych sił rozciągających  $n_u$  i  $n_v$ , zaczepionych na obwodzie elementu, dało się sprowadzić do przypadku nośności granicznej elementów zginanych.

3.2. Aby omówić dokładniej ten wniosek, napiszmy odpowiednie składowe momentu jednostkowego w przypadku działania sił rozciągających przy użyciu wzoru (2.6.1) w formie następującej:

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} {}^N M_u = M_u [1 - \Psi_u(N_v, s)], \\ {}^N M_v = M_v [1 - \Psi_v(N_u, s)]. \end{cases}$$

Płyta zginana charakteryzuje się wskaźnikiem ortotropii

$$(3.2.2) \quad \kappa = \frac{M_v}{M_u}$$

Działanie sił rozciągających zmieniło wyrażenie dla jednostkowych momentów, które przyjęło obecnie postać podaną w (3.2.1); zmieniło więc tym samym jak gdyby ortotropię struktury elementu, dając w wyniku element o innej strukturze. Ortotropię tej struktury nazwiemy ortotropią wymuszoną, rozumiejąc przez to, że wywołana ona została przez wspomniane siły rozciągające.

Wskaźnik ortotropii wymuszonej, oznaczmy go przez  ${}_N K$ , wyniesie

$$(3.2.3) \quad {}_N K = \frac{{}_N M_v}{{}_N M_u} = \kappa \frac{1 - \Psi_u(N_u, s)}{1 - \Psi_v(N_v, s)} = \kappa F(N_u, N_v, s)$$

i wyraża się przez wskaźnik ortotropii dla zbrojenia w kierunkach pokrywających się z kierunkami osi odniesienia ( $u, v$ ) oraz za pomocą pewnej funkcji zależnej od sił rozciągających  $N_u$  i  $N_v$  oraz struktury płyty  $s$ .

3.3. Dla przypadku równomiernie rozłożonych sił rozciągających funkcja  $F(N_u, N_v, s)$  jest stała i stanowi pewien współczynnik. Zachowany jest więc w tym przypadku warunek stałości momentu granicznego na jednostkę długości i obliczanie zależności charakteryzujących stany graniczne tak obciążonych układów przeprowadzać można w oparciu o znane wzory z teorii stanów granicznych ustrojów płytowych zginanych<sup>3)</sup>. Wykazaliśmy więc, że układy poddane zginaniu i rozciąganiu za pomocą przekształcenia wskaźnika ortotropii rozpatrywać można jako elementy zginane. Przy stałych wartościach momentów i sił podłużnych jest to przekształcenie liniowe określone przez równanie  $F(N_u, N_v, s) = \text{const}$ .

3.4. Dla ilustracji rozpatrzmy następujący przykład. Płyta kwadratowa o boku  $a$  jest obciążona równomiernie i posiada zbrojenia równej mocy w obydwu kierunkach. Siły rozciągające na jednostkę wynoszą  $N_u = N_v = N$ , a więc  ${}_N K = \kappa = 1$ . Przy  $\Psi = 1/2$  natężenie obciążenia granicznego wyniesie

$${}_N q = \frac{24 {}_N M}{a^2} = \frac{24 M [1 - \Psi(N, s)]}{a^2} = \frac{12 M}{a^2},$$

gdzie  $M$  oznacza wartość momentu granicznego, wyznaczonego dla płyty zginanej bez działania sił rozciągających.

<sup>3)</sup> Por. np. W. Olszak, [9], [10].

#### 4. Niejednorodność struktury elementu

4.1. W pierwszym punkcie niniejszej pracy stwierdziliśmy, że przy rozpatrywaniu stanów granicznych układów mimośrodowo rozciąganych wynikiem konieczność zajęcia się problemami niejednorodności struktury układu. Wniosek ten stanie się oczywisty, gdy wyobrazimy sobie płytę prostokątną znajdującą się w dowolnych warunkach podparcia a poddana poza działaniem obciążeń  $q(u, v)$  również działaniu sił rozciągających  $n_u$  i  $n_v$  zależnych od miejsca. Założmy jeszcze, że funkcja określająca zmianę tych sił jest identyczna na obydwu równoległych do siebie bokach płyty (rys. 8).

Założenia takie dla interesujących nas zbiorników o rzucie poziomym prostokątnym dla celów praktycznych są spełnione w przypadku symetrii układu i obciążenia.

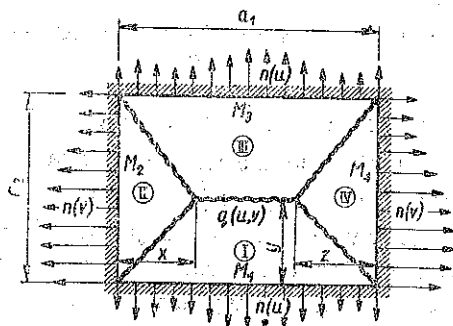
Siły jednostkowe rozciągające  $N_u$  i  $N_v$ , działające w kierunku równoległym do osi układu odniesienia, są odpowiednio funkcjami zmiennej  $u$  i  $v$ ; oznaczać je w dalszym ciągu będziemy

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} N_u = \int_v^{v+1} n(v) dv, \\ N_v = \int_u^{u+1} n(u) du. \end{cases}$$

Tak więc na podstawie związków (2.2.5) oraz (3.2.1) możemy napisać wyrażenie określające moment jednostkowy na odcinku  $(v+1) - v$  oraz  $(u+1) - u$  w formie

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} {}_N M_v = M_v - \frac{M_v}{N_{gr}} \int_v^{v+1} n(v) dv + \frac{\int_v^{v+1} n(v) dv}{2 R_c} [N_{gr} - \int_v^{v+1} n(v) dv], \\ {}_N M_u = M_u - \frac{M_u}{N_{gr}} \int_u^{u+1} n(u) du + \frac{\int_u^{u+1} n(u) du}{2 R_c} [N_{gr} - \int_u^{u+1} n(u) du]. \end{cases}$$

4.2. Bezpośrednio z podanych wzorów wynika, że i wartości odpowiednich momentów  ${}_N M_u$  oraz  ${}_N M_v$  nie są stałe, mimo iż zbrojenie płyty jest rozłożone równomiernie, dzięki czemu  $M_u$ ,  $M_v$  i  $N_{gr}$  są stałe.



Rys. 8

Zapisując powyższe wzory w skróconej postaci otrzymamy

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} {}_N M_u = M_u [1 - \Psi(u, s)], \\ {}_N M_v = M_v [1 - \Psi(v, s)], \end{cases}$$

gdzie np.

$$(4.2.2) \quad \Psi(v, s) = \frac{1}{N_{gr}} \int_v^{v+1} n(v) dv + \frac{\int_v^{v+1} n(v) dv}{2 M_v R_c} [N_{gr} - \int_v^{v+1} n(v) dv],$$

przy czym  $\psi(v, s)$  jest inną funkcją niż poprzednio występująca  $\psi(N, s)$

Ogólna postać wzorów ulega odpowiednim uproszczeniom zależnie od kształtu funkcji  $n(u)$  i  $n(v)$ .

Badanie układów o jednorodnej strukturze, poddanych działaniu sił rozciągających, może być zastąpione badaniem układów niejednorodnych<sup>4)</sup>. Jak już wyjaśniliśmy, niejednorodność tę nazwiemy wymuszoną.

4.3. Ponieważ zagadnienie stanów granicznych układów niejednorodnych nie jest jeszcze w pełni opracowane, poświęcimy nieco uwagi temu tematowi. Naważemy przy tym do prac [18] oraz [9]. Według tych prac stan graniczny układu niejednorodnego osiągnięty będzie wówczas, gdy w każdym punkcie linii załomu naprężenia w materiale ciągłym (stali) osiągną granicę plastyczności, zaś w materiale kruchym (betonie) wystąpią odpowiednie naprężenia równe granicy wytrzymałości na ściskanie (rys. 4 i 5). Szczegóły dotyczące wymiarowania takiego przekroju pomijamy.

Stosując do układu w chwili jego przekształcenia się w mechanizm przez wyczerpanie nośności zasadę zeszywnienia możemy rozpatrzeć warunki równowagi poszczególnych płatów. Ograniczmy się na razie do płyty prostokątnej o siatce zniszczenia podanej na rys. 8.

Zastosowanie równań równowagi zmusza do uwzględnienia poza momentami zginającymi również występujących w rzeczywistych układach sił poprzecznych i momentów skręcających, które działając w fazie sprężystej mają wpływ na ukształtowanie się siatki zniszczenia (w tej sprawie por. pracę [14], p. 4 i 5). Działanie tych uogólnionych sił zastąpić można działaniem pewnych umownych wielkości, zwanych siłami węzłowymi, które uważamy za zaczepione w miejscach zbiegania się linii załomów. Odkładając do następnego p. 5 omówienie tych zagadnień ograniczymy się tu jedynie do stwierdzenia, że w punktach, gdzie linie jedna-

<sup>4)</sup> Podstawy teorii plastyczności ciał elasto-plastycznych niejednorodnych wyłożone są w pracy W. Olszaka, [13].

kowego znaku zbiegają się, zaś obciążenie jest ciągle, te siły węzłowe równe są zeru. Ma to więc miejsce np. w przypadku przedstawionym na rys. 7.

Odpowiednie równania równowagi przyjmują dla płyty pierwszego i drugiego odpowiednio postać następującą:

$$(4.3.1) \quad \begin{cases} \int_0^{a_1} [M_u(v) + M_1(v)] du = \iint_I q(u,v) v du dv, \\ \int_0^{a_2} [M_v(u) + M_2(u)] dv = \iint_{II} q(u,v) u du dv \end{cases}$$

oraz analogicznie dla pozostałych płytów.

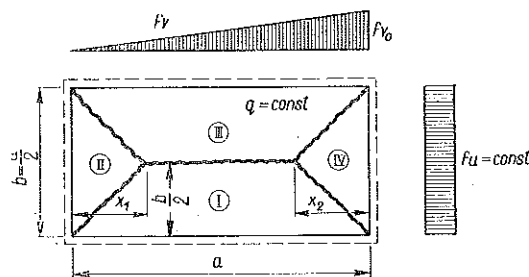
W podanych wzorach przez  $M_u$  i  $M_v$  oznaczono momenty w pewnym przęśle, zaś przez  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) odpowiednie momenty na podporach. Na podstawie (4.3.1) uzyskujemy 4 zależności, z których przy znanych stosunkach momentów  $M_u$ ,  $M_v$  i  $M_i$  wyznaczyć można już bezpośrednio interesujące nas parametry  $x, y, z$ , charakteryzujące siatkę zniszczenia. Ponieważ jednak układ otrzymanych równań jest na ogół zawiły, wygodniej jest przyjąć odpowiednie wartości parametrów, a następnie znaleźć wartości odpowiednich stosunków (por. np. [11]).

Zilustrujemy przedstawione postępowanie przykładem (rys. 9). Wyobraźmy sobie płytę prostokątną, zginaną, swobodnie podparta, której zbrojenie  $f_u$  równoległe do osi  $u$  oraz zbrojenie  $f_v$  równoległe do osi  $v$  zmieniają się według zależności

$$(4.3.2) \quad \begin{cases} f_u = \text{const}, \\ f_v = f_{v_0} \frac{u}{a}. \end{cases}$$

Ponieważ  $M_u = F(f_v)$ , otrzymamy na podstawie (4.3.2)

$$(4.3.3) \quad \begin{cases} M_u = M_{u_0} \frac{u}{a}, \\ M_v = \text{const}. \end{cases}$$



Rys. 9

Równania równowagi są następujące:

$$(4.3.4) \quad M_v b = \frac{p b x_1^2}{6} = \frac{p b x_2^2}{6},$$

$$(4.3.5) \quad M_{u_0} \int_0^a \frac{u}{a} du = \frac{p b^2}{24} (3a - 4x).$$

Z równania (4.3.4) bezpośrednio wynika, że  $x_1 = x_2$ . Przyjmując  $M_u = M_v$  i przyrównując odpowiednie wyrażenia dla momentów, otrzymamy

$$x^2 = \frac{a(3a - 4x)}{8}.$$

Stąd  $x = 0,415 a$ . Dla przypadku jednorodnej płyty izotropowej ( $M_u = M_v = \text{const}$ ) odpowiednia odległość wynosi  $x = 0,325 a$ .

4.4. Teoretycznie jest rzeczą obojętną, czy mamy do czynienia [z niejednorodnością wywołaną, jak w rozpatrywanym wyżej przykładzie, odpowiednim ułożeniem zbrojenia, czy też działaniem sił rozciągających, a więc niejednorodnością wymuszoną.

Warto nadmienić, że z punktu widzenia teorii stanów granicznych układów zginanych obojętnym jest również dla nośności układu miejsce ułożenia zbrojenia, ważną jest jedynie jego ilość<sup>5)</sup>. Stopień dokładności tego wniosku sprawdza się doświadczalnie. Problem ten jest szerzej omówiony w pracach [9], [14] i [18].

Natomiast niejednorodność struktury ma wpływ na układ linii załomów. Wynika to z równań (4.2.2).

Tak na przykład dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej i obciążonej równomiernie oraz poddanej działaniu sił rozciągających wyrażenie na odległość daszku  $x$  jest funkcją odpowiadającą niejednorodności. Gdy weźmiemy pod uwagę płytę o niejednorodności wymuszonej, dla której na przykład wielkość  ${}_N M_u$  dana jest przez (4.2.1), odległość daszku linii załomów będzie

$$(4.4.1) \quad x = \sqrt{\frac{6 \int_0^b M_u \kappa [1 - \Psi_1(u, s)] dv}{qb}}.$$

Warto zaznaczyć, że powyższy sposób pozwala wyznaczyć szereg zależności pomiędzy parametrami w funkcji momentów łamiących. Tak na przykład bardzo żmudne rachunkowo rozwiązanie płyty prostokątnej swobodnie podpartej wzdłuż trzech boków i zamocowanej na czwartym boku można znacznie uprościć korzystając z analogicznych zależności do podanej w (4.3.4) i (4.3.5). Gdy mamy do czynienia ze stałymi momentami  $M_u$  i  $M_v$  w polu oraz  $M'_v$  na zamocowanej podporze, stosunek odległości daszku  $x_2$  od krawędzi zamocowanej do odległości  $x_1$  oraz od krawędzi swobodnie podpartej do tejże odległości  $x_1$  jest

$$(4.4.2) \quad \frac{x_2}{x_1} = \sqrt{\frac{M_v + M'_v}{M_v}} = \sqrt{1 + \lambda}.$$

Ponieważ wartość stosunku momentu  $M'_v/M_v = \lambda$  jest zawsze określona, zagadnienie prowadzi do równania z jedną niewiadomą, znacznie prostszego od równań

<sup>5)</sup> Pochodzi to stąd, że o zachowaniu się ustroju decyduje pewna wielkość wypadkowa.



znalezionych na innej drodze. W przypadku obciążeń nie rozłożonych równomiernie stosunek tych odległości wyraża się wzorem bardziej skomplikowanym na skutek występowania funkcji rozkładu obciążeń. Niemniej jednak podana metoda i w tym przypadku może być zastosowana.

4.5. W przypadku układów o niejednorodnej strukturze można również posługiwać się wyprowadzonymi równaniami stosując zasadę prac przygotowanych. Parametry siatki zniszczenia znajdujemy z warunku maksymalnego oporu plastycznego:

$$(4.5.1) \quad \frac{\partial_N M_u}{\partial x_1} = \frac{\partial_N M_u}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial_N M_u}{\partial x_n} = 0.$$

Ponieważ wyrażenia dla  $_N M_u$  są często funkcjami złożonymi, droga ta okazać się może dłuższa niż przy stosowaniu równań równowagi. Dobre wyniki daje kombinowanie obydwu sposobów. Korzystanie z równań równowagi wymaga wzięcia pod uwagę tzw. sił węzłowych.

To zagadnienie omówimy dokładniej, gdyż wymagają tego podane dalej metody obliczania stanów granicznych zbiorników prostokątnych.

## 5. Zagadnienie sił węzłowych

5.1. Zagadnienie sił węzłowych wiąże się z działaniem sił poprzecznych wzdłuż linii załomów oraz momentów skręcających na odcinkach między sąsiednimi punktami przecięcia się kilku takich linii. Rozpatrywać będziemy układy, znajdujące się pod działaniem obciążeń ciągłych. Postępowanie przedstawione tutaj oparte będzie na rozważaniach K. W. Johansena, [6], [7], dotyczących zagadnień płyt o strukturze jednorodnej z zastosowaniem do układów niejednorodnych.

5.2. Siatka zniszczenia układu jednorodnego i izotropowego o stałej wartości momentu granicznego jest wektorowym obrazem momentów zniszczenia. Na odpowiednich odcinkach linii załomów między poszczególnymi węzłami, w których zbiega się więcej niż dwie linie załomów, prócz momentów zginających wskutek przechodzenia ustroju przez fazę sprężystą mogą działać siły poprzeczne i momenty skręcające (por. np. [4], [6]). Działanie ich na danym odcinku zastąpić można przez dwie siły zaczepione w węzłach. Zgodnie z K. W. Johansensem, [6], oznaczać będziemy te siły przez  $Q$  i  $Q'$ , przy czym siły skierowane ku górze oznaczać będziemy kropką, zaś działające ku dołowi krzyżykiem.

Rysunek 10 (por. [6]) przedstawia właśnie taki fragment siatki zniszczenia, gdzie płyty oznaczone są literami  $A, B, C$ , zaś odpowiednie odcinki linii załomów między węzłami przez  $a, b, c$ . Strzałki oznaczają kierunek wektora momentu. Ponieważ układ jest w równowadze granicznej, wielobok momentów jest zamknięty.

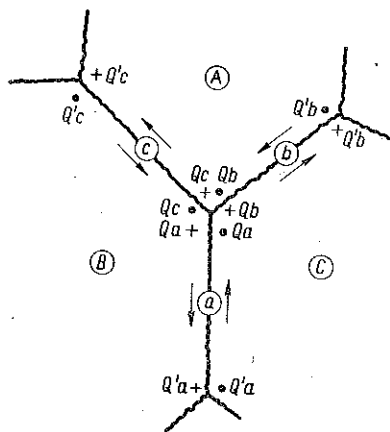
Ustalić można następujące związki (rys. 10):

$$(5.2.1) \quad \begin{cases} Q_A = Q_b - Q_c, \\ Q_B = Q_c - Q_a, \\ Q_C = Q_a - Q_b. \end{cases}$$

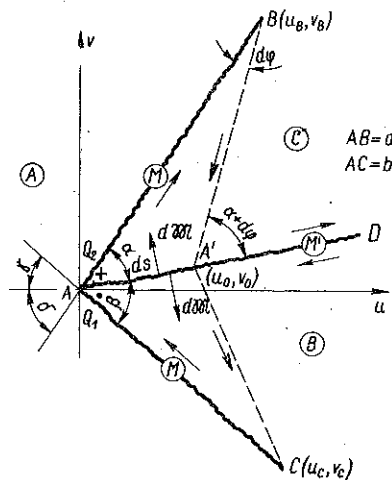
Ponieważ w rozpatrywanym obszarze nie działa żadna siła zewnętrzna, to

$$(5.2.2) \quad Q_A + Q_B + Q_C = 0.$$

Aby wyznaczyć siły węzłowe w zależności od ukształtowania linii załomów, weźmy pod uwagę węzeł o układzie linii przedstawionym na rys. 11. Ponieważ mamy układ niejednorodny i anizotropowy, wprowadzimy składowe momentów granicznych, przedstawione w postaci pewnych funkcji, których tu nie precyzujemy. W sąsiedztwie linii załomów momenty te są bliskie wartościom granicznym.



Rys. 10



Rys. 11

Aby wyznaczyć wielkość siły węzłowej założmy, że przesunięcie węzła  $A'$  o współrzędnych  $(0, 0)$  do punktu  $A'(u_0, v_0)$  jest takim przesunięciem, dla którego momenty wzdłuż linii załomów oznaczonych na rysunku kreską przerywaną nie uległy zmianie.

Kierunki załomów  $AB$  i  $AC$  są dodatnie, zaś kierunek  $AD$  jest ujemny. Wektory momentów mają więc kierunki przeciwne. Wskutek przesunięcia węzła do punktu  $A'$  zaobserwujemy przyrost siły poprzecznej. Przyrost ten możemy pominąć, gdy  $ds \rightarrow 0$ . Równocześnie wzdłuż linii  $AA'$  działa pewien moment skręcający  $d\omega$ .

Równanie sumy momentów względem osi  $AB$  jest następujące:

$$\begin{aligned}
 (5.2.3) \quad Q_1 ds \sin \alpha &= dM \sin \alpha + \int_0^{v_B} M_v \sin \delta dv - \int_{v_0}^{v_B} M_v \sin \delta dv + \\
 &+ \int_0^{v_0} M'_v \sin \delta dv + \int_0^{u_B} M_u \cos \delta du + \int_{u_0}^{u_B} M_u \cos \delta du + \int_0^{u_0} M'_u \cos \delta du = \\
 &= dM \sin \alpha + \int_0^{v_0} (M_v + M'_v) \sin \delta dv + \int_0^{u_0} (M_u + M'_u) \cos \delta du.
 \end{aligned}$$

Ponieważ odcinek  $AA'$  jest równy  $ds$  można wielkości  $du$  i  $dv$  przedstawić w zależności od  $ds$ . Gdy  $ds \rightarrow 0$ , wartość siły węzłowej, związanej z linią załomu  $AB$ , wyrazić można jako funkcję składowych momentu łamiącego, obowiązującego w rozpatrywanym węźle  $A$ . Tak więc siła węzłowa  $Q_1$  jest następująca:

$$\begin{aligned}
 (5.2.4) \quad Q_1 &= \frac{dM}{ds} + (M_{v_0} + M'_{v_0}) \frac{\sin \delta \sin (\delta - \alpha)}{\sin \alpha} + \\
 &+ (M_{u_0} + M'_{u_0}) \frac{\cos \delta \cos (\delta - \alpha)}{\sin \alpha}.
 \end{aligned}$$

W sposób podobny z trójkąta  $ACA'$  ułożymy równanie momentów względem prostej  $AC$ :

$$\begin{aligned}
 (5.2.5) \quad Q_2 &= \frac{dM}{ds} - (M_{v_0} + M'_{v_0}) \frac{\sin \gamma \sin (\beta - \gamma)}{\sin \beta} - \\
 &- (M_{u_0} + M'_{u_0}) \frac{\cos \gamma \cos (\beta - \gamma)}{\sin \beta}.
 \end{aligned}$$

Na podstawie (5.2.1) otrzymamy wyrażenie na siłę węzłową  $Q_A$

$$\begin{aligned}
 (5.2.6) \quad Q_A &= Q_1 - Q_2 = (M_{v_0} + M'_{v_0}) \left[ \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} \sin (\delta - \alpha) + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \sin (\beta - \gamma) \right] + \\
 &+ (M_{u_0} + M'_{u_0}) \left[ \frac{\cos \delta}{\sin \alpha} \cos (\delta - \alpha) + \frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \cos (\beta - \gamma) \right].
 \end{aligned}$$

Na podstawie analogicznych rozważań uzyskać można wyrażenia na  $Q_B$  i  $Q_C$ :

$$(5.2.7) \quad \begin{cases} Q_B = -(M_{v_0} + M'_{v_0}) \sin(\delta - \alpha) \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} - (M_{u_0} + M'_{u_0}) \cos(\delta - \alpha) \frac{\cos \delta}{\sin \alpha}, \\ Q_C = -(M_{v_0} + M'_{v_0}) \sin(\beta - \gamma) \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} - (M_{u_0} + M'_{u_0}) \cos(\beta - \gamma) \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}. \end{cases}$$

We wzorach (5.2.4) - (5.2.7) wielkości momentów oznaczone  $M_{u_0}$  dotyczą jednostkowych momentów w punkcie  $A(0, 0)$ .

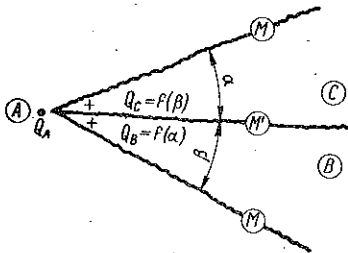
5.3. Pomijając obliczenia sił węzłowych dla przypadku ogólnego ograniczymy się jedynie do przykładów ważnych dla obliczania płyt prostokątnych.

Jeśli chodzi o linie załomów w polu między podporami, gdy środkowa linia załomu wyznaczona przez kierunek  $AA'$  jest równoległa do osi  $u$ , to wówczas  $\delta = \alpha$  oraz  $\gamma = \beta$  i wzór na wartość siły węzłowej  $Q_A$  znacznie się upraszcza z powodu zniknięcia wyrazu związanego ze składową  $M_{v_0}$ .

Będziemy mieli

$$(5.3.1) \quad Q_A = (M_{u_0} + M'_{u_0}) (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta).$$

Dla tego samego przypadku, gdy środkowa linia jest równoległa do osi  $u$ , odpowiednie siły węzłowe  $Q_B$  i  $Q_C$  będą



Rys. 12

$$(5.3.2) \quad \begin{cases} Q_B = -(M_{u_0} + M'_{u_0}) \operatorname{ctg} \alpha, \\ Q_C = -(M_{u_0} + M'_{u_0}) \operatorname{ctg} \beta. \end{cases}$$

Powyższe przypadki ilustruje rys. 12.

W przypadku rozpatrywanej klasy układów niejednorodnych ważne jest więc również następujące twierdzenie dla układów jednorodnych: jeśli zbiegające się w węźle linie załomów mają ten sam znak,

a nie działa w nim żadna siła skupiona, to wszystkie siły węzłowe są tam równe zero. Słuszności powyższego twierdzenia można dowieść wstawiając do równań (5.2.6)-(5.3.2) wartość  $M' = -M$  (momenty  $M$  i  $M'$  miały z założenia znaki różne).

Dla rozpatrywanego w poprzednim rozdziale przykładu można było na podstawie powyższego napisać równania (4.3.4)-(4.4.2).

Ze wzoru (5.2.6) wynika bezpośrednio, że gdy  $\alpha + \beta = \pi$ ,  $Q_A = 0$ , co jest oczywiste dla przypadku swobodnego brzegu lub swobodnego podparcia. Stąd też

$$(5.3.4) \quad Q_B = -Q_C.$$

Jeśli jeszcze przyjmiemy warunek  $\alpha + \beta = \delta = \pi$ , to ze wzoru (5.2.6) (niezależnie od tego, która linia załomu jest równoległa do osi  $u$ ) otrzymamy następujący wzór na wartość sił węzłowych w przypadku swobodnego brzegu zbiornika:

$$(5.3.5) \quad Q_B = -(M_{u_0} + M'_{u_0}) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Podane wzory, pozwalające wyznaczyć wielkość sił węzłowych dla płyt ze swobodnym brzegiem, odnoszą się do przypadku, gdy brzeg swobodny jest równoległy do osi  $u$  (np. rys. 13).

Dla bardziej skomplikowanego podparcia i dla płyt o strukturze niejednorodnej odpowiednie wyrażenia mogą ulec zmianie.

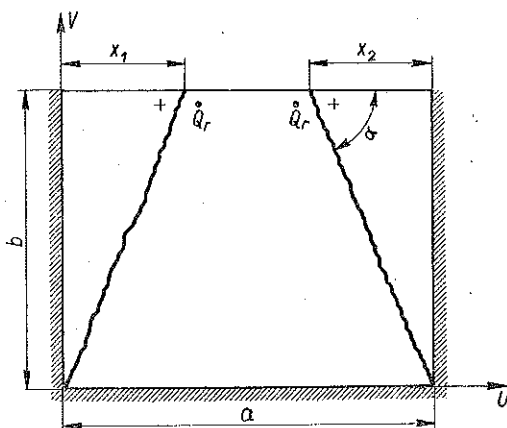
Wzór (5.3.5) jest interesujący, gdyż wskazuje na zależność siły węzłowej jedynie od momentu jednostkowego na krawędzi; łatwo ją wobec tego wyznaczyć.

5.4. Należy zwrócić uwagę, iż niezależność siły węzłowej od struktury płyty (jednorodnej lub niejednorodnej) jest tylko pozorna. Charakter siatki zniszczenia wpływa na wielkość siły. We wspomnianym wzorze zależność tę reprezentuje kąt nachylenia linii załomu do danego układu. Jak wynika z poprzednich rozważań oraz przykładu, jest to zależność związana z niejednorodnością układu.

Gdybyśmy założyli, że momenty jednostkowe wzdłuż linii  $AB$  i  $AC$  (rys. 11) nie są równe, to wzory na wielkości siły węzłowej byłyby podobne do wzorów (5.2.6) z tą jednak różnicą, że przed nawias kwadratowy nie można by wynieść czynnika  $M_{v_0}$ , gdyż mielibyśmy teraz dwie różne wielkości  $M_{v_0}(AB)$  i  $M_{v_0}(BC)$ . Samo wyznaczenie sił węzłowych nie naręczałoby trudności.

5.5. Dla obliczeń jest ważny kierunek działania sił węzłowych. Na podstawie zależności (5.3.5) dla płyty na trzech bokach swobodnie podpartej bądź też utwierdzonej, a na pozostałym boku swobodnej, przy  $M'_{u_0} = 0$  wielkość siły, występującej przy brzegu (rys. 13), będzie

$$(5.5.1) \quad Q_s = -M_{u_0} \operatorname{ctg} \alpha = -M_{u_0} \frac{x}{b}.$$



Rys. 13

W płacie, w którym linia załomu tworzy z wolnym brzegiem kąt ostry, siła ta jest skierowana ku dołowi, zaś w narożu o kącie dopełniającym do  $180^\circ$  siła ta na podstawie (5.3.4) jest skierowana ku górze. Pamiętając o sposobie znakowania możemy napisać

$$(5.5.2) \quad Q_s = M_u \frac{x}{b}.$$

Powyższe wiadomości o siłach węzłowych, które koniecznie należy uwzględnić, gdy zależności występujące w stadium granicznym chcemy zbadać za pomocą równań równowagi, wystarczą do rozwiązywania pewnych zadań, w szczególności do opracowania metody obliczania stanów granicznych zbiorników prostokątnych.

Warto zwrócić uwagę, że za pomocą sił węzłowych można badać wpływ tworzących się naroży na nośność płyty.

## 6. Stany graniczne zbiorników prostokątnych

Ograniczymy się jedynie do podania kilku przykładów obliczania stanów granicznych zbiorników prostokątnych.

Zakładać będziemy, że rozkład obciążeń prostopadłych do powierzchni w chwili osiągnięcia stanu granicznego jest taki sam, jak na początku. Oznacza to, że pomimo powstawania przegubów (czy «zawiasów») plastycznych, ciśnienie wewnętrzne w zbiorniku nie spada. Pomijamy również wpływ odkształceń przy wypisywaniu równań równowagi płatów.

*Przykład pierwszy.* Weźmy pod uwagę zbiornik o wymiarach w rzucie poziomym  $a \times a$  i wysokości  $b$ , poddany ciśnieniu typu hydrostatycznego. Ściany boczne zamocowane są w dnie, zaś u góry podparte przegubowo (rys. 14).

Na rysunku podana jest jedna ze ścian bocznych zbiornika. Symetria układu i obciążenia pozwala na rozpatrzenie stanu granicznego omawianego zbiornika na podstawie stanu jednej ściany bocznej. Momenty jednostkowe  $M_v$  i  $M_u$  określone przez moc zbrojenia są znane. Siły rozciągające działają tylko na boki 2 i 4, zaś funkcja rozkładu tych sił wzdłuż boków nie jest znana. Znana natomiast może być całkowita wartość siły rozciągającej, działającej na ściankę na odcinku  $a$ . Aby tę wartość obliczyć, wprowadzimy zastępczą funkcję rozkładu sił wewnętrznych, określoną na podstawie warunku równowagi płata typu II. Z powodu symetrii układu i obciążenia oraz niewystępowania sił węzłowych całkowita siła rozciągająca na rozpatrywaną ściankę w kierunku osi  $u$  jest dana przez obciążenie, przypadające na bliźniaczy płat sąsiedniej ścianki.

Funkcja obciążeń ścianek zbiornika jest określona przez kształt wykresu obciążeń oraz kształt płyta II<sup>6)</sup> i wyraża się wzorem

$$(6.1) \quad p(v) = p_0 \left(1 - \frac{v}{b}\right).$$

Zastępcze siły rozciągające określone są przez zależność

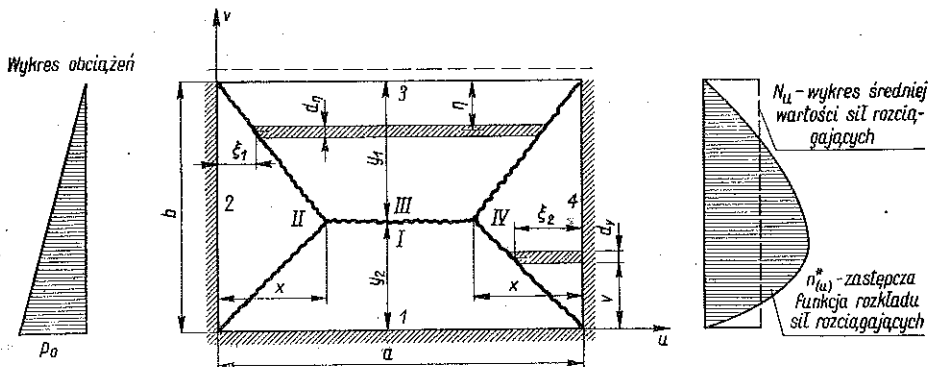
$$(6.2) \quad u^*(v) = p(v) x(v).$$

Na odcinku  $\langle 0, y_2 \rangle$  jest

$$(6.3) \quad u^*(v) = p_0 \left(1 - \frac{v}{b}\right) \frac{xv}{y_2},$$

zaś na odcinku  $\langle y_2, b \rangle$

$$(6.4) \quad u^*(v) = p_0 \left(1 - \frac{v}{b}\right) \frac{x(b-v)}{y_1}.$$



Rys. 14

Po określeniu sił rozciągających znamy funkcję określającą zastępczą niejednorodność momentów  ${}_N M_u$  i  ${}_N M_v$ . Znajomość dokładnej funkcji nie jest konieczna, gdyż występuje ona pod całką. Funkcja zastępcza musi być tak dobrana, aby całka na długości odpowiedniego boku dawała takie same wartości, jak dla ściślej funkcji niejednorodności. Postulat ten jest spełniony przy zachowaniu warunków równowagi. Możemy teraz wyznaczyć parametry siatki zniszczenia, jeżeli dodatkowo znane są  $M_u$ ,  $M_v$  oraz  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

<sup>6)</sup> Słuszne jest to jedynie dla zbiornika kwadratowego, gdyż przy prostokątnym funkcja sił rozciągających określona będzie — poza obciążeniem — przez kształt odpowiedniego płyta sąsiedniej ścianki zbiornika.

Wyprowadzimy równania równowagi rozpoczynając od płata III.

Na pasku o szerokości  $d\eta$  i długości  $a - 2\xi$  płata III działa obciążenie

$$dP_1 = p_0 \frac{\eta}{b} (a - 2\xi) d\eta.$$

Ponieważ  $\xi = x\eta/y_1$ , to równanie równowagi przy stałym  $M_u$  jest

$$(6.5) \quad M_u a = \int_0^{y_1} p \frac{\eta}{b} \left( a - \frac{2x\eta}{y_1} \right) \eta d\eta = \frac{p_0 y_1^3}{b} \left( \frac{a}{3} - \frac{x_1}{2} \right).$$

W sposób analogiczny napisać możemy równanie dla płata I, przy czym wykres obciążenia w kształcie trapezu można będzie uważać za sumę obciążenia równomiernego i trójkątnego. Pozwoli to skorzystać z wyniku podanego przez (6.5) oraz z prostych zależności dla obciążeń równomiernych.

Będziemy mieli

$$(6.6) \quad M_u a + M_1 a = \frac{p_0 y_2^2}{6} (3a - 4x) - \frac{p_0 y_2^2}{6b} (2a - 3x).$$

Podobnie dla płatów II i IV znajdziemy równania

$$(6.7) \quad \int_0^b ({}_N M_v + {}_N M_1) dv = \\ = \int_0^{y_1} \frac{p_0 \eta}{2b} \xi_1^2 d\eta + \int_0^{y_2} p_0 \left( 1 - \frac{v}{b} \right) \frac{\xi_1^2}{2} dv = \frac{p_0 x^2}{24} (b + 2y_1).$$

W powyższym wzorze składowe momenty sił wewnętrznych występują w równaniach równowagi pod całką. Pozwala to zastąpić układ niejednorodny przez jednorodny, gdzie funkcja  $\Psi$ , określona wzorem (4.2.2), będzie stałym współczynnikiem na całej wysokości boku  $b$ . Określmy całkowitą siłę rozciągającą, działającą na bok  $b$ . Z równań (6.3) i (6.4) uzyskujemy

$$(6.8) \quad N_b = \int_0^{y_2} p_0 \left( 1 - \frac{v}{b} \right) \frac{xv}{y_2} dv + \\ + \int_{y_2}^b p \left( 1 - \frac{v}{b} \right) \frac{x(b-v)}{y_1} dv = \frac{p_0 x}{b} (2b - y_2).$$



Średnia wartość siły na jednostkę wysokości ścianki zbiornika wyniesie

$$(6.9) \quad N_u = \frac{p_0 x}{6b} 2b - y_2.$$

Poszukiwanie siatki zniszczenia, spełniającej warunek maksymalnego oporu plastycznego, jest uciążliwe, łatwiej natomiast przyjąć, że parametry tej siatki są znane i szukać związanych z nimi wartości momentów granicznych na odpowiednich liniach załomów (por. np. [10]). Decydując się na taką zasadę postępowania i odkładając do innej okazji traktowanie zagadnienia z uwzględnieniem twierdzenia o maksymalnym oporze plastycznym przyjmiemy, że  $x = y = b/2$ ,  $a = 2b$ . Wówczas z równania (6.5) otrzymamy wartość momentu

$$(6.10) \quad M_u = \frac{p_0 b^3}{8ba} \left( \frac{2b}{3} - \frac{b}{4} \right) = \frac{5}{192} p_0 b^3.$$

Podobnie wartość  $M_1$  na podstawie (6.6) będzie

$$(6.11) \quad M_u + M_1 = \frac{4 p_0 b^3}{48} - \frac{5}{192} p_0 b^3 = \frac{11}{192} p_0 b^3.$$

Stąd

$$(6.12) \quad M_1 = \frac{1}{32} p_0 b^3.$$

Na podstawie (6.9) średnia wartość siły na jednostkę wyniesie dla boku  $b$

$$(6.13) \quad N_u = \frac{p b}{2 \cdot 6b} 2b - \frac{b}{2} = \frac{3}{24} p b.$$

Z zależności (6.7) przy założeniu działania siły równomiernie rozłożonej o wartości podanej przez (6.13) otrzymamy średnią wartość momentu łamiącegogo

$$(6.14) \quad {}^N M_u + {}^N M_1 = \frac{p b^3}{4 \cdot 24b} \left( b + 2 \cdot \frac{b}{2} \right) = \frac{p b^3}{48}.$$

Zakładając, że zbrojenie w kierunku osi  $u$  na górze i na dole jest identyczne, otrzymamy

$$(6.15) \quad {}^A M_u = {}^N M_1 = \frac{p b^3}{96}.$$

Jeśliby przyjąć liniową zależność między momentem łamiącym a siłami rozciągającymi (linia przerywana na rys. 5), tzn. jeżeli pominiemy drugi wyraz we wzorze (4.2.2) określającym wpływ sił rozciągających na niejednorodność wymuszoną ustroju, zadanie można uważać za rozwiązane.

Podstawiając wartości liczbowe  $b = 2\text{ m}$  w przypadku ciśnienia hydrostatycznego przy materiale o ciężarze na jednostkę objętość  $\gamma = 0,8\text{ t/m}^3$  ( $p_0 = 1,6\text{ t/m}^2$ ) znajdziemy

$$M_u = \frac{5}{192} 1600 \cdot 2,0^2 = 167\text{ kGm/m},$$

$$M_l = \frac{1}{32} 1600 \cdot 2,0^2 = 200\text{ kGm/m},$$

$${}^{\wedge}M_v = {}^{\wedge}M_l = \frac{1}{96} 1600 \cdot 2,0^2 = 67\text{ kGm/m}.$$

W projekcie przewidujemy ze względu na powyższe momenty odpowiednie zbrojenie. Obliczamy je nie zwracając uwagi na obecność sił rozciągających. Poza tym w kierunku równoległym do osi  $u$  projektujemy odpowiednie zbrojenie przenoszące siłę rozciągającą  $N_b$ , która na całej wysokości ścianki wynosi

$$N_b = \frac{3}{24} p b^2 = \frac{3}{24} 1600 \cdot 2,0^2 = 800\text{ kG}.$$

Projektowanie zbrojenia przy uwzględnianiu obydwu wyrazów we wzorze (4.2.2) jest nieco dłuższe, ale również nie przedstawia trudności, jeśli znamy wszystkie wielkości występujące w tym wzorze.

*Przykład drugi.* Określimy siły występujące w stanie wyczerpania nośności zbiornika o jednym brzegu swobodnym. Wymiary przyjmujemy takie same jak w przykładzie poprzednim (rys. 15).

Zastępczą funkcją rozkładu sił podłużnych na podstawie zależności (6.3) oraz (6.4) będzie

$$(6.16) \quad n(v) = p_0 \left(1 - \frac{v}{b}\right) \frac{xv}{b}.$$

Siła węzłowa jest stała, ponieważ  $M_u = \text{const}$ , a linia załomu, dochodząca do swobodnego brzegu, jest skierowana dodatnio; wartość siły wynosi

$$(6.17) \quad Q_s = M_u \frac{x}{b}.$$

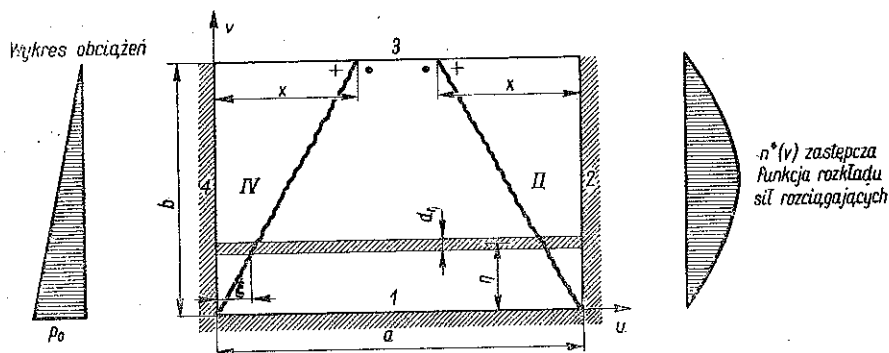
Równania równowagi są następujące:

dla płata I

$$(6.18) \quad 2 M_u x + M_1 a + 2 M_u \frac{x}{b} = \int_0^b p_0 \frac{\eta}{b} \left( a - \frac{2x\eta}{b} \right) \eta d\eta = p_0 b^2 \left( \frac{a}{3} - \frac{x}{2} \right);$$

dla płatów II i IV

$$(6.19) \quad \int_0^b (N M_v + N M_2) dv - M_u \frac{x}{b} = \int_0^b p_0 \frac{\eta}{b} \xi \frac{\xi}{2} d\eta = \frac{p_0 x^2}{8} b.$$



Rys. 15

Przyjmując  $a = 2b$ ,  $x = 2b/3$  oraz  $M_u = M_1$  i  $N M_v = N M_2 = N M_4$  otrzymamy

$$(6.20) \quad \frac{4}{3} M_u b + M_u 2b + \frac{2}{3} M_u b = p_0 b^2 \left( \frac{2}{3} b - \frac{2}{3} \frac{b}{2} \right),$$

$$M_u = M_1 = \frac{p_0 b^2}{12} \text{ kGm/m}$$

oraz

$$(6.21) \quad 2 \int_0^b N M_v dv = \frac{p b^3}{18} \text{ kGm.}$$

Tak więc średni moment na wysokości ścianki  $b$  tak na podporze, jak i w przęśle wyniesie

$$(6.22) \quad N M_v = N M_2 = N M_4 = \frac{p_0 b^2}{36} \text{ kGm/m.}$$

Chcąc znaleźć całkowity moment działający na całej wysokości ścianki należy powyższą wartość pomnożyć przez wysokość  $b$  i odpowiednio dla tego momentu zaprojektować wymiary i całkowite zbrojenie przekroju.

Przyjmujemy, podobnie jak w przykładzie poprzednim, liniową zmianę momentów  $M_v$  sił rozciągających. Prowadzi to do niezależnego zbrojenia na zginanie oraz niezależnego zbrojenia na rozciąganie. Jak wynika z rozważań w p. 3 i 4, takie założenie jest dopuszczalne i nieznacznie wpływa na zwiększenie stopnia bezpieczeństwa (por. rys. 6).

Całkowita siła działająca wzdłuż boku wyniesie

$$(6.23) \quad N_b = p_0 \frac{x}{b} \int_0^b \left( v - \frac{v^2}{b} \right) dv + M_u \frac{x}{b} = \frac{p_0 b^2}{9} + \frac{p_0 b^2}{18} = \frac{p_0 b^2}{6}.$$

Przytoczone obliczenie opierało się na założeniu, że w punkcie zbiegu boków zamocowanych  $M_u = -M'_u$ . Tak więc siła węzłowa w tym narożu płyta trójkątnej nie występuje. Możemy się o tym również przekonać zestawiając równania równowagi, tj. rzutując siły na płaszczyznę prostopadłą do powierzchni rozpatrywanej płyty.

Podane przykłady wskazują, jak jasny jest tok obliczania zbiorników w stanie granicznym. Nadto mamy możliwość wyznaczenia w sposób prosty wielkości, co prawda sumarycznych, sił rozciągających. O ile chodzi o funkcję rozkładu zbrojenia przejmującego siły rozciągające, to kierować się należy oczywiście rozkładem tych sił w fazie sprężystej, co nie doprowadzi do nagłych przegrupowań sił wewnętrznych.

Bliższe badania zbiorników wykazują, że istnieje możliwość uproszczeń wzorów dla najbardziej typowych funkcji ciśnień (mury oporowe, silosy), i opracowania odpowiednich tablic współczynników określających wypadkowe siły rozciągających oraz momenty jednostkowe. Analiza «ekonomicznego» stosunku ortotropii w oparciu o sprężyste stadium pracy układu pozwoli wyznaczyć parametry, wiążące się z wymiarami tego układu i określające siatki załomów. Parametry te, określone w formie współczynników, ułatwią praktyczne stosowanie teorii stanów granicznych do obliczania zbiorników. Projektowane badania doświadczalne pozwolą ocenić poprawność przyjętych założeń.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] H. Craemer, *Slabs Spanning in Two Directions Analysed by Consideration of Pattern of Fracture*, Concrete and Constr. Engineering, 1950.
- [2] H. Craemer, *Rectangular Slabs Spanning in Two Directions*, Concrete and Constr. Engineering, 1952.
- [3] A. M. Freudenthal, *The Inelastic Behaviour of Engineering Materials and Structures*, New York 1950.
- [4] K. Girkmann, *Flächentragwerke*, Wiedeń 1952.
- [5] A. A. Gwozdiew, *Rasczot niesuszczej sposobnosti konstrukcij po metodu priedielnowo rawnowiesja*, Moskwa 1949.

- [6] K. W. Johansen, *Mémoires*, MSMKI, 1932.
- [7] K. W. Johansen, *Pladeformler*, Kopenhaga 1949.
- [8] M. S. Mikieladze, *Izгиb балки, rastiagnwajemoj centrobieżnymi siłami*, Inż. zbornik, 1953.
- [9] D. Niepostyn, *Nośność graniczna niejednorodnych płyt prostokątnych*, Rozpr. Inż. (w druku).
- [10] W. Olszak, *Teoria nośności granicznej płyt ortotropowych*, Bud. Przem. 7-8 (1953).
- [11] W. Olszak, *Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych*, Rozpr. Inż. VI (1954).
- [12] W. Olszak, *Zagadnienie ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Mech. Stos. 3 (1953).
- [13] W. Olszak, *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych*, Arch. Mech. Stos. 3 i 4 (1954).
- [14] W. Olszak i A. Sawczuk, *Teoria nośności granicznej płyt w świetle weryfikacji doświadczalnej*, Rozpr. Inż. 2 (1955).
- [15] W. Prager, *Limit Analysis and Design*, Journ. Americ. Concr. Institute, 1953.
- [16] A. R. Rżanicyn, *Rasczot sooruzenij s uczotom plasticzeskich swojstw matieriałow*, Moskwa 1949.
- [17] W. W. Sokołowski, *Teorja plasticznosti*, Moskwa 1950.
- [18] A. Sawczuk, *Zagadnienia nośności granicznej płyt w kształcie wieloboków* (praca niepublikowana).

## Резюме

### ВОПРОСЫ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ РАСТЯГИВАЕМЫХ И ИЗГИВАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ К ТЕОРИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ

Работа касается вопросов несущей способности элементов, подвергаемых одновременному изгибу и растяжению. Здесь учитываются системы, построенные из хрупкого и тягучего материалов, так что хрупкий материал работает как сжимаемый, а тягучий — как растягиваемый, именно так, как В. Олшак рассматривал предельное равновесие пластинок, [10], [11] и [12].

Рассмотрение предельного состояния элемента такой системы позволяет установить, что учет растягивающих сил (мембранного состояния) ведет к изменению показателя ортотропии системы, вызывая так называемую вынужденную ортотропию. Одновременно (в зависимости от формы функции, задающей распределение растягивающих сил по периметру пластинки) может возникнуть изменение структуры элемента из однородной на неоднородную. Эта неоднородность точно определена условиями нагрузки и параметрами, изображающими структуру рассматриваемого элемента.

В связи с учетом — кроме учета изгиба — действия растягивающих сил, рассматривается вопрос узловых сил для неоднородных си-

стем, подобным образом, как это сделал К. В. Иогансен для однородных изгибаемых пластинок.

После выяснения теоретических вопросов несущей способности растягиваемых и изгибаемых элементов, рассматриваются предельные состояния двух прямоугольных резервуаров, основываясь на существующих решениях для изгибаемых пластинок.

#### Summary

#### SOME PROBLEMS OF LIMIT ANALYSIS OF ELEMENTS SUBJECTED TO TENSION AND BENDING AND THEIR APPLICATION TO THE THEORY OF RECTANGULAR TANKS

This paper concerns the problems of the limit loads of elements subjected to simultaneous bending and tension. Structures made from two materials, brittle and ductile, are considered, the brittle material being subjected to compression and the ductile one — to tension on the same way as W. Olszak had considered the limit analysis of bending plates, [10], [11] and [12].

An investigation of the limit state of such an element permits to observe that if tensile forces (the membrane state) are taken into consideration, a change of the index of orthotropy of the structure occurs resulting in the so called «forced» orthotropy. At the same time the phenomenon of change of the homogeneous structure of the element into a heterogeneous one can occur, depending on the form of the function determining the distribution of tensile forces on the periphery of the plate. This heterogeneity is strictly determined for the given conditions of load and the given parameters determining the structure of the considered element.

Considering the action of the tensile forces, the problem of knot forces for heterogeneous system is investigated in a way similar to that of K. W. Johansen for homogeneous plates subjected to bending.

After the explanation of the theoretical problems concerning limit load of elements subjected to tension and bending, limit states of two rectangular tanks are considered on the basis of existing solutions for plates subjected to bending.

KATEDRA WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW  
WYDZ. BUD. PRZEM. P. W.