

WACŁAW OLSZAK i ANTONI SAWCZUK

TEORIA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ PŁYT  
W ŚWIELE WERYFIKACJI DOŚWIADCZALNEJ

CZEŚĆ PIERWSZA

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
XXVIII

## SPIS TREŚCI

|   | Str. |
|---|------|
| 1. Wstęp  | 181  |
| 2. Prace polskie  | 183  |
| 3. Ogólne założenia teorii nośności granicznej płyt   | 185  |
| 4. Zasady badań laboratoryjnych nad teorią nośności granicznej                              | 194  |
| 5. Charakterystyka warunków doświadczeń   | 203  |
| 6. Płyta kwadratowa obciążona w środku siłą skupioną  | 204  |
| 7. Płyta kwadratowa obciążona siłami skupionymi rozmieszczonymi koncentrycznie wokół środka | 210  |
| 8. Płyta kwadratowa podparta na trzech bokach, obciążona siłą skupioną w środku             | 215  |
| 9. Płyta kwadratowa obciążona równomiernie  | 217  |
| 10. Płyta izotropowa prostokątna obciążona równomiernie                                     | 225  |
| 11. Płyta dwuprzęsłowa obciążona równomiernie   | 233  |
| 12. Płyta prostokątna ortotropowa obciążona równomiernie                                    | 236  |
| 13. Uwagi końcowe   | 243  |
| 14. Dodatek do p. 3. Przykład liczbowy  | 244  |

## 1. Wstęp\*)

1.1. Teoria nośności granicznej płyt powstała z bezpośrednich obserwacji układów pęknięć w zniszczonych ustrojach płytowych, w szczególności w konstrukcjach żelbetowych. Systematyczne obserwacje, a następnie szczegółowa analiza układów linii załomów pozwoliły wykryć szereg prawidłowości, występujących w ustrojach płytowych w końcowym stadium wyczerpania się ich nośności; stadium to praktycznie równoznaczne jest ze zniszczeniem tego rodzaju konstrukcyj.

Szereg prac — począwszy od pierwszych, nie wolnych od błędów, sformułowań A. Ingersleva, [7], poprzez cenne spostrzeżenia K. W. Johansena, [8], [9], [10], [11], (szczególnie w odniesieniu do poprawnego ujęcia obrazu kinematycznych zależności w stadium złamania płyty), następnie poprzez prace A. A. Gwozdiewa, [6], L. S. Gilmana, [5], W. Olszaka, [15], [16], [17], [18], [20], [21], [22], [23], i jego współpracowników, [12], [13], [14], [29], [30], [31], — wyjaśniło zasady i sprecyzowało metody tej szczególnej gałęzi teorii plastyczności, którą ująć można mianem teorii granicznej ustrojów. Warto przy tym na marginesie zaznaczyć, że problemy nośności granicznej były atakowane przez szereg badaczy niezależnie od siebie. Świadczy to o tym, że stan wiedzy, a w szczególności rozwój teorii plastyczności, stworzył obiektywne warunki do rozwoju tego szczególnego jej odcinka, który, co zdaje się nie ulegać wątpliwości, posiada duże znaczenie teoretyczne i praktyczne.

1.2. Mimo iż teoria nośności granicznej powstała na gruncie potrzeb praktyki inżynierskiej i rychło doczekała się praktycznego potwierdzenia od strony weryfikacji jakościowego przebiegu zjawisk, długo pozostawały niesprawdzone te zależności, które od strony ilościowej charakteryzują stany graniczne, związane z ostateczną fazą wyczerpania nośności ustroju płytowego.

1.3. Z uwagi na korzyści techniczne i gospodarcze, jakich należy się spodziewać na skutek szerokiego wprowadzenia do praktycznego stosowania

\*) Praca przedstawiona na Zebraniu Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w dniu 8 marca 1954 r.

wania wyników teoretycznych badań nośności granicznej płyt, narzuca się konieczność weryfikacji doświadczalnej tych wyników w sposób możliwie wszechstronny.

Realizacja programu badań eksperymentalnych, które by potwierdziły słuszność założeń i pozwoliły na zaakceptowanie wyników teoretycznych zarówno od strony jakościowej, jak i ilościowej, pozwoliłaby zamknąć krąg cyklu poznawczego: od obserwacji faktów, występujących w praktyce, poprzez teorię z powrotem do praktyki w sensie zarówno potwierdzenia teorii, jak i jej wykorzystania i uogólnienia.

Przeprowadzenie jednak doświadczalnych badań tego typu jak badania nad stanami granicznymi układów powierzchniowych wymaga — z uwagi na mnogość zmiennych parametrów — odpowiedniej skali (w sensie zakresu badań); badania takie związane są zatem ze sporymi kosztami i wymagają dużo czasu.

1.4. Były, co prawda, prowadzone już badania eksperymentalne nad płytami żelbetowymi, ale badania te — o znaczeniu dziś już tylko historycznym — nie były podbudowane żadną koncepcją teoretyczną.

Mimo to niektóre ich wyniki, odpowiednio interpretowane, stanowić będą, jak zobaczymy, wcale pożyteczny materiał, umożliwiający weryfikację założeń, budowy i wyników teorii zjawisk towarzyszących wyczerpaniu nośności ustrojów płytowych.

Zważyć przy tym jednak należy, że prace doświadczalne nad płytami żelbetowymi, począwszy od pierwszych opublikowanych wyników badań C. B a c h a, [1], i O. G r a f a, [4], mimo iż zawierają wiele rzeczowego materiału, tylko częściowo nadają się do wykorzystania do naszych celów. Wynika to stąd, że badania te nie zawsze były prowadzone w warunkach, które można z naszego stanowiska przyjąć za odpowiednie, jak też i z tego, że nie we wszystkich dostępnych nam publikacjach scharakteryzowane są dostatecznie dokładnie interesujące nas parametry (jak np. komplet mechanicznych własności stosowanych materiałów itp.).

Niemniej jednak uważaliśmy za swój obowiązek (niezależnie od prowadzonych specjalnie pod kątem widzenia teorii nośności granicznej własnych badań doświadczalnych) przejrzeć krytycznie dotychczasowe dostępne nam rezultaty badań i wyciągnąć z nich wnioski, o ile można było przy tym interpretować wyniki tych badań w świetle teorii nośności granicznej. Z materiałów tych korzystaliśmy z rozmysłem, stanowią one bowiem dodatkowe potwierdzenie słuszności założeń teoretycznych. Szczególnie pod tym względem cenną jest praca K. W. J o h a n s e n a, [10].

1.5. Przypadki, spotykane w praktyce, wykazują duże bogactwo zmiennych warunków; dotyczy to w szczególności:

(1) struktury płyt (izotropia, ortotropia, ortotropia «podwójna» itd.);

- (2) ich ukształtowania geometrycznego i warunków podparcia (płyty prostokątne, płyty w postaci wieloboków umiarowych, płyty jedno-prześłowe i ciągłe, podparcie swobodne, utwierdzenie, brzegi wolne itp.);
- (3) ich obciążenia (układy sił skupionych, obciążenia ciągłe itp.).

## 2. Prace polskie

Dotychczasowe prace polskie w dziedzinie nośności granicznej płyt szły w następujących zasadniczych kierunkach.

2.1. Pierwszy z nich dotyczył sformułowania *podstaw* tej teorii, przy czym okazało się, że są one słuszne nie tylko dla problemu nośności granicznej płyt, lecz dla szerszej klasy problemów teorii ustrojów nośnych. Dotyczy to np. poprawnego kinematycznego obrazu stanu granicznego, twierdzenia o maksymalnym oporze plastycznym itd.

2.2. Drugim podstawowym zagadnieniem, które ma doniosłe znaczenie zarówno dla rozbudowy teorii, jak i dla jej praktycznych zastosowań, jest zagadnienie *anizotropii struktury płyt*.

Dla praktyki projektodawczej szczególne znaczenie ma przypadek anizotropii ortogonalnej (ortotropii).

Udowodnić można, że w teorii nośności granicznej każdy przypadek ortotropii bez względu na zachodzące warunki, tzn. przy dowolnym ukształtowaniu płyty, przy dowolnym jej obciążeniu i przy dowolnych warunkach brzegowych, sprowadzić można do zagadnienia płyty izotropowej i to przez zastosowanie prostej transformacji liniowej.

Transformację tę rozszerzyć można również na płyty «podwójne ortotropowe». Zagadnienie powyższe omawia szczegółowo oddzielna praca pierwszego z autorów, [17].

Podano przy tym nowe rozwiązania szeregu trudniejszych przypadków, jak np. obciążenie siłami skupionymi płyt eliptycznych w dowolnym punkcie na osi dłuższej, [17]; zagadnienie to zostało następnie uogólnione dla przypadku obciążenia w dowolnym punkcie elipsy, [14]; podano rozwiązanie dla płyt wielobocznych o ukształtowaniu foremnym, [29], [31].

2.3. Ważnym zagadnieniem jest problem *plyt ciągłych*.

W pracy [22] przedstawiono ujęcie teoretyczne tego problemu w przypadku ciągłości «dwuwymiarowej», a zatem takiej, jaka charakteryzuje ustroje płytowe «wielopolowe» w dwóch kierunkach (np.  $x$  oraz  $y$ ). Wyniki podobne jak dla («dwuwymiarowo») ciągłych płyt uzyskuje się dla *zbiorników prostokątnych*, które, w rzeczy samej, złożone są z tego rodzaju płyt ciągłych. Istotną różnicę stanowi przy tym konieczność równoczesnego uwzględnienia stanu membranowego. Zagadnienie to jest obecnie w trakcie opracowywania, [30].

Nieco bardziej złożone zagadnienie spotykamy w analizie *stropów «grzybkowych»*, kiedy to ujęcie siatki zniszczenia z punktu widzenia kinematyki wymagać będzie na ogół rozwiązania tego zagadnienia w przestrzeni (a nie w płaszczyźnie).

I ten problem jest obecnie w opracowaniu.

2.4. Ostatnio zwrócono również uwagę na problem *niejednorodności* struktury płyt. Podstawy ogólnej teorii ciał sprężysto-plastycznych przedstawione przez W. Olszaka, [24], [25], doznają znacznego uproszczenia, gdy chodzi o ich zastosowanie do tej klasy zagadnień, które są związane z analizą stanów granicznych.

Okazuje się przy tym, że w fazie końcowej, charakteryzującej wyczerpanie się nośności ustroju, zagadnienie niejednorodności (przy założeniu schematu sztywno-plastycznego), [15], [16], [20], [21], wyraża się przez pewne proste zależności całkowite, polegające na operowaniu pewnymi wielkościami, które można by — przez analogię do zagadnień spotykanych w «klasycznej» nauce o wytrzymałości materiałów — nazwać wielkościami «wypadkowymi», [13], [30], [31].

Zależności te wyrażają się w sposób prosty.

2.5. Wspomnieć wreszcie należy o pewnej analogii mechanicznej, która umożliwia rozwiązywanie złożonych zagadnień z dziedziny teorii nośności granicznej płyt.

Mamy na myśli *analogię «wzgórza piaskowego»*, która — jak wykazano to na innym miejscu <sup>1)</sup> — znajduje zastosowanie zarówno w zagadnieniu płyt izotropowych, jak i ortotropowych.

2.6. Zainteresowanie, jakim się cieszą obecnie problemy nośności granicznej, skłoniło nas do opracowania obszernego planu badań doświadczalnych.

Pierwszą serię tych badań eksperymentalnych, na razie dość skromną, można w zasadzie uznać za zakończoną. Dotyczyła ona przede wszystkim weryfikacji doświadczalnej założeń podstawowych teorii nośności granicznej płyt i to zarówno w sensie poszukiwania jej potwierdzenia pod względem jakościowym (kinematyka stanów granicznych, siatka zniszczenia), jak i pod względem ilościowym (wartości parametrów, charakteryzujące siatkę zniszczenia, wartości obciążeń granicznych).

Badania doświadczalne dalsze, już rozpoczęte, dotyczą układów bardziej złożonych (płyty ciągłe, struktura ortotropowa, zagadnienie naroży itd.).

---

<sup>1)</sup> Zagadnienie to, na którego charakter zwrócił uwagę jednemu z autorów W. Nowacki, omówiono w pracy W. Olszaka, [23], w której podano możliwości stosowania tej analogii przede wszystkim w przypadkach obciążenia równomiernego.

2.7. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie części wyników doświadczeń własnych (z serii pierwszej) oraz niektórych, nadających się do wykorzystania do naszych celów, badań zagranicznych.

### 5. Ogólne założenia teorii nośności granicznej płyt

3.1. Zanim przystąpimy do omówienia przeprowadzonych doświadczeń oraz do analizy wyników, uzyskanych w oparciu o te doświadczenia, wydaje się nam rzeczą wskazaną podać krótką charakterystykę ogólnych założeń i zasad teorii nośności granicznej płyt.

3.2. Wyobraźmy sobie w tym celu płytę o strukturze izotropowej lub ortotropowej, znajdującą się w pewnych warunkach podparcia. Mówiąc o płytach ortotropowych mamy przede wszystkim na uwadze krzyżowo-zbrojone płyty żelbetowe, będące najbardziej charakterystycznym reprezentantem tego typu struktury.

Założmy, że zbrojenie ułożone jest równomiernie w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach, przy czym ilość tego zbrojenia na jednostkę długości przekroju poprzecznego może być w obu kierunkach prostopadłych różna. Założenia takie prowadzą do postulatu rozpatrywania układów zarówno izotropowych, jak i ortotropowych. W przypadku gdy warunki podparcia narzucają konieczność stosowania zbrojenia górnego, zakładamy, że płyta może być inaczej (krzyżowo) zbrojona górą, a inaczej (krzyżowo) zbrojona dołem; stanowi ona wtedy układ «warstwowo» albo «podwójnie» ortotropowy.

Założenia powyższe, dotyczące układu zbrojenia, mają swoje uzasadnienie praktyczne. Płyty krzyżowo zbrojone posiadają na ogół cztery różne charakterystyki, odnoszące się do mocy zbrojenia.

3.3. Równomierność rozkładu zbrojenia w każdym z kierunków przy stałej grubości płyty powoduje, iż płytę tę rozpatrywać można jako jednorodną<sup>2)</sup>. Prowadzi to z kolei do wniosku, że moment łamiący, obliczony na jednostkę długości, charakteryzuje się stałą wartością, przy czym za moment łamiący uważa się wartość występującą w chwili wyczerpania nośności układu i przekształcenia go w (ruchomy) mechanizm. Moment jednostkowy posiada tę samą wartość we wszystkich przekrojach równoległych do danego kierunku.

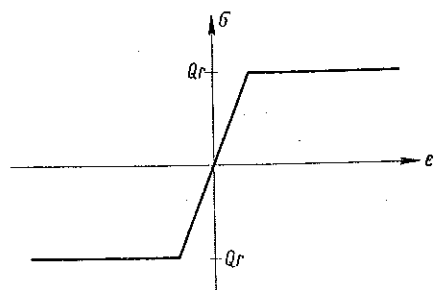
<sup>2)</sup> Badania nad ustrojami zbrojonymi nierównomiernie prowadzą do pojęcia jego niejednorodności. Zagadnienie to omawiają w swych pracach: W. Olszak, [24], [25], D. Niepostyn, [13], i A. Sawczuk, [30], [31]. Por. p. 2.4.

3.4. W miarę wzrostu obciążenia ustroju obserwować można odkształcenia sprężyste i to aż do chwili, gdy w pewnym miejscu moment osiągnie wartość graniczną, charakteryzującą uplastycznienie tej partii płyty. Z tą chwilą uplastycznienie zaczyna rozchodzić się wzdłuż pewnych linii, zwanych liniami załomów.

W okresie tym występują obok siebie w płycie odkształcenia plastyczne w liniach załomów oraz odkształcenia sprężyste na pozostałym obszarze.

Nośność układu nie jest jeszcze wówczas wyczerpana i możliwy jest dalszy wzrost obciążeń. Obciążenie przybierze swą wartość graniczną z chwilą, kiedy linie załomów dojdą do krawędzi płyty, wskutek czego ustrój nośny zamieni się w mechanizm; odkształcenia plastyczne w liniach załomów narastać bowiem mogą bez przyrostu obciążenia.

Przyjęcie tego schematu przebiegu zjawiska wynika z pominięcia wpływu «utwardzenia» stali, obserwowanego w czasie badania próbek na rozciąganie. Ograniczamy się tym samym do przyjęcia zależności między odkształceniem a naprężeniem, przedstawionej schematycznie na rys. 1.



Rys. 1

Doświadczenia wykazują—będzie mowa o tym szczegółowiej w dalszej części pracy — że w przypadku elementów żelbetowych przy odkształceniach, które charakteryzują chwilę wyczerpania nośności, przyjęcie zależności przedstawionej na rys. 1, a charakteryzującej związek między naprężeniami i odkształceniami znajduje swe fizyczne uzasadnienie.

3.5. W teorii nośności granicznej, rozwiniętej w pracach polskich, pomija się z zasady odkształcenia sprężyste ustroju, ograniczając się do uwzględniania odkształceń plastycznych. Takie stanowisko — którego słuszność potwierdzają badania eksperymentalne — prowadzi do rozpatrywania modelu sztywno-plastycznego. W naszym przypadku przyjęcie uproszczonego modelu sztywno-plastycznego oznacza, że odkształcenia (w szczególności zakrzywienia) «koncentrują» się w miejscach, w których naprężenia osiągnęły wartość, odpowiadającą granicy plastyczności, a więc wzdłuż linii załomów. Obszary ograniczone liniami załomów, lub liniami załomów i bokami płyty, pozostają — przy pominięciu odkształceń sprężystych — płaskie. Oznacza to w konsekwencji, że linie załomów muszą być liniami prostymi, gdyż jedynie wówczas jest możliwe przeprowadzenie układu w mechanizm.



3.6. Z przyjęcia powyższych założeń wynika, że odkształcenie płyty rozpatrywane być może jako zespół kątowych obrotów płatów płaskich wokół chwilowych osi obrotu.

Położenie osi obrotu każdego z płatów jest przy tym zależne od warunków podparcia. Oś obrotu przechodzić bowiem musi np. przez punkty podparcia płyty, jak to ma miejsce w przypadku swobodnego oparcia płyty na głowicach słupów, albo też przez prostą podparcia — w przypadku płyt podpartych liniowo, albo wreszcie pokrywać się z linią załomu.

Proste załomów, które — jak widzieliśmy — są krawędziami przecięcia się płaskich płatów, muszą każdorazowo przechodzić przez punkt przecięcia się odpowiednich osi obrotu sąsiadujących ze sobą płatów.

Układ prostych załomu albo — jak układ ten chcemy nazywać w dalszym ciągu — siatkę zniszczenia można więc przewidzieć bezpośrednio z analizy warunków podparcia płyty. Należy tu dorzucić, że określa się w ten sposób z warunków geometrycznych jedynie ogólny zarys siatki zniszczenia bez określenia jej wymiarów i kątów nachylenia odpowiednich linii względem siebie. Ponadto są niejednokrotnie możliwe różne typy (konfiguracje) tej siatki.

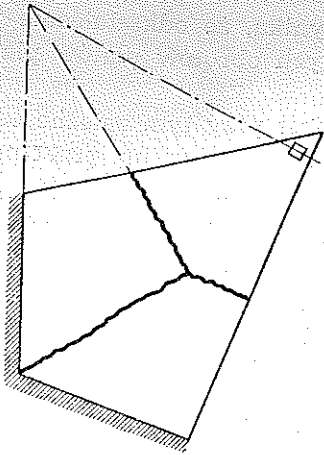
Wybór siatki właściwej oraz wyznaczenie parametrów, na podstawie których można będzie ściśle — w danych warunkach podparcia i obciążenia — określać rzeczywistą siatkę zniszczenia, nastąpić może w oparciu o metodę postępowania, której poświęcimy nieco uwagi w dalszej części niniejszej pracy.

3.7. Dla zilustrowania faktu, iż siatka zniszczenia (w przypadku obciążeń ciągłych) dana jest przez warunki geometryczne, przedstawiono na rysunkach 2-5 kilka przykładów siatek zniszczenia bez ściślejszego precyzowania określających je parametrów.

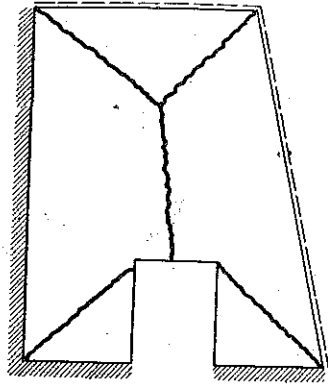
Nie wszystkie jednak typy obciążeń pozwalają na podstawie warunków geometrycznych określić kształt siatki zniszczenia. Nie będzie tak między innymi wówczas, gdy mamy do czynienia z płytą poddaną działaniu pojedynczych sił skupionych, układów obciążeń, zbliżonych w swym działaniu do działania sił skupionych, bądź zespołów sił skupionych. Dla tych obciążeń figury załomów tworzą układ zbliżony do szeregu trójkątów o wspólnym wierzchołku w miejscu zaczepienia siły oraz trapezów — w zależności od obciążenia. Ilustracją powyższego stwierdzenia niech będzie rys. 6, na którym podana jest siatka zniszczenia tafli ze szkła zbrojonego, obciążonej siłą skupioną.

Cztery inne przykłady takich siatek zniszczenia przedstawiają rysunki 7, 8, 9 i 10.

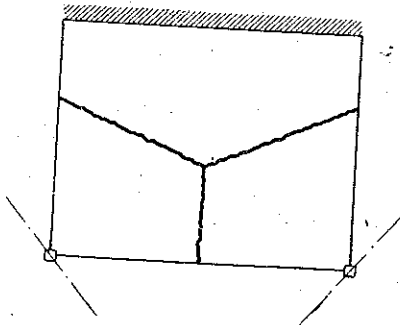
3.8. Warto tu — w związku z omawianym problemem siatek zniszczenia — przytoczyć jako rzecz charakterystyczną fakt, że również niektóre



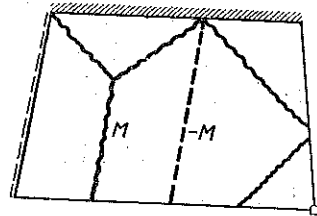
Rys. 2



Rys. 3



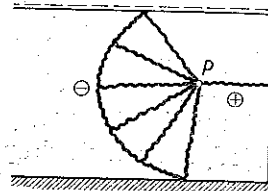
Rys. 4



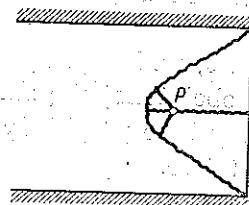
Rys. 5



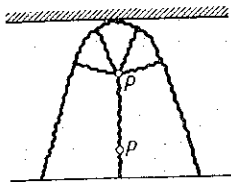
Rys. 6



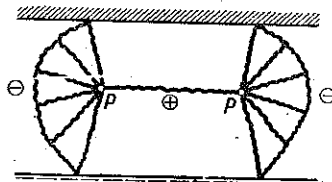
Rys. 7



Rys. 8

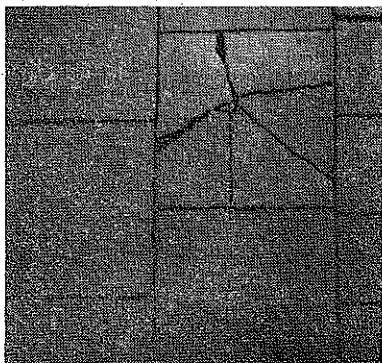


Rys. 9

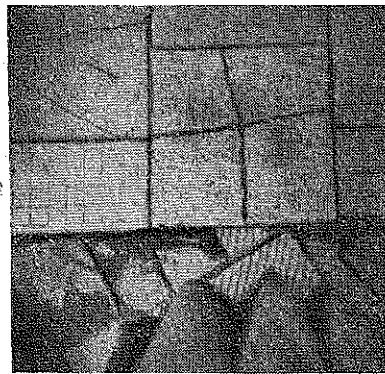


Rys. 10

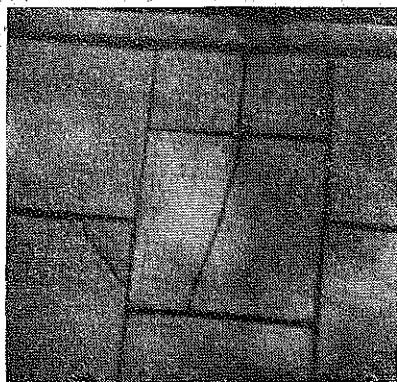
typy płyt niezbrojonych wykazują figury zniszczenia podobne do figur, występujących w przypadku płyt zbrojonych, mimo że mechanizm ich destrukcji jest odmienny.



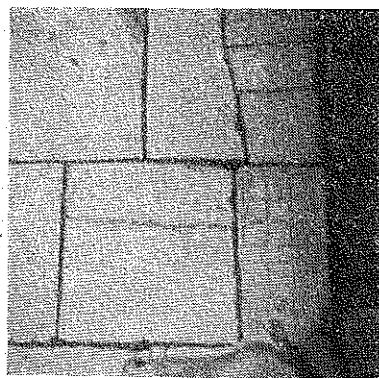
Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13

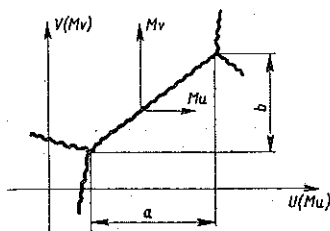


Rys. 14

Rysunki 11, 12, 13 i 14 przedstawiają prostoliniowe załomy szeregu płyt betonowych według obserwacji, przeprowadzonych na jednym z chodników. W przypadku, którego dotyczą owe ilustracje, o załomach prostoliniowych stanowiły 91,2% ogólnej ilości płyt złamanych, [16].

3.9. Następne z kolei zagadnienie, które należy wyjaśnić po omówieniu siatek zniszczenia, to zagadnienie związku, jaki istnieje między układem linii załomów i ich długością a nośnością płyty.

Stwierdziliśmy poprzednio, że decyzja przyjęcia sztywno-plastycznego modelu odkształcenia oznacza prostoliniowość siatki załomów; wyraża ona zarazem okoliczność, że linie załomów są równocześnie osiami obrotu momentu łamiącegogo.



Rys. 15

Weźmy pod uwagę ogólny przypadek znamieny tym, że linia załomu jest nachylona do obydwu wzajemnie prostopadłych kierunków zbrojenia (rys. 15). Z uwagi na fakt, że moment graniczny («łamiący») na długości tej linii charakteryzuje się wartością stałą, również i jego składowe, związane z odpowiednimi osiami układu odniesienia, będą stałe.

Wynika to zresztą bezpośrednio z faktu, że momenty  $M_u$  i  $M_v$  są funkcjami mocy zbrojenia:

$$(3.9.1) \quad \begin{cases} M_u = F(f_v), \\ M_v = F(f_u). \end{cases}$$

W zapisie tym  $f_v$  i  $f_u$  oznaczają moc zbrojenia w kierunkach równoległych do osi danego układu współrzędnych  $(u, v)$ .

Wychodząc z wzajemnego stosunku mocy zbrojenia dołem  $f_u$  i  $f_v$  oraz górą  $f'_u$  i  $f'_v$  przynależne momenty łamiące, obliczane na jednostkę szerokości zbrojenia dołem będą  $M_u$  i  $M_v$ , natomiast dla zbrojenia górą  $M'_u$  i  $M'_v$ .

Ustalając wzajemne stosunki momentów otrzymamy

$$(3.9.2) \quad \begin{cases} M_v = \alpha M_u, \\ M'_v = \lambda M'_u. \end{cases}$$

Gdy ponadto zachodzi zależność  $M'_u = \mu M_u$ , oznacza to zarazem, że

$$(3.9.3) \quad M'_v = \lambda \mu M_u.$$

Jeśli jako przypadek szczególny układu izotropowego przyjmiemy płytę o jednakowej mocy zbrojenia w obydwu wzajemnie prostopadłych kierunkach, wówczas zachodzi równość momentów składowych  $M_u$  i  $M_v$  (liczonych na jednostkę długości), co zapisać możemy w postaci

$$(3.9.4) \quad M_u = M_v = \bar{M}.$$

Całkowity moment  $M$ , związany z określonym odcinkiem linii załomu, będzie funkcją jednostkowego momentu wypadkowego  $M$  i długości tego odcinka  $s$ :

$$(3.9.5) \quad \underline{M} = M \cdot s.$$

Gdy rozpatrywać będziemy momenty graniczne jako wielkości wektorowe, stwierdzimy łatwo, że sama siatka zniszczenia stanowi naoczny wektorowy obraz momentów łamiących w chwili osiągnięcia granicy nośności płyty.

Gdy natomiast, w przypadku ogólniejszym, będziemy mieli do czynienia z płytami ortotropowymi o stałych wartościach momentów składowych  $M_u$  i  $M_v$ , przy czym  $M_v = \kappa M_u$ , wówczas układ linii załomów nie będzie bezpośrednio przedstawiał wartości całkowitego momentu  $M$ , ale pewne wartości do niego proporcjonalne. Współczynniki proporcjonalności są łatwe do wyznaczenia.

3.10. Zatrzymując się nad wyznaczeniem dla przypadku ortotropii odpowiednich składowych momentu całkowitego, związanego z danym odcinkiem, zauważymy, że jeśli przez  $a$  i  $b$  oznaczymy odpowiednie składowe odcinka w układzie osi współrzędnych  $(u, v)$ , otrzymamy bezpośrednio

$$(3.10.1) \quad \begin{cases} \underline{M}_u = a M_u, \\ \underline{M}_v = b M_v = b \kappa M_u. \end{cases}$$

Analogiczne zapisy są słuszne w przypadku występowania momentów ujemnych, jak również w przypadku najogólniejszym, tzn. przy uwzględnieniu ortotropii warstwowej (podwójnej).

Wskazana proporcjonalność między wartością momentu całkowitego (charakteryzującą w istocie nośność graniczną) a długością odcinków siatki zniszczenia ułatwi analizę wielkości sił, powodujących graniczne stadium wyczerpania nośności rozpatrywanego ustroju.

3.11. Aby uwolnić się od konieczności ewentualnego uwzględnienia momentów skręcających i sił poprzecznych, które, co prawda, w liniach załomów — w interesujących nas przypadkach — nie występują, mogą jednak powodować powstanie tzw. sił węzłowych w punktach zbiegu większej ilości linii załomów, posłużymy się dla określenia wartości momentu łamiącego zasadą prac przygotowanych.

Zapiszemy ją tutaj w postaci

$$(3.11.1) \quad \delta L = \delta V,$$

co wyraża, że dla ciała będącego w równowadze, przy jego przesunięciu przygotowanym, połączonym z odkształceniem, praca sił zewnętrznych

jest równa pracy sił wewnętrznych na odpowiednich przyrostach odkształceń.

Gdy jako najstosowniejsze w rozpatrywanym problemie weźmiemy pod uwagę wzajemne obroty kątowe poszczególnych pól płyty, to w wyrażenie na pracę wejdą jedynie wyrazy pochodzące z działania momentów. Praca wyrażona będzie wtedy każdorazowo przez iloczyn, utworzony z kąta obrotu  $\delta\varphi$  pola wokół odpowiedniej osi obrotu oraz rzutu wypadkowej momentu łamiącego na kierunek tej osi  $M \cos(\underline{M}, \delta\varphi)$ .

Daje to w rezultacie iloczyn skalarny

$$(3.11.2) \quad \underline{M} \delta\varphi = \underline{M} \delta\varphi \cos(\underline{M}, \delta\varphi)$$

albo, operując składowymi wektorów obrotu i momentu,

$$(3.11.3) \quad \underline{M} \delta\varphi = \underline{M}_u \delta\varphi_u + \underline{M}_v \delta\varphi_v,$$

gdzie  $M_u$  i  $M_v$  oznaczają odpowiednie składowe, przy czym pamiętać należy o znaczeniu wskaźnika ortotropii  $\kappa$ , określonego np. wyrażeniem (3.10.1).

W podanych wyżej wzorach założyliśmy, że obrót, wywołany danym momentem, charakteryzuje się tym samym znakiem co i odpowiedni moment; za dodatnie uważać będziemy przy tym takie momenty, które wywołują występowanie sił wewnętrznych rozciągających po stronie «dolnej». Tak więc np. załomy na podporach płyt utwierdzonych przyjmować będziemy za ujemne, w przęsłach natomiast za dodatnie.

3.12. Występujące w wyrażeniu (3.11.3) składowe wektora  $\delta\varphi$  przedstawić można na podstawie rys. 16, przy obrocie danego pola wokół osi obrotu i przy udzieleniu pewnemu punktowi przemieszczenia przygotowanego  $\delta w$ , w postaci

$$(3.12.1) \quad \delta\varphi_u = \frac{\delta w}{r_v}, \quad \delta\varphi_v = \frac{\delta w}{r_u}.$$

Praca sił wewnętrznych jest więc łatwa do określenia i przedstawi się jako suma iloczynów typu (3.11.3).

Jeśli natomiast chodzi o pracę sił zewnętrznych, to w przypadku sił skupionych będzie ona sumą iloczynów typu

$$(3.12.2) \quad \delta L_P = \sum P_i \delta w_i,$$

przy czym  $P_i$  oraz  $\delta w_i$  oznaczają odpowiednio siłę i jej przesunięcie w kierunku działania siły, wywołane przemieszczeniem przygotowanym  $\delta w$ ,

natomiast przy działaniu rozłożonego na powierzchni płyty obciążenia o intensywności  $p(u, v)$  otrzymuje się wyrażenie

$$(3.12.3) \quad \delta L_p = \iint p(u, v) \delta w(u, v) du dv,$$

gdzie  $\delta w(u, v)$  oznacza przynależne przemieszczenie związane z przemieszczeniem przygotowanym.

Oczywiście, odpowiedni bilans prac objąć powinien wszystkie biorące udział w obrotach płyty, podobnie jak wzór (3.12.2) dotyczył wszystkich punktów zaczepienia sił  $P_i$ .

Ostatecznie na podstawie przytoczonych wzorów otrzymamy równanie

$$(3.12.4) \quad \sum P_i \delta w_i + \iint p(u, v) \delta w(u, v) du dv - \sum M \delta \varphi \cos(M, \delta \varphi) = 0,$$

z którego przy znanej siatce zniszczenia wyznaczyć możemy wielkość momentu łamiącego  $M$ .

3.13. Wyjaśnić jeszcze należy sposób postępowania, gdy siatka zniszczenia nie będzie z góry znana co do długości poszczególnych jej odcinków itp. (choć, o ile chodzi o jej kształt to określony on jest — jak wiemy — warunkami podparcia i obciążenia). Należy wówczas przedstawić siatkę za pomocą funkcji zależnej od odpowiedniej ilości nieznanymi parametrów  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , co z kolei pociągnie za sobą to, że wyrażenie na moment  $M$  będzie funkcją obciążenia  $Q$  oraz tychże parametrów:

$$(3.13.1) \quad M = F(Q, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

W celu wyznaczenia wielkości momentu charakteryzującego stan graniczny danej płyty posłużymy się zasadą maksymalnego oporu plastycznego, [16], [22], która mówi, że ze wszystkich geometrycznie możliwych układów linii załomu ważna jest ta siatka, której odpowiada największa wartość momentu  $M$ <sup>3)</sup>; dla poprawnej siatki załomów muszą więc być spełnione warunki

$$(3.13.2) \quad \frac{\partial M}{\partial x_1} = \frac{\partial M}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial M}{\partial x_n} = 0.$$

Z powyższych warunków otrzymujemy  $n$  równań, pozwalających wyznaczyć  $n$  nieznanymi parametrów  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , gdy zaś znana będzie siatka zniszczenia, nic nie stoi na przeszkodzie wyznaczeniu wielkości momentu łamiącego  $M$ <sup>4)</sup>.

Przejdziemy teraz do omówienia problemów związanych bezpośrednio z techniką wykonywania doświadczeń nad nośnością graniczną płyt.

<sup>3)</sup> Jest to równoznaczne ze stwierdzeniem, że obciążenie spełnia wówczas warunek minimum.

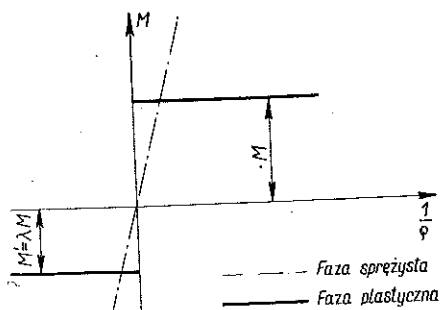
<sup>4)</sup> Prosty przykład liczbowy, objaśniający sposób postępowania w konkretnych zagadnieniach, podany jest na końcu pracy (patrz str. 244).

#### 4. Zasady badań laboratoryjnych nad teorią nośności granicznej

4.1. Moment zginający «graniczny» w linii załomów posiada wartość stałą wzdłuż całej długości tej linii. Takie przyjęcie stałości momentu łamiącego, oparte na znanej platformie plastycznej z wykresu zależności ( $\sigma, \epsilon$ ) dla stali, upraszcza znacznie obliczenia przy wyznaczaniu momentów łamiących<sup>5)</sup>.

Dla przypadku elementów zginanych interesującą będzie zależność — wynikająca ze wspomnianego wykresu relacji ( $\sigma, \epsilon$ ) — między krzywizną a momentem zginającym w okresie pojawienia się odkształceń plastycznych. Zależność tę możemy przedstawić na podstawie znanych

związków między krzywizną a momentem zginającym w formie wykresu przedstawionego na rys. 17.



Rys. 17

Prosta przerywana przedstawia funkcję  $M = f(\varrho)$  dla ciała sprężystego, prosta pełna dla ciała idealnie plastycznego. Wartości momentów  $M$  i  $M'$  określone są między innymi zdolnością materiału do przejmowania sił wewnętrznych rozciągających w jego warstwach, położonych odpowiednio poniżej względnie powyżej osi zgięcia plastycznego.

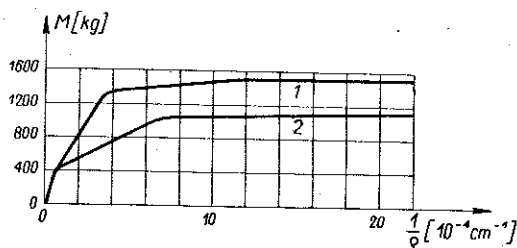
Dla elementów zbudowanych z materiału elasto-plastycznego wykres przedstawionej zależności będzie odpowiednią kombinacją obu faz; rozumieć to należy w ten sposób, że platforma rosnącej krzywizny przy stałym momencie powstanie z chwilą osiągnięcia w materiale granicy plastyczności.

Nasuwa się pytanie, w jakiej mierze tego rodzaju założenie odkształceń plastycznych znajduje potwierdzenie przez zachowanie się żelbetowego pasma płytowego. Doświadczenia, wykonane nad pasmem płyty żelbetowej o podanej grubości i zbrojeniu ułożonym «dołem», wykazały, że jeśli oś odciętych przedstawiać będzie krzywiznę, a więc — w założeniu sztywno-plastycznego schematu odkształcenia — nachylenie płatów względem siebie, zaś oś rzędnych — wartość momentu «granicznego», to zależność między momentem a krzywizną linii załomu przedstawi się jak na rys. 18.

<sup>5)</sup> Oznacza to zarazem, że pomijamy w ten sposób niedużą nadwyżkę nośności, wynikającą z faktu «utwardzenia» materiału.



Krzywa 1 dotyczy płyty zbrojonej stalą miękką, zaś krzywa 2 odnosi się do zbrojenia drutem stalowym, który przy próbie rozciągania po zerwaniu wykazywał wydłużenie około 5% i nie posiadał wyraźnej granicy plastyczności. Jak widać z rysunku, w obydwu przypadkach istnieje znacznej długości platforma, którą uważać można za poziomą, a która wskazuje, iż wartość momentu od chwili osiągnięcia pewnej wielkości jest stała i niezależna od krzywizny.



Rys. 18

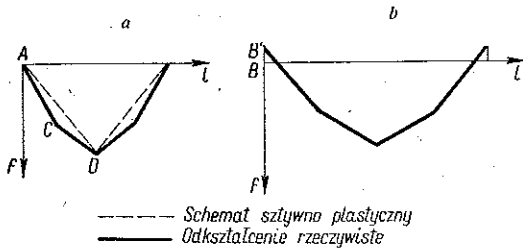
4.2. Następnym problemem, któremu należy poświęcić nieco uwagi, jest problem odkształceń sprężystych oraz ich wpływu na układ linii załomów płyty. Na innym miejscu, [16], stwierdzono, iż odkształcenia sprężyste, w szczególności zaś zakrzywienia płyty w tych częściach, w których naprężenia nie osiągnęły granicy plastyczności, można w pierwszym przybliżeniu pominąć w porównaniu z odkształceniami plastycznymi, występującymi w przekrojach, w których nastąpiło osiągnięcie stanu granicznego. Takie założenie jest równoznaczne z przyjęciem tzw. sztywnoplastycznego modelu odkształcenia w chwili zniszczenia (por. [15], [16], [27]), co pozwala uważać poszczególne płyty za płaskie. Stąd bezpośrednio wynika, że linie załomu są liniami prostymi (por. [6], [7], [8], [9], [10], [15], [16], [22]).

Problem ten wymaga nieco innego potraktowania dla dwu różnych praktycznie ważnych typów obciążeń, mianowicie obciążeń rozłożonych równomiernie i obciążeń skoncentrowanych w formie sił skupionych.

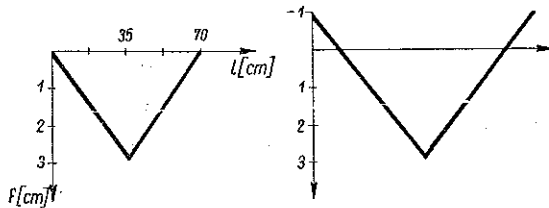
Jeśli chodzi o płyty obciążone w sposób równomierny na całej powierzchni, to założenie, że płyty pozostają płaskimi, nie jest w rzeczywistości w pełni spełnione, lecz w przybliżeniu jest ono uzasadnione. Jako ilustracja powyższego problemu niech posłuży rys. 19, [10].

Na rysunku 19a przedstawiony jest charakter odkształceń płatek płyty kwadratowej w płaszczyźnie jednej osi symetrii powierzchni płyty, natomiast na rys. 19b odkształcenia, występujące wzdłuż przekątnej. Przesunięcie się punktu  $B$  z pierwotnego położenia na osi długości  $l$  do położenia  $B'$  świadczy o podniesieniu się naroża  $B$  w stosunku do położenia w stanie nieobciążonym. Zagadnienie podnoszących się naroży omówione zresztą będzie na innym miejscu. Oczywiście, przedstawienie odkształcenia płyty w rozpatrywanym przekroju w postaci linii łamanej  $ACD$

jest schematyczne i ma na celu jedynie zwrócenie uwagi na rząd wielkości odkształceń sprężystych w stosunku do plastycznych w linii załomu, reprezentowanej na rysunku przez punkt D.



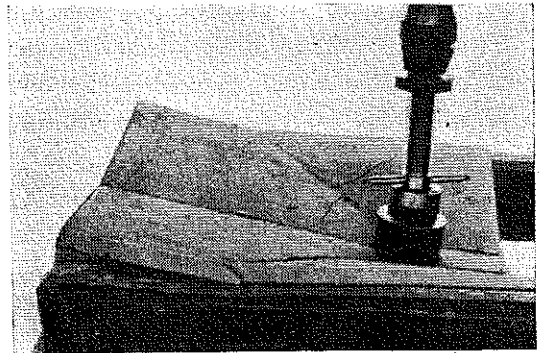
Rys. 19



Rys. 20

Inny przypadek potwierdzający założenie prostoliniowości linii załomów przedstawia rys. 21.

Należy się tu jednak zastrzec, że w przypadku płyty o dużej powierzchni, a małej przy tym sztywności, obciążonej pojedynczą siłą skupioną, zagadnienie przedstawiać się może nieco inaczej, gdyż linie załomów niekoniecznie muszą dojść do krawędzi podparcia. Powstaje w tym przypadku inny układ siatki zniszczenia oraz inny nieco obraz odkształceń, który może nie odpowiadać wykresom, przedstawionym na rys. 19, niemniej jest on również zgodny z założeniami teorii granicznej.



Rys. 21

4.3. Po tym omówieniu doświadczalnego sprawdzenia słuszności założeń teorii nośności granicznej należy z kolei wyjaśnić niektóre zagadnienia, związane z metodyką prowadzenia doświadczeń nad weryfikacją tej teorii.

Jest rzeczą wiadomą, że o wielkości obciążenia łamiącego według teorii nośności granicznej świadczy układ linii załomów oraz wartość jednostkowego momentu łamiącego. Jeśli chodzi o pierwszy z wymienionych czynników, nie będziemy go w chwili obecnej bliżej rozpatrywali, a to dlatego, że metoda wyznaczania układu linii załomów dla danych warunków podparcia i obciążenia omówiona została już uprzednio dość szczegółowo<sup>6)</sup>. Należy tu jedynie przypomnieć, że posługuje się ona kryterium maksymalnego oporu plastycznego, co pozwala ustalić niezbędną liczbę parametrów charakteryzujących siatkę zniszczenia.

Ze stanowiska eksperymentalnego uzasadnienia teorii nośności granicznej ważnym jest drugi ze wspomnianych czynników, mianowicie wartość momentu łamiącego na jednostkę długości linii załomu, czyli — jak wartość tę będziemy nazywali — tzw. moment jednostkowy. Znajomość momentu jednostkowego jest ważna z tego względu, iż pozwoli ona przy właściwej w danych warunkach obciążenia i podparcia siatce zniszczenia na wyznaczenie wielkości obciążenia łamiącego na drodze teoretycznej i porównanie go z rzeczywistym obciążeniem niszczącym, co zatem pozwoli ustalić stopień zgodności wyników teoretycznych z wynikami doświadczeń. Znajomość momentu jednostkowego jest przeto nieodzowna w tym celu, aby można było na podstawie układu linii załomów wnioskować o wielkości obciążenia łamiącego.

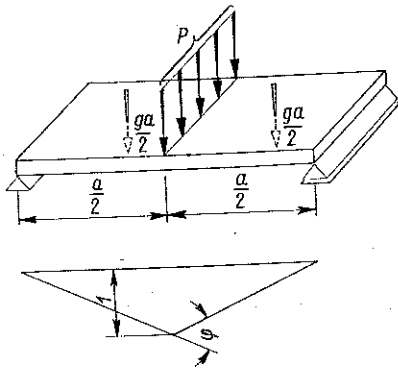
Jak o tym powiedzieliśmy już na innym miejscu ([16] oraz p. 3.2 pracy niniejszej) przyjmuje się zazwyczaj, iż nośność płyty żelbetowej określona jest między innymi przez moc zbrojenia, mającego przenieść powstałe w elemencie naprężenia rozciągające; pomija się przy tym zwykle ten dodatkowy czynnik, który, w sposób co prawda nieznaczący, niewątpliwie jednak zwiększa nośność ustroju, mianowicie wytrzymałość betonu na rozciąganie.

Aby uniezależnić się od konieczności wyznaczania momentu jednostkowego na drodze teoretycznej w oparciu o jedną z metod z dziedziny tzw. teorii żelbetu, wskazane jest poszukiwanie tego momentu dla obecnych naszych potrzeb na drodze doświadczalnej. Wyznaczanie w ten sposób momentu jednostkowego, przyporządkowanego płycie o danej grubości, mocy zbrojenia i rodzaju mieszanki betonowej, pozwala pominąć szereg czynników nie mających dla naszych badań znaczenia, a występujących przy wyznaczaniu tego momentu na podstawie którejkolwiek z metod wymiarowania zginanych elementów żelbetowych.

Konieczność zrealizowania największego wyteżenia w punktach, położonych na linii prostej, narzuca określony schemat prowadzonego do-

<sup>6)</sup> Por. np. [16] oraz podany na końcu pracy przykład liczbowy.

świadczenia. Jest to schemat belki swobodnie podpartej, obciążonej siłą skupioną; w zastosowaniu do pasma płytowego o szerokości równej pewnej jednostce liniowej, np. 1 m, oznacza to, że obciążenie powinno być rozłożone w sposób równomierny wzdłuż pewnej linii. Schemat taki przedstawia rys. 22. W bilansie jednak sił wewnętrznych i zewnętrznych należy uwzględnić również ciężar własny płyty  $g$ .



Rys. 22

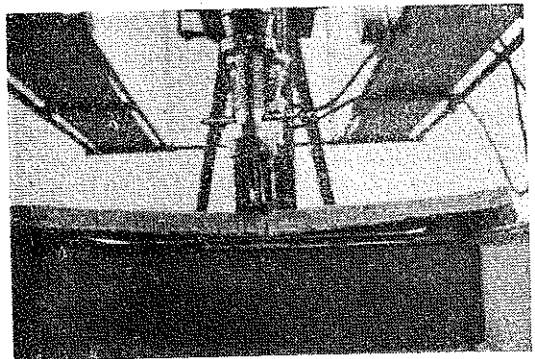
Rozpatrując zagadnienie jako «liniowe» udzielamy punktowi zaczepienia siły  $P$  w kierunku jej działania przesunięcia równego jednostce. Wówczas bilans prac sił wewnętrznych i zewnętrznych można zapisać w postaci

$$P \cdot 1 + \frac{ga}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = M \frac{4}{a};$$

stąd

$$(4.3.1) \quad M = \frac{Pa}{4} + \frac{ga^2}{8}.$$

Dla wykonywanych przez nas doświadczeń wartość momentu jednostkowego przy procencie zbrojenia  $\varphi = 0,126\%$  wyznaczana była na podstawie wyników obciążenia i łamania pasma płytowego, którego szerokość miała 68 cm, odstęp punktów podparcia  $a = 70$  cm i grubość 3 cm. Stosowano prasę hydrauliczną; siła rozłożona była wzdłuż prostej w środku rozpiętości pasma za pomocą dźwigarka rozdzielczego INP 8 (rys. 23).

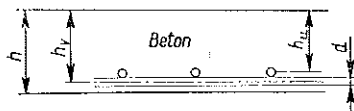


Rys. 23

Średnia wartość siły łamiącej, przeliczona na 1 mb szerokości pasma przy uwzględnieniu ciężaru belki rozkładającej obciążenie, wynosiła  $P = 109$  kG/m; ciężar własny płyty (wykonanej ze zbrojonej zaprawy cementowej) wynosił  $g = 1.900 \cdot 0,03 = 57$  kG/m<sup>2</sup>; daje to wartość momentu

$$M = \frac{109 \cdot 0,7}{4} + \frac{57 \cdot 0,7^2}{8} = 19,1 + 3,5 = 22,6 \text{ kGm/m.}$$

4.4. Wartość momentu jednostkowego zależy oczywiście od odległości zbrojenia od ściskanej krawędzi przekroju płyty. Powoduje to taki skutek, że żelbetowa płyta o jednakowej mocy zbrojenia w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach staje się, ściśle rzecz biorąc, układem ortotropowym o różnych wartościach momentów przypisanych tym kierunkom ortotropii. Stosunek tych momentów możemy traktować jako zależny w sposób istotny jedynie od grubości prętów zbrojenia (przy założeniu, że zbrojenie w dwu prostopadłych do siebie kierunkach układane jest bezpośrednio jedno na drugim, rys. 24).



Rys. 24

Jeśli więc został wyznaczony doświadczalnie np. moment  $M_v$ , to  $M_u = M_v h_u / h_v$  <sup>7)</sup> względnie, wstawiając  $h_u = h_v - d$ ,

$$(4.4.1) \quad M_u = M_v \left(1 - \frac{d}{h_v}\right).$$

W celu jednak uproszczenia przeliczeń, dokonywanych przy opracowywaniu wyników doświadczeń, będzie rzeczą korzystną posługiwać się pewną wartością momentu jednostkowego średniego (oczywiście tylko dla warunku zbrojenia jednakowego w obu kierunkach). Taki średni moment «zredukowany» pozwoli wnosić o wielkości obciążenia łamiącego bezpośrednio z długości linii załomów.

Jeśli więc  $M_u = F(f_v)$  wprowadzimy do bilansu prac, jako działający na długości  $a$ , zaś  $M_v = F(f_u)$  na długości  $b$ , to średni moment na jednostkę długości linii załomu dla płyty podpartej na obwodzie jest

$$(4.4.2) \quad M = \frac{M_u a + M_v b}{a + b} = M_c \frac{b + a \left(1 - \frac{d}{h_v}\right)}{a + b} = k M.$$

Tak więc dla płyty kwadratowej ( $a = b$ ) przy grubości płyty  $h = 30$  mm,  $h_v = 28,9$  mm,  $\varphi = 0,126\%$  i średnicy prętów zbrojenia  $d = 2,2$  mm zredukowany moment jednostkowy wyznacza się, posługując się współczynnikiem  $k$  o wartości

$$k = 1 - \frac{d}{2h_v} = 1 - \frac{2,2}{2 \cdot 28,9} = 0,962;$$

stąd wartość momentu zredukowanego wynosi

$$M = 22,6 \cdot 0,962 = 21,7 \text{ kGm/m}.$$

<sup>7)</sup> Por. treść odsyłacza <sup>6)</sup>.

4.5 Należy jeszcze kilka słów poświęcić sposobowi realizacji obciążeń w badaniach laboratoryjnych, dotyczących teorii nośności granicznej. Obciążenie rozłożone w sposób równomierny, będące jednym z głównych przypadków praktycznie występujących obciążeń, jest w laboratorium trudne do zrealizowania, szczególnie w przypadku badań nad nośnością graniczną. Nie może być tu mowy o stosowaniu takich prostych sposobów obciążenia jak np. stosowanie warstwy piasku, a to z kilku powodów. Jednym z nich jest to, że obciążenie górnej powierzchni piaskiem czy innym podobnym materiałem (zarówno w workach lub skrzynkach, jak też nasypywanego bezpośrednio na płytę) uniemożliwia obserwację górnej powierzchni płyty, nie mówiąc już o braku dokładności, który przy takim sposobie jest nieunikniony. Drugim powodem, przemawiającym przeciwko takiemu typowi obciążenia, jest trudność właściwego uchwycenia zjawisk zachodzących w ułożonej przyźnie woreczków z piaskiem bądź też w jeszcze bardziej złożonym przypadku bezpośredniego obciążenia piaskiem w skrzyni, której dnem jest badana płyta. Zachodzące podówczas zjawiska tarcia materiału sypkiego o ścianki i inne objawy, znane z zagadnień rozkładu ciśnień w silosach, jak np. tworzenie się «sklepień» materiału, «korków» itd., a to na skutek specyficznego układu powierzchni ciśnień — zmieniają w sposób istotny warunki wykonywania doświadczenia.

Dla ilustracji przytoczymy wyniki przeprowadzonego przez nas badania próbnego dla uzasadnienia niewłaściwości stosowania dla naszych badań tego typu obciążeń. Poddano w tym celu płytę 70 cm × 70 cm, stanowiącą dno skrzyni, obciążeniu luźno sypanym piaskiem. Jednostkowy moment łamiący dla tej płyty wynosił około 70 kG/m, (zbrojenie w obydwu kierunkach było jednakowe, podparcie swobodne na obwodzie). Obciążenie łamiące wyznaczone na podstawie jednostkowego momentu wynosiło:

$$p = \frac{24 M}{b^2} = \frac{24 \cdot 70}{0,7^2} = 340 \text{ kG/m}^2,$$

podezas gdy rzeczywiste obciążenie (rzeczywiste w rozumieniu całkowitego ciężaru warstwy piasku na «obciążoną» powierzchnię) wynosiło około 1000 kG/m<sup>2</sup> w chwili pojawienia się pierwszych rys; ponadto stwierdzono, że dalsze pogrubienie warstwy obciążającej piasku nie powodowało widocznego wpływu na strukturę pęknięć płyty.

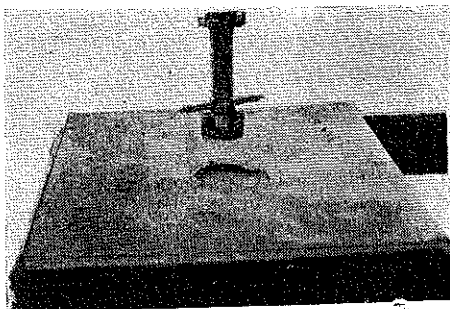
Analizowaliśmy szereg innych możliwości realizowania obciążeń ciągłych, między innymi za pomocą warstwy wody przy zastosowaniu odpowiednich uszczelnień gwarantujących, że nie będzie ona mogła wyciekać; jednak mimo iż realizacja tego typu obciążenia jest możliwa i stan

parć jest tu łatwy do określenia, zrezygnowaliśmy z niego z uwagi na trudności w uzyskaniu niezbędnych materiałów.

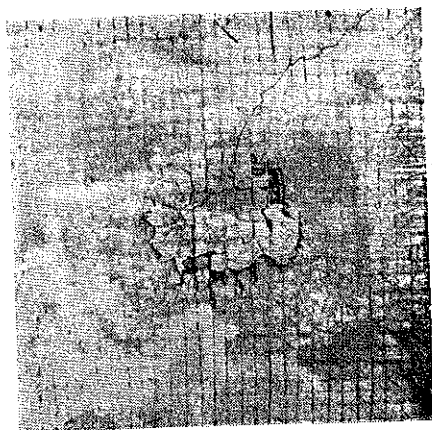
Tak więc jedynym praktycznie łatwym sposobem realizacji jest system obciążenia ustroju za pomocą sił skupionych, rozstawionych dostatecznie gęsto, tak by działanie szeregu tych sił można było uważać za obciążenie równomiernie rozłożone. Można taki typ obciążenia uzyskać przez działanie szeregu pras hydraulicznych sprzężonych bądź przez układ dźwigni, bądź też po dostosowaniu urządzenia wielokrążkowego do realizowania obciążeń powierzchniowych — za pomocą schematu z dwulinkowym układem krążków, [3].

4.6 Zastąpienie obciążenia ciągłego przez siły skupione w pewnym sensie utrudnia właściwą interpretację wyników doświadczeń, a to przez istniejącą w tych warunkach możliwość lokalnego przewyciężenia wytrzymałości betonu na ścinanie i przebicia płyty. Taki stan zniszczenia w teorii nośności granicznej płyt nie jest na ogół rozpatrywany, a to z tego powodu, że teoria ta opiera się na założeniu występowania odkształceń plastycznych w stali lub też innym materiale ciągliwym (elasto-plastycznym), który ma za zadanie przejąć naprężenia rozciągające, występujące w ustroju. Jak się okaże w dalszym ciągu niniejszej pracy, «lokalne» zniszczenie płyty przez przebicie może być związane z graniczną wartością siły znacznie niższej, niżby to wynikało z zależności, wynikających z teorii nośności granicznej (zniszczenie «pełne» przy zginaniu).

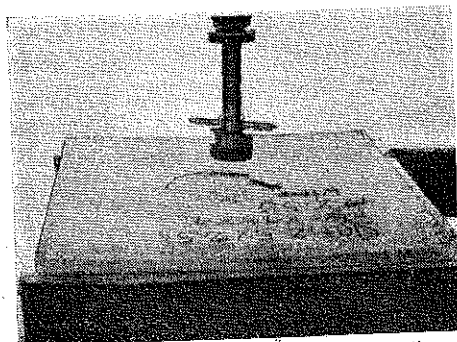
Na tym miejscu ograniczymy się do zilustrowania zjawiska przebicia kilkoma fotografiami. I tak rys. 25 przedstawia zniszczenie przez przebicie płyty izotropowej kwadratowej swobodnie podpartej o mocy zbrojenia  $\varphi = 0,505\%$ , oglądane od strony górnej powierzchni płyty, zaś rys. 26 pokazuje dolną powierzchnię płyty po zniszczeniu. Podobne zjawisko ilustrują również dla płyty o dwukrotnie mniejszej mocy zbrojenia rysunki 27 i 28, zaś rysunki 29 i 30 — dla płyty o innej grubości i jeszcze niższym procencie zbrojenia. Jeszcze inny przykład zniszczenia przez «przebicie» podaje rys. 31. Bliższa analiza reprezentowanych na fotografiach układów linii zniszczenia pozwala wyciągnąć tu jeszcze jeden — zresztą oczywisty — wniosek; okazuje się mianowicie, że w płycie o większej mocy zbrojenia (rys. 25 i 26) zniszczenie przez przebicie nastąpiło przed powstaniem w stali odkształceń plastycznych, wywołanych przez naprężenia normalne. Dolna powierzchnia płyty — poza miejscem przebicia płyty — nie jest spękana tak, jak miałoby to miejsce w chwili powstania w zbrojeniu odkształceń plastycznych. Inny układ siatki zniszczenia reprezentuje rys. 28, gdzie powstają już w sposób wyraźny pęknięcia charakterystyczne dla tego typu podparcia i obciążenia, jednak i tu zniszczenie elementu nastąpiło przez przebicie. O tym, iż nie na całej długości linii



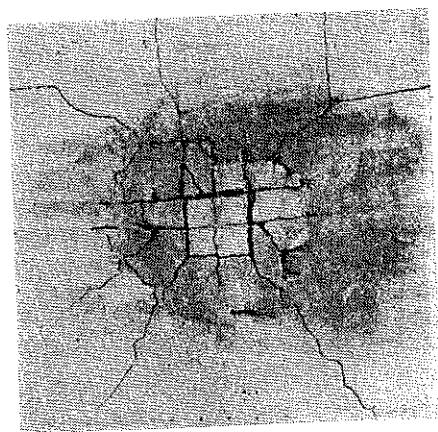
Rys. 25



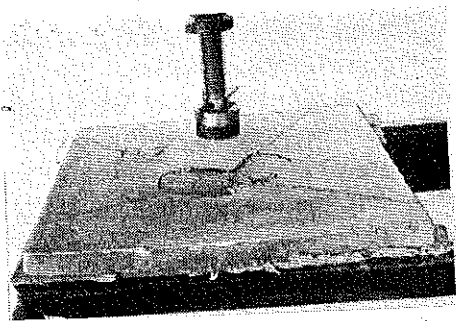
Rys. 26



Rys. 27



Rys. 28



Rys. 29

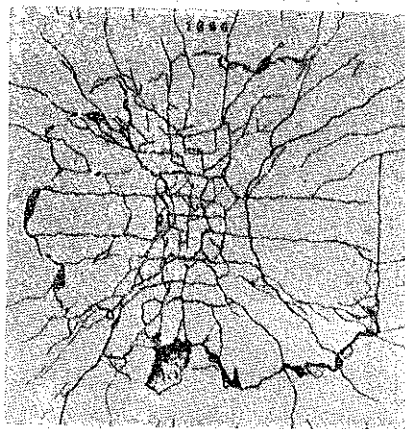


Rys. 30



załomów powstały w zbrojeniu naprężenia  $\sigma = Q_r$ , mówi również zjawisko, że po zdjęciu obciążenia rysy w ich partiach przy narożach znikają. Rysunki 29 i 30, dotyczące płyty ortotropowej, odznaczającej się jeszcze niższym procentem zbrojenia, wskazują, iż tu za pierwszy czynnik, powodujący powstanie trwałych odkształceń, uważać można zginanie, nie zaś przebicie (wyraźne linie załomów spowodowane zginaniem płyty).

4.7. Przedstawienie powyżej kilku charakterystycznych zdjęć, dotyczących zniszczenia przez przebicie, ma na celu zwrócenie uwagi na czynniki, które należy brać pod uwagę przy zastępowaniu obciążeń ciągłych siłami skupionymi. Dlatego też w naszych doświadczeniach staraliśmy się posługiwać płytami o niskim procencie zbrojenia, co może nie jest uzasadnione ze stanowiska ekonomiki, ale jest właściwe ze stanowiska warunków, w jakich przeprowadzane są doświadczenia. Zjawisko to zresztą zostało tu może nieco przejaskrawione, gdyż zdjęcia dotyczyły niszczenia płyt jedną tylko siłą skupioną, a więc o dużej stosunkowo wartości. Wówczas, gdy działa szereg sił, wartości, jakie osiągną one w chwili przekształcenia układu w mechanizm, będą w pewien określony sposób mniejsze i zjawisko przebicia może nie wystąpić i wystąpić nie powinno. Tak więc w dalszej części, przy omawianiu zgodności strony doświadczalnej z teoretyczną, dla obciążeń ciągłych zagadnienie przebicia płyty nie będzie już omawiane, albowiem warunki przeprowadzania doświadczeń uzasadniają takie stanowisko.



Rys. 31

## 5. Charakterystyka warunków doświadczeń

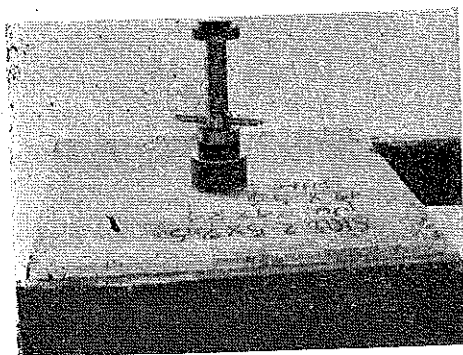
5.1. Uzasadnienia doświadczalnego słuszności teorii nośności granicznej szukaliśmy nie tylko w doświadczeniach własnych, zresztą skromnych z uwagi na nasze możliwości w zakresie urządzeń i sprzętu, lecz również i w ogłaszanych wynikach doświadczeń obcych. Doświadczenia takie wykonywane dla innych celów i interpretowane z innego stanowiska wykorzystane zostały obecnie dla naszych potrzeb. Do najstarszych badań nad zagadnieniem kształtowania się rys i wielkości obciążenia niszczącego należą badania C. Bacha, [1], [4]. Następnie opieraliśmy się na wynikach doświad-

czeń przeprowadzonych przez instytucję *Deutscher Ausschuss für Eisenbeton*<sup>8)</sup> i opublikowanych w jej wydawnictwach, w szczególności w pracy [4].

Nie będziemy zatrzymywali się nad charakterystyką używanych w obcych badaniach materiałów (kruszywo, stal), natomiast podamy kilka charakterystycznych danych na ten temat, odnoszących się do badań własnych.

5.2 Modele do własnych badań<sup>9)</sup> wykonywane były z zaprawy cementowej o stosunku 1 : 4 i wskaźniku  $w/c = 0,7$ . Wytrzymałość na ściskanie walców  $\phi 16$  wahała się w granicach 60 do 75  $\text{kG/cm}^2$ , wytrzymałość na rozciąganie, mierzona na podobnych próbkach według metody «poprzeczne-go» ściskania walców, [26], zawierała się w granicach 10,0 do 12,4  $\text{kG/cm}^2$ .

Modele zbrojone były siatką z drutu o średnicy  $d = 2,2 \text{ mm}$  i  $Q_r = 2210 \text{ kG/cm}^2$  oraz  $R_r = 3440 \text{ kG/cm}^2$ , przy czym strefa pozioma na wykresie roboczym rozciągania w chwili osiągnięcia  $Q_r$  była stosunkowo krótka (odpowiadała przyrostowi wydłużeń około 1%). Stal charakteryzowała się dużym wydłużeniem względnym (ok. 20% przy długości próbki 20 cm), przy czym na obszarze utwardzenia (z chwilą przekroczenia granicy plastyczności) występowała strefa, w której odkształcenia przyrastały znacznie przy małym zwiększaniu siły. Jako charakterystyczny dla tego rodzaju zbrojenia wykres zależności między krzywizną a jednostkowym momentem łamiącym w paśmie płytowym należy przyjąć krzywą 2 spośród przedstawionych na rys. 18.



Rys. 32

Obciążania modeli siłą skupioną dokonywano za pomocą prasy hydraulicznej do 2 t z dokładnością odczytów do 5 kG.

Sposób przeprowadzania doświadczenia ilustruje rys. 32.

Z kolei przejdziemy do bezpośredniego omówienia wyników doświadczeń.

## 6. Płyta kwadratowa obciążona w środku siłą skupioną

6.1. Przed przystąpieniem do analizy wyników doświadczeń należy jeszcze wyjaśnić niektóre problemy teorii w przypadku działania obciążeń skupionych.

<sup>8)</sup> Badania te przeprowadzone były w Stuttgarcie pod kierownictwem C. Bacha i O. Grafa, następnie w Dreźnie pod kierunkiem W. Gehlera i H. Amosa.

<sup>9)</sup> W badaniach brał również udział J. Pietrzykowski.

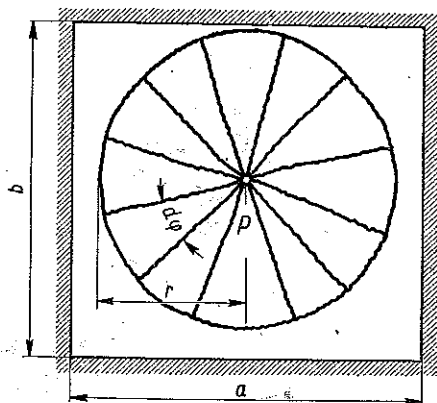
Płyta prostokątna izotropowa przy zachowaniu pewnych warunków, mianowicie wtedy, gdy punkt działania siły znajduje się nie w jednakowych odległościach od krawędzi podparcia, wykazuje siatkę zniszczenia jak przedstawiono na rys. 33, gdzie pęknięcia radialne dotyczą dolnej, obwodowe zaś górnej powierzchni płyty.

Gdybyśmy chcieli obliczyć wielkość siły łamiącej, to, nadając punktowi działania siły przesunięcie jednostkowe, otrzymamy

$$(6.1.1) \quad P = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} (M + M') r d\varphi,$$

co da w rezultacie

$$(6.1.2) \quad P = 2\pi M(1 + \lambda).$$



Rys. 33

Wartości momentów jednostkowych  $M$  oraz  $M' = \lambda M$  uwarunkowane są możliwością ich przejścia przez zbrojenie «dolne» względnie «górne».

Jeżeli przyjmiemy, że naprężenia rozciągające może przyjmować jedynie zbrojenie, to w przypadku gdy  $\lambda = 0$ , tzn. gdy nie ma zbrojenia górą, do bilansu prac przygotowanych nie wejdzie praca potrzebna do otwarcia pęknięcia obwodowego i wartość siły łamiącej przedstawi znana zależność

$$(6.1.3) \quad P = 2\pi M.$$

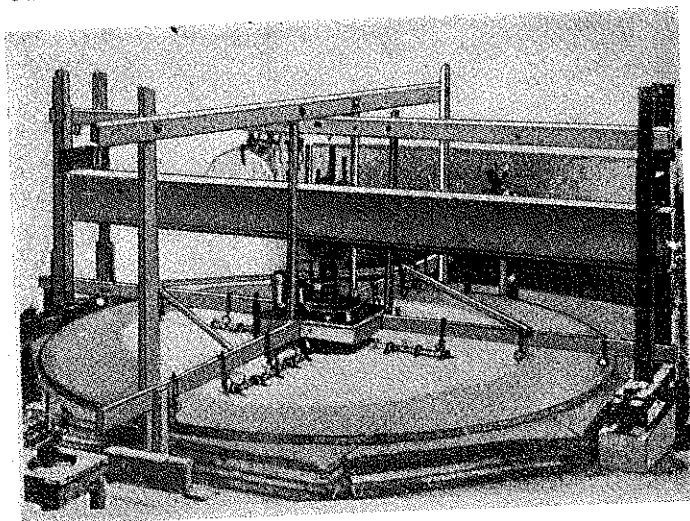
Identyczną wartość otrzymuje się wychodząc ze ściślejszych założeń teorii odkształceń elasto-plastycznych<sup>10)</sup>.

6.2. Przy obciążaniu jedną siłą skupioną płyty izotropowej czy też ortotropowej, w przypadku gdy zabezpieczone są warunki, by nie nastąpiło «przebicie», tworzy się wokół punktu zaczepienia siły stożek. Stożek ten scharakteryzowany jest — w przypadku płyt izotropowych — pewnym promieniem stałym, innymi słowy jest stożkiem, którego przekroje prostopadłe do osi są kołami. W przypadku płyt ortotropowych przekroje te są elipsami<sup>11)</sup>. Równanie (6.1.2) mówi, że wielkość siły niszczącej (w założeniu, że płyta jest nieważka) nie zależy od wymiarów

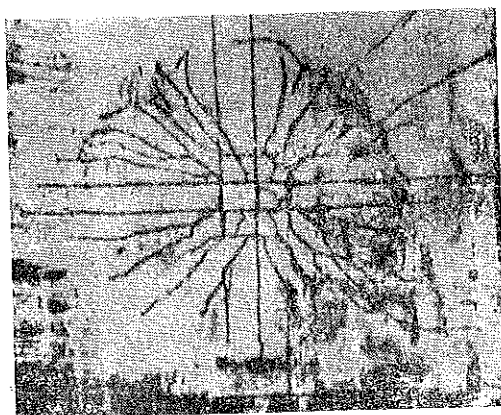
<sup>10)</sup> Por. np. W. W. Sokołowski, [31].

<sup>11)</sup> Należy zaznaczyć, że nie są to jedynie możliwe formy zniszczenia, istnieją bowiem pewne specjalne przypadki ogólniejszego rozwiązania, które dają linię załomu według spirali logarytmicznej; por. [27] i [14].

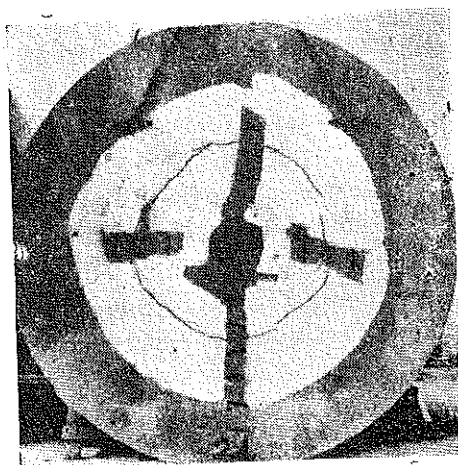
geometrycznych (wielkości) płyty ani od promienia «stożka wylomu» (gdy ograniczamy się do układów izotropowych). Określenie wielkości tego promienia i czynników, wpływających na jego wielkość, wiąże się z problemami nośności granicznej płyt spoczywających na sprężystym podłożu; stanowi to oddzielne zagadnienie.



Rys. 34



Rys. 35



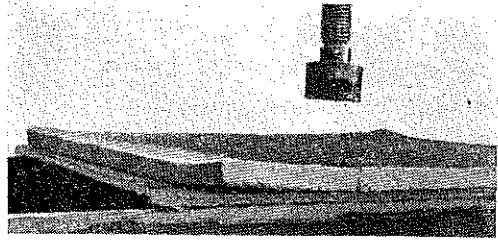
Rys. 36

Jako ilustracja rozważań dotyczących «wylamywania» się z płyty — niezależnie od jej wymiarów<sup>12)</sup> — pewnego skończonego obszaru, niech

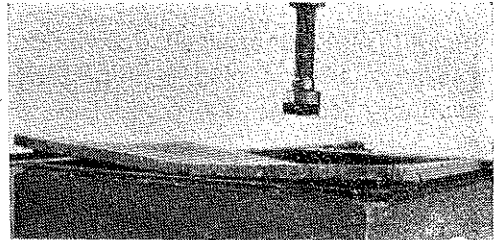
<sup>12)</sup> Istnieje jednak pewne ograniczenie ku dołowi (wymiaru krytycznego), którego tu obecnie nie precyzujemy.

posłużą rysunki 34, 35 i 36. Rysunek 34 przedstawia sposób przeprowadzenia badania płyty o średnicy 7 m i grubości 15 cm, zbrojonej góra i dołem; rys. 35 — układ pęknięć po stronie dolnej, zaś rys. 36 — układ pęknięć od strony górnej. Widać tu w sposób wyraźny, że linie załomów nie dochodzą do krawędzi swobodnego podparcia. Płyta oparta była na podłożu z masy drzewnej.

6.3. Taki jednak układ zniszczenia powstaje również w płytach o małych wymiarach w tym przypadku, gdy naroża mają uniemożliwioną swobodę podnoszenia się. Możliwość podnoszenia się naroży zmienia sposób podparcia płyty; wtedy bowiem płyta będzie podparta już nie na całym obwodzie, lecz jedynie na pewnych jego partiach. Rysunek 37 przedstawia podniesione naroże i charakteryzuje rzeczywisty sposób podparcia oraz miejsca przecięcia się linii załomów z krawędzią podparcia



Rys. 37

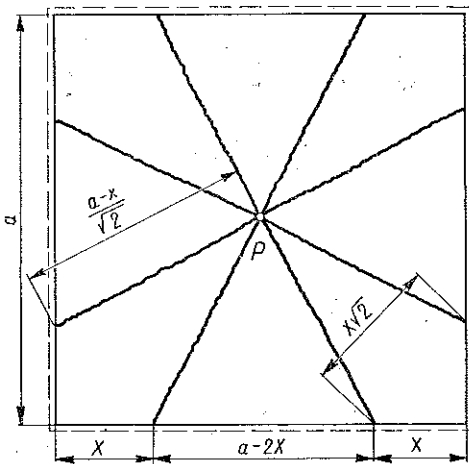


Rys. 38

przy sile działającej w środku płyty; rys. 38 jest charakterystyczny dla innego umiejscowienia siły.

Aby uzyskać więc możliwość porównania wyników doświadczeń z rezultatami rozważań teoretycznych, należy rozpatryć stan zniszczenia płyty w przypadku podnoszących się naroży.

Dla izotropowej płyty kwadratowej (rys. 39) udzielenie punktowi zaczepienia siły przemieszczenia równego jedności prowadzi z uwagi na warunki symetrii układu, do wyrażenia na bilans pracy sił wewnętrznych i zewnętrznych w postaci



Rys. 39

$$P = 8M \frac{a-2x}{a} + 4M \frac{x\sqrt{2}}{a-x} \sqrt{2} = 8M \left( \frac{a-2x}{a} + \frac{x}{a-x} \right).$$

Stosując kryterium maksymalnego oporu plastycznego otrzymamy z warunku  $dM/dx = 0$  po wykonaniu działań pośrednich

$$(6.3.1) \quad x = \frac{a}{2} (2 - \sqrt{2});$$

a następnie

$$(6.3.2) \quad M = \frac{P}{16} \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Wynika zatem, że wartość siły jest w rozpatrywanym przykładzie taka sama, jak dla płyty o kształcie ośmiokąta umiarowego w przypadku przytrzymania naroży.

6.4. W toku naszych doświadczeń poddana została obciążeniu aż do zniszczenia seria płyt o mocy zbrojenia  $\varphi = 0,252$  i  $0,505$ , dla których momenty jednostkowe zestawione są w tablicy 1.

Tablica 1

| Typ zbrojenia   | Moc zbrojenia % | Moment jednostkowy kG |               |       | Moment obliczeniowy $M = k M_v$ |
|-----------------|-----------------|-----------------------|---------------|-------|---------------------------------|
|                 |                 | obciążenie zewnętrzne | ciężar własny | $M_v$ |                                 |
| ⊙ 2,2 co 5 cm   | 0,252           | 38,2                  | 3,5           | 41,7  | 40,1                            |
| ⊙ 2,2 co 2,5 cm | 0,505           | 76,4                  | 3,5           | 79,9  | 76,8                            |

Na podstawie równania (6.3.2) po uwzględnieniu pracy ciężaru własnego płyty na odpowiednich przesunięciach możemy napisać

$$P \cdot 1 + g \frac{a^2(\sqrt{2}-1)}{2,2} \cdot \frac{8}{3} = 16 M (\sqrt{2} - 1),$$

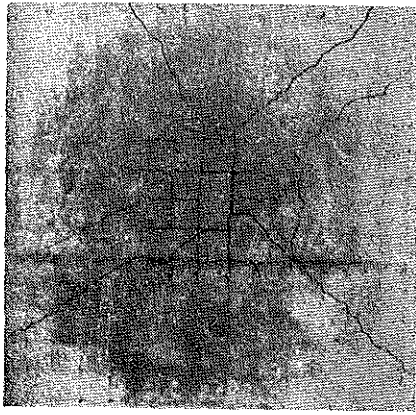
następnie zaś

$$P + ga^2 \cdot 0,276 = 6,62 M.$$

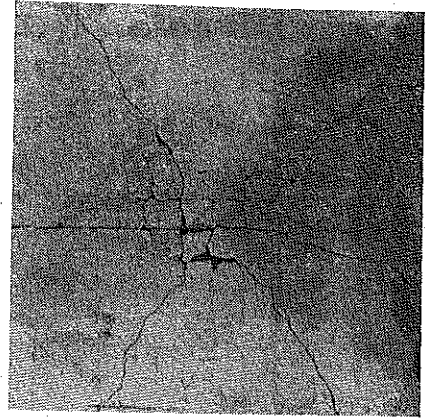
Podstawiając teraz  $a = 0,7$  m,  $g = 57$  kG/m<sup>2</sup> oraz  $G = ga^2$  otrzymujemy wartość teoretyczną

$$6.4.1) \quad P = 6,62 M - 0,276 G.$$

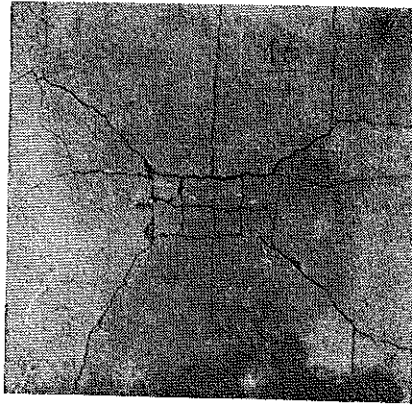
Wyniki doświadczeń natomiast zestawione są w tablicy 2.



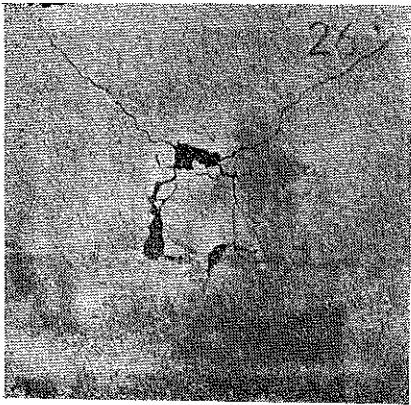
Rys. 40



Rys. 41



Rys. 42



Rys. 43



Rys. 44

Jest rzeczą interesującą, w jakiej mierze linie załomów rzeczywiste odpowiadają schematowi teoretycznemu. Rysunki 40, 41 i 42 obrazują rzeczywisty układ siatek zniszczenia na dolnej powierzchni płyty dla przypadku mocy zbrojenia  $\varphi = 0,252\%$ , zaś rysunki 43 i 44 dla  $\varphi = 0,505\%$ .

Tablica 2

| b<br>cm | Zbrojenie      |         |                       |                            | M<br>kGm/m | Obciążenie łamiące P kG |                           |                             | Różnica<br>% |
|---------|----------------|---------|-----------------------|----------------------------|------------|-------------------------|---------------------------|-----------------------------|--------------|
|         | $\varphi$<br>% | d<br>mm | oczka<br>siatki<br>cm | $Q_r$<br>kG/m <sup>2</sup> |            | obliczo-<br>ne          | z do-<br>świadc-<br>zenia | średnia<br>z do-<br>świadc. |              |
| 3.0     | 0,252          | 2,2     | 5,5                   | 2210                       | 40,1       | 264                     | 225<br>235<br>235<br>260  | 239                         | — 9,5        |
| 3.0     | 0,505          | 2,2     | 2,5;2,5               | 2210                       | 79,9       | 501                     | 455<br>415                | 435                         | — 13,2       |

Fotografie te wykazują poprawność teoretycznego modelu zniszczenia potwierdzając tym samym teorię nośności granicznej od strony jakościowej.

Należy powiedzieć tu jeszcze kilka słów na temat zgodności wyników doświadczalnych z teoretycznymi, o ile chodzi o stronę ilościową. Jak widać z tablicy 2, rzeczywista siła niszcząca jest niższa, aniżeli wynika to z obliczeń. Jako zasadniczą przyczynę takiego stanu należy podać omawiane już poprzednio zniszczenie wskutek przebicia. Skutki przebicia są widoczne na załączonych fotografiach i to szczególnie wyraźnie dla większego procentu zbrojenia, gdzie różnice między obliczoną a wyznaczoną siłą niszczącą są największe.

## 7. Płyta kwadratowa obciążona siłami skupionymi rozmieszczonymi koncentrycznie wokół środka

7.1. Płyty o grubości 8 i 12 cm, co do pozostałych wymiarów i rozłożenia obciążeń scharakteryzowane na rys. 45, zbrojone były stałą  $Q_r = 4080 \text{ kG/cm}^2$  i podparte swobodnie na obwodzie; zbrojenie układane było w obu kierunkach w jednakowych odległościach od siebie, równych 10 cm.

Momenty jednostkowe dla tego rodzaju stali i rozstawu zbrojenia co 10 cm, uwzględniające odległości zbrojenia od górnej krawędzi (zbrojenia poprzeczne dołem lub góra), są zestawione w tablicy 3.



Tablica 5

|   | Grubość pasma<br>cm | d<br>mm | Rozstaw zbrojenia<br>cm | $\varphi$<br>% | $Q_r$<br>kG/cm <sup>2</sup> | Moment łamiący $M_v$ |                 |
|---|---------------------|---------|-------------------------|----------------|-----------------------------|----------------------|-----------------|
|   |                     |         |                         |                |                             | doświadcz.<br>tm/m   | średnio<br>tm/m |
| Zbrojenie w dolnej warstwie ( $h_v$ )     | 12,1                | 7,3     | 10                      | 0,37           | 4080                        | 2,06                 | 2,00            |
|   | 12,2                | 7,2     |                         |                |                             | 2,02                 |                 |
|   | 12,1                | 7,2     |                         |                |                             | 2,03                 |                 |
|   | 12,1                | 7,2     |                         |                |                             | 1,90                 |                 |
| Zbrojenie w górnej warstwie ( $h_v - d$ ) | 12,2                | 7,3     | 10                      | 0,37           | 4080                        | 1,83                 | 1,85            |
|   | 12,1                | 7,2     |                         |                |                             | 1,83                 |                 |
|   | 12,1                | 7,3     |                         |                |                             | 1,86                 |                 |
|   | 12,2                | 7,2     |                         |                |                             | 1,90                 |                 |
| Zbrojenie w dolnej warstwie ( $h_v$ )     | 8,1                 | 7,2     | 10                      | 0,58           | 4080                        | 1,19                 | 1,19            |
|   | 8,0                 | 7,3     |                         |                |                             | 1,18                 |                 |
|   | 8,1                 | 7,2     |                         |                |                             | 1,18                 |                 |
|   | 8,1                 | 7,2     |                         |                |                             | 1,22                 |                 |
| Zbrojenie w górnej warstwie ( $h_v - d$ ) | 8,0                 | 7,2     | 10                      | 0,58           | 4080                        | 1,01                 | 1,08            |
|   | 8,2                 | 7,3     |                         |                |                             | 1,12                 |                 |
|   | 8,1                 | 7,2     |                         |                |                             | 1,09                 |                 |
|   | 8,1                 | 7,3     |                         |                |                             | 1,09                 |                 |

Współczynnik redukcji momentu jednostkowego, z uwagi na warstwowe ułożenie zbrojenia, obliczony w stosunku do momentu dla zbrojenia w dolnej warstwie, wynosi

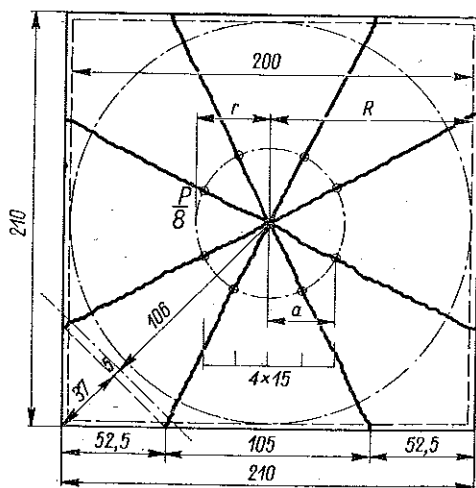
$$k = \frac{2,00 + 1,85}{2 \cdot 2,00} = 0,964.$$

7.2. Za punkt wyjścia do obliczenia siły niszczącej należy tu przyjąć wzór (6.1.3) odpowiednio dostosowany do układu sił; otrzymujemy w ten sposób

$$(7.2.1) \quad P = 2\pi \left(1 - \frac{r}{R}\right) M,$$

gdzie  $r$  jest promieniem koła, wzdłuż obwodu którego działają obciążenia, zaś  $R$  promieniem koła, na którego obwodzie wystąpi pęknięcie na górnej powierzchni płyty.

Koła te zaznaczone są na rys. 45 liniami przerywanymi w przeciwieństwie do oznaczonych pełnymi liniami załomów promieniowych na dolnej



Rys. 45

powierzchni, gdyż z uwagi na brak zbrojenia górą nie wnoszą one żadnych wartości do bilansu pracy.

Obliczona wartość siły łamiącej na podstawie wzoru (7.2.1) po uwzględnieniu udziału ciężaru własnego jest

$$P = \frac{2\pi}{1 - \frac{33,6}{100}} \left( M - \frac{1}{6} g \cdot 105^2 \right),$$

albo też wstawiając  $G = g \cdot 210^2$

$$(7.2.2) \quad P = 9,46 M - 0,39 G.$$

Tablica 4

| Grubość<br>płyty<br>cm       | Zbrojenie      |                          |                       |                             | M<br>tm/m | Obciążenie łamiące Pt |                              |                             | Różnica<br>% |
|------------------------------|----------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------------|-----------|-----------------------|------------------------------|-----------------------------|--------------|
|                              | $\varphi$<br>% | d<br>mm                  | oczka<br>siatki<br>cm | $Q_r$<br>kG/cm <sup>2</sup> |           | obli-<br>czone        | z do-<br>świadc-<br>zenia    | średnie<br>z do-<br>świadc. |              |
| 8,1<br>8,1<br>8,1            | 0,58           | 7,2                      | 10/10                 | 4080                        | 1,14      | 11,1                  | 12,5<br>12,2<br>12,0         | 12,0                        | 8,1          |
| 12,1<br>12,3<br>12,2<br>12,1 | 0,37           | 7,3<br>7,2<br>7,2<br>7,1 | 10/10                 | 4080                        | 1,92      | 18,7                  | 19,6<br>19,0<br>19,5<br>18,0 | 19,0                        | 1,6          |

Obliczenie to nie jest jednak zupełnie ścisłe, płyty bowiem nie są sobie całkiem równe; poprawniejsze obliczenie powinno uwzględnić fakt, iż wskutek działania sił skupionych linie załomów przejdą przez ich punkty zaczepienia. Poszczególne siły skupione przy nadaniu środkowi płyty przemieszczenia jednostkowego doznają przesunięć  $(R - a)/R = 0,7$ , zaś momenty odpowiednio na płatach A i B wykonają pracę na obrotach  $\varphi_A = 1/100$  i  $\varphi_B = 1/106$ . Tak więc po obliczeniu potrzebnych wartości z zależności trygonometrycznych bilans prac można przedstawić w postaci

$$0,7 P + 4 \cdot \frac{1}{6} g \cdot 105^2 + 4 \cdot \frac{1}{6} g \cdot 111 \cdot 52,5 \sqrt{2} -$$

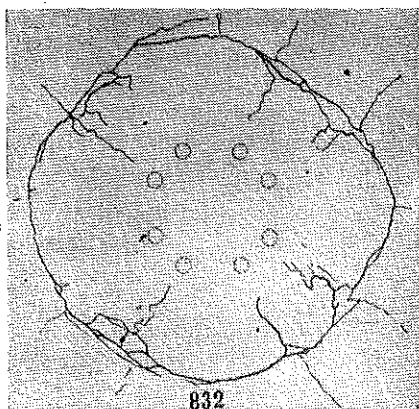
$$- 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 52,5^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 4 M \frac{105}{100} + 4 M \frac{52,5 \sqrt{2}}{106};$$

stąd, podstawiając G jak poprzednio, otrzymujemy

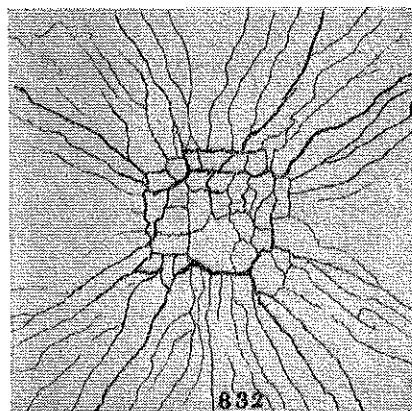
$$(7.2.3) \quad P = 10 M - 0,35 G.$$

Obliczona na podstawie tego wzoru siła niszcząca jest porównana z wynikami doświadczeń podanymi w tablicy 4.

Rzeczywisty układ linii zniszczenia przedstawia się dla tych doświadczeń, jak wskazują to rysunki 46 i 47; odpowiada on układowi teoretycznemu. Rysunek 46 przedstawia obraz siatki zniszczenia na górnej, następny zaś na dolnej powierzchni płyty. Na tych fotografiach zwracają uwagę drobne rysy występujące wyraźniej, aniżeli jest to widoczne na zdjęciach dotyczących poprzednich doświadczeń. Odnoszą się one do okresu naprężeń sprężystych w stali.



Rys. 46



Rys. 47

Te drobne pęknięcia zjawiają się jeszcze w okresie występowania w zbrojeniu naprężeń znacznie niższych od granicy plastyczności. Wzrost ustawionych w tak specjalny sposób obciążeń powoduje, że punkty, w których naprężenia najwcześniej osiągnęły granicę plastyczności, układają się według prostych, przechodzących przez punkty zaczepienia sił (rys. 45).

7.3. Jako przykład zastosowania wzoru (7.2.1) posłuży doświadczenie, wykonane na płytach takiej samej grubości 8 cm i 12 cm, przy czym obciążane one były siłą skupioną, działającą na małej (12 cm × 12 cm) powierzchni bezpośrednio wokół środka płyty. Płyty te charakteryzowały się tym, iż zbrojenie nie było układane w równych od siebie odległościach, lecz w kierunku obu boków odległości te były zmienne (w jednym kierunku rozstaw zbrojenia zmieniał się od 10 cm w środku do 14,3 cm przy brzegu, w drugim zaś odpowiednio od 9,3 cm do 14 cm).

Problem komplikuje tu zmienność momentu jednostkowego<sup>13)</sup>. Można jednak przyjąć do dalszych obliczeń moment jednostkowy dla śred-

<sup>13)</sup> W sprawie rozwiązania ścisłego por. prace D. Niepostyna, [13], i A. Sawczuka, [30], [31].

niego rozstawu w każdym kierunku. Upoważnia nas do tego — przybliżonego tutaj — założenia zarówno rząd wielkości zmiany rozstawu, jak też i fakt, że dla płyty izotropowej — a rozpatrywaną płytę można uważać za taką z dobrym przybliżeniem — siatka zniszczenia pozostanie taka sama jak dla płyty o stałym momencie jednostkowym. Pamiętajmy przy tym, że rozpatrujemy płytę kwadratową.

Moment jednostkowy obliczony został jako średni z momentów jednostkowych, przyporządkowanych odpowiednim średnim rozstawom zbrojenia, które wynoszą 11,7 cm i 11,0 cm dla omówionych wyżej kierunków [por. wzór (4.4.2)]. Tak więc moment jednostkowy wynosił dla płyt o grubości 12 cm

$$M = kM_v = \frac{1}{2} \left( \frac{2,00}{11,7} 10 + \frac{1,85}{11,0} 10 \right) = 1,69 \text{ tm/m,}$$

zaś dla płyt o grubości 8 cm

$$M = kM_v = \frac{1}{2} \left( \frac{1,19}{11,7} 10 + \frac{1,08}{11,0} 10 \right) = 1,00 \text{ tm/m.}$$

Wartości momentów dla rozstawów wynoszących 10 cm wzięte są z tablicy 3.

Tablica 5

| Grubość<br>płyty<br>cm | Zbrojenie      |         |                       |                             | M<br>tm/m | Obciążenie łamiące Pt |                      | Różnica<br>% |
|------------------------|----------------|---------|-----------------------|-----------------------------|-----------|-----------------------|----------------------|--------------|
|                        | $\varphi$<br>% | d<br>mm | oczka<br>siatki<br>cm | $Q_r$<br>kG/cm <sup>2</sup> |           | obliczone             | z doświad-<br>czenia |              |
| 12,1                   | 0,32           | 7,0     | zmiennie,<br>średnio  | 4080                        | 1,69      | 10,8                  | 11,0                 | 1,8          |
| 8,1                    | 0,50           | 7,1     | 11,7/11,0             | 4080                        | 1,00      | 6,35                  | 6,00                 | -5,8 *)      |

\*) Należy przypuszczać, że zniszczenie zostało spowodowane przez przebiecie (por. np. rys. 31).

Ustawiając równanie bilansu prac zgodnie z równaniem (7.2.1) dla wymiarów płyty jak w przypadku poprzednim i dla  $r = 2/3 \cdot 6 = 4$  cm oraz  $R = 100$  cm otrzymamy

$$(7.2.4) \quad P = \frac{2\pi}{1 - \frac{r}{R}} \left( M - \frac{1}{24} G \right) = 6,55 M - 0,25 G.$$

Wyniki doświadczalne dają dobrą zgodność z wynikami teoretycznymi; przedstawione są one w tablicy 5.

8. Płyta kwadratowa podparta na trzech bokach,  
obciążona siłą skupioną w środku

8.1. Obserwowana na modelach — w przypadku nie przytrzyma-  
nych naroży — siatka zniszczenia sugeruje dla rozpatrywanego typu płyt  
przyjęcie układu linii załomów symetrycznego względem osi, przebiega-  
jącej prostopadłe do swobodnego boku płyty, jak wskazuje to rys. 48.

Pracę sił wewnętrznych można w przypadku płyty izotropowej przed-  
stawić w postaci

$$(8.1.1) \quad \delta V = \sum_{i=1}^n M l_i \delta \varphi_i,$$

gdzie  $n$  jest ilością płatów, niezbędnych dla przekształcenia układu w me-  
chanizm, a  $l_i$  długością rzutu linii załomu na oś obrotu płata.

W rozpatrywanym przykładzie

$$\delta V = M \frac{2}{a} (a-x)^2 + M \frac{2}{a} (a-2x) + M \frac{\sqrt{2}}{a-x} x \sqrt{2} \cdot 2, \quad \delta L = P \cdot 1.$$

Warunek  $dM/dx = 0$  dla takich układów, dla których praca sił ze-  
wewnętrznych nie zależy od wielkości charakteryzujących siatkę zniszcze-  
nia — a taki przypadek tutaj  
zachodzi — można zastąpić war-  
unkiem minimum pracy sił we-  
wewnętrznych, a więc

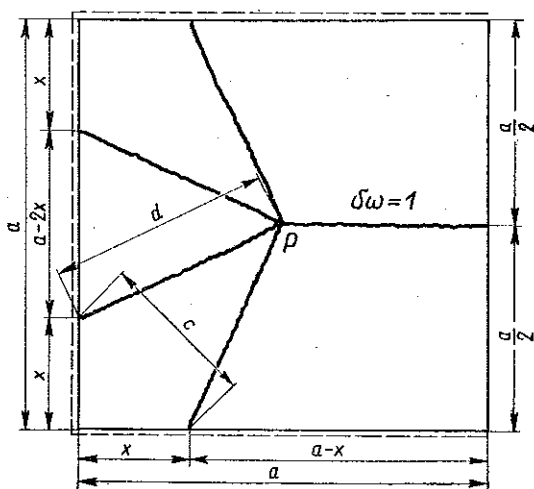
$$(8.1.2) \quad \frac{d(\delta V)}{dx} = 0.$$

8.2. Równanie (8.1.2) dla roz-  
patrywanego konkretnego przy-  
padku prowadzi do wzoru

$$\frac{d(\delta V)}{dx} = \left[ \frac{-4(a-x) + 2a^2}{a(a-x)^2} \right] = 0.$$

Stąd otrzymujemy

$$x = \frac{a}{2} (2 - \sqrt{2}).$$



Rys. 48

Jest to wartość identyczna jak w przypadku płyty podpartej swobodnie  
na czterech bokach.

Obliczając teraz wartość siły niszczącej z zależności  $\delta L = \delta V$  otrzy-  
mujemy

$$P = 2M \left( \frac{3a-4x}{a} + \frac{2x}{a-x} \right),$$

co po wstawieniu wartości  $x$ , spełniającej warunek największego oporu plastycznego, wyrazi się w formie

$$(8.2.1) \quad P = 2M(4\sqrt{2} - 3).$$

Przystępując do porównania wyników doświadczeń z rezultatami wyżej przytoczonego rozwiązania teoretycznego należy wprowadzić w sposób podobny, jak czyniliśmy to w poprzednich przypadkach, pracę wykonaną przez ciężar własny płyty. Wówczas wyrażenie na siłę niszczącą otrzymuje się w postaci

$$(8.2.2) \quad P = 2M(4\sqrt{2} - 3) - AG,$$

gdzie  $A$  jest współczynnikiem, określającym udział sił ciężkości w ogólnym bilansie pracy.

Jeśli  $a = 70$  cm i  $x = 21$  cm, to

$$74^2 A = 2 \cdot 35^2 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot 35 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 + 28 \cdot 35 \cdot \frac{1}{6} + \sqrt{2} \cdot 21 \cdot 35 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 = 1990.$$

Ostatecznie będzie zatem

$$(8.2.3) \quad P = 5,31 M - 0,35 G.$$

8.5. Badane płyty były zbrojone siatką o oczkach 5 cm i o procencie zbrojenia  $\varphi = 0,252$ . Dla rozważanego typu podparcia wartość współczynnika  $k$ , przez jaki należy pomnożyć moment jednostkowy podany w tablicy 1, zgodnie z zasadą sformułowaną w p. 4, dla płyty czterosronnie podpartej wynosi

$$k = \frac{2a + a \left(1 - \frac{d}{h_v}\right)}{2a + a} = 1 - \frac{d}{3h_v} = 1 - \frac{2,2}{3 \cdot 28,9} = 0,975.$$

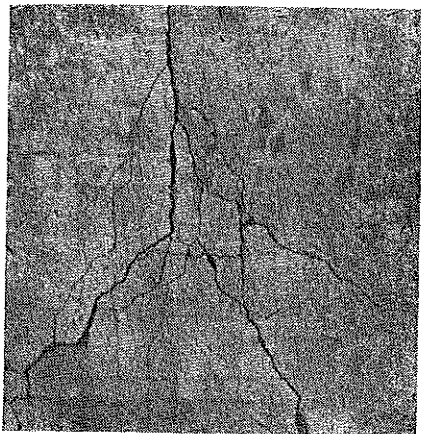
Tablica 6

| Grubość<br>płyty<br>cm | Zbrojenie      |           |                       |                             | $M$<br>kGm/m | Obciążenie łamiące $P$ kG |                           |                              | Różnica<br>% |
|------------------------|----------------|-----------|-----------------------|-----------------------------|--------------|---------------------------|---------------------------|------------------------------|--------------|
|                        | $\varphi$<br>% | $d$<br>mm | oczka<br>siatki<br>cm | $Q_r$<br>kG/cm <sup>2</sup> |              | obli-<br>czone            | z do-<br>świad-<br>czenia | średnie<br>z do-<br>świadcz. |              |
| 3                      |                |           |                       |                             |              |                           | 260                       |                              |              |
| 3                      | 0,252          | 2,2       | 5/5                   | 2210                        | 40,6         | 216                       | 265                       | 255                          | 18           |
| 3                      |                |           |                       |                             |              |                           | 240                       |                              |              |

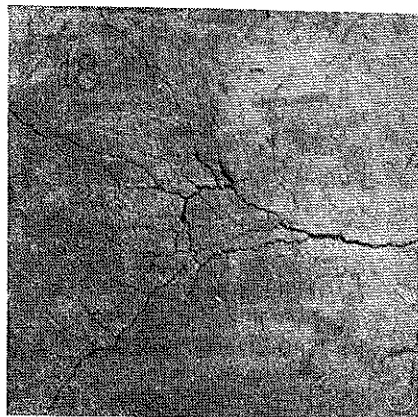
Moment jednostkowy, zredukowany, wynosi wtedy  $M = kM_v = 0,975 \cdot 41,7 = 40,6$  kGm/m.

Tablica 6 przedstawia porównanie wartości obliczonych ze wzoru (8.2.3) z uzyskanymi na drodze doświadczalnej.

Rzeczywisty przebieg linii załomów na podstawie tych doświadczeń przedstawiony jest na rysunkach 49 i 50 dolnej powierzchni płyty.

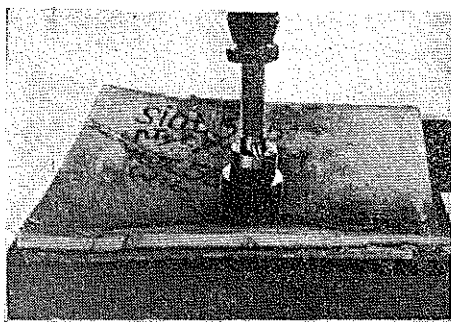


Rys. 49



Rys. 50

Należy jeszcze wyjaśnić stosunkowo dużą procentową różnicę między wynikami obliczenia teoretycznego a wynikami doświadczeń, jakie podaje tablica 6. Czynnikiem powodującym taki stan rzeczy jest działanie siły nie ściśle punktowo, lecz na pewnej powierzchni (rys. 51), co wpływa na zmianę wielkości obciążenia łamiącego, jak to widać chociażby z zależności (7.2.1) lub (7.2.4). Przy obliczeniu uwzględniającym powierzchniowe przenoszenie obciążenia różnica zmalałaby. Będzie o tym mowa niżej.



Rys. 51

## 9. Płyta kwadratowa obciążona równomiernie

9.1. Warto przytoczyć — przed przystąpieniem do analizy stopnia zgodności strony ilościowej teorii nośności granicznej z doświadczeniem dla interesującego nas tu przypadku — ciekawą fotografię zaczerpniętą z pracy C. B a c h a, [1]. Rysunek 52 ilustruje stopień zgodności założeń od strony jakościowej i stanowi cenny materiał, ponieważ badania C. B a c h a prowadzono z punktu widzenia innego stanowiska teoretycznego.

9.2. Omówione poprzednio trudności w laboratoryjnym zrealizowaniu obciążeń rozłożonych w sposób ciągły spowodowały, że starano się je zastąpić szeregiem sił skupionych. W omawianym obecnie doświadczeniu na płytę o rozpiętości w świetle podpór  $2,0 \text{ m} \times 2,0 \text{ m}$  działały siły skupione w 16 punktach (rys. 53). Po nadaniu środkowi płyty przemieszczenia równego jedności poszczególne siły zewnętrzne wykonują pracę wskutek odpowiednich przesunięć ich punktów zaczepienia. Nie uwzględniając wpływu naroży otrzymujemy równanie pracy w postaci

$$4 \frac{P}{16} \cdot \frac{3}{4} + 12 \frac{P}{16} \cdot \frac{1}{4} + 4 \frac{G \cdot 30}{4 \cdot 100} = 4 M \frac{210}{100};$$

stąd

$$(9.2.1) \quad P = 22,4 M - 0,8 G,$$

gdzie  $G$  oznacza — jak poprzednio — ciężar własny płyty.

Na podstawie obliczenia przyjmującego obciążenie za równomiernie rozłożone można by napisać

$$\frac{P}{3} + 0,3 G = 4 M \cdot 2,1;$$

stąd

$$(9.2.2) \quad P = 25,2 M - 0,9 G.$$

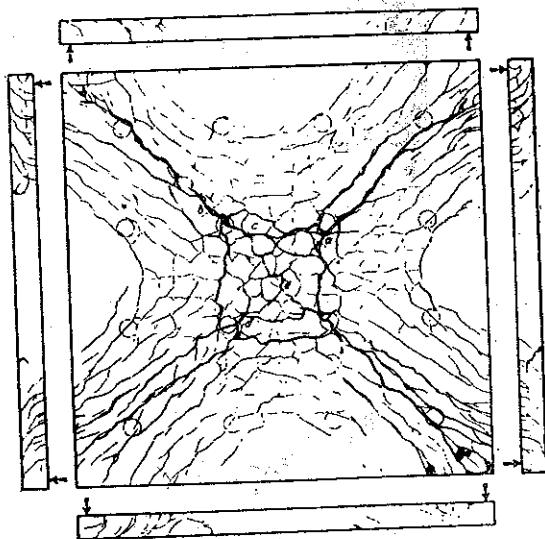
Widać z porównania wzorów (9.2.1) i (9.2.2), że zastąpienie

obciążenia ciągłego siłami skupionymi daje różnicę wielkości siły niszczącej, wynoszącą około 12%.

Wynika stąd oczywisty wniosek, że porównywanie wyników badań należy oprzeć na wzorze (9.2.1).

9.3. W celu uzyskania wyników jeszcze bardziej poprawnych należy uwzględnić w równaniu, z którego wyznaczamy siłę łamiącą w oparciu o wartość momentu jednostkowego, zmniejszenie pracy sił wewnętrznych wskutek utworzenia się specyficznego układu linii załomów w narożach. Temu zagadnieniu należy tu kilka słów poświęcić.

Rozpatrzmy naroże płyty izotropowej (rys. 54); osie podparcia niech przecinają się pod kątem prostym, zaś siła skupiona niech będzie usytuowana na dwusiecznej tego kąta w pewnej odległości  $r$  od osi podparcia.



Rys. 52



Gdyby zjawisko podnoszenia się naroża nie występowało po przesunięciu punktu działania siły o wielkość  $\delta w$ , powstałoby na dolnej krawędzi płyty pęknięcie, zaznaczone linią przerywaną, i praca sił wewnętrznych odnosząca się do naroża wyniosłaby

$$(9.3.1) \quad \delta V_1 = M \frac{\delta w}{r} r \cdot 2 = 2M \delta w.$$

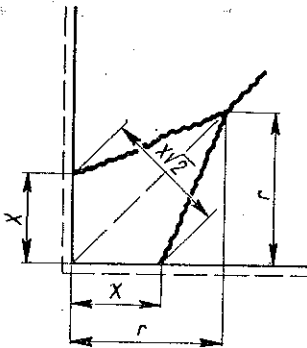
Wskutek jednak możliwości podnoszenia się naroża powstana pęknięcia, zaznaczone linią pełną, i praca sił wewnętrznych będzie mniejsza (widać to chociażby z rozpatrzonego w p. 6 problemu płyty kwadratowej, obciążonej siłą skupioną w środku). Wartość  $x$  na podstawie (6.3.1) wynosi

$$x = r(2 - \sqrt{2});$$

praca sił wewnętrznych wyrazi się zatem w tym przypadku zależnością

$$\begin{aligned} \delta V_2 &= Mr \sqrt{2} (2 - \sqrt{2}) \frac{\delta w}{r} + 2M [r - r(2 - \sqrt{2})] \frac{\delta w}{r} = \\ &= 2M \delta w - (2 - \sqrt{2})^2 M \delta w. \end{aligned}$$

Zmniejszenie się więc pracy sił wewnętrznych wskutek powstania układu linii zniszczenia, oznaczonych linią ciągłą, wyniesie



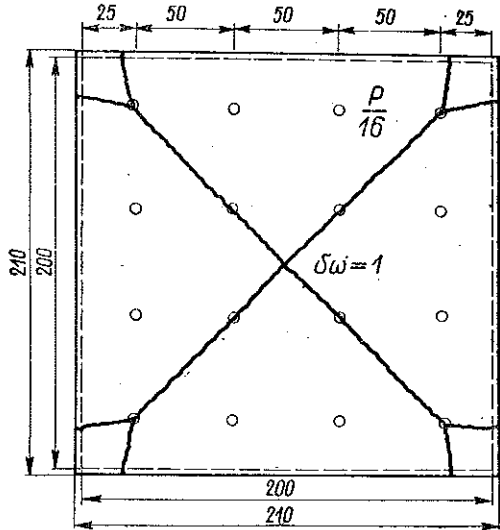
Rys. 54

$$\begin{aligned} (9.3.2) \quad \Delta \delta V &= \delta V_1 - \delta V_2 = \\ &= 2M \delta w - 2M \delta w + \\ &+ (2 - \sqrt{2})^2 M \delta w = M(2 - \sqrt{2})^2 \delta w. \end{aligned}$$

W rozpatrywanym przypadku należy to zmniejszenie się pracy momentów łamiących uwzględnić przez odpowiednią korektę wyrażenia (9.2.1). Tak więc, ponieważ  $\delta w$  jest w tym przypadku równe  $1/4$  (przy przesunięciu środka o jednostkę), zmniejszenie się

pracy sił wewnętrznych wskutek możliwości podnoszenia się naroża wyraża się przez

$$\Delta \delta V = \frac{1}{4} (2 - \sqrt{2})^2 M.$$



Rys. 53

Ogólna liczba naroży w rozpatrywanym przypadku wynosi 4, tak więc wpływ ich wyrazi się jako

$$(2 - \sqrt{2})^2 M = 0,346 M \approx 0,35 M.$$

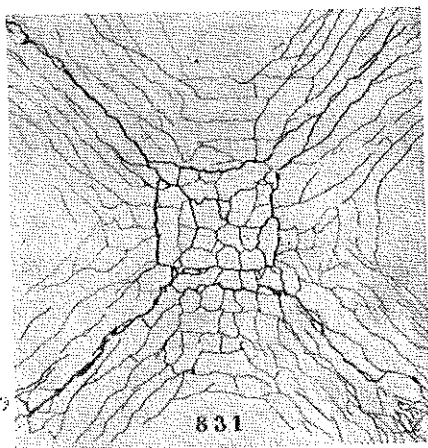
Zależność (9.2.1) po wprowadzeniu powyższego wyrażenia do bilansu prac przyjmuje postać

$$\frac{3}{8} P + 0,3 G = (8,4 - 0,35) M,$$

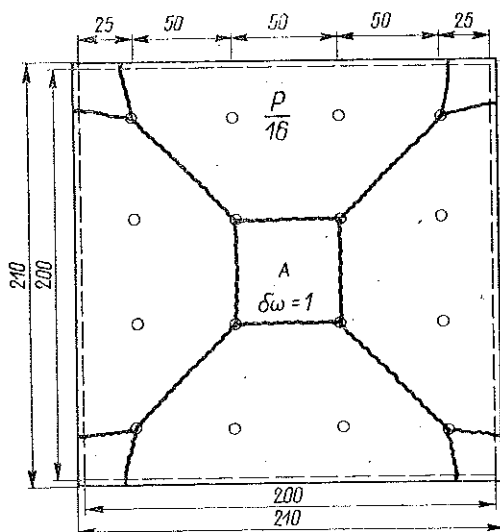
skąd

$$(9.3.3) \quad P = 21,5 M - 0,8 G.$$

Doświadczenia (rys. 55) wskazują jednak na nieco inny układ linii załomów, niż to ma miejsce na rys. 53, i odpowiada raczej schematowi przedstawionemu na rys. 56.



Rys. 55



Rys. 56

Udzielając środkowemu płatowi, oznaczonemu na rys. 56 literą A, przesunięcia pionowego  $\delta w = 1$  otrzymujemy równanie pracy sił wewnętrznych i zewnętrznych w postaci

$$\begin{aligned} 4 \frac{P}{16} \cdot 1 + 12 \frac{P}{16} \cdot \frac{1}{3} + 50^2 g + 4 g \frac{80}{2} (210 + 50) \frac{27}{75} = \\ = 4 M \frac{210}{75} - 4 M \frac{1}{3} (2 - \sqrt{2})^2, \end{aligned}$$

co prowadzi do wartości siły łamiącej

$$(9.3.4) \quad P = 21,5 M - 0,74 G.$$

Porównanie wzorów (9.3.3) i (9.3.4) wskazuje, że dla rozpatrywanej siatki zniszczenia uzyskujemy nieco większą siłę łamiącą. Praktycznie jednak różnica w wielkościach obciążenia łamiącego, obliczanego na podstawie wzorów (9.3.3) i (9.3.4), leży w granicach błędu rachunkowego i dotyczy tylko ciężaru własnego. Dla obciążenia realizowanego tu obydwoma schematy zniszczenia praktycznie są równoważne.

9.4. W innych badaniach, prowadzonych na płytach o grubości 12 cm, o wymiarach 3,12 m  $\times$  3,12 m i rozpiętości w świetle podpór 3,0 m  $\times$  3,0 m, obciążenie realizowano również za pomocą sił skupionych, lecz wprowadzono większą ich ilość, mianowicie zaczepiono te siły w 64 punktach. W takim przypadku obciążenie można już z dostateczną dokładnością uważać za rozłożone równomiernie. Uwzględniając w równaniu podstawowym dla tej płyty wystawanie brzegów poza linie podparcia otrzymamy

$$\frac{P+G}{24} = M \frac{3,12}{3,0},$$

skąd wynika

$$(9.4.1) \quad P = 25 M - 1,0 G.$$

Również i tutaj wysuwa się sprawa naroży i sprawa zmniejszenia się nośności wskutek ich powstawania. Nie wdając się obecnie na tym miejscu w szczegóły, dotyczące tego specjalnego zagadnienia, można stwierdzić, że dla przypadku równomiernie obciążonej i swobodnie podpartej płyty, przy założeniu, że naroże nie jest przytrzymane (tzn.  $M' = 0$ , co oznacza, że nie ma zbrojenia górnego w narożu), podstawowa zależność ma postać

$$(9.4.2) \quad M = \frac{p b^2}{22}.$$

W zastosowaniu do naszego przykładu otrzymujemy

$$(9.4.3) \quad P = 22,9 M - 1,0 G.$$

9.5. Wyniki opracowane na podstawie podanych zależności dla płyt o grubości 8 cm i 12 cm zestawione są w tablicach 7 i 8. Ponieważ zasady wyznaczania momentów jednostkowych dla różnych przypadków ułożenia zbrojenia w warstwie dolnej i w warstwie górnej oraz stosowane metody zostały dość szczegółowo omówione już poprzednio<sup>14)</sup>, podamy tu

Tablica 7.

| Se-<br>ria | Grubość<br>płyty<br>cm | Zbrojenie |             |                                  |                          | M<br>tm/m | Obciążenie łamiące Pt |                           |                                 | Różnica<br>% |
|------------|------------------------|-----------|-------------|----------------------------------|--------------------------|-----------|-----------------------|---------------------------|---------------------------------|--------------|
|            |                        | d<br>mm   | $\rho$<br>% | oczka<br>siatki<br>cm            | Qr<br>kG/cm <sup>2</sup> |           | obli-<br>czone        | z do-<br>świad-<br>czenia | średnie<br>z doświad-<br>czenia |              |
| A          | 12,2                   | 7,1       | 0,37        | 10/10                            | 4080                     | 1,92      | 40,3                  | 40,0                      | 40,3                            | 0            |
|            | 12,2                   | 7,2       |             |                                  |                          |           |                       | 39,0                      |                                 |              |
|            | 12,2                   | 7,2       |             |                                  |                          |           |                       | 42,0                      |                                 |              |
| B          | 12,1                   | 7,1       | 0,37        | 10,9,3                           | 4080                     | 2,00      | 42,0                  | 42,5                      | 42,2                            | 0            |
|            | 12,2                   | 7,2       |             |                                  |                          |           |                       | 42,0                      |                                 |              |
|            | 12,1                   | 7,1       |             |                                  |                          |           |                       | 42,0                      |                                 |              |
| C          | 12,1                   | 7,0       | 0,32        | zmienne,<br>średnio<br>11,7/11,0 | 4080                     | 1,69      | 35,3                  | 37,0                      | 37,5                            | 5            |
|            | 12,1                   | 7,0       |             |                                  |                          |           |                       | 38,0                      |                                 |              |
| C'         | 12                     | 7,0       | 0,32        | zmienne,<br>średnio<br>11,7/11,0 | 3400                     | 1,26      | 26,1                  | 33,4                      | 32,5                            | 24           |
|            | 12                     | 7,0       |             |                                  |                          |           |                       | 31,6                      |                                 |              |
| D          | 12,2                   | 7,0       | 0,37        | 10,9,3<br>po prze-<br>katnej     | 4446                     | 2,06      | 43,3                  | 42,0                      | 41,3                            | -6           |
|            | 12,1                   | 7,0       |             |                                  |                          |           |                       | 41,0                      |                                 |              |
|            | 12,2                   | 7,0       |             |                                  |                          |           |                       | 41,0                      |                                 |              |
| E          | 12,1                   | 10,0      | 0,8         | 10,8,9                           | 3486                     | 2,94      | 62,1                  | 56,0                      | 56,7                            | -8,7         |
|            | 12,1                   | 10,0      |             |                                  |                          |           |                       | 56,0                      |                                 |              |
|            | 12,1                   | 10,0      |             |                                  |                          |           |                       | 58,0                      |                                 |              |

bezpośrednio zestawienie wyników. Wartości podane w tablicach 7 i 8 oparte są na wynikach doświadczeń drezdeńskich<sup>15)</sup>.

Tablica 7 dotyczy płyt o grubości 12 cm, zaś tablica 8 płyt o grubości 8 cm.

<sup>14)</sup> Zakładamy przy tym, że zmiany w rozkładzie zbrojenia są nieznaczne, gdyż w przypadku przeciwnym musielibyśmy w celu uniknięcia większego błędu uwzględnić niejednorodność, ewentualnie również ortotropię (por. p. 4.4 oraz 7.3).

<sup>15)</sup> Cytujemy na podstawie [10].

Występujące w rzeczywistości obrazy zniszczenia ilustrują rysunki 57 i 58 odpowiednio dla dolnej i górnej powierzchni płyty.

Naroża, jak powiedzieliśmy, nie były w badaniach tych przytrzymywane. Odrębne badania, dotyczące specjalnie problemu naroży, zostaną omówione w dalszej części.

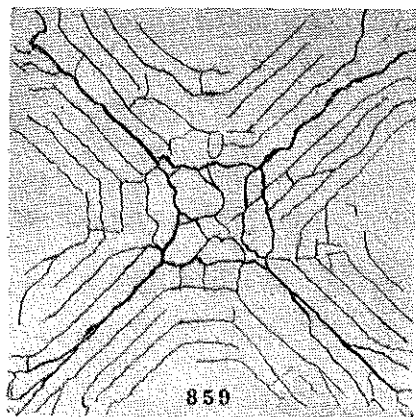
Tablica 8

| Se-<br>ria | Grubość<br>płyty<br>cm | Zbrojenie |        |                       |                         | M<br>tm/m | Obciążenie łamiące P t |                           |                                 | Różnica<br>% |
|------------|------------------------|-----------|--------|-----------------------|-------------------------|-----------|------------------------|---------------------------|---------------------------------|--------------|
|            |                        | d<br>mm   | φ<br>% | oczka<br>siatki<br>cm | Q <sub>r</sub><br>kG/cm |           | obli-<br>czone         | z do-<br>świad-<br>czenia | średnia<br>z doświad-<br>czenia |              |
| A          | 8,1                    | 7,2       | 0,58   | 10/10                 | 4080                    | 1,14      | 23,8                   | 26,25                     | 26,2                            | 10,0         |
|            | 8,1                    | 7,2       |        |                       |                         |           |                        | 26,3                      |                                 |              |
|            | 8,2                    | 7,1       |        |                       |                         |           |                        | 26,0                      |                                 |              |
| B          | 8,1                    | 7,2       | 0,58   | 10/8,8                | 4080                    | 1,19      | 24,9                   | 26,0                      | 26,2                            | 5,2          |
|            | 8,1                    | 7,2       |        |                       |                         |           |                        | 26,0                      |                                 |              |
|            | 8,1                    | 7,2       |        |                       |                         |           |                        | 26,5                      |                                 |              |
| C          | 8,1                    | 7,1       | 0,50   | zmienne,<br>średnio   | 4080                    | 1,00      | 20,8                   | 24,0                      | 24,0                            | 15,9         |
|            | 8,1                    | 7,1       |        | 11,7/11,0             |                         |           |                        | 24,0                      |                                 |              |
| D          | 8,1                    | 7,0       | 0,58   | 10/8,8                | 4446                    | 1,23      | 25,7                   | 27,0                      | 26,7                            | 7,7          |
|            | 8,2                    | 7,0       |        | po prze-<br>kątnej    |                         |           |                        | 27,0                      |                                 |              |
|            | 8,1                    | 7,0       |        | 26,0                  |                         |           |                        |                           |                                 |              |
| E          | 8,1                    | 10,0      | 1,20   | 10/8,3                | 3490                    | 1,75      | 36,9                   | 34,0                      | 34,0                            | -- 7,8       |
|            | 8,1                    | 10,0      |        |                       |                         |           |                        | 34,0                      |                                 |              |
|            | 8,1                    | 10,0      |        |                       |                         |           |                        | 34,0                      |                                 |              |
| F          | 8,1                    | 10,0      | 1,20   | 10/8,3                | 3490                    | 1,75      | 36,9                   | 34,0                      | 34,0                            | — 7,8        |
|            | 8,1                    | 10,0      |        | po prze-<br>kątnej    |                         |           |                        | 34,0                      |                                 |              |
|            | 8,1                    | 10,0      |        | 34,0                  |                         |           |                        |                           |                                 |              |
| G          | 8,1                    | 10,0      | 2,0    | 6/5                   | 5290                    | 2,05      | 43,4                   | 44,0                      | 43,0                            | 0,9          |
|            | 8,1                    | 10,1      |        |                       |                         |           |                        | 45,0                      |                                 |              |
|            | 8,1                    | 10,2      |        |                       |                         |           |                        | 40,0                      |                                 |              |
| H          | 8                      | 5         | 0,29   | 10-10                 | 5600                    | 0,74      | 15,2                   | 18,8                      | 18,5                            | 21,5         |
|            | 8                      | 5         |        |                       |                         |           |                        | 18,3                      |                                 |              |

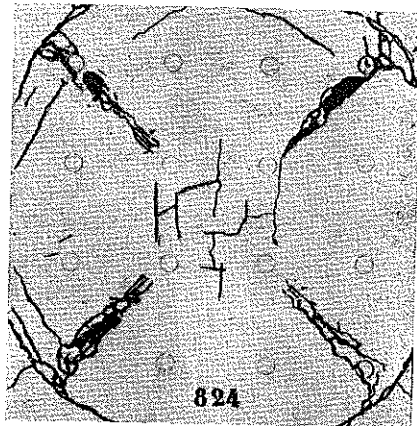
Na ogół wyniki zestawione w tablicach są zgodne z wynikami teoretycznymi. Dwie pozycje wykazują mniejsze rzeczywiste obciążenie łamiące aniżeli obciążenie obliczone. Tłumaczy się to tym, że jednostkowy moment łamiący nie był tu wyznaczany doświadczalnie dla pasma o grubości 8 cm, lecz obliczany na podstawie wyników dla pasma 12 cm, zbrojonego w identyczny (co do ilości, rozstawu i średnicy prętów) sposób, na podstawie stosunku

$$2,94 \cdot \frac{1,19}{2,00} = 1,75 \text{ tm/m.}$$

Wartość 2,94 t przedstawia moment jednostkowy dla pasma o grubości 12 cm przy  $Q_r = 3490$ , zaś wyraz  $1,19/2,00$  określa stosunek momentów łamiących dla płyt o grubościach 8 cm i 12 cm według wyników, otrzymywanych przy zbrojeniu o innej wartości. Wartości te dotyczą badań oznaczonych w tablicach literą B (dla których  $Q_r = 4080 \text{ kG/cm}^2$ ).



Rys. 57



Rys. 58

Należy podkreślić, że seria G wykonana była ze słabego betonu, zbrojona przy tym stałą twardą, lecz i tu zgodność z obliczonymi wartościami sił niszczących jest dobra, mimo iż założenia teorii nie są w pełni słuszne dla tego rodzaju przypadku.

Fakt ten wskazuje (o czym zresztą wspominaliśmy już poprzednio, por. rys. 18), że odkształcenia plastyczne betonu mają podobne znaczenie w teorii nośności granicznej, jak plastyczne odkształcenia stali. Zbrojenie stałą twardą w grupie H spowodowało, że zniszczenie nastąpiło przez zerwanie prętów w chwili złamania, przy czym siła powodująca ten stan była znacznie wyższa od obliczonej.

Jeszcze nieco uwagi należy poświęcić przypadkom, w których zbrojenie ułożone było równoległe do przekątnych. Takie ułożenie zbrojenia nie może oczywiście mieć wpływu — z punktu widzenia teorii stanów granicznych — na wielkość obciążenia łamiącego. Stwierdzenie to znajduje — jak widać z zestawienia odpowiednich pozycji z tablic 7 i 8 — należyte uzasadnienie doświadczalne. Ułożenie zbrojenia po przekątnej, jak wykazały badania radzieckie<sup>16)</sup>, wpływa jedynie na okres, w którym — licząc od początku obciążenia — pojawiają się pierwsze pęknięcia. Przy takim układzie zbrojenia pęknięcia pojawiają się wcześniej, niż to ma

<sup>16)</sup> Por. np. K. W. Sachnowski, [28].

miejsce w przypadku ułożenia zbrojenia równoległe do boków płyty. Badania radzieckie, przedstawione w cytowanej pracy, stwierdzają również, że nośność płyty w obu przypadkach nie ulega zmianie.

Skoro jest mowa o badaniach radzieckich, należy jeszcze podać, iż przeprowadzane doświadczenia w przypadkach zagęszczonego zbrojenia w obszarze środkowym płyty dawały nieco większą siłę niszczącą, niż w przypadku równomiernego ich rozłożenia. Jest to w pewnej mierze uzasadnione faktem, iż praktycznie — jak widać to chociażby z podanych uprzednio fotografii — linie załamów nie zawsze osiągają krawędzie płyty, a więc pewne nieznaczne partie zbrojenia przy krawędziach podparcia nie zostają naprężone do granicy plastyczności. Pewną ilustracją takiego stwierdzenia mogą być również odpowiednie wyniki przedstawione w tablicach 7 i 8. Przytoczonej tu analizie nie ma w pracy [10], na podstawie której sporządzone zostały tablice 7 i 8.

#### 10. Płyta izotropowa prostokątna obciążona równomiernie

10.1. Przedstawione niżej doświadczenia wykonane były na płytach o grubości 12 cm i o stosunku boków (licząc w świetle podpór)  $b/a = \beta$ , wynoszącym  $\beta = 2/3$  i  $\beta = 1/2$ ; uwzględniając zaś wystające brzegi płyty  $\beta_1 = 210/310 = 0,676$  i  $\beta_1 = 210/410 = 0,51$ .

W przypadku płyty izotropowej  $\kappa = 1$ , wielkość momentu łamiącego moglibyśmy wyznaczyć dla obciążeń rozłożonych równomiernie na podstawie [16] ze wzoru

$$(10.1.1) \quad M = \frac{p b^2}{24} \bar{\gamma}^2,$$

gdzie  $\bar{\gamma} = \sqrt{3 + \beta^2} - \beta$ ; dla  $\beta = 2/3$  daje to  $\bar{\gamma} = 1,19$ . Operując, jak poprzednio, obciążeniem łamiącym  $P = p b^2 / \beta$  i uwzględniając przy ciężarze własnym wystające poza linię podpór brzegi płyty oraz pomijając wpływ naroży, otrzymamy

$$(10.1.2) \quad M = \frac{P \beta}{24} \bar{\gamma}^2 + \frac{G \beta}{24} \bar{\gamma}^2 \frac{3 \cdot 2}{3,1 \cdot 2,1},$$

co po wstawieniu wartości liczbowych daje

$$M = \frac{2 P}{3 \cdot 24} 1,19^2 + \frac{2 G}{3 \cdot 24} 1,19^2 \cdot 0,93.$$

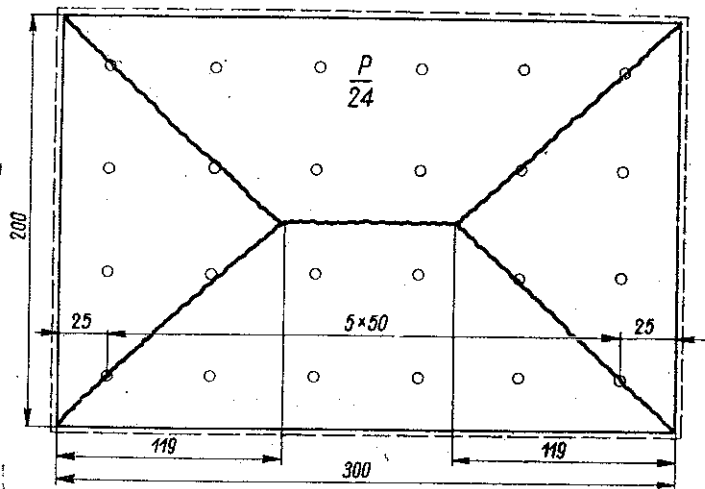
Stąd wartość obciążenia łamiącego wyniesie

$$(10.1.3) \quad P = 25,4 M - 0,93 G,$$

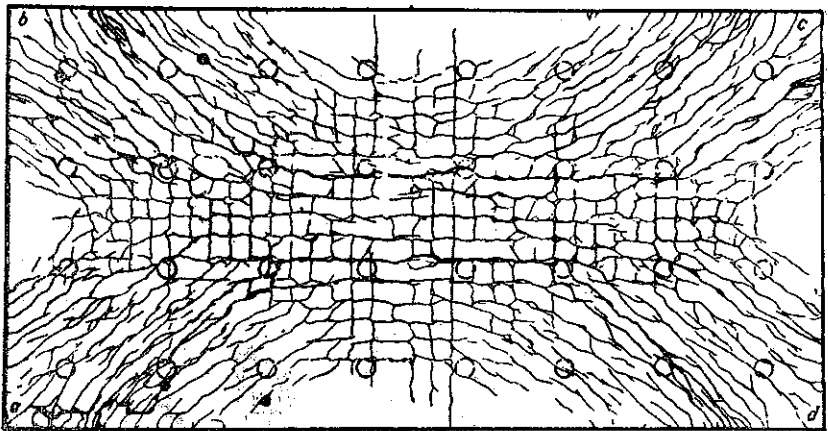
gdzie

$$G = g \cdot 310 \cdot 210.$$

Układ teoretycznej siatki zniszczenia dla rozpatrywanego przypadku w założeniu obciążenia ciągłego przedstawia rys. 59, zaś rys. 60 układ pęknięć według jednego z doświadczeń C. B a c h a, [1], <sup>17)</sup>.



Rys. 59



Rys. 60

Odległość szczytu daszka załamów charakterystyczny dla  $\beta < 1$  jest

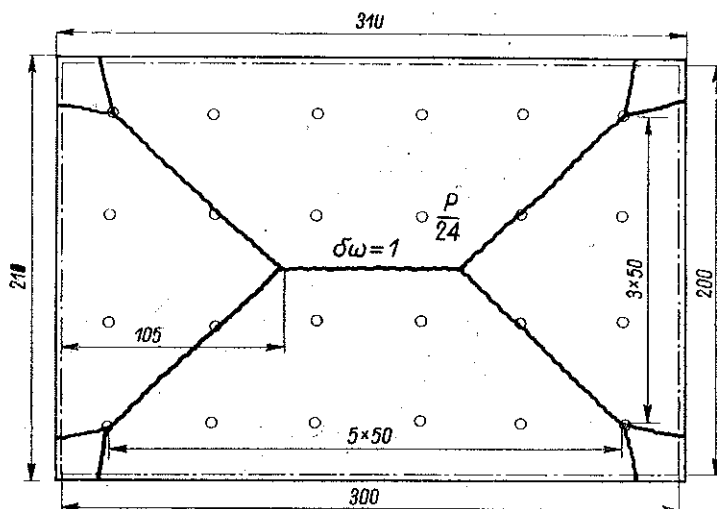
$$x = \frac{b}{2} \bar{\gamma} = \frac{2,00}{2} 1,19 = 1,19 \text{ m,}$$

a więc linia załomu nie jest dwusieczną kąta między odpowiednimi bokami płyty.

<sup>17)</sup> Por. p. 9.1.



Doświadczenie przeprowadzono obciążając płytę siłami skupionymi, działającymi punktowo; wskazuje na to rys. 59. Przy takim rozłożeniu obciążeń linie załomów przechodzą przez punkty działania sił; otrzymany doświadczalnie układ zniszczenia będzie nieco inny. Przedstawia go rys. 61. Względ, by porównania wyników doświadczalnych z teoretycznymi dokonywać dla rzeczywiście realizowanych układów siatek zniszczenia, powoduje, iż porównania takiego nie możemy dokonać na podstawie wzoru (10.1.3).



Rys. 61

Rzeczywisty układ linii załomów przy danym typie obciążenia w 24 punktach daje równanie bilansu prac z uwzględnieniem naroży w postaci

$$\begin{aligned}
 8 \frac{P}{24} \cdot \frac{3}{4} + 16 \frac{P}{24} \cdot \frac{1}{4} + 4 \frac{1}{2} g \cdot 105 \cdot 210 \cdot \frac{30}{100} + 2g \cdot 100 \cdot 105 \cdot \frac{47,5}{100} = \\
 = 2M \frac{310}{100} + 2M \frac{210}{100} - 4M \frac{1}{4} (2 - \sqrt{2})^2,
 \end{aligned}$$

co prowadzi do wartości

$$(10.1.4) \quad P = 24,1 M - 0,84 G.$$

Z analizy rys. 62 oraz 63, na których przedstawiona jest siatka zniszczenia, nasuwać się może wniosek, że bardziej prawdopodobnym układem jest układ przedstawiony na rys. 64.

Stosując zasadę prac przygotowanych otrzymamy dla takiego schematu zniszczenia

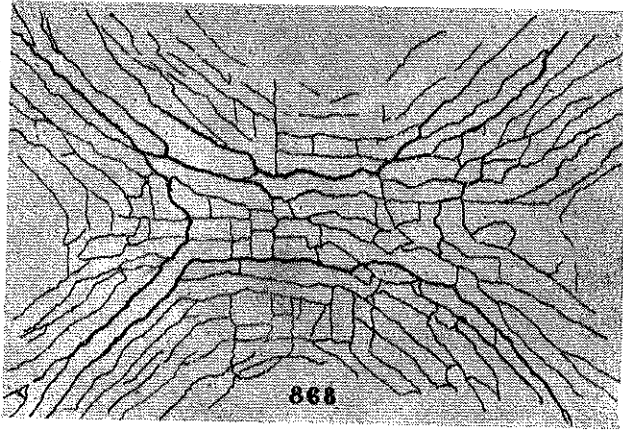
$$8 \frac{P}{24} \cdot 1 + 16 \frac{P}{24} \cdot \frac{1}{3} + g \cdot 150 \cdot 80 \cdot 2 \cdot \frac{35}{75} + g \cdot 50 \cdot 80 \cdot 2 \cdot \frac{35}{70} + g \cdot 150 \cdot 50 \cdot 1 +$$

$$+ g \cdot 80 \cdot 80 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{22}{75} = 2M \frac{310}{75} + 2M \frac{210}{75} - 4M \frac{1}{3} (2 - \sqrt{2})^2,$$

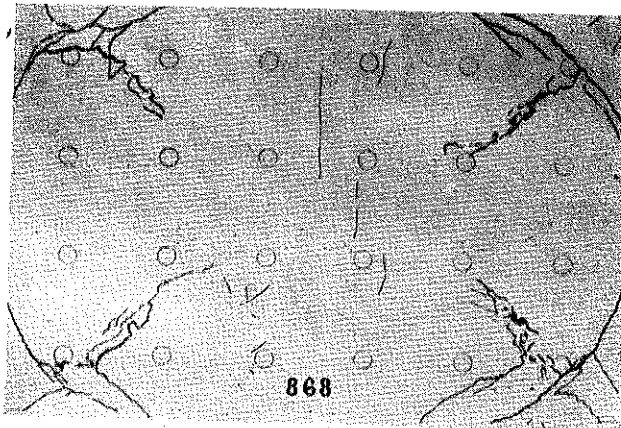
skąd

10.1.5)

$$P = 24,1 M - 0,82 G.$$



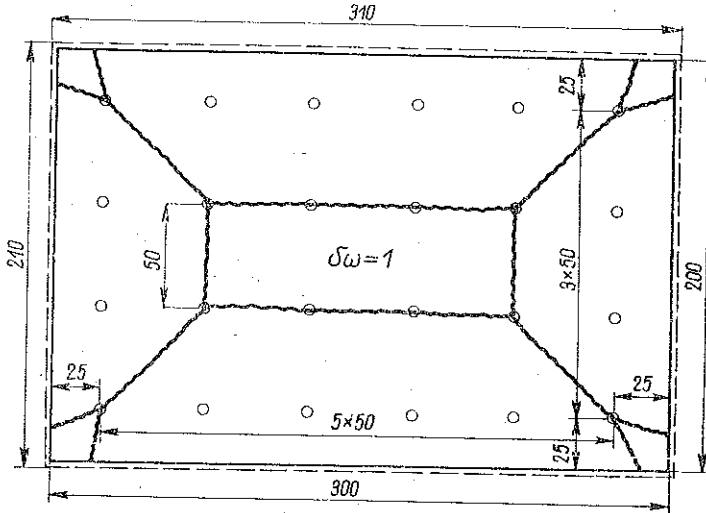
Rys. 62



Rys. 63

Jak widać, siatka załamów według rys. 64 daje nieco wyższą wartość obciążenia łamiącego. Siatki zniszczenia, które widać na fotografiach,

są kombinacją przedstawionych dwóch schematów, a to dlatego, że wyrażenia, dotyczące pracy sił zewnętrznych, są dla obu schematów jednokowe, wyrażenia zaś określające udział ciężaru własnego nieznacznie się różnią. Wyniki zestawione w tabelicy 9 są słuszne dla obydwu wzorów z dokładnością odpowiadającą obliczeniom dokonywanym na suwaku logarytmicznym.



Rys. 64

W przeprowadzonych badaniach użyta była stal  $Q_r = 4280 \text{ kG/cm}^2$ , przy czym średnica prętów wynosiła 7,0 mm. Przy danym rozstawie zbrojenia, jednakowym w obydwu kierunkach i wynoszącym 10 cm, wielkość momentu jednostkowego wyznaczono na podstawie danych z tabelicy 3 z zależności

$$M = k M_v = 0,964 \cdot 2,03 \cdot \frac{4280}{4080} \left( \frac{7,0}{7,2} \right)^2 = 1,90 \text{ tm/m.}$$

Tablica 9

| Grubość<br>płyty<br>cm | Zbrojenie |                |                       |                | M<br>tm/m | Obciążenie łamiące P t |                      |                                 | Różnica<br>% |
|------------------------|-----------|----------------|-----------------------|----------------|-----------|------------------------|----------------------|---------------------------------|--------------|
|                        | d<br>mm   | $\varphi$<br>% | oczka<br>siatki<br>cm | $Q_r$<br>kG/cm |           | obli-<br>czone         | z doświad-<br>czenia | średnia<br>z doświad-<br>czenia |              |
| 12,2                   | 7,0       |                |                       |                |           |                        | 45,0                 |                                 |              |
| 12,1                   | 7,0       | 0,37           | 10/10                 | 4289           | 1,90      | 44,2                   | 44,0                 | 44,3                            | 0,2          |
| 12,1                   | 7,0       |                |                       |                |           |                        | 44,0                 |                                 |              |

Zestawienie wyników dla płyty, dla której  $\beta = 2/3$ , podane jest w tabelicy 9 ( $\beta$  dla wymiarów płyty wynosi 0,676;  $2/3$  dotyczyło rozpiętości w świetle podpór).



Do równania tego doszliśmy udzielając punktom, leżącym na «kalenicy» daszku załomów, przesunięcia jednostkowego. Wstawiając doń  $G = g \cdot 410 \cdot 210$  otrzymamy wartość siły niszczącej

$$(10.2.1) \quad P = 27,6 M - 0,88 G.$$

Dla siatki przedstawionej na prawej części rysunku równanie prac przygotowanych, otrzymane przez udzielenie analogicznego przesunięcia  $\delta w = 1$  bez uwzględnienia zmniejszającego wpływu naroży (linia przerywana na prawej części rys. 65), przedstawia się, jak następuje:

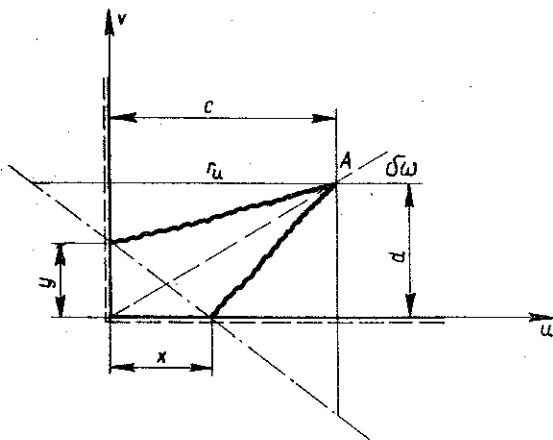
$$\begin{aligned} & 12 \frac{P}{32} 0,25 + 8 \frac{P}{32} 0,75 + 8 \frac{P}{32} 0,15 + 4 \frac{P}{32} 0,45 + \\ & + 2g \cdot \frac{1}{2} \cdot 210 \cdot 172 \cdot 52,3 \frac{0,75}{125} + 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 105 \cdot 172 \cdot 30 \frac{0,75}{75} + \\ & + 2g \cdot 66 \cdot 105 \cdot 47,5 \cdot \frac{0,75}{75} = 2M \left( 410 \frac{0,75}{75} + 206 \frac{0,75}{126} \right); \end{aligned}$$

stąd obliczamy

$$(10.2.2) \quad P = 28,5 M - 0,89 G.$$

10.3. Zastanowimy się obecnie nad wpływem naroża (rys. 66). Rozpatrzyć zagadnienie w tym przypadku jest stosunkowo łatwo, gdyż charakter obciążenia wyznacza kształt tworzącego się naroża.

Traktując wielkości  $x$  i  $y$  jako znane (co odpowiada naszemu przypadkowi) i postępując analogicznie jak w przypadku, gdy siła przesuwała się po przekątnej kwadratu, otrzymamy na pracę sił wewnętrznych, wykonaną przy utworzeniu się załomu według linii kreskowanej, wyrażenie

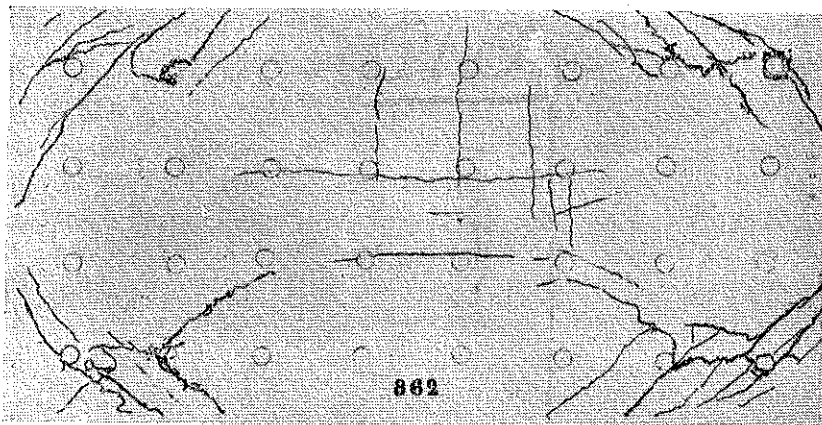


Rys. 66

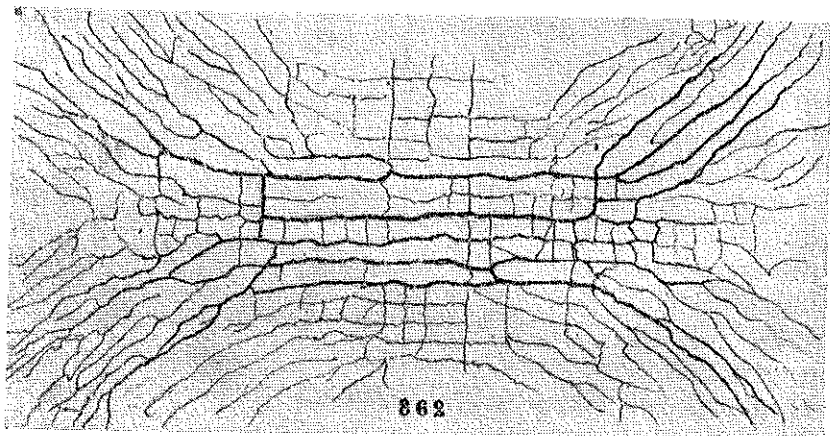
$$\delta V_1 = M \frac{c}{d} \delta w + M \frac{d}{c} \delta w = M \left( \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \right) \delta w,$$

zaś na pracę wykonaną przy pojawieniu się rzeczywistych linii załomów

$$\delta V_2 = M \frac{\delta w}{d} (c - x) + M \frac{\delta w}{c} (d - y) + M x \frac{\delta w}{r_v} + M y \frac{\delta w}{r_u}$$



Rys. 67



Rys. 68

Różnica  $\delta V_1 - \delta V_2$  przedstawia skutek podnoszącego się naroża. Wielkość jej wynosi

$$(10.3.1) \quad \Delta \delta V = \delta V_1 - \delta V_2 = -M \delta w \left( \frac{x}{r_v} + \frac{y}{r_u} - \frac{x}{d} - \frac{y}{c} \right)$$

Wstawiając

$$r_u = c + (d - y) \frac{x}{y} = c + \frac{d}{y} x$$

oraz

$$r_v = d + \frac{c}{x} y$$

otrzymujemy

$$(10.3.2) \quad \Delta \delta V = \left[ \frac{-(x^2 + y^2)}{x d + y c - x y} + \frac{x}{d} + \frac{y}{c} \right] M \delta w.$$

Podstawiając wartości z rozpatrywanego przykładu, tzn.  $\delta w = 3/4$ ,  $x = 50$  cm,  $y = 15$  cm,  $d = 80$  cm i  $c = 130$  cm, obliczamy

$$\Delta \delta V = \frac{3}{4} M \frac{-(15^2 + 50^2)}{80 \cdot 50 + 15 \cdot 130 - 15 \cdot 50} + \frac{50}{80} + \frac{15}{130} = \frac{3}{4} M \cdot 0,215.$$

Uwzględnienie wpływu czterech naroży we wzorze (10.2.2) prowadzi do siły łamiącej o wartości

$$(10.3.3) \quad P = 26,8 M - 0,89 G;$$

jest to najmniejsza dla danego przypadku wartość siły łamiącej ze wszystkich wielkości według wzorów (10.2.1), (10.2.2) oraz (10.3.3).

10.4. Zestawienie wyników doświadczeń i porównanie wielkości sił łamiących podane jest w tabelicy 10. Stal w tych płytach charakteryzowała się takimi samymi własnościami jak w przypadku płyt o stosunku boków  $\beta = 2/3$  (tzn. takich jak podano w tabelicy 9). Rysunki 67 i 68 przedstawiają rzeczywisty układ linii załomów.

Tablica 10.

| $\beta$ | Grubość<br>płyty<br>cm | Zbrojenie |                |                       |                             | $M$<br>tm/m | Obciążenie łamiące $P t$ |                           |                                 | Róż-<br>nica<br>‰ |
|---------|------------------------|-----------|----------------|-----------------------|-----------------------------|-------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------------|-------------------|
|         |                        | $d$<br>mm | $\varphi$<br>‰ | oczek<br>siatki<br>cm | $Q_r$<br>kG/cm <sup>2</sup> |             | obli-<br>czone           | z do-<br>świad-<br>czenia | średnie<br>z doświad-<br>czenia |                   |
| 0,50    | 12,2                   | 7,0       |                |                       |                             |             |                          | 50,0                      |                                 |                   |
|         | 12,1                   | 7,0       | 0,37           | 10/10                 | 4280                        | 1,90        | 48,8                     | 50,0                      | 50,7                            | 4                 |
| (0,51)  | 12,1                   | 7,0       |                |                       |                             |             |                          | 52,0                      |                                 |                   |

### 11. Płyta dwuprzęsłowa obciążona równomiernie

11.1. Płyta dwuprzęsłowa, składająca się z dwóch pól kwadratowych o rozpiętości dla osi podpór 200 cm  $\times$  200 cm, obciążona była 32 siłami skupionymi. Grubość płyty wynosiła 12 cm; zbrojenie wykonano dołem równomiernie prętami  $d = 7$  mm, górą nad podporą pośrednią  $d = 8,8$  mm; rozstaw zbrojenia nośnego wynosił 10 cm  $\times$  10 cm. Górne zbrojenie charakteryzowało się granicą plastyczności  $Q_r = 2940$  kG/cm<sup>2</sup>, dla dolnego było  $Q_r = 4320$  kG/cm<sup>2</sup>.

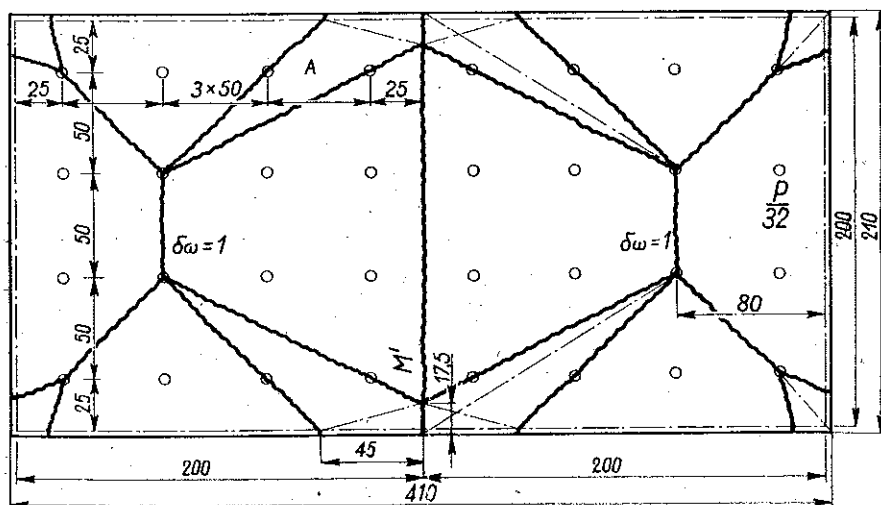
Wartości momentów jednostkowych wyznaczono na podstawie tablicy 3 dokonując przeliczeń z uwagi na inne  $Q_r$  oraz  $d$ . Momenty jednostkowe wynosiły zatem

$$M = 1,92 \cdot \frac{4320}{4080} \cdot \frac{7,0^2}{7,2^2} = 1,92 \text{ tm/m,}$$

$$M' = 2,00 \cdot \frac{2940}{4080} \cdot \frac{8,8^2}{7,2^2} = 2,16 \text{ tm/m,}$$

$$\lambda = \frac{M'}{M} = \frac{2,16}{1,92} = 1,13,$$

gdzie  $M'$  oznacza jednostkowy moment ujemny (tzn. związany ze zbrojeniem górnym), zaś  $M$  posiada znaczenie objaśnione poprzednio.



Rys. 69

Układ linii załomów, uwarunkowany typem obciążenia, dla tego układu przedstawia rys. 69. Zasada prac przygotowanych daje tu równanie

$$\begin{aligned} & 8 \frac{P}{32} \cdot \frac{1}{3} + 4 \frac{P}{32} \cdot \frac{1}{5} + 2 \frac{P}{32} \cdot \frac{3}{5} + 2 \frac{P}{32} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 80 \cdot 205 \cdot \frac{21,7}{75} + \\ & + 2 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 80^2 \frac{21,7}{75} + g \cdot 50 \cdot 80 \cdot \frac{35}{75} + 2 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 80 \cdot 125 \cdot \frac{1}{3} + \\ & + g \cdot 50 \cdot 125 \cdot \frac{1}{2} = 2 M (205 - 45) \cdot \frac{1}{75} + M \frac{210}{75} - 2 M \frac{1}{3} (2 - \sqrt{2})^2 + \\ & + (M + M') (205 - 35) \cdot \frac{1}{125} + 2 (M + M') \cdot \frac{17,5}{375} + 2 M \cdot 45 \cdot \frac{4}{375}; \end{aligned}$$



stąd

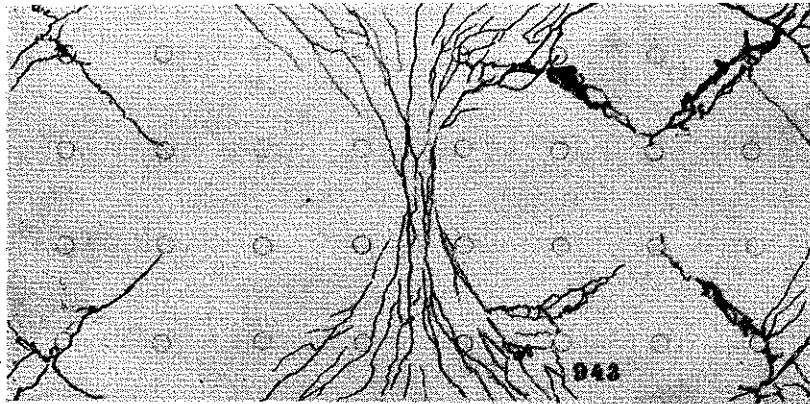
(11.1.1)

$$P = 44,6 M + 7,15 M' - 0,83 G,$$

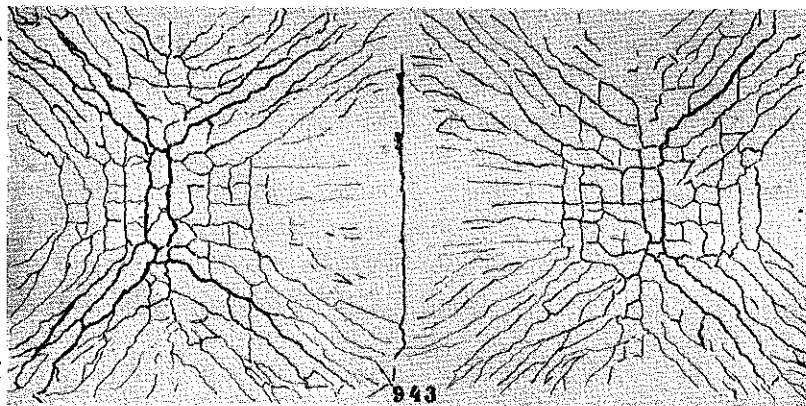
gdzie

$$G = g \cdot 410 \cdot 210.$$

Wpływ naroża, oznaczonego na rysunku 69 literą A, jest uwzględniony bezpośrednio przy zestawianiu bilansu prac. Składowe kąty obrotu wynoszą 1 : 375 i 4 : 375 odpowiednio dla obrotów wokół środkowej podpory i dłuższych boków.



Rys. 70



Rys. 71

11.2. Tablica 11 zawiera zestawienie wyników dla omawianego przypadku.

Rysunki 70 i 71 przedstawiają otrzymaną siatkę zniszczenia. Warto zwrócić uwagę na fakt, że na podporze pośredniej następowало zniszczenie przez zmiążdżenie betonu jedynie w pewnej partii środkowej, natomiast przy brzegach — z uwagi na tendencję unoszenia się naroży — nie miało to miejsca.

Tablica 11

| Grubość<br>płyty<br>cm | Zbrojenie         |                     |                       |                             | $\frac{M}{M'}$      | Obciążenia łamiące $P_t$ |                    |                               | Różnica<br>% |
|------------------------|-------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------------|---------------------|--------------------------|--------------------|-------------------------------|--------------|
|                        | $d$<br>mm         | $\varphi$<br>%      | oczka<br>siatki<br>cm | $Q_r$<br>kG/cm <sup>2</sup> |                     | obli-<br>czone           | z doświad-<br>czeń | średnia<br>z doświad-<br>czeń |              |
| 12,1                   | $\frac{7,0}{8,8}$ |                     | 10/10                 |                             |                     |                          | 100,0              |                               |              |
| 12,1                   | $\frac{7,0}{8,8}$ | $\frac{0,37}{0,61}$ |                       | $\frac{4320}{2940}$         | $\frac{1,92}{2,16}$ | 98,4                     | 95,0               | 98,3                          | 0,18         |
| 12,2                   | $\frac{7,0}{8,8}$ |                     | 10/10                 |                             |                     |                          | 100,0              |                               |              |

## 12. Płyta prostokątna ortotropowa obciążona równomiernie

12.1. Płytom o różnej mocy zbrojenia w dwu prostopadłych do siebie kierunkach odpowiadają różne wielkości momentów granicznych, porządkowanych tym zbrojeniom; mamy więc do czynienia ze strukturą ortotropową. Wskaźnik ortotropii jest określony z dostatecznym przybliżeniem bezpośrednio przez moc zbrojenia<sup>18)</sup>. Wyraża się on stosunkiem wielkości momentów jednostkowych dla każdego z kierunków ortotropii.

Doświadczenia przeprowadzone były nad płytami 416 cm × 210 cm o grubości 12 cm, przy czym zbrojenie, ułożone prostopadle do boku dłuższego, obsługiwało partie długości 410 cm. Zbrojenie krótkie wykonane było z prętów o średnicy  $d = 70$  mm, rozstawionych w odległościach 10 cm, natomiast zbrojenie podłużne wykonane było z prętów o średnicy  $d = 7$  mm względnie 5 mm. To ostatnie było ułożone, w zależności od typu płyty, w odległościach od 10 cm do 26 cm. Zbrojenie posiadało granicę plastyczności  $Q_f = 4280$  kG/cm<sup>2</sup>. Wszystkie omawiane powyżej charakterystyki podane są w tablicy 12 (patrz str. 242) łącznie z opracowanymi wynikami doświadczeń.

<sup>18)</sup> Pomijamy przy tym zmianę ramienia sił wewnętrznych; por. treść odsyłacza<sup>21)</sup>.

Wartość jednego z momentów łamiących dla płyty przedstawionej na rys. 72 wyznacza się w przypadku jej budowy ortotropowej z zależności

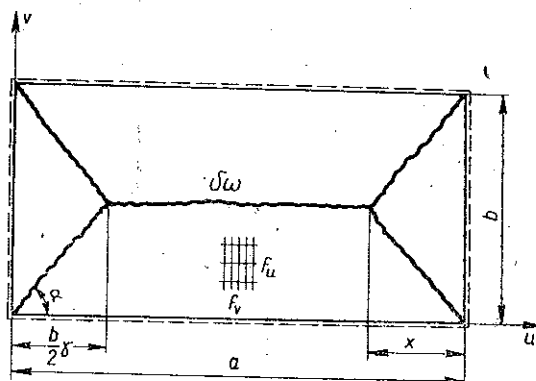
$$(12.1.1) \quad M_n = \frac{p b^2 \gamma^2}{24 \kappa},$$

gdzie

$$\gamma = \kappa \left( \sqrt{\frac{3}{\kappa} + \beta^2} - \beta \right),$$

$\kappa$  natomiast oznacza wskaźnik ortotropii struktury płyty i przedstawia się dla podanych na rysunku kierunków osi wzorem

$$\kappa = \frac{M_\sigma}{M_n} = \frac{k f_n}{k f_\sigma}.$$



Rys. 72

Odległość punktu zetknięcia się trzech linii załomu w przęśle wyznaczona jest równaniem

$$(12.1.2) \quad x = \frac{b}{2} \gamma.$$

Wstawiając  $\beta = 210/410 = 0,51$  otrzymujemy

$$\gamma = \kappa \left( \sqrt{\frac{3}{\kappa} + 0,26} - 0,51 \right).$$

Wartości  $\kappa$  podane są w tablicy 12. I tak np. przy zbrojeniu krótkim rozstawionym co 10 cm, zaś długim — rozstawionym co 20 cm, oraz przy uwzględnieniu innej odległości zbrojenia długiego od górnej powierzchni płyty obliczamy

$$\kappa = \frac{0,92 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,40}{1,40} = 0,46.$$

Dla płyty o współczynniku  $\kappa$  wielkość  $\gamma$  określająca kąt, pod jakim wychodzą linie załomów z punktu przecięcia się osi obrotów, jest

$$\gamma = \text{ctg } \alpha = 0,46 \left( \sqrt{\frac{3}{0,46} + 0,26} - 0,51 \right) = 0,96.$$

Odległość  $x$ , liczona od osi obrotu płata, wynosi zatem  $x = 96$  cm.

12.2. Postulat sprawdzenia doświadczalnego wielkości obciążenia łamiącego nasuwa konieczność wyznaczenia tego obciążenia jako funkcji momentów granicznych; gdy więc podstawimy do wzoru (12.1.1)

$$pb^2 = \beta \left( P + G \frac{4,0 \cdot 2,0}{4,1 \cdot 2,1} \right),$$

otrzymamy

$$(12.2.1) \quad P = \frac{24 M_u \kappa}{\beta \gamma^2} - 0,93 G.$$

Tak więc dla przykładu rozpatrywanego powyżej, dla którego  $\kappa = 0,46$  i  $\gamma = 0,96$ , wartość obciążenia łamiącego wyraża się przez

$$(12.2.2) \quad P = \frac{24 M_u \cdot 0,46}{0,51 \cdot 0,96^2} - 0,93 G = 23,5 M_u - 0,93 G.$$

12.3. Obciążenie łamiące wyznaczyć można również rozpatrując omawianą płytę jako izotropową o odpowiednio zmienionych wymiarach. Należy przy tym wymiary płyty przekształcić przy zastosowaniu odpowiedniego współczynnika transformacji.

Współczynnik ten pozostaje w określonym stosunku do wskaźnika ortotropii i — przy niezmienionych wymiarach w kierunku osi  $v$  — wynosi dla wymiarów w kierunku osi  $u$  <sup>19)</sup>

$$(12.2.3) \quad \eta = \sqrt{\kappa}.$$

Tak przekształcona płyta będzie teraz posiadała wymiary  $b$  i  $a\sqrt{\kappa}$ . Natężenie obciążenia w tym przypadku pozostaje niezmienione; jest ono zatem nadal określone przez intensywność  $p$ .

Obraz transformowanej płyty przedstawiony jest na rys. 73.

Przystępując do wyznaczenia momentów łamiących i posługując się powyższą transformacją liniową wyznaczyć musimy  $\beta_t = b/\sqrt{\kappa} \cdot a$  a następnie

$$\bar{\gamma} = \gamma_t = \sqrt{3 + \beta_t^2} - \beta_t.$$

Dla rozpatrywanej płyty o wymiarach 210 cm  $\times$  416 cm oraz cechach  $\kappa = 0,46$  i  $\beta_t = 0,755$  otrzymujemy

$$\gamma_t = \sqrt{3 + 0,755^2} - 0,755 = 1,14,$$

zaś wartość momentu granicznego  $M_u$  obliczamy ze wzoru (10.1.1) podanego dla płyty izotropowej.

<sup>19)</sup> Por. np. W. Olszak, [17].

Ponieważ porównujemy wielkości obciążeń łamiących, otrzymane z doświadczeń i obliczone na drodze teoretycznej w oparciu o analogiczne rozważania, jak podaliśmy uprzednio dla płyty ortotropowej (nie transformowanej), otrzymamy

$$pb^2 = \beta_i \left( P + G \frac{2,0 \cdot 4,0 \cdot \sqrt{0,46}}{2,1 \cdot 4,1 \cdot \sqrt{0,46}} \right),$$

co prowadzi do siły łamiącej o wartości

$$P = \frac{24 M_u}{\beta_i \gamma_i^2} - 0,93 G = 23,5 M - 0,93 G.$$

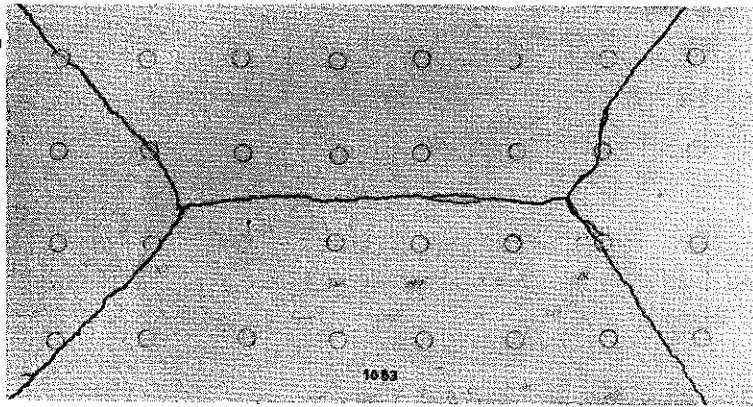
Jest to zatem wynik identyczny z (12.2.2).

12.4. Przystępując do ustalenia siatki zniszczenia spowodowanej przez obciążenie siłami skupionymi, działającymi w 32 punktach powierzchni płyty, należy, podobnie jak w poprzednich przykładach, obliczyć pracę sił zewnętrznych i wewnętrznych przy uwzględnieniu odpowiedniej siatki zniszczenia. Siatkę tę można znaleźć na drodze teoretycznej (w sposób scharakteryzowany uprzednio) albo też można ją wziąć bezpośrednio z doświadczenia (rys. 74 i 75). Obserwuje się w przypadkach małego  $\kappa$ , iż nie występują tu pojedyncze naroża, tworzy się natomiast przy malejącym stosunku boków  $\beta$  jedno «naroże» wspólne (unosi się cały krótszy bok płyty). Schemat takiego układu siatki zniszczenia przedstawia rys. 76. Kąt nachylenia linii załomu względem boku poziomego określa wielkość  $\gamma$ .

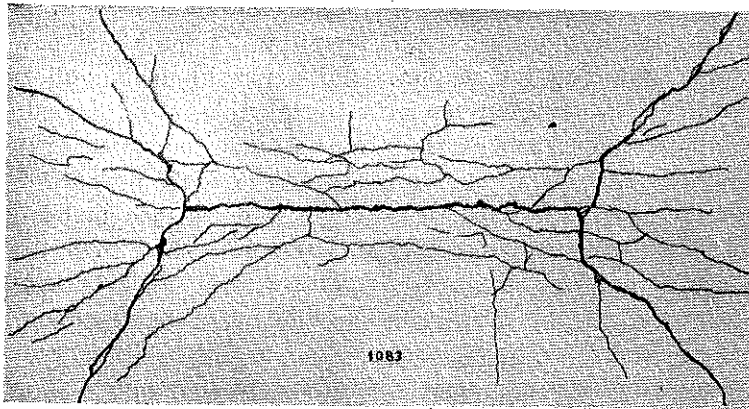
Gdybyśmy rozpatrywali płytę obciążoną równomiernie, porównanie wyników doświadczeń z wynikami teoretycznymi byłoby łatwe; posługiwanie się siłami skupionymi zmusza jednak do poszukiwania pewnej charakterystycznej dla układu obciążeń siatki zniszczenia w oparciu o podaną poprzednio metodę. Niech taką siatką zniszczenia będzie siatka przedstawiona na rys. 76, przy czym na każdej z dwóch połówek płyty podano różne siatki, charakteryzujące się innym kątem linii nachylenia załomu, wychodzące z naroża. Wybór właściwej siatki następuje na podstawie zasady maksymalnego oporu plastycznego, z której określa się wartość  $\gamma$ .

Udzielając punktom zaczepienia sił przemieszczeń przygotowanych, związanych z sobą założeniem sztywno-plastycznego modelu odkształcenia, równanie bilansu prac otrzymujemy w postaci

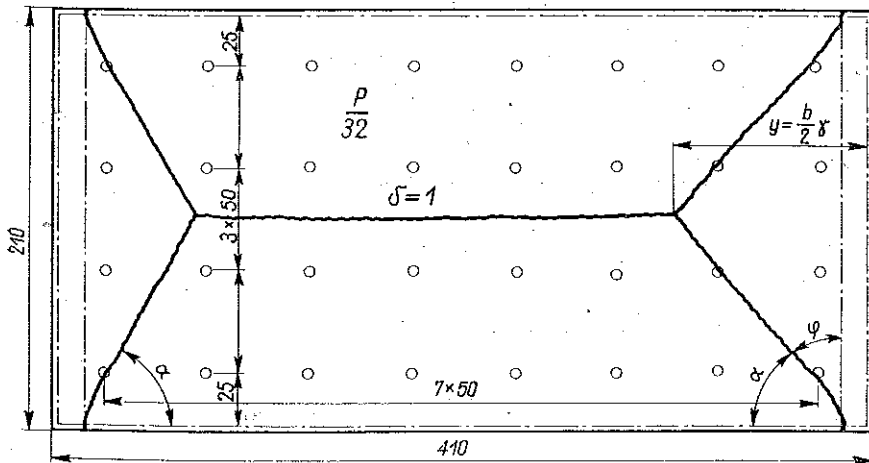
$$\begin{aligned} 12 \frac{P}{32} + 12 \frac{P}{32} \cdot \frac{1}{3} + 8 \frac{P}{32} (75 \operatorname{tg} \varphi - 50) = \\ = 2 M_u (250 + 2 \cdot 80 \operatorname{tg} \varphi) \frac{1}{75} + 2 \kappa M_u \cdot 210 \cdot \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{75}. \end{aligned}$$



Rys. 74



Rys. 75



Rys. 76

W równaniu tym nie uwzględniono tworzenia się pojedynczych naroży jak również pominięto ciężar własny. Ciężar własny wprowadzony zostanie na podstawie równania (12.2.2).

Z podanej wyżej zależności wyznaczmy wielkość siły

$$(12.4.1) \quad P = 16 \frac{4,2 \kappa + 5 \operatorname{tg} \varphi + 3,2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{9 \operatorname{tg} \varphi - 2} M_u = 16 \frac{4,2 \kappa + 5 \gamma + 3,2 \gamma^2}{9 \gamma - 2} M_u,$$

gdzie  $\gamma = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha$ .

Zasada maksymalnego oporu plastycznego daje równanie

$$\begin{aligned} (9 \gamma - 2)(5 - 6,4 \gamma) - 9(5 \gamma + 3,2 \gamma^2 + 4,2 \kappa) = \\ = \gamma^3 - 0,435 \gamma - 0,347 - 1,31 \kappa = 0, \end{aligned}$$

skąd

$$(12.4.2) \quad \gamma = 0,217 + \frac{1}{2} \sqrt{1,57 + 5,24 \kappa}.$$

Zależność ta przy  $\gamma \leq 1$  (tylko wtedy bowiem linia załomu przecina dłuższy bok płyty) jest słuszna dla  $\kappa \leq 0,165$ . Obliczając rzeczywistą wartość siły dla  $\kappa = 0,112$  otrzymamy  $\gamma = 0,952$ , zaś na podstawie (12.4.1)

$$P = \frac{16 \cdot 8,12}{6,55} M_u.$$

Przy uwzględnianiu ciężaru własnego według równania (12.2.1) siła niszcząca wynosi

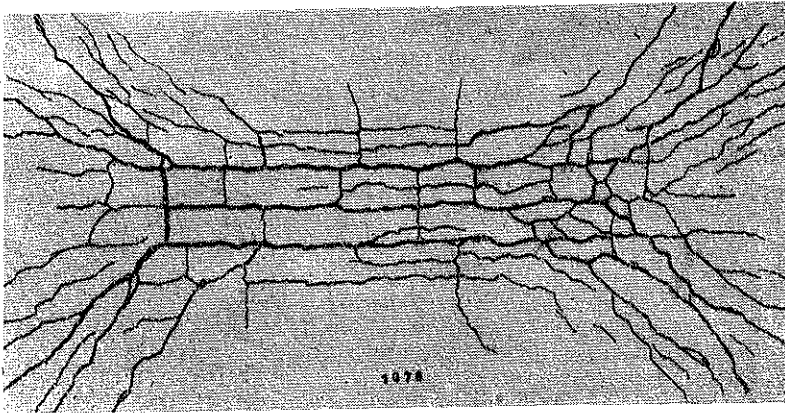
$$(12.4.3) \quad P = 19,8 M_u - 0,93 G.$$

W sposób analogiczny obliczyć można, jakie wartości  $\gamma$  odpowiadać będą siatce zniszczenia przedstawionej na rysunku 76 z lewej strony i jakim to odpowiada wskaźnikom ortotropii<sup>20)</sup>.

12.5. Tablica 12 podaje wielkości sił łamiących, uzyskanych z doświadczenia, oraz wyniki teoretyczne. W tablicy górna wartość siły niszczącej obliczona jest w założeniu równomiernego rozłożenia obciążeń, tzn. według wzoru (12.2.2) z uwzględnieniem odpowiednich współczynni-

<sup>20)</sup> Postępując jak powyżej dla siatki przedstawionej na lewej części płyty otrzymalibyśmy, że przy  $\gamma \leq 1$  jest ona słuszna dla  $\kappa \leq 0,286$ .

ków  $\gamma$ , dolne zaś wartości odnoszą się do obliczeń przeprowadzonych według siatki, przedstawionej na rys. 76 z równoczesnym uwzględnieniem wielkości  $\gamma$ .



Rys. 77

Jeszcze jeden przykład układu linii dla przypadku płyt typu omawianego w tym p. przedstawia rys. 77.

Tablica 12

| Grubość płyty cm  |   | 12   | 12   | 12    | 12    | 12    |
|---|---|------|------|-------|-------|-------|
| Zbrojenie<br>poprzeczne $f_v$ ,<br>$Q_r = 4280 \text{ kg/cm}^2$ | $d$ mm                                  | 6,9  | 7,0  | 7,0   | 7,0   | 7,0   |
|   | odstęp wkładek cm                       | 10   | 10   | 10    | 10    | 5,5   |
|   | $\varphi$ %                             | 0,37 | 0,37 | 0,37  | 0,37  | 0,7   |
| Zbrojenie<br>podłużne $f_u$ ,<br>$Q_r = 4280 \text{ kg/cm}^2$   | $d$ mm                                  | 6,9  | 7,0  | 7,0   | 5,0   | 5,0   |
|   | odstęp wkładek cm                       | 10   | 20   | 35    | 42    | 26,2  |
|   | $\varphi$ %                             | 0,37 | 0,19 | 0,11  | 0,047 | 0,075 |
| Wskaźnik ortotropii $\alpha$                                    |   | 0,92 | 0,46 | 0,263 | 0,112 | 0,098 |
| Moment łamiący $M_u$ tm/m                                       |   | 1,40 | 1,40 | 1,40  | 1,50  | 2,45  |
| $\gamma$  |   | 1,25 | 0,96 | 0,72  | 0,525 | 0,502 |
| Obciążenie<br>łamiące $P_t$                                     | wyznaczone dla ob-<br>ciążeń ciągłych*) | 36,5 | 33,1 | 31,1  | 27,1  | 43,0  |
|   | wyznaczone dla sił<br>skupionych        | 33,8 | 29,3 | 27,6  | 27,5  | 46,2  |
|   | z doświadczenia                         | 35,0 | 31,0 | 29,0  | 28,0  | 48,0  |

\*) Wartości podane bez uwzględnienia zmniejszającego wpływu naroży na podstawie (12.2.1).



Przedstawione wyniki potwierdzają również i dla płyt ortotropowych słusność teorii nośności granicznej. Zagadnienie płyt ortotropowych stanowi bardziej złożony problem obciążenia siłami skupionymi z punktu widzenia wpływu naroży w porównaniu z przypadkiem płyt izotropowych i wymaga odrębnego studium. Szersze opracowanie tego zagadnienia odkładamy do drugiej części pracy, gdzie zostanie ono przedstawione na tle wyników ostatnich naszych prac teoretycznych, [16], [17], [22], [14], [31].

### 13. Uwagi końcowe

Rozpatrzony wyżej szereg prostszych przypadków płyt i obciążeń wskazuje na dobrą zgodność przedstawionej teorii z badaniami doświadczalnymi. Otrzymane wyniki pozwalają przypuszczać, iż w przypadkach bardziej złożonych, jak np. przy rozpatrywaniu płyt ciągłych, płyt zamocowanych, układów o mieszanych warunkach brzegowych itp., rezultaty doświadczeń również potwierdzają słusność teorii.

Weryfikacja doświadczalna tych bardziej złożonych układów wymaga jednak dodatkowego opracowania paru jeszcze zagadnień natury teoretycznej, jak np. wpływu naroży w płytach zamocowanych i ciągłych, układów linii załomów w płytach obustronnie zbrojonych a obciążonych siłą skupioną itp. Ten ostatni problem jest szczególnie interesujący, gdyż w trakcie prowadzonych przez nas doświadczeń otrzymaliśmy, w przypadku obciążenia siłą skupioną przy dowolnym jej wzroście, linię załomu na górnej powierzchni płyty w postaci spirali (rys. 78). Analiza teoretyczna już uprzednio dała wynik, który prowadził do linii spiralnej jako do jednego z możliwych rozwiązań. Gdy zatem obecnie doświadczenie potwierdziło jego słusność, zachodzi potrzeba sprecyzowania warunków powodujących tego rodzaju zniszczenie.

Wspomniane zagadnienia są obecnie w fazie badań doświadczalnych; ich wyniki przedstawione będą w czasie późniejszym.

Warto dorzucić, że również i te z dostępnych nam dotychczasowych doświadczeń, które nie zawsze były przeprowadzane pod kątem widzenia teorii nośności granicznej (jak np. badania instytucji *Deutscher Ausschuss*



Rys. 78

für Eisenbeton), pozwalają wysnuć wniosek o słuszności założeń tej teorii, jak wynika to z szeregu danych w poprzednich rozdziałach.

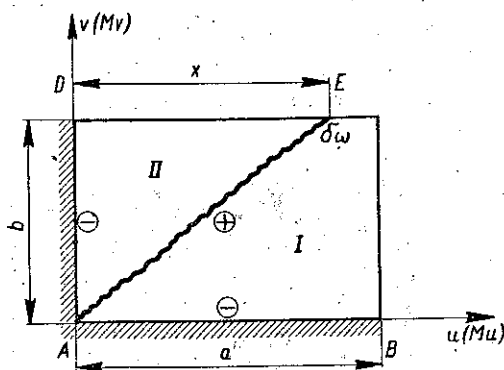
Uzasadnienie słuszności założeń teorii nośności granicznej pozwoli wprowadzić przedstawioną metodę do praktyki inżynierskiej, co zarówno z uwagi na korzyści natury ekonomicznej, jak i ze względu na stosunkowo prostą budowę samej teorii, przynieść powinno efekty gospodarcze.

Należy przy tym wziąć również pod uwagę, że oparcie się o przedstawioną teorię, zdążającą do wyznaczenia sił wewnętrznych na podstawie analizy stanu zniszczenia, pozwoli usunąć w stosunku do płyt istniejącą obecnie niekonsekwencję między obliczaniem tych sił wewnętrznych na podstawie studium ustroju jako sprężystego, a wymiarowaniem ustroju według tzw. metody odkształceń plastycznych. W ten sposób teoria nośności granicznej rozpatruje konsekwentnie zagadnienie jako logiczną całość.

#### 14. Dodatek do p. 3. Przykład liczbowy

Dla zilustrowania przedstawionej w p. 3 metody wyznaczania momentów łamiących zastosujemy ją do obliczenia konkretnego przykładu, którego rozwiązanie na gruncie teorii sprężystości byłoby trudne.

Z rozmysłem dobieramy przykład możliwie prosty dotyczący układu jednorodnego przy założeniu najprostszycich warunków podparcia i obciążenia.



Rys. I

Dana jest płyta prostokątna o bokach  $a = 3$ ,  $b = 2$  (jednostki dowolne), zamocowana na dwóch sąsiednich krawędziach, na dwóch pozostałych swobodna (rys. I), obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem  $p(u, v) = \text{const}$ , która w ogólnym przypadku zbrojona jest górną i dolną w obu kierun-

kach równoległych do osi układu odniesienia w sposób różny; rozpatrzmy zatem płytę o strukturze warstwowo ortotropowej.

Dla uproszczenia zagadnienia zakładamy, że momenty związane ze zbrojeniem dolnym, te zatem, które nazywamy dodatnimi, a oznaczone odpowiednio  $M_u$  oraz  $M_v$ , są sobie równe. Współczynnik ortotropii charakteryzujący «warstwę» dolną wynosi wtedy  $\alpha = 1$ .

Wskutek utwierdzenia płyty na krawędziach AB i AD oraz przewidzianego tam zbrojenia powstaną linie załomów ujemne (tzn. związane

z momentami ujemnymi). Odpowiednie momenty w warstwie górnej wynoszą

$$(14.1) \quad \begin{cases} M'_u = \mu M_u, \\ M'_v = \lambda \mu M_u. \end{cases}$$

Założmy, że współczynnik ortotropii «warstwy» górnej wynosi  $\lambda = 0,5$ , zaś współczynnik charakteryzujący stosunek mocy zbrojenia równoległego do osi  $v$  warstwy górnej i dolnej  $\mu = 3$  [tzn. moc zbrojenia «krótszego» warstwy górnej jest trzykrotnie większa od analogicznej mocy warstwy dolnej<sup>21)</sup>].

Na podstawie przytoczonych wyżej zależności możemy wyrazić wszystkie wielkości momentów w funkcji jednej wartości momentu  $M_u$ .

Chcąc obliczyć tę wartość rozpatrzmy układ zniszczenia podany na rys. I. Nie jest to jedyny możliwy układ zniszczenia dla interesujących nas warunków obciążenia i podparcia płyty; do zagadnienia tego powrócimy jeszcze później.

W rozpatrywanej siatce zniszczenia mamy trzy linie załamów: dwie «ujemne» wzdłuż boków  $AB$  i  $AD$  oraz jedną «dodatnią», która przechodzi przez punkt  $A$ ; nachylenie jej do układu osi odniesienia nie jest znane. Założmy, że położenie tej linii jest określone parametrem  $x$ .

Jeśli teraz udzielimy punktowi  $E$  przemieszczenia przygotowanego  $\delta w$  ku dołowi, wówczas będziemy mogli napisać równanie pracy sił zewnętrznych i wewnętrznych stosownie do (3.11.3) i (3.12.3).

Tak więc praca sił zewnętrznych wyniesie (pamiętając że  $a = 3$ ,  $b = 2$ )

$$(14.2) \quad \begin{aligned} \delta L &= p \frac{bx}{2} \frac{\delta w}{3} \cdot 2 + \frac{p(a-x)b}{2} \delta w = \\ &= \left( \frac{pab}{2} - \frac{pxb}{6} \right) \delta w = p \left( 3 - \frac{x}{3} \right) \delta w. \end{aligned}$$

Przystępując do ujęcia wyrażenia na pracę sił wewnętrznych zauważymy, że płat I obracać się może jedynie wokół osi  $u$ , zaś płat II wokół osi  $v$ . Na tej podstawie odpowiednie wyrażenia na kąty obrotu płatów przedstawiają się następująco:

$$(14.3) \quad \delta \varphi_I = \frac{\delta w}{b} = \frac{\delta w}{2}, \quad \delta \varphi_{II} = \frac{\delta w}{x}.$$

<sup>21)</sup> Dla uproszczenia zakładamy przy tym proporcjonalność między wartością momentu łamiącego a ilością zbrojenia. Łatwo byłoby uwzględnić ewentualne poprawki z uwagi na zmianę ramienia momentu sił wewnętrznych [por. p. 4, wzór (4.4.1)].

Sumaryczna praca momentów będzie stosownie do (3.11.3) iloczynem momentu całkowitego przez kąt obrotu, gdzie moment całkowity jest proporcjonalny do długości prostej załomu.

Pracę sił wewnętrznych zapisać zatem można następująco:

$$(14.4) \quad \delta V = M_u x \frac{\delta w}{b} + M'_u a \frac{\delta w}{b} + M_v b \frac{\delta w}{x} + M'_v b \frac{\delta w}{x}.$$

Wprowadzając zależności podane przez (3.9.2) i (3.9.3) oraz wielkości geometryczne charakteryzujące układ, uzyskujemy stąd

$$(14.5) \quad \delta V = M_u \delta w \left( \frac{x}{b} + \mu \frac{a}{b} + \kappa \frac{b}{x} + \lambda \mu \frac{b}{x} \right) = M_u \delta w \left( \frac{x^2 + 9x + 10}{2x} \right).$$

Przyrównując do siebie na podstawie zasadniczego równania (3.11.1)  $\delta L$  oraz  $\delta V$ , otrzymamy wyrażenie na moment jednostkowy

$$(14.6) \quad M_u = \frac{18x - 2x^2}{3x^2 + 27x + 30} p.$$

Do wyznaczenia nieznanego dotychczas parametru  $x$  posłużymy się zasadą maksymalnego oporu plastycznego, sformułowaną w (3.13.2). Przybierze ona w rozpatrywanym przykładzie postać

$$(14.7) \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{18x - 2x^2}{3x^2 + 27x + 30} \right) = 0,$$

skąd otrzymujemy równanie na  $x$  w postaci

$$(14.8) \quad x^2 + 1,11x - 5,0 = 0.$$

Rozwiązanie daje  $x = 1,75$ .

Znając teraz już położenie linii załomu możemy dla danych stosunków ortotropii i «warstwowości» obliczyć wartości interesujących nas momentów. Uzyskujemy w ten sposób

$$(14.9) \quad \begin{cases} M_u = M_v = 0,293 p \text{ kG m/m}, \\ M'_u = 3 \cdot 0,293 = 0,879 p \text{ kG m/m}, \\ M'_v = 0,5 \cdot 3 \cdot 0,293 = 0,440 p \text{ kG m/m}. \end{cases}$$

Wspomnieliśmy już uprzednio, że figura załomów podana na rys. I nie przedstawia w rozpatrywanym przypadku jedynej kinematycznie możliwej siatki zniszczenia. Nastąpić może również zniszczenie tego typu, że odłamie się trójkąt  $BCD$  wzdłuż linii  $AD$ , która wtedy musi być linią załomu ujemną (rys. II).

Przy zniszczeniu według podanego schematu wyrażenia na pracę sił zewnętrznych i wewnętrznych przy udzieleniu punktowi C przemieszczenia przygotowanego  $\delta w$  będą wynosiły

$$(14.10) \quad \delta L = \frac{p a b}{2} \frac{1}{3} \delta w = p,$$

$$(14.11) \quad \delta V = \mu M_u \frac{\delta w}{b} a + \lambda \mu M_u \frac{\delta w}{a} b = 5,5 M_u.$$

Otrzymamy stąd

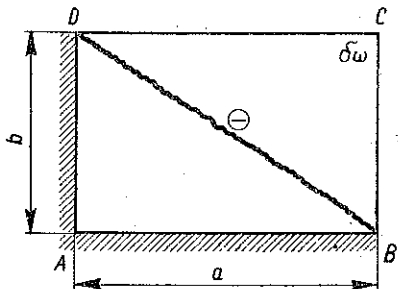
$$(14.12) \quad M_u = \frac{2}{11} p = 0,182 p \text{ kGm/m}.$$

Jest to wartość znacznie mniejsza aniżeli wartość uzyskana na podstawie analizy poprzednio rozpatrywanej siatki zniszczenia.

Na zasadzie twierdzenia o maksymalnym oporze plastycznym możemy więc — porównując wyniki otrzymane dla dwóch kinematycznie możliwych siatek zniszczenia — wnosić o urzeczywistnieniu się pierwszej z rozpatrywanych siatek zniszczenia.

Można by również sprecyzować warunki (przy danym ukształtowaniu geometrycznym płyty), w których obydwie siatki zniszczenia byłyby równouprawnione. Wystarczyłoby, przy danych wskaźnikach ortotropii warstwy górnej  $\lambda$  i dolnej  $\kappa$ , wyrażenia na moment przedstawić w funkcji współczynnika  $\mu$  oraz poszukiwać takiego  $\mu$ , dla którego równania (14.6) i (14.12) prowadzą do identycznych wartości momentu  $M_u$ .

Warto tu może jeszcze nadmienić, że dla praktycznie występujących stosunków mocy zbrojenia założenie linii załomów wzdłuż dwusiecznej kąta między osiami obrotu płytów prowadzi do wartości momentów, zbliżonych do wartości uzyskiwanych z warunku na ekstremum (3.13.2). Np. w rozpatrywanym wyżej przypadku założenie  $x = 2$  prowadzi do wartości momentu  $M_u = 0,291 p$  przy dokładnej wartości  $M_u = 0,293 p$ . Zagadnienie przybliżonych metod wyznaczania momentów łamiących nie stanowi jednak obecnie przedmiotu naszego zainteresowania i zostanie przedstawione przy innej okazji.



Rys. II

### Literatura cytowana w tekście

- [1] C. Bach i R. Baumann, *Elastizität und Festigkeit*, wyd. 9, Berlin 1924.
- [2] G. Brendel, *Stahlbetonbau*, Lipsk 1953.
- [3] Z. Brzoska, *Nowa metoda realizacji prób statycznych*, Technika Lotnicza 6 (1953).
- [4] Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, zesz. 30, 56, 88.
- [5] L. S. Gilman, *Inst. Bud. Przem.* 3 (1938).
- [6] A. A. Gwozdiew, *Rasczot niesuszczey sposobnosti konstrukcji po metodu priedielnowo rawnowiesja*, Moskwa 1949.
- [7] A. Ingerslev, *Ingeniören*, 1921.
- [8] K. W. Johansen, *Mémoires MSMKI*, 1932.
- [9] K. W. Johansen, *Mémoires MSMKI*, 1936.
- [10] K. W. Johansen, *Brudlinieteorier*, Kopenhaga 1943.
- [11] K. W. Johansen, *Pladeformler*, wyd. 2, 1949.
- [12] D. Niepostyn, *Nośność graniczna prostokątnych płyt ortotropowych obciążonych w sposób ciągły. Zagadnienie zbrojenia ekonomicznego*, Zesz. Nauk. Polít. Warsz. (w druku).
- [13] D. Niepostyn, *Nośność graniczna niejednorodnych płyt prostokątnych*, Rozpr. Inż. (w druku).
- [14] D. Niepostyn, *Spiralne i eliptyczne linie zatomu płyt obciążonych siłą skupioną* (w przygotowaniu).
- [15] W. Olszak, *Plastostatyka ustrojów nośnych*, Inż. i Budown. 7 (1953).
- [16] W. Olszak, *Teoria nośności granicznej płyt ortotropowych*, Budown. Przem. 7-8 (1953).
- [17] W. Olszak, *Zagadnienie ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Mech. Stos. 3 (1953).
- [18] W. Olszak, *Potencjał plastyczności w teorii ciał niejednorodnych* (w przygotowaniu).
- [19] W. Olszak, *Prestressing*, Appl. Mech. Rev. 1 (1955).
- [20] W. Olszak, *Az ortotrop lemezek határteher elmeletének nehany kerdeseröl*, Węg. Akad. Nauk, Budapeszt 1953.
- [21] W. Olszak, *Uj gondolatok az építőmérnöki gyakorlatban*, Magyar Tudományos Akademia, t. 4, 1-2.
- [22] W. Olszak, *Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (plastyczne wyczerpanie nośności)*, Rozpr. Inż. VI (1954).
- [23] W. Olszak, *Twierdzenie o największym oporze plastycznym i jego zastosowania* (w przygotowaniu).
- [24] W. Olszak, *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych I*, Arch. Mech. Stos. 3 (1954).
- [25] W. Olszak, *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych, cz. II*, Arch. Mech. Stos. 4 (1954).
- [26] W. Olszak, S. Kajfasz i J. Pietrzykowski, *O nowej metodzie badań wytrzymałości materiałów kruchych na rozciąganie (Teoria tarczy kołowej w zastosowaniu do badań laboratoryjnych)*, Inż. i Budown. 9 (1954).
- [27] A. K. Rżanicyn, *Rasczot sooruzenij s uczotom plasticzeskich swojstw materialow*, Moskwa 1949.
- [28] K. W. Sachnowski, *Żelzobietonnyje konstrukcji*, Moskwa 1951.

[29] A. Sawczuk, *Transformacja liniowa w zastosowaniu do teorii nośności granicznej płyt*, Zesz. Nauk. Polit. Warsz., Budownictwo 3 (1955).

[30] A. Sawczuk, *Zagadnienia nośności granicznej elementów rozciąganych i zginanych*, Rozpr. Inż. 2 (1955).

[31] A. Sawczuk, *Zagadnienia nośności granicznej płyt w kształcie wieloboków* (w przygotowaniu).

[32] W. W. Sokołowski, *Teoria plastyczności*, Moskwa 1950.

## Резюме

### ТЕОРИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛАСТИНОК В ОСВЕЩЕНИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ (I)

Работа посвящена экспериментальным проблемам теории несущей способности пластинок (изо- и анизотропных) и анализу степени согласованности предположений этой теории с результатами экспериментальных исследований.

В начале работы, после замечаний по истории развития теории предельной несущей способности пластинок, рассматриваются проблемы согласованности предположений этой теории, касающихся качественной стороны явлений, с результатами экспериментов, проводимых до сих пор с точки зрения различных теоретических предположений о поведении пластинок.

Указывается, одновременно, на необходимость проведения в широком масштабе количественной проверки обсуждаемой теории, причем разнообразие изменчивых условий (изотропная или ортотропная структура пластинок, их геометрическая форма, условия их закрепления, однородная или неоднородная структура, нагрузка) обуславливает обширность программы исследований. Проведение таких исследований, принимая во внимание экономические выгоды, вытекающие из внедрения этой теории в непосредственную инженерную практику, весьма желательно. Для подтверждения правильности результатов собственных исследований приводится ряд результатов зарубежных экспериментальных работ.

Во второй главе обсуждаются имеющиеся до сих пор польские работы по теории несущей способности пластинок. Первые работы были посвящены основным проблемам этой теории, как например, работы В. О л ь ш а к а, [15], [16], [18], [21] и [22]. В следующих работах приводилось решение вопроса ортотропной структуры пластинок (также и случай «двойной» ортотропии; ср. работы того-же автора [16], [17], [20]). Были разработаны основные проблемы по «двумерной» непрерывности (работа В. О л ь ш а к а, [22]), а также работы по структурной и вынужденной неоднородности (работы В. О л ь ш а к а, [24] и [25], Д. Н е п о с т ы н а, [13], и А. С а в ч у к а, [29])

и по связанной с этой проблемой, несущей способности резервуаров (А. Савчук, [30]); наконец, приводится простая механическая аналогия применимая к вопросам изотропных, равно как анизотропных пластинок и актуализирующая решение даже сложных конкретных случаев.

Независимо от теоретических работ, проводились экспериментальные исследования, которые внесли много материала.

В третьей главе рассматриваются, главным образом, предположения теории несущей способности однородных пластинок и приводится генезис этих предположений в связи с наблюдениями механизма деструкции пластинчатых систем, в особенности железобетонных пластинок.

В четвертой главе обсуждаются принципы лабораторных экспериментов над теорией несущей способности пластинок. Специфика проблемы и необходимость осуществления таких опытных условий, которые создали бы возможность наблюдения за обеими поверхностями пластинки, требует особого способа нагрузки. Важным является экспериментальное определение «единичного» предельного момента. Подчеркивается необходимость обращения внимания на явление разрушения путем «пролома» и его влияние на несущую способность изгибаемых пластинок.

Пятая глава дает характеристику условий экспериментов.

В последующих главах обсуждаются эксперименты над отдельными видами пластинок и случаями их нагрузки, начиная с квадратной пластинки толщиной в 3 см, нагруженной в центре сосредоточенной силой. Здесь анализируется проблема образования «конуса» перелома и влияние упругой стадии на изменение условий заделки системы этого типа. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными приводится для случая квадратной пластинки, нагруженной сосредоточенной силой в центре (таблица 2). Эту главу иллюстрирует ряд фотоснимков.

В седьмой главе рассматриваются квадратные пластинки, нагруженные сосредоточенными силами, размещенными концентрически вокруг центра пластинки. Здесь рассматриваются исследования над пластинками толщиной в 8 и 12 см. Эти случаи представлены в таблицах 3, 4 и 5.

В следующей — восьмой главе приводится теоретическое решение для пластинки с тремя свободно опертыми сторонами, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной в центре. Анализируются также результаты экспериментов над такого рода системой. Результаты анализов, так как и в предыдущем случае, приведены в таблице 6.

В девятой главе обсуждается квадратная пластинка, нагруженная равномерно, причем такая нагрузка заменена шестнадцатью сосре-



доточенными силами. Приводится теоретический анализ системы такого рода и нагрузки, а также метод, позволяющий учитывать влияние углов, уменьшающих несущую способность. Результаты экспериментов над пластинками толщиной в 12 и 8 см. приводятся в таблицах 7 и 8.

Подобный метод, но для прямоугольных пластинок, толщиной также в 8 и 12 см. и с отношением сторон  $\beta = 0,5$  и  $\beta = 0,667$  применяется в главе 10, содержащей таблицы 9 и 10.

В главе 11 приводятся результаты исследований для двупролетной, свободно опертой пластинки (таблица 11).

Наконец, приводятся теоретическое решение и анализ экспериментальных результатов, касающихся прямоугольных ортотропных пластинок. Также для этого случая — согласованность между теорией и результатами экспериментов — удовлетворительна.

Проблемы ортотропных пластинок будут рассматриваться более подробно во второй части работы, на основании проведенных экспериментальных исследований.

Работа снабжена приложением, иллюстрирующим на простом примере, способ расчета несущей способности систем.

#### R é s u m é

#### LA THÉORIE DE LA CHARGE LIMITE DES PLAQUES SOUS L'ASPECT DE SA VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE (I)

Le présent mémoire est consacré aux problèmes expérimentaux de la théorie de la charge limite des plaques (isotropes et anisotropes) ainsi qu'à la confrontation des hypothèses de la théorie avec les résultats expérimentaux.

D'abord, après quelques remarques historiques sur le développement de la théorie de la charge limite, les auteurs discutent la conformité des hypothèses «qualitatives» de la théorie aux résultats d'expériences qui, jusqu'à présent, ont été effectués pour vérifier d'autres problèmes théoriques.

On indique en même temps la nécessité de recherches sur une grande échelle, ayant pour but la vérification «quantitative» de la théorie. Le grand nombre de paramètres (la structure isotrope ou anisotrope des plaques, leur forme géométrique, leur structure homogène ou non-homogène, les conditions d'appui, le mode de sollicitation etc.) exige un programme de recherches très vaste. La réalisation de telles recherches est d'une importance particulière étant donné que les avantages économiques conditionnés par l'application de la théorie considérée dans la pratique d'ingénieur sont considérables. Les résultats expérimentaux dont il est que-

sition concernent surtout les plaques isotropes. Pour confirmer ces résultats on les compare à quelques résultats de recherches étrangères.

Dans le chapitre 2 on discute les travaux polonais sur la théorie de la charge limite des plaques. Les premiers de ces travaux, ceux de W. Olszak, étaient consacrés aux problèmes de base de la théorie, [15], [16], [18], [21], [22]. Dans les travaux suivants on a donné la solution du problème de l'orthotropie des plaques, y compris l'orthotropie «double» (les mémoires [16], [17], [20] du même auteur). On a également étudié les problèmes fondamentaux de la continuité «bidimensionnelle» des plaques et de l'hétérogénéité structurale et «forcée» (les travaux de W. Olszak, [24], [25], D. Niepostyn, [13], et A. Sawczuk, [29], ainsi que les problèmes associés de la charge limite des réservoirs (A. Sawczuk, [30]). Enfin on a établi une simple analogie mécanique (de la «colline de sable») qui peut être appliquée aux problèmes des plaques isotropes et anisotropes et facilite la solution même des cas complexes.

À côté des travaux théoriques on a poursuivi des recherches expérimentales qui ont fourni des résultats intéressants.

Dans le chapitre 3 on discute les hypothèses de la théorie de la charge limite des plaques homogènes et on explique l'origine de ces hypothèses en se basant sur l'observation du phénomène du mécanisme de destruction des plaques, en particulier des plaques en béton armé.

Le chapitre 4 est consacré aux principes de recherches expérimentales relatives à la théorie de la charge limite des plaques. Les conditions spéciales du problème et la nécessité d'arranger les recherches d'une manière à pouvoir observer les deux surfaces de la plaque exigent une méthode spéciale de solliciter l'élément étudié. La détermination expérimentale du moment limite (de rupture) unitaire est d'une grande importance. On souligne la nécessité d'étude du phénomène de la destruction par «poinçonnement» et son influence sur la résistance des plaques fléchies.

Dans le chapitre 5 les auteurs donnent une caractéristique des conditions de leurs travaux de recherches.

Les chapitres qui suivent concernent les recherches expérimentales sur les divers types des plaques et les divers modes de sollicitation, en commençant par une plaque carrée de 3 cm d'épaisseur, sollicitée par une force concentrée située au centre de la plaque. On analyse le problème de la formation d'un «cône de rupture» et l'influence de la phase élastique sur le changement des conditions d'appui des plaques. La table 2 permet de faire une comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux dans le cas d'une plaque carrée sollicitée par une force concentrée agissant au centre de la plaque. Le chapitre est illustré par quelques photographies.

Le chapitre 7 concerne les plaques carrées sollicitées par des forces concentrées, disposées concentriquement autour du centre de la plaque.

La discussion concerne les recherches sur les plaques de 8 et 12 cm d'épaisseur. Les tables 3, 4 et 5 illustrent le même cas.

Le chapitre 8 contient la solution théorique d'une plaque simplement appuyée sur trois de ses côtés et sollicitée par une force concentrée au centre ainsi qu'une analyse des résultats expérimentaux obtenus pour ce genre de construction. Les résultats sont résumés dans la table 6.

Le chapitre 9 concerne une plaque carrée avec une charge uniformément répartie, remplacée ensuite par 16 forces concentrées. Les auteurs donnent une analyse théorique d'une structure et d'une sollicitation de ce type et présentent une méthode, permettant de tenir compte de l'influence des coins réduisant la charge limite. Les résultats expérimentaux pour les plaques de 12 et 8 cm d'épaisseur sont résumés dans les tables 7 et 8.

Une méthode pareille est appliquée dans le chapitre 10 aux plaques de 8 et 12 cm d'épaisseur avec rapports des côtés  $\beta=0,5$ ,  $\beta=0,677$  (tables 9 et 10).

Le chapitre 11 concerne les résultats pour une plaque à deux travées, simplement appuyée (tabl. 11).

Les plaques rectangulaires orthotropes représentent le dernier type discuté dans la présente partie du travail. On présente la solution théorique et une analyse des résultats expérimentaux. La conformité des résultats théoriques à ceux d'expériences est, ici encore, satisfaisante. Une plus ample discussion des problèmes relatifs aux plaques orthotropes basée sur des expériences sera donnée dans la II de partie de ce travail.

Dans l'annexé on explique, au moyen d'un simple exemple, la méthode de calcul de la charge limite.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKOW CIĄGŁYCH  
IPPT PAN  
I KATEDRA WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW  
WYDZ. BUD. PRZEM. P. W.