

ANDRZEJ CHUDZIKIEWICZ

WPLYW PEŁZANIA BETONU NA ZESPOLONE
USTROJE PRĘTOWE

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LIV

SPIS TREŚCI

| | Str. |
|--|------|
| 1. Wstęp | 459 |
| 2. Układy statycznie wyznaczalne | 461 |
| 2.1. Rozwiązania ścisłe | 462 |
| 2.2. Rozwiązania przybliżone | 466 |
| 2.3. Naprężenia skurczowe | 469 |
| 3. Układy statycznie niewyznaczalne | 471 |
| 3.1. Równania układów statycznie niewyznaczalnych | 472 |
| 3.2. Obliczanie wielkości nadliczbowych na podstawie rozwiązań ścisłych | 475 |
| 3.3. Obliczanie wielkości nadliczbowych na podstawie rozwiązań przybliżonych | 478 |
| 3.4. Ogólna metoda obliczania układów statycznie niewyznaczalnych przy użyciu szeregów potęgowych na podstawie rozwiązań przybliżonych | 481 |
| 3.5. Wpływ skurczu betonu | 496 |
| 3.6. Rozwiązywanie równań za pomocą transformacji Laplace'a | 498 |
| 4. Inne zagadnienia | 500 |

Oznaczenia

| | |
|----------------------------|--|
| E_b | moduł sprężystości betonu |
| E_z | moduł sprężystości stali |
| F_b | powierzchnia przekroju poprzecznego betonu |
| F_z | powierzchnia przekroju poprzecznego stali |
| J_b | moment bezwładności części betonowej przekroju poprzecznego względem osi poziomej przechodzącej przez jej środek ciężkości |
| J_z | moment bezwładności części stalowej przekroju poprzecznego względem osi poziomej przechodzącej przez jej środek ciężkości |
| M | moment zginający |
| M_i, M_k | momenty zginające w układzie podstawowym (oznaczenia przejęte z metody sił) |
| M^0 | moment zginający od obciążenia wyjściowego |
| N | siła normalna |
| N_i, N_k | siły normalne w układzie podstawowym (oznaczenia przejęte z metody sił) |
| N^0 | siła normalna od obciążenia wyjściowego |
| n | stosunek modułów sprężystości stali i betonu, $n = E_z/E_b$ |
| δ_{ik}, δ_{i0} | współczynniki w równaniach przejęte z metody sił |
| φ | moduł pełzania betonu według definicji Dischingera. (Pozostałe oznaczenia objaśnione są w tekście). |

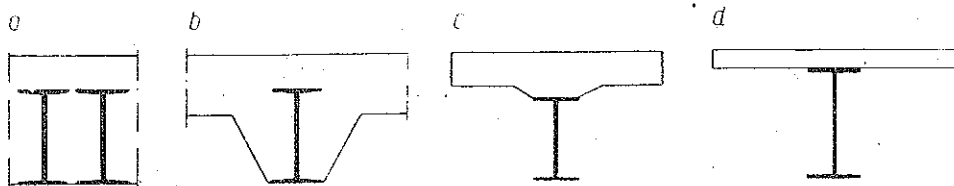
1. Wstęp

W pracy niniejszej podane są ogólne metody rozwiązania zagadnień z dziedziny wpływu pełzania betonu na prętowe ustroje zespolone.

Przez ustroje zespolone rozumiemy konstrukcje utworzone z prętów, których przekrój poprzeczny składa się z części betonowej lub żelbeto-

wej i stalowej, połączonych w jednolitą całość. Różne rodzaje zespolonych przekrojów poprzecznych przedstawiono na rys. 1. Przekroje pierwszej grupy (a, b), posiadające mocną część betonową, są stosowane rzadko i to w konstrukcjach o bardzo małych rozpiętościach, prawie zawsze statycznie wyznaczalnych. Przekroje drugiej grupy (c, d) mają bardzo obszerne zastosowanie we współczesnym budownictwie mostów i bywają używane w budowach dużych, bardzo często statycznie niewyznaczalnych, wymagających bardziej precyzyjnego obliczenia; charakteryzują się one małą w porównaniu do wysokości dźwigara stalowego grubością płyty betonowej.

Rozdział drugi traktuje o ustrojach statycznie wyznaczalnych.



Rys. 1

Teoria i metody obliczeniowe rozwinięte przez autora, przystosowane są do wymagań praktycznych; z tego względu poza rozwiązaniami ścisłymi odnoszącymi się do dowolnego przekroju zespolonego, lecz bardzo uciążliwymi rachunkowo, podane są rozwiązania przybliżone dające zupełnie wystarczającą dokładność dla przekrojów drugiej grupy, a znacznie łatwiejsze w stosowaniu.

W rozdziale trzecim przedstawiona jest teoria układów statycznie niewyznaczalnych, przy czym ogólne wzory robocze wyprowadzono na podstawie wzorów przybliżonych rozdziału drugiego. Oprócz tego podano sposoby obliczania ustrojów statycznie niewyznaczalnych na podstawie wzorów ścisłych, co jednak nie ma prawie żadnego znaczenia praktycznego. Tak dla ustrojów statycznie wyznaczalnych jak i niewyznaczalnych wyprowadzono wzory pozwalające na uwzględnienie wpływu pełzania na naprężenia powodowane skurczem betonu.

W rozdziale czwartym rozważane są ogólnie niektóre problemy specjalne, między innymi ustroje sprężone.

Praca niniejsza opiera się na teorii pełzania betonu podanej przez Dischingera. Bliższe dane o założeniach tej teorii jak również zestawienie literatury znajdzie czytelnik w pracy [1]. Nie uwzględniono w naszych rozważaniach wpływu zmiennego modułu sprężystości betonu, ponieważ jest nieistotny. Wszystkie wzory wyprowadzono przyjmując dla układów prętowych zasadę płaskich przekrojów oraz bardzo ważne założenie, że naprężenia rozciągające w betonie nie powodują

powstania rys. Założenie to jednak prawie nie ogranicza możliwości zastosowań, ponieważ w praktyce usilnie zapobiega się powstawaniu rys za pomocą sprężenia wstępnego. Przyjmujemy też, że cały ustrój jest betonowany jednocześnie (por. rozdz. 4, str. 500). Z powodu bardzo dużego praktycznego znaczenia (w związku z rozwojem w ostatnich latach konstrukcji zespolonych) zagadnienia tutaj poruszane były niejednokrotnie omawiane, zwłaszcza na łamach technicznej literatury i prasy niemieckiej.

Wszystkie prace niemieckie opierają się na schemacie pełzania betonu Dischingera.

Rozwiązanie dla ustrojów statycznie wyznaczalnych pierwszy podał Fröhlich. Jeśli chodzi o znacznie trudniejsze zagadnienia teorii układów statycznie niewyznaczalnych, to pierwszą i oryginalną pracą w tej dziedzinie jest artykuł Klöppele, [2]. Równania, które podaje Klöppele, nie są jednak wyprowadzone ściśle z założeń Dischingera; poza tym są to równania różniczkowe o współczynnikach funkcyjnych i autor nie podaje matematycznie zadowalającej metody ich rozwiązania, zaś wyniki liczbowe uzyskuje w sposób przybliżony. Inni autorzy, np. Busemann i Satler, nie wnoszą nic istotnego lub wprowadzają daleko idące uproszczenia.

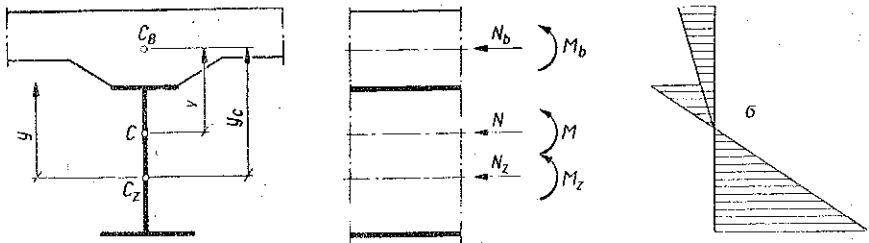
W niniejszej pracy są wprowadzone równania układów statycznie niewyznaczalnych, odpowiadające ściśle teorii Dischingera. Są to równania całkowe typu Volterry z jądrami szczególnego rodzaju, mianowicie zależnymi tylko od różnicy zmiennych i dającymi się sprowadzić do równań różniczkowych o współczynnikach stałych, zatem z teoretycznego punktu widzenia nie nastęrczającymi trudności w rozwiązaniu. Poza tym dla celów praktycznych podano metodę pozwalającą na obliczanie wielkości nadliczbowych przy użyciu jedynie działań arytmetycznych.

Należy zaznaczyć, że teoria układów statycznie niewyznaczalnych, rozwinięta przez autora, daje się uogólnić na dowolną liniową teorię pełzania, dopuszczającą superpozycję zjawisk zachodzących w czasie.

2. Układy statycznie wyznaczalne

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań podamy kilka uwag o pracy przekroju zespolonego. Rysunek 2 przedstawia przekrój poprzeczny oraz element pręta. Punkt C_z oznacza środek ciężkości części stalowej, C_b środek ciężkości części betonowej, zaś C jest «środkiem ciężkości» całego przekroju zespolonego. Położenie punktu C należy obliczać mnożąc pole powierzchni części stalowej przez $n = E_z/E_b$. Przez F_c będziemy określali sprowadzone pole powierzchni całego przekroju zespolonego, $F_c = F_b + nF_z$, zaś przez J_c sprowadzony moment bezwład-

ności całego przekroju zespolonego względem osi przechodzącej przez punkt C. Dla znaków sił wewnętrznych ustalamy, że dodatnie siły normalne ściskają pręt, dodatnie momenty zginające ściskają włókna po dodatniej stronie osi y . Niech na opisany element działa siła normalna N i moment zginający M . Odpowiedni wykres naprężeń σ można otrzymać:



Rys. 2

(a) obciążając cały element siłą N i momentem M , przy czym do wzorów wytrzymałości materiałów należy podstawiać powierzchnię F_c oraz moment bezwładności J_c ;

(b) obliczając składowe wypadkowej naprężeń działających na część betonową lub stalową; składowe te oznaczymy symbolami N_b i M_b lub N_z i M_z ; można je wyliczyć z następujących wzorów wyprowadzonych na podstawie elementarnych rozważań:

$$(2.1) \quad N_b = N \frac{F_b}{F_c} + M \frac{F_b v}{J_c}, \quad M_b = M \frac{J_b}{J_c},$$

$$(2.2) \quad N_z = N - N_b, \quad M_z = M + N(y_c - v) - M_b - N_b y_c.$$

Zgodnie z tymi wzorami należy obciążyć część betonową lub stalową przekroju.

Pierwszy sposób obliczania naprężeń jest powszechnie stosowany w obliczeniach statycznych; sposób drugi będzie potrzebny przy obliczeniach pełzania. W dalszym ciągu tego rozdziału wyprowadzone są wzory dla obciążeń zewnętrznych i skurczu betonu. Obok wzorów ścisłych, wymagających dużego nakładu pracy rachunkowej, podano wzory przybliżone dla przekrojów z cienką płytą betonową.

2.1. Rozwiązania ścisłe. Naprężenia działające na beton powodują odkształcenia plastyczne, które pociągają za sobą odkształcenia całego przekroju zespolonego i w konsekwencji zmiany naprężeń tak w betonie, jak i w stali. W ustroju statycznie wyznaczalnym siły wewnętrzne N i M układu są niezmiennie, zatem procesy pełzania zachodzą w każdym przekroju poprzecznym pręta niezależnie.

Niewiadomymi naszych obliczeń będą zmiany ΔN_b , ΔM_b oraz ΔN_z , ΔM_z w siłach wewnętrznych układu działających na część betono-

wą lub stalową prętą. Wskutek wspomnianej poprzednio niezmienności pełnych sił wewnętrznych wymienione wielkości muszą się wzajemnie równoważyć, zatem spełniać będą równania:

$$(2.3) \quad \Delta N_z = -\Delta N_b, \quad \Delta M_z = -(\Delta M_b + \Delta N_b y_c).$$

Niewiadome te określać będziemy w zależności od obciążeń wyjściowych N_b^0 i M_b^0 części betonowej elementu belki, tzn. sił wewnętrznych działających w chwili początkowej procesu pełzania, której odpowiada $\varphi = 0$. Odształcenia części betonowej lub stalowej powodowane pełzaniem będziemy określali dwiema składowymi: odształceniami jednostkowymi ε_b lub ε_z mierzonymi w punkcie C_B lub C_Z oraz krzywizną ϱ_b lub ϱ_z . Ustalamy, że dodatnie odształcenia jednostkowe skracają pręt, a dodatnia krzywizna powoduje skrócenie włókien leżących po dodatniej stronie osi y .

Zależności między przyrostem odształceń części betonowej a działającymi na nią obciążeniami przedstawiają się w sposób następujący:

$$(2.4.1) \quad \begin{cases} d\varepsilon_b = [(N_b^0 + \Delta N_b) d\varphi + d\Delta N_b] \frac{1}{E_b F_b}, \\ d\varrho_b = [(M_b^0 + \Delta M_b) d\varphi + d\Delta M_b] \frac{1}{E_b J_b}. \end{cases}$$

Część stalowa podlega jedynie odształceniom sprężystym:

$$(2.4.2) \quad d\varepsilon_z = d\Delta N_z \frac{1}{E_z F_z}, \quad d\varrho_z = d\Delta M_z \frac{1}{E_z J_z}.$$

Założenie płaskich przekrojów daje dwa równania o charakterze geometrycznym:

$$(2.5) \quad d\varepsilon_b = d\varepsilon_z + d\varrho_z y_c, \quad d\varrho_b = d\varrho_z.$$

Podstawiając (2.4) do (2.5), korzystając z równań statycznych (2.3) oraz dzieląc przez $d\varphi$ otrzymamy układ dwu równań różniczkowych rzędu pierwszego o dwu niewiadomych funkcjach $\Delta N_b(\varphi)$, $\Delta M_b(\varphi)$

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{d\Delta N_b}{d\varphi} k_1 + \frac{d\Delta M_b}{d\varphi} k_2 + \Delta M_b + M_b^0 = 0, \\ \frac{d\Delta N_b}{d\varphi} k_3 + \Delta N_b + \frac{d\Delta M_b}{d\varphi} k_4 + N_b^0 = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$k_1 = \frac{J_b}{n J_z} y_c, \quad k_2 = \frac{J_b}{n J_z} + 1, \\ k_3 = \frac{F_b}{n F_z} + \frac{F_b}{n J_z} y_c^2 + 1, \quad k_4 = \frac{F_b}{n J_z} y_c.$$

Rozwiązanie tego układu przedstawia się, jak następuje:

$$(2.7) \Delta N_b = -N_b^0 + C_1 e^{\alpha_1 \varphi} + C_2 e^{\alpha_2 \varphi}, \quad \Delta M_b = -M_b^0 + C_1 \gamma_1 e^{\alpha_1 \varphi} + C_2 \gamma_2 e^{\alpha_2 \varphi}.$$

Współczynniki α są zawsze ujemne; oblicza się je z równania charakterystycznego

$$\alpha^2 (k_2 k_3 - k_1 k_4) + \alpha (k_2 + k_3) + 1 = 0.$$

Współczynniki γ określone są wzorem

$$\gamma_{1,2} = -\frac{\alpha_{1,2} k_1}{\alpha_{1,2} k_2 + 1}$$

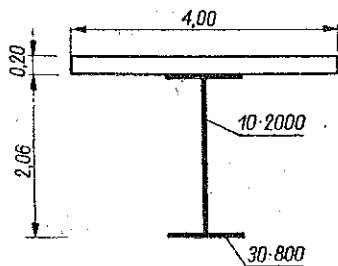
lub

$$\gamma_{1,2} = -\frac{\alpha_{1,2} k_3 + 1}{\alpha_{1,2} k_4}.$$

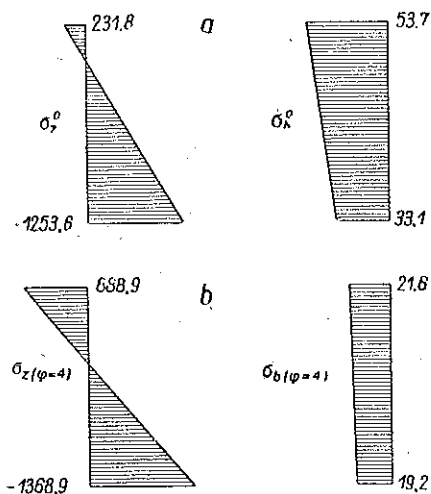
Wzory na stałe C (z warunków brzegowych $\Delta N_b = 0$ i $\Delta M_b = 0$ dla $\varphi = 0$) są następujące:

$$C_1 = \frac{\gamma_2 N_b^0 - M_b^0}{\gamma_2 - \gamma_1}, \quad C_2 = \frac{M_b^0 - \gamma_1 N_b^0}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Jak widać, dla $\varphi \rightarrow \infty$ znika obciążenie części betonowej, a całkowite siły wewnętrzne przenosi część stalowa przekroju.



Rys. 3



Rys. 4

Przykład 1. Obliczymy wpływ pełzania betonu w przekroju poprzecznym belki przedstawionym na rys. 3. Dane:

$$\begin{aligned} E_z &= 2,1 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2, & E_b &= 3 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2, \\ F_z &= 0,068 \text{ m}^2, & F_b &= 0,8 \text{ m}^2, \\ nF_z &= 0,476 \text{ m}^2, & F_c &= 1,276 \text{ m}^2, \\ J_z &= 0,056117 \text{ m}^4, & J_b &= 0,002667 \text{ m}^4, \\ nJ_z &= 0,39282 \text{ m}^4, & J_c &= 0,7766 \text{ m}^4, \\ v &= 0,4215 \text{ m}, & y_c &= 1,130 \text{ m}. \end{aligned}$$

Obciążenie wyjściowe przekroju zespolonego wynosi: $M_0 = 800$ tm, $N^0 = 0$. Wykres naprężeń od momentu $M^0 = 800$ tm przedstawiono na rys. 4. Obciążenia wyjściowe części betonowej obliczamy na podstawie wzorów (2.1): $M_b^0 = 2,75$ tm, $N_b^0 = 347$ t. Współczynniki do równania charakterystycznego: $k_1 = 0,007641$, $k_2 = 1,0068$, $k_3 = 5,2812$, $k_4 = 2,3053$.

Równanie charakterystyczne:

$$5,2995 a^2 + 6,2880 a + 1 = 0,$$

jego pierwiastki:

$$a_1 = -0,1892, \quad a_2 = -0,9973,$$

współczynniki γ :

$$\gamma_1 = 0,001786, \quad \gamma_2 = -1,856,$$

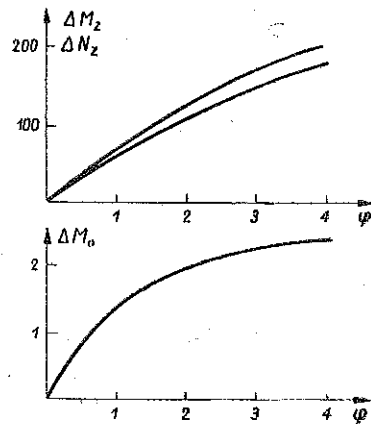
stałe C:

$$C_1 = 348,1, \quad C_2 = -1,15.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\Delta N_b = -347 + 348,1 e^{-0,19\varphi} - 1,1 e^{-\varphi},$$

$$\Delta M_b = -2,75 + 0,62 e^{-0,19\varphi} + 2,13 e^{-\varphi}.$$



Rys. 5

Wartości funkcji $\Delta N_b = -\Delta N_z$, ΔM_b oraz ΔM_z obliczone według wzoru (2.3) zestawiono w tabelicy 1, zaś odpowiednie wykresy przedstawia rys. 5.

Tablica 1

| φ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|
| ΔN_b t | -59,6 | -109,1 | -150,3 | -184,2 |
| ΔM_b tm | -1,46 | -2,04 | -2,31 | -2,42 |
| ΔM_z tm | 68,8 | 125,3 | 172,1 | 210,5 |

Zmiany naprężeń dla $\varphi = 4$ ¹⁾ wynoszą:

$$\Delta \sigma_{bg} = -32,1 \text{ kG/cm}^2, \quad \Delta \sigma_{bd} = -13,9 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\Delta \sigma_{zg} = 657,1 \text{ kG/cm}^2, \quad \Delta \sigma_{zd} = -115,3 \text{ kG/cm}^2.$$

Zatem naprężenia całkowite dla $\varphi = 4$ wynoszą:

$$\sigma_{bg} = 21,6 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_{bd} = 19,2 \text{ kG/cm}^2,$$

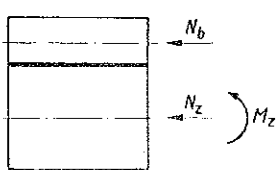
$$\sigma_{zg} = 888,9 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_{zd} = 1368,9 \text{ kG/cm}^2.$$

Wykres naprężeń dla $\varphi = 4$ przedstawia rys. 4. Przedstawiony tok obliczeń jak również ich wyniki są w dużym stopniu typowe dla prze-

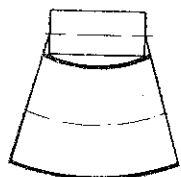
¹⁾ Wskaźniki g oraz d oznaczają skrajne włókna górne lub dolne poszczególnych części przekroju. Znak dodatni oznacza ściskanie, ujemny — rozciąganie.

kroju o niezbyt mocnej płycie betonowej. W tym przypadku zawsze jeden z pierwiastków α jest bliski jedności, co powoduje silne zakrzywienie wykresu $\Delta M_b(\varphi)$, którego rzędne ustalają się praktycznie biorąc już dla wartości $\varphi < 4$, co oznacza prawie zupełne zlikwidowanie działania momentu M_b^0 ; w rezultacie wykres naprężeń w części betonowej zbliża się do prostokątnego. Jak widać, obliczenia według podanych wzorów wymagają dużego nakładu pracy, a poza tym konieczne jest prowadzenie rachunku z dużą dokładnością. W praktyce mamy do czynienia prawie wyłącznie z prętami, w których płyta jest stosunkowo cienka. W przypadkach tych można stosować wzory przybliżone, których wprowadzenie jest przedmiotem dalszych rozważań.

2.2. Rozwiązania przybliżone. W przypadkach gdy płyta betonowa jest cienka, wpływ wielkości M_b^0 oraz ΔM_b na odkształcenia przekroju jest bardzo mały i może być pominięty, co odpowiada założeniu $M_b^0 = 0$ i $\Delta M_b(\varphi) \equiv 0$. Pozostaje zatem jedna tylko niewiadoma funkcja, mianowicie $\Delta N_b(\varphi)$. Schemat elementu belki odpowiadający tym założeniom



Rys. 6



Rys. 7

przedstawia rys. 6, zaś jego odkształcenia rys. 7. Jak widać, rezygnujemy tu z założenia płaskich przekrojów dla całego elementu, zakładamy jedynie zgodność odkształceń na osi ciężkości części betonowej z odkształceniami części stalowej.

Równanie różniczkowe uproszczonego w ten sposób zagadnienia otrzymujemy biorąc drugie z równań (2.6) i pomijając w nim wyraz trzeci:

$$(2.8) \quad \frac{d\Delta N_b}{d\varphi} \left(\frac{F_b}{nF_z} + \frac{F_b}{nJ_z} y_c^2 + 1 \right) + \Delta N_b + N_b^0 = 0.$$

Rozwiązanie tego równania przy warunku brzegowym $\Delta N_b = 0$ dla $\varphi = 0$ przedstawia prosty wzór:

$$(2.9) \quad \Delta N_b = -N_b^0 (1 - e^{\alpha\varphi}), \quad \alpha = - \frac{1}{\frac{F_b}{nF_z} + \frac{F_b}{nJ_z} y_c^2 + 1}.$$

Na część stalową przekroju działają siły wewnętrzne

$$(2.10) \quad \Delta N_z = -\Delta N_b, \quad \Delta M_z = -\Delta N_b y_c.$$

Współczynnik α charakteryzuje w dużej mierze zachowanie się przekroju w czasie pełzania. Jest on tym większy, im słabsza jest część betonowa. Wzrostowi współczynnika α towarzyszą większe straty ΔN_b (w odniesieniu do wielkości wyjściowej N_b^0).

Wzory (2.9) i (2.10) pozwalają na wystarczająco dokładne określenie odkształceń elementu belki, jak również naprężeń w części stalowej

oraz w osi ciężkości części betonowej, natomiast nie mogą służyć do obliczenia naprężeń w pozostałych punktach części betonowej, ponieważ moment ΔM_b , jakkolwiek mały, zmienia wykres naprężeń $\Delta \sigma_b$ bardzo istotnie. Pożądane jest zatem wyprowadzenie wzorów pozwalających na dodatkowe obliczanie tych naprężeń.

Zależność między odkształceniami jednostkowymi i zmiennymi naprężeniami działającymi na element betonowy przedstawia się jak następuje ²⁾:

$$d\varepsilon_b = \frac{1}{E_b} (\sigma_b^0 + \Delta \sigma_b) d\varphi + \frac{d\Delta \sigma_b}{E_b},$$

gdzie σ_b^0 oznacza naprężenie wyjściowe dla $\varphi = 0$, zaś $\Delta \sigma_b$ jest przyrostem naprężenia, będącym funkcją zmiennej φ . Całkując obie strony powyższego równania w granicach $(0, \varphi)$ otrzymamy

$$(2.11) \quad \varepsilon_b = \frac{1}{E_b} \left(\sigma_b^0 \varphi + \int_0^\varphi \Delta \sigma_b d\varphi + \Delta \sigma_b \right).$$

Odształcenia elementu belki, w tym również jej części betonowej, można określić przez odkształcenie jej części stalowej, zatem

$$(2.12) \quad \varepsilon_b = \frac{\Delta N_z}{E_z F_z} + \frac{\Delta M_z}{E_z J_z} y.$$

Korzystając w dalszym ciągu ze wzorów (2.9) i (2.10) otrzymamy

$$(2.13) \quad \varepsilon_b = -N_b^0 \left(\frac{1}{E_z F_z} + \frac{y_c}{E_z J_z} y \right) (1 - e^{\alpha \varphi}).$$

Porównując prawe strony związków (2.11) i (2.13) dochodzimy do równania różniczkowego

$$\frac{d\Delta \sigma_b}{d\varphi} + \Delta \sigma_b + \sigma_b^0 - N_b^0 \left(\frac{1}{n F_z} + \frac{y_c}{n J_z} y \right) \alpha e^{\alpha \varphi} = 0,$$

którego rozwiązaniem przy warunku brzegowym $\Delta \sigma_b = 0$ dla $\varphi = 0$ jest funkcja

$$(2.14) \quad \Delta \sigma_b = -\sigma_b^0 (1 - e^{\alpha \varphi}) + N_b^0 \left(\frac{1}{n F_z} + \frac{y_c}{n J_z} y \right) \frac{\alpha}{1 + \alpha} (e^{-\varphi} - e^{\alpha \varphi}).$$

W ten sposób uzyskaliśmy wzór, który pozwala na obliczenie naprężeń w dowolnym punkcie części betonowej, określonym współrzędną y bez potrzeby stosowania żmudnych obliczeń na podstawie rozwiązań ścisłych. Wzór ten został wyprowadzony w założeniu, że część betonowa podlega odkształceniom wynikającym z przyjęcia sił wewnętrz-

²⁾ W poniższym wyprowadzeniu ε_b oznacza odkształcenia jednostkowe w dowolnym punkcie części betonowej.

nych według wzorów (2.9) i (2.10). Dokładność obliczenia tych naprężeń jest tego samego rzędu, co dokładność obliczenia wielkości ΔN_b i ΔM_z .

Podany powyżej uproszczony sposób obliczeń zmniejsza nakład pracy rachunkowej kilkakrotnie. Błąd popełniony jest tym większy, im mocniejsza jest część betonowa.

W celu ułatwienia obliczeń podano w tabelicy 2 wartości funkcji $(e^{-\varphi} - e^{a\varphi})\alpha/(1+a)$. Tablice funkcji $e^{-\varphi}$ znaleźć można np. w pracy Z. Klębowskiiego, [Rozpr. Inżyn. 3 (1954)].

Tablica 2. Wartości funkcji $\frac{\alpha}{1+a}(e^{-\varphi} - e^{a\varphi})$

| φ - α | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,04 | 0,0156 | 0,0247 | 0,0230 | 0,0328 | 0,0343 | 0,0349 | 0,0350 | 0,0347 |
| 0,06 | 0,0232 | 0,0366 | 0,0441 | 0,0480 | 0,0497 | 0,0501 | 0,0498 | 0,0490 |
| 0,08 | 0,0308 | 0,0483 | 0,0577 | 0,0623 | 0,0641 | 0,0641 | 0,0631 | 0,0616 |
| 0,10 | 0,0383 | 0,0597 | 0,0708 | 0,0759 | 0,0774 | 0,0768 | 0,0749 | 0,0724 |
| 0,12 | 0,0457 | 0,0708 | 0,0855 | 0,0888 | 0,0899 | 0,0884 | 0,0855 | 0,0819 |
| 0,14 | 0,0531 | 0,0816 | 0,0956 | 0,101 | 0,101 | 0,0989 | 0,0948 | 0,0900 |
| 0,16 | 0,0603 | 0,0922 | 0,107 | 0,113 | 0,112 | 0,108 | 0,103 | 0,0970 |
| 0,18 | 0,0675 | 0,103 | 0,119 | 0,123 | 0,122 | 0,117 | 0,110 | 0,103 |
| 0,20 | 0,0746 | 0,113 | 0,129 | 0,134 | 0,131 | 0,125 | 0,117 | 0,108 |
| 0,22 | 0,0816 | 0,123 | 0,140 | 0,144 | 0,140 | 0,132 | 0,122 | 0,112 |
| 0,24 | 0,0886 | 0,132 | 0,150 | 0,153 | 0,147 | 0,138 | 0,127 | 0,115 |
| 0,26 | 0,0954 | 0,142 | 0,160 | 0,161 | 0,155 | 0,144 | 0,131 | 0,118 |
| 0,28 | 0,102 | 0,151 | 0,169 | 0,170 | 0,161 | 0,149 | 0,134 | 0,120 |
| 0,30 | 0,109 | 0,160 | 0,178 | 0,177 | 0,167 | 0,153 | 0,137 | 0,121 |
| 0,35 | 0,125 | 0,181 | 0,198 | 0,195 | 0,180 | 0,162 | 0,142 | 0,123 |
| 0,40 | 0,142 | 0,202 | 0,217 | 0,209 | 0,191 | 0,168 | 0,144 | 0,122 |
| 0,45 | 0,157 | 0,221 | 0,234 | 0,222 | 0,199 | 0,171 | 0,155 | 0,120 |
| 0,50 | 0,172 | 0,239 | 0,249 | 0,233 | 0,204 | 0,173 | 0,144 | 0,117 |
| 0,55 | 0,187 | 0,255 | 0,263 | 0,242 | 0,209 | 0,174 | 0,141 | 0,113 |
| 0,60 | 0,201 | 0,271 | 0,275 | 0,249 | 0,212 | 0,173 | 0,139 | 0,109 |

Przykład 2. Rozwiążemy za pomocą wzorów przybliżonych temat przykładu 1: $\alpha = -0,1893 \approx -0,19$, $\Delta N_b = -347(1 - e^{-0,19\varphi})$, $\Delta M_z = -1,13 \Delta N_b$. Wartości funkcji podane są w tabelicy 3.

Tablica 3

| φ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|
| ΔN_b t | -60,0 | -109,7 | -150,8 | -185,0 |
| ΔM_z tm | 67,8 | 124,0 | 170,4 | 209,0 |

Obliczenie zmian naprężeń w części betonowej dla $\varphi = 4$ przedstawia się następująco:

$$\Delta \sigma_b = 0,9817 \sigma_b^0 + 365(2,101 + 2,877 y) \frac{1}{10}.$$

Włókna górne: $\sigma_b^0 = 53,7 \text{ kG/cm}^2$, $y = 1,23 \text{ m}$; $\Delta\sigma_{bg} = -32,1 \text{ kG/cm}^2$.

Włókna dolne: $\sigma_b^0 = 33,1 \text{ kG/cm}^2$, $y = 1,03 \text{ m}$; $\Delta\sigma_{bd} = -14,0 \text{ kG/cm}^2$.

Jak widać, zgodność wyników jest bardzo dobra. Bez użycia wzoru (2.14) można obliczyć dokładnie tylko naprężenia w środku ciężkości części betonowej:

$$\Delta\sigma_{bsr} = \frac{-185,0}{0,8 \cdot 10} = -23,1 \text{ kG/cm}^2.$$

2.3. Naprężenia skurczowe. Pełzanie betonu wywiera wpływ na naprężenia powodowane skurczem. Wzory na wpływ skurczu betonu uwzględniające pełzanie otrzymamy łatwo przyjmując³⁾ podobieństwo krzywych $\varepsilon_s(t)$ oraz $\varphi(t)$:

$$\varepsilon_s(t) = \varepsilon_s \varphi(t) / \varphi_k.$$

We wzorze powyższym $\varepsilon_s(t)$ przedstawia zmienne odkształcenie skurczowe będące funkcją czasu, ε_s maksymalne odkształcenie skurczowe przyjęte do obliczeń, zaś φ_k maksymalną przewidywaną wartość modułu pełzania.

W celu otrzymania rozwiązania ścisłego należy pierwsze z równań (2.5) przepisać w postaci

$$d\varepsilon_b + \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} d\varphi = d\varepsilon_z + y_c d\varrho_z.$$

Postępując dalej jak w przypadku obciążenia zewnętrznego i przyjmując $N_b^0 = M_b^0 = 0$ otrzymamy układ dwu równań różniczkowych analogiczny do (2.6), którego rozwiązaniem są następujące funkcje:

$$(2.15) \quad \begin{cases} \Delta N_{bs} = -\frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} E_b F_b + C_1 e^{\alpha_s \varphi} + C_2 e^{\alpha_s \varphi}, \\ \Delta M_{bs} = C_1 \gamma_1 (e^{\alpha_s \varphi} - e^{\alpha_s \varphi}) = C_2 \gamma_2 (e^{\alpha_s \varphi} - e^{\alpha_s \varphi}), \end{cases}$$

gdzie

$$C_1 = \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} E_b F_b \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}, \quad C_2 = -\frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} E_b F_b \frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Równanie charakterystyczne i współczynniki γ wyrażają się wzorami podanymi dla przypadku obciążenia zewnętrznego. Rozwiązanie przybliżone daje

$$(2.16) \quad \Delta N_{bs} = -\frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} E_b F_b (1 - e^{\alpha_s \varphi}).$$

Współczynnik α oblicza się jak we wzorze (2.9). Do obliczania naprężeń w betonie służy wzór analogiczny do wzoru (2.14):

$$(2.17) \quad \Delta\sigma_b = -\frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} E_b (1 - e^{-\varphi}) + \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} E_b F_b \left(\frac{1}{n F_z} + \frac{y_c}{n J_z} y \right) \frac{\alpha}{1 + \alpha} (e^{-\varphi} - e^{\alpha_s \varphi}).$$

³⁾ Założenie to pochodzi od Dischingera.

Do wszystkich podanych wzorów należy podstawiać odkształcenie skurczowe ε_s jako wartość dodatnią. Dla porównania podamy jeszcze wzory na wpływ skurczu betonu nie uwzględniające pełzania:

$$(2.18) \quad \begin{cases} \Delta N_{bs} = -\varepsilon_s \frac{E_b}{\frac{1}{F_b} + \frac{1}{nF_z} + \frac{y_c^2}{nJ_z} \left(1 - \frac{1}{\frac{nJ_z}{J_b} + 1}\right)}, \\ \Delta M_{bs} = -\Delta N_b y_c \frac{J_b}{J_b + nJ_z}, \\ \Delta M_{zs} = -(\Delta M_b + \Delta N_b y_c). \end{cases}$$

Przykład 3. Obliczymy wpływ skurczu betonu na rozpatrywany w poprzednich przykładach przekrój poprzeczny belki zespolonej; przyjmujemy

$$\varepsilon_s = 20 \cdot 10^{-5}, \quad \varphi_k = 4, \quad E_b = 3 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2.$$

Stosując rozwiązanie ściśle otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} E_b F_b &= 120, & C_1 &= 0,1154, & C_2 &= 0,2141, \\ \Delta N_{bs} &= -120 + 119,9 e^{-0,19\varphi} + 0,1 e^{-\varphi}, \\ \Delta M_{bs} &= 0,2141 (e^{-0,19\varphi} - e^{-\varphi}). \end{aligned}$$

Tablica 4

| φ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| ΔN_{bs} t | -20,9 | -38,0 | -52,2 | -63,9 |
| ΔM_{bs} tm | 0,10 | 0,12 | 0,11 | 0,10 |
| ΔM_{zs} tm | 23,5 | 42,8 | 58,9 | 72,1 |

Wykresy obliczonych funkcji przedstawia rys. 8.

Napężenia w betonie dla $\varphi = 4$ wynoszą

$$\Delta \sigma_{bg} = -7,6 \text{ kG/cm}^2, \quad \Delta \sigma_{bd} = -8,4 \text{ kG/cm}^2.$$

Rozwiązanie przybliżone daje

$$\Delta N_{bs} = -120 (1 - e^{-0,19\varphi}).$$

Tablica 5

| φ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| ΔN_{bs} t | -20,8 | -37,9 | -52,1 | -63,9 |
| ΔM_{zs} tm | 23,5 | 42,8 | 58,9 | 72,2 |

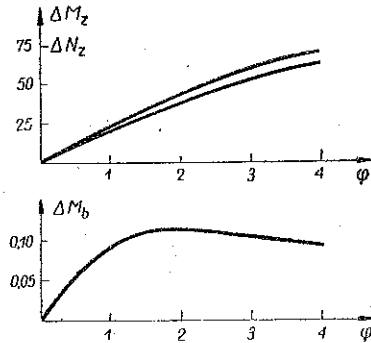
Naprężenia w betonie dla $\varphi = 4$ według wzoru (2.14) wynoszą:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_b &= -14,7 + 12,62(2,101 + 2,877\varphi), \\ \Delta\sigma_{bg} &= -7,6 \text{ kG/cm}^2, \quad \Delta\sigma_{bd} = -8,3 \text{ kG/cm}^2. \end{aligned}$$

Nie uwzględniając pełzania betonu otrzymamy ze wzorów (2.15):

$$\begin{aligned} \Delta N_{bs} &= -91,2 \text{ t}, \quad \Delta M_{bs} = 0,70 \text{ tm}, \\ \Delta M_{zs} &= 102,3 \text{ tm}. \end{aligned}$$

Wielkości te należy porównywać z odpowiednimi wielkościami otrzymanymi z uwzględnieniem pełzania dla $\varphi = 4$; jak widać, różnice są znaczne. Natomiast różnice między rozwiązaniem ścisłym i przybliżonym są znikome.



Rys. 8

3. Układy statycznie niewyznaczalne

Teoria układów statycznie niewyznaczalnych rozwinięta poniżej nawiązuje do metody sił, będącej podstawową metodą rozwiązywania tego rodzaju zagadnień w zakresie teorii sprężystości. Dla danego ustroju statycznie niewyznaczalnego zakładamy będziemy odpowiedni układ podstawowy, na który w dowolnej chwili określonej zmienną φ działać będzie stałe obciążenie wyjściowe i zmienne wielkości statycznie niewyznaczalne (nadliczbowe). Obciążenie wyjściowe układu podstawowego określimy jako sumę obciążenia zewnętrznego i wielkości statycznie niewyznaczalnych, obliczonych metodami mechaniki budowli dla $\varphi = 0$. Stosując zasadę superpozycji rozbijemy rozwiązanie na dwie części.

(1) W części pierwszej uwzględnimy wpływ obciążenia wyjściowego w założeniu, że działa na układ podstawowy i nie wywołuje wielkości statycznie niewyznaczalnych. Obliczenie należy prowadzić metodami podanymi w rozdziale drugim. Otrzymane składowe siły wewnętrznych będziemy oznaczali symbolami $\Delta N_b^{(0)}$, $\Delta M_b^{(0)}$, $\Delta N_z^{(0)}$ i $\Delta M_z^{(0)}$.

(2) W części drugiej obliczymy wielkości statycznie niewyznaczalne $X_k(\varphi)$, które powstają wskutek pełzania betonu, oraz zmiany sił wewnętrznych powodowane ich działaniem, które oznaczymy $\Delta N_b^{(X)}$, $\Delta M_b^{(X)}$, $\Delta N_z^{(X)}$ i $\Delta M_z^{(X)}$.

W rozdziale niniejszym wyprowadzono całkowite równania warunkowe układów statycznie niewyznaczalnych. W dalszej części (p. 3.1. i 3.2.) podano przykłady obliczeń wielkości nadliczbowych na podstawie rozwiązań ścisłych i przybliżonych rozdziału drugiego. Obliczanie wielkości nadliczbowych wymaga rozwiązywania układów równań różniczkowych

wyższych rzędów i może być stosowane tylko w najprostszyc przypadkach. Z tego powodu podano dla celów praktycznych metodę, która dzięki zastosowaniu szeregów potęgowych pozwala na obliczanie wielkości nadliczbowych przy użyciu jedynie działań arytmetycznych (p. 3.4.). Sposoby określania zmian w siłach wewnętrznych układu powodowanych wielkościami nadliczbowymi omówiono w p. 3.4. Sposoby te jednak mają zastosowanie bez żadnych zmian także i w przypadku stosowania rozwiązań funkcyjnych. Również uwagi ogólne o przebiegu funkcji nadliczbowych, stosowalności podanych metod oraz inne dane natury praktycznej włączono do p. 3.4. W dalszym ciągu omówiono naprężenia skurczowe (p. 3.5.) oraz rozwiązywanie funkcyjne równań za pomocą transformacji Laplace'a (p. 3.6.).

3.1. Równania układów statycznie niewyznaczalnych. Weźmy pod uwagę najogólniejszy przypadek układu statycznie niewyznaczalnego. W celu ułożenia równań rozważać będziemy odkształcenia odpowiedniego układu podstawowego, które określimy biorąc pod uwagę odkształcenia części stalowej jego prętów, mianowicie zmianę krzywizny ϱ_z i zmianę odkształceń jednostkowych na osi ciężkości ε_z . W dalszym ciągu wprowadzimy oznaczenia skrócone $\varrho = \varrho_z$ i $\varepsilon = \varepsilon_z$.

Niech na układ podstawowy działa począwszy od chwili, gdy $\varphi = 0$, wielkość statycznie niewyznaczalna $X_k = 1$. W dowolnym punkcie układu określonym współrzędną s wywołuje ona odkształcenia plastyczne części betonowej, powodujące zmianę krzywizny części stalowej $\varrho_k(\varphi, s)$ oraz zmianę jej odkształceń jednostkowych $\varepsilon_k(\varphi, s)$. Określimy teraz następującą funkcję zmiennej φ :

$$(3.1). \quad \bar{\delta}_{ik}(\varphi) = \int_s M_i^{(z)}(s) \varrho_k(\varphi, s) ds + \int_s N_i^{(z)}(s) \varepsilon_k(\varphi, s) ds.$$

Oznaczenia M_i i N_i przejęto z metody sił, również $\bar{\delta}_{ik}(\varphi)$ jest funkcją analogiczną do współczynnika δ_{ik} mającego zastosowanie w tej metodzie z tą tylko różnicą, że przedstawia ona wpływ zmiennych odkształceń plastycznych części betonowej. Pierwsza całka przedstawia wpływ zmiany krzywizny, zaś druga wpływ zmian odkształceń osiowych części stalowej prętów⁴⁾. Wskaźnik z przy symbolach momentów zginających $M_i^{(z)}$, oraz sił normalnych $N_i^{(z)}$ oznacza, że wielkości te należy obliczać na układzie podstawowym, którego siatka geometryczna pokrywa się z osiami ciężkości części stalowej prętów.

⁴⁾ Nie należy utożsamiać drugiej całki z tzw. wpływem sił normalnych znanym w mechanice budowli, co upoważniałoby do pomijania jej w większości przypadków. Odkształcenia osiowe części stalowej istnieją również, gdy jest $N = 0$ i w typowych przekrojach odgrywają zasadniczą rolę. Dlatego zawsze konieczne jest uwzględnienie obu wyrazów we wzorze (3.1). To samo odnosi się do wzoru (3.2).

Wzór (3.1) ważny jest dla stale działającej wielkości statycznie niewyznaczalnej $X_k = 1$. Analogiczny wzór dla zmiennej wielkości $X_k(\varphi)$ otrzymamy sumując wpływy elementarnych obciążeń dX_k :

$$\int_0^{\varphi} dX_k(\varphi_1) \bar{\delta}_{ik}(\varphi - \varphi_1) = \int_0^{\varphi} \frac{dX_k}{d\varphi_1} \bar{\delta}_{ik}(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1.$$

W dalszym ciągu określimy funkcję zmiennej φ analogiczną do współczynnika δ_{i0} metody sił, a przedstawiającą wpływ odkształceń plastycznych wywołanych obciążeniem wyjściowym:

$$(3.2) \quad \bar{\delta}_{i0}(\varphi) = \int_s M_i^{(z)}(s) \varrho_0(\varphi, s) ds + \int_s N_i^{(z)}(s) \varepsilon_0(\varphi, s) ds.$$

Wyrażenia ϱ oraz ε , występujące pod całkami wzorów (3.1) i (3.2) otrzymamy sumując wpływy momentów zginających i sił normalnych wzbudzających odkształcenia plastyczne:

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \varrho_k(\varphi, s) = M_{kb}(s) \varrho_M(\varphi, s) + N_{kb}(s) \varrho_N(\varphi, s), \\ \varepsilon_k(\varphi, s) = M_{kb}(s) \varepsilon_M(\varphi, s) + N_{kb}(s) \varepsilon_N(\varphi, s), \end{cases}$$

$$(3.3.2) \quad \begin{cases} \varrho_0(\varphi, s) = M_b^0(s) \varrho_M(\varphi, s) + N_b^0(s) \varrho_N(\varphi, s), \\ \varepsilon_0(\varphi, s) = M_b^0(s) \varepsilon_M(\varphi, s) + N_b^0(s) \varepsilon_N(\varphi, s). \end{cases}$$

Funkcje $\varrho_M(s)$ lub $\varrho_N(s)$ przedstawiają zmienność krzywizny części stalowej elementu pręta pod wpływem stałego momentu zginającego $M_b = 1$ albo stałej siły normalnej $N_b = 1$. Podobnie funkcje $\varepsilon_M(\varphi)$ i $\varepsilon_N(\varphi)$ przedstawiają zmianę odkształceń osiowych części stalowej.

Wskaźnik b we wzorze (3.3.1) wprowadzono ze względu na to, że wielkości statycznie niewyznaczalne działają na ustrój zespolony, zaś funkcje ϱ oraz ε określać będziemy na podstawie rozwiązań rozdziału drugiego w zależności od obciążeń wzbudzających odkształcenie plastyczne, którymi są wielkości M_b i N_b . Przy konstruowaniu wykresów M_{kb} i N_{kb} należy posługiwać się wzorami (2.1):

$$(3.4) \quad M_{kb} = M_k \frac{J_b}{J_c}, \quad N_{kb} = N_k \frac{F_b}{F_c} + M_k \frac{F_b v}{J_c}.$$

Wykresy M_k i N_k do powyższych wzorów należy konstruować w układzie, którego siatka geometryczna pokrywa się z osiami ciężkości prętów zespolonych.

Obecnie możemy napisać równania dla dowolnego układu n -krotnie statycznie niewyznaczalnego. Otrzymamy je stosując znane rozumowanie stosowane w metodzie sił: niewiadomymi będą funkcje statycznie niewyznaczalne $X_k(\varphi)$, związane z pełzaniem betonu:

Jak widać, w ogólnym przypadku potrzebne są do obliczeń trzy rodzaje wykresów momentów zginających i sił normalnych. Pierwsze dwa rodzaje, mianowicie M_k i N_k oraz $M_k^{(z)}$ i $N_k^{(z)}$ konstruuje się z obliczeń statycznych na dwu różnych układach; należy jednak podkreślić, że układy te różnią się jedynie siatką geometryczną osi prętów, natomiast warunki podparcia oraz położenie wewnętrznych przegubów lub więzów muszą być identyczne. Trzeci rodzaj wykresów M_{kb} i N_{kb} oblicza się za pomocą wzorów (3.4).

W układach, w których nie występują siły normalne, zatem praktycznie biorąc tylko w belkach ciągłych o poziomo przesuwnych podporach, mamy

$$(3.6) \quad M_k^{(z)} = M_k, \quad N_k^{(z)} = N_k = 0.$$

Drugi z powyższych związków upraszcza znacznie wzory (3.1) i (3.2), w których pozostają wówczas tylko pierwsze całki. Warto jeszcze zauważyć, że w ogólnym przypadku $\delta_{ik} \neq \delta_{ki}$. Natomiast w układach, dla których zachodzą związki (3.6), spełniają się, jak łatwo stwierdzić, związki analogiczne do znanych w mechanice budowli $\delta_{ik} \equiv \delta_{ki}$.

3.2. Obliczanie wielkości nadliczbowych na podstawie rozwiązań ścisłych. Korzystając ze wzorów (2.3) i (2.4.2) otrzymamy

$$(3.7) \quad \varrho_z = -\frac{1}{E_z J_z} (\Delta M_b + y_c \Delta N_b), \quad \varepsilon_z = -\frac{1}{E_z F_z} \Delta N_b.$$

Uwzględniając w dalszym ciągu równania (2.7) z odpowiednio obliczonymi stałymi dochodzimy do wzorów określających funkcje $\varrho(\varphi, s)$ oraz $\varepsilon(\varphi, s)$:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \varrho_M(\varphi, s) = \frac{1}{E_z J_z} \left(1 + \frac{\gamma_1 + y_c}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\alpha_1 \varphi} - \frac{\gamma_2 + y_c}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\alpha_2 \varphi} \right), \\ \varepsilon_M(\varphi, s) = \frac{1}{E_z F_z} \left(\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\alpha_1 \varphi} - \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\alpha_2 \varphi} \right), \\ \varrho_N(\varphi, s) = \frac{1}{E_z J_z} \left(y_c - \frac{\gamma_1 \gamma_2 + y_c \gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\alpha_1 \varphi} + \frac{\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 y_c}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\alpha_2 \varphi} \right), \\ \varepsilon_N(\varphi, s) = \frac{1}{E_z F_z} \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\alpha_1 \varphi} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\alpha_2 \varphi} \right). \end{cases}$$

W ogólnym przypadku, gdy przekroje poprzeczne prętów zmieniają się w sposób ciągły, wszystkie współczynniki we wzorach (3.8) są funkcjami zmiennej s . Funkcyjne rozwiązanie zagadnienia nie jest wówczas praktycznie możliwe. W przypadkach, gdy przekrój prętów jest stały lub zmienia się skokami i jest stały na poszczególnych odcinkach, to przy użyciu wzorów (3.8) można układ równań całkowych (3.5) lub

(3.5.1) sprowadzić do układu równań różniczkowych liniowych o współczynnikach stałych. Liczba równań odpowiada liczbie niewiadomych, natomiast rząd ich jest równy podwojonej liczbie odcinków, które posiadają różny przekrój poprzeczny. Np. w przypadku stałego przekroju poprzecznego otrzymamy równania rzędu drugiego. Zasadnicze warunki brzegowe zagadnienia są następujące:

$$X_1(0) = X_2(0) = \dots, \quad X_n(0) = 0.$$

Ponieważ równania różniczkowe są rzędu co najmniej drugiego, przeto konieczne są dalsze warunki brzegowe, które otrzymuje się w toku przekształcania równań całkowych na różniczkowe. Warunki te odnoszą się do wartości kolejnych pochodnych funkcji nadliczbowych dla $\varphi = 0$.

Jako przykład rozwiążemy układ jednokrotnie niewyznaczalny o stałym przekroju poprzecznym.

Korzystając ze wzorów (3.8) można funkcje $\bar{\delta}_{11}(\varphi)$ oraz $\bar{\delta}_{10}(\varphi)$ przedstawić w postaci⁵⁾

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{11}(\varphi) = A_{11} + B_{11} e^{\alpha_1 \varphi} + C_{11} e^{\alpha_2 \varphi}, \\ \bar{\delta}_{10}(\varphi) = A_{10} + B_{10} e^{\alpha_1 \varphi} + C_{10} e^{\alpha_2 \varphi}. \end{cases}$$

Podstawiając powyższe do równania warunkowego

$$X_1(\varphi) \delta_{11} - \int_0^{\varphi} X_1(\varphi_1) \frac{d\bar{\delta}_{11}(\varphi - \varphi_1)}{d\varphi_1} d\varphi_1 + \bar{\delta}_{10}(\varphi) = 0,$$

otrzymamy

$$(3.9.1) \quad \delta_{11} X_1(\varphi) + B_{11} \alpha_1 e^{\alpha_1 \varphi} \int_0^{\varphi} X_1(\varphi_1) e^{-\alpha_1 \varphi_1} d\varphi_1 + C_{11} \alpha_2 e^{\alpha_2 \varphi} \int_0^{\varphi} X_1(\varphi_1) e^{-\alpha_2 \varphi_1} d\varphi_1 + A_{10} + B_{10} e^{\alpha_1 \varphi} + C_{10} e^{\alpha_2 \varphi} = 0.$$

W dalszym ciągu podzielimy (3.9.1) przez $e^{\alpha_1 \varphi}$ i zróżniczkujemy względem φ :

$$(3.9.2) \quad \frac{dX_1(\varphi)}{d\varphi} \delta_{11} e^{-\alpha_1 \varphi} + [(B_{11} - \delta_{11}) \alpha_1 + C_{11} \alpha_2] X_1(\varphi) e^{-\alpha_1 \varphi} + C_{11} \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_2 - \alpha_1) \varphi} \int_0^{\varphi} X_1(\varphi_1) e^{-\alpha_2 \varphi_1} d\varphi_1 - A_{10} \alpha_1 e^{-\alpha_1 \varphi} + C_{10} (\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_2 - \alpha_1) \varphi} = 0.$$

⁵⁾ Ponieważ dla $\varphi = 0$ jest $\bar{\delta}_{11} = 0$ oraz $\bar{\delta}_{10} = 0$, zatem powinny być spełnione równania: $A_{11} + B_{11} + C_{11} = 0$, $A_{10} + B_{10} + C_{10} = 0$.

Dzieląc kolejno (3.9.2) przez $e^{(a_2 - a_1)\varphi}$ i różniczkując po raz drugi otrzymamy równanie różniczkowe rzędu drugiego:

$$(3.9.3) \quad \frac{d^2 X_1(\varphi)}{d\varphi^2} \delta_{11} + \frac{dX_1(\varphi)}{d\varphi} [(B_{11} - \delta_{11}) a_1 + (C_{11} - \delta_{11}) a_2] + X_1(\varphi) (\delta_{11} - C_{11} - B_{11}) a_1 a_2 + A_{10} a_1 a_2 = 0.$$

Pierwszym warunkiem brzegowym jest $X_1(0) = 0$. Dodatkowy warunek brzegowy określa równanie (3.9.2)

$$X_1'(0) = \frac{A_{10} a_1 - C_{10} (a_2 - a_1)}{\delta_{11}}.$$

Rozwiązanie równania (3.9.3) przedstawia się w postaci

$$(3.10) \quad X_1(\varphi) = -\bar{X}_1 + C_1 e^{\mu_1 \varphi} + C_2 e^{\mu_2 \varphi},$$

gdzie

$$\bar{X}_1 = \frac{A_{10}}{\delta_{11} + A_{11}},$$

$$C_1 = \frac{\mu_2 \bar{X}_1 - X_1'(0)}{\mu_2 - \mu_1},$$

$$C_2 = \frac{X_1'(0) - \mu_1 \bar{X}_1}{\mu_2 - \mu_1}.$$

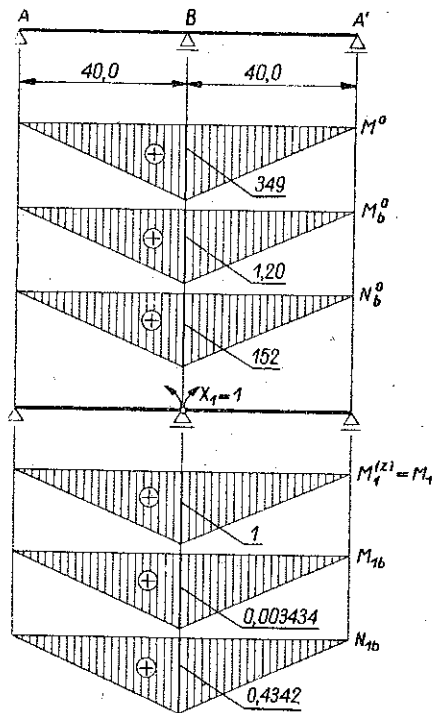
Równanie charakterystyczne do obliczenia współczynników μ jest następujące:

$$\delta_{11} \mu^3 + [(B_{11} - \delta_{11}) a_1 + (C_{11} - \delta_{11}) a_2] \mu + (A_{11} + \delta_{11}) a_1 a_2 = 0.$$

Przykład 4. Obliczymy wielkość nadliczbową dla belki przedstawionej na rys. 9, której podpore  rodkow   obni  ono w chwili $\varphi = 0$ o $\Delta = 8$ cm. Przekr  j poprzeczny sta  y przy  eto z przyk  adu 1, $E_b = 3 \cdot 10^6$ t/m². Wykres moment  w wyj  sciowych M^0 obliczamy za pomoc   wzor  w statyki, nast  epnie ze wzor  w (2.1) otrzymujemy wykresy M_b^0 i N_b^0 . Wielko   nadliczbow   przyjmujemy jako moment zginaj  cy na podporze  rodkowej; wykresy M_{1b} i N_{1b} obliczamy ze wzor  w (3.4). Ze wzor  w (3.8) otrzymujemy

$$\varrho_M(\varphi) = (0,84861 - 0,51697 e^{\alpha_1 \varphi} - 0,33164 e^{\alpha_2 \varphi}) 10^{-6},$$

$$\varrho_N(\varphi) = (0,95893 - 0,95952 e^{\alpha_1 \varphi} + 0,00059 e^{\alpha_2 \varphi}) 10^{-6}.$$



Rys. 9

Funkcje $\bar{\delta}_{11}(\varphi)$ i $\bar{\delta}_{10}(\varphi)$ obliczamy ze wzorów:

$$\bar{\delta}_{11}(\varphi) = e_M \int_s M_1^{(z)} M_{1b} ds + e_N \int_s M_1^{(z)} N_{1b} ds,$$

$$\bar{\delta}_{10}(\varphi) = e_M \int_s M_1^{(z)} M_b^0 ds + e_N \int_s M_1^{(z)} N_b^0 ds.$$

Wartości całek określonych wynoszą (przy całkowaniu wykorzystano symetrię układu)

$$\int M_1^{(z)} M_{1b} ds = 0,04578, \quad \int M_1^{(z)} N_{1b} ds = 5,7879,$$

$$\int M_1^{(z)} M_b^0 ds = 16, \quad \int M_1^{(z)} N_b^0 ds = 2026.$$

Ostatecznie otrzymamy:

$$\bar{\delta}_{11}(\varphi) = (5,58904 - 5,57728 e^{\alpha_1 \varphi} - 0,01175 e^{\alpha_2 \varphi}) 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{10}(\varphi) = (1956,4 - 1952,3 e^{\alpha_1 \varphi} - 4,1109 \alpha_2 \varphi) 10^{-6}.$$

Współczynnik δ_{11} wynosi

$$\delta_{11} = 5,721 \cdot 10^{-6}.$$

Równanie charakterystyczne:

$$5,721 \mu^2 + 7,8508 \mu + 2,1308 = 0;$$

jego pierwiastki:

$$\mu_1 = -0,9997, \quad \mu_2 = -0,3726.$$

Całka szczególna:

$$\bar{X}_1 = -173,0.$$

Dodatkowy warunek brzegowy:

$$X_1'(0) = -65,20.$$

Rozwiązanie przybiera postać

$$X_1(\varphi) = -173,0 + 1,18 e^{-\varphi} + 171,82 e^{-0,373 \varphi}.$$

Tablica 6

| φ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------|-------|-------|--------|--------|
| X_1 tm | -54,3 | -91,3 | -116,8 | -134,4 |

3.3. Obliczanie wielkości nadliczbowych na podstawie rozwiązań przybliżonych.

Stosując rozwiązania przybliżone pomijamy odkształcenia sprężyste i plastyczne,

wywoływane wyjściowymi oraz powstającymi wskutek pełzania betonu momentami M_b ; zatem wzory (3.3) upraszczają się w sposób następujący:

$$(3.11.1) \quad e_k(\varphi, s) = N_{kb}(s) e_N(\varphi, s), \quad \varepsilon_k(\varphi, s) = N_{kb}(s) e_N(\varphi, s)$$

oraz

$$(3.11.2) \quad \varrho_0(\varphi, s) = N_b^0(s) \varrho_N(\varphi, s), \quad \varepsilon_0(\varphi, s) = N_b^0(s) \varepsilon_N(\varphi, s).$$

Podstawiając powyższe wartości do wzorów (3.1) i (3.2) otrzymamy:

$$(3.12.1) \quad \bar{\delta}_{ik}(\varphi) = \int_s M_i^{(z)}(s) N_{kb}(s) \varrho_N(\varphi, s) ds + \int_s N_i^{(z)}(s) N_{kb}(s) \varepsilon_N(\varphi, s) ds,$$

$$(3.12.2) \quad \bar{\delta}_{i0}(\varphi) = \int_s M_i^{(z)}(s) N_b^0(s) \varrho_N(\varphi, s) ds + \int_s N_i^{(z)}(s) N_b^0(s) \varepsilon_N(\varphi, s) ds,$$

gdzie

$$(3.13) \quad \varrho_N(\varphi, s) = \frac{1}{E_z J_z} y_c (1 - e^{\alpha\varphi}), \quad \varepsilon_N(\varphi, s) = \frac{1}{E_z F_z} (1 - e^{\alpha\varphi}).$$

W przypadkach gdy przekrój poprzeczny pręta zmienia się w sposób ciągły, wszystkie współczynniki w równaniach (3.13) są funkcjami zmiennej s i funkcyjne rozwiązanie zagadnienia jest praktycznie niemożliwe. Jeżeli przekrój prętów jest stały lub zmienia się skokami, wówczas przy użyciu wzorów (3.13) można układ równań całkowych (3.5) lub (3.5.1) sprowadzić do układu równań różniczkowych liniowych o współczynnikach stałych. Liczba równań odpowiada liczbie niewiadomych, zaś ich rząd jest równy liczbie odcinków, które posiadają różny przekrój poprzeczny. Np. w przypadku stałego przekroju otrzymamy równania pierwszego rzędu. Sposób otrzymania dodatkowych warunków brzegowych niezbędnych dla rozwiązania równań wyższych rzędów jest identyczny z podanym w punkcie 3.2.

Jako przykład rozwiążemy układ jednokrotnie niewyznaczalny o stałym przekroju poprzecznym. Korzystając ze wzorów (3.13), można wielkości $\bar{\delta}_{11}(\varphi)$ oraz $\bar{\delta}_{10}(\varphi)$ przedstawić w postaci:

$$(3.14) \quad \bar{\delta}_{11}(\varphi) = A_{11} (1 - e^{\alpha\varphi}), \quad \bar{\delta}_{10}(\varphi) = A_{10} (1 - e^{\alpha\varphi}),$$

gdzie

$$A_{11} = \frac{y_c}{E_z J_z} \int M_1^{(z)} N_{1b} ds + \frac{1}{E_z F_z} \int N_1^{(z)} N_{1b} ds,$$

$$A_{10} = \frac{y_c}{E_z J_z} \int M_1^{(z)} N_b^0 ds + \frac{1}{E_z F_z} \int N_1^{(z)} N_b^0 ds.$$

Podstawiając te wartości do równania warunkowego otrzymamy

$$X_1(\varphi) \bar{\delta}_{11} - A_{11} \alpha e^{\alpha\varphi} \int_0^\varphi X_1(\varphi_1) e^{-\alpha\varphi_1} d\varphi_1 + A_{10} (1 - e^{\alpha\varphi}) = 0.$$

Dzieląc to równanie przez $e^{\alpha\varphi}$ i różniczkując je względem φ otrzymamy równanie różniczkowe rzędu pierwszego:

$$\frac{dX_1(\varphi)}{d\varphi} \bar{\delta}_{11} - X_1(\varphi) (A_{11} + \bar{\delta}_{11}) \alpha - A_{10} \alpha = 0;$$

jego rozwiązaniem jest funkcja

$$(3.15) \quad X_1(\varphi) = -\frac{A_{10}}{A_{11} + \delta_{11}} (1 - e^{\mu\varphi}), \quad \mu = \alpha \frac{A_{11} + \delta_{11}}{\delta_{11}}$$

Przykład 5. Rozwiążemy przykład 4 na podstawie wzorów przybliżonych:

$$\alpha = -0,19, \quad \varrho_N = 0,9589 \cdot 10^{-6} (1 - e^{\alpha\varphi}).$$

Korzystając z wartości całek obliczonych w przykładzie 4 otrzymujemy

$$\bar{\delta}_{11}(\varphi) = 5,551 \cdot 10^{-6} (1 - e^{\alpha\varphi}),$$

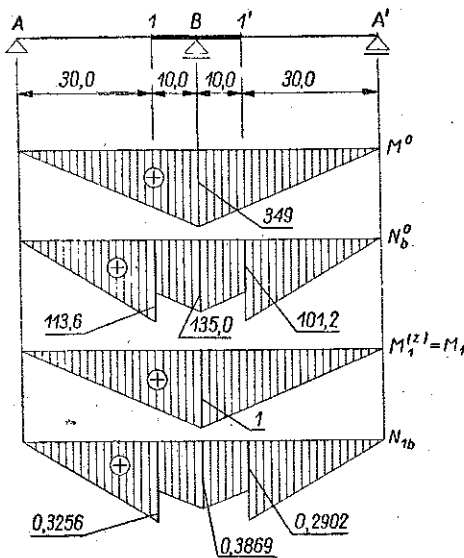
$$\bar{\delta}_{10}(\varphi) = 1,943 \cdot 10^{-6} (1 - e^{\alpha\varphi}).$$

Stąd

$$\mu = -0,372, \quad X_1(\varphi) = -172,7 (1 - e^{-0,372\varphi}).$$

Tablica 7

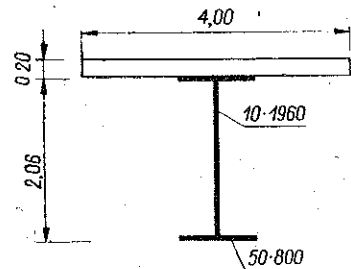
| φ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------|-------|-------|--------|--------|
| X_1 tm | -53,6 | -90,6 | -116,1 | -133,7 |



Rys. 10

Jak widać z porównania powyższych liczb z wynikami przykładu 4, błędy rozwiązania są minimalne, co jest zupełnie zrozumiałe w świetle rozważań rozdziału 2.

Przykład 6. Obliczymy wielkość statycznie niewyznaczalną dla belki



Rys. 11

przedstawionej na rys. 10. Przekrój poprzeczny jest stały na odcinkach A-1 oraz 1-B. Na odcinku A-1 przyjęto przekrój z przykładu 1, zaś prze-

krój na odcinku 1-B przedstawia rys. 11; jego dane charakterystyczne przedstawiają się następująco:

$$\begin{array}{lll} F_z = 0,0996 \text{ m}^2, & F_b = 0,8 \text{ m}^2, & nF_z = 0,6972 \text{ m}^2, \\ F_c = 1,4972 \text{ m}^2, & J_z = 0,08709 \text{ m}^4, & J_b = 0,002667 \text{ m}^4, \\ nJ_z = 0,6096 \text{ m}^4, & J_c = 1,088 \text{ m}^4, & v = 0,5262 \text{ m}, \\ y_c = 1,13 \text{ m}, & a = -0,2616 \approx -0,26. & \end{array}$$

Na odcinku A-1 mamy $a = -0,19$.

Wykres momentów początkowych M^0 przyjmiemy z przykładu poprzedniego, będzie on zatem odpowiadał pewnemu obniżeniu podpory środkowej. Wykresy N_b^0 i N_{1b} przedstawione są na rys. 10.

Na odcinku A-1 mamy

$$e_N = 0,9589 (1 - e^{-0,19\varphi}) 10^{-6},$$

a na odcinku 1-B

$$e_N = 0,6179 (1 - e^{-0,26\varphi}) 10^{-6}.$$

Całki pomocnicze: dla odcinka A-1

$$\int M_1^{(2)} N_{1b} ds = 2,442, \quad \int M_1^{(2)} N_b^0 ds = 852,1,$$

dla odcinka 1-B

$$\int M_1^{(2)} N_{1b} ds = 2,892, \quad \int M_1^{(2)} N_b^0 ds = 1040,6.$$

Stąd otrzymujemy

$$\bar{\delta}_{11}(\varphi) = (4,1842 - 2,3416 e^{-0,19\varphi} - 1,8426 e^{-0,26\varphi}) 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{10}(\varphi) = (1460,1 - 817,1 e^{-0,19\varphi} - 643,0 e^{-0,26\varphi}) 10^{-6}.$$

Współczynnik $\delta_{11} = 4,753 \cdot 10^{-6}$.

Jak widać, funkcje $\bar{\delta}_{11}(\varphi)$ i $\bar{\delta}_{10}(\varphi)$ wyrażają się wzorami typu (3.9), zatem rozwiązanie zagadnienia określone jest równaniem (3.10). Po przeprowadzeniu odpowiednich obliczeń otrzymamy (tabl. 8)

$$X_1(\varphi) = -163,3 + 154,3 e^{-0,427\varphi} + 9,0 e^{-0,218\varphi}.$$

Tablica 8

| φ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|-------|-------|--------|--------|
| X_1 , tm | -55,4 | -91,8 | -115,8 | -131,5 |

3.4. Ogólna metoda obliczania układów statycznie niewyznaczalnych przy użyciu szeregów potęgowych na podstawie wzorów przybliżonych. Za pomocą metody sprowadzenia układu równań całkowych do układu równań różniczkowych, podanych w punktach 3.2 i 3.3, rozwiązuje się zagadnienie

tylko pod względem matematycznym. W praktyce inżynierskiej może ona znaleźć zastosowanie tylko w najprostszych przypadkach⁶⁾, mianowicie:

(1) gdy układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny o stałym przekroju poprzecznym lub składa się z prętów o co najwyżej dwu różnych przekrojach poprzecznych; dla obu wymienionych przypadków wprowadzono w p. 3.2 i 3.3 gotowe wzory;

(2) gdy układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny o stałym przekroju poprzecznym, co wymaga rozwiązania układu dwu równań różniczkowych rzędu pierwszego.

Dla bardziej złożonych konstrukcji otrzymuje się równania różniczkowe rzędu wyższego niż dwa lub układy więcej niż dwu równań różniczkowych, których rozwiązanie jest kłopotliwe.

Podkreślić należy, że praktycznie rozwiązania zamknięte nie dają żadnej możliwości ścisłego obliczania układów składających się z prętów o przekroju zmieniającym się w sposób ciągły, stosując bowiem całkowanie numeryczne otrzymalibyśmy równania różniczkowe bardzo wysokich rzędów.

Metoda oparta na zastosowaniu szeregów potęgowych, którą obecnie przedstawimy, pozwala na łatwe uzyskanie dowolnie dokładnych wyników dla wartości φ zawierających się w przedziale $0 < \varphi < 4$. Większe wartości φ nie wchodzą praktycznie w rachubę, do rzadkich przypadków nawet należy przyjmowanie do obliczeń modułu pelzania przekraczającego $\varphi = 3$.

Niewiadomych funkcji $X_k(\varphi)$ będących rozwiązaniem układu równań całkowych (3.5) szukać będziemy w postaci szeregów potęgowych

$$(3.16) \quad X_k(\varphi) = x_{k,1}\varphi + x_{k,2}\varphi^2 + \dots + x_{k,r}\varphi^r + \dots$$

Podobnie funkcje $\bar{\delta}_{ik}(\varphi)$ i $\bar{\delta}_{i0}(\varphi)$ rozwiniemy w szeregi potęgowe

$$(3.17.1) \quad \bar{\delta}_{ik}(\varphi) = \bar{\delta}_{ik,1}\varphi + \bar{\delta}_{ik,2}\varphi^2 + \dots + \bar{\delta}_{ik,r}\varphi^r + \dots,$$

$$(3.17.2) \quad \bar{\delta}_{i0}(\varphi) = \bar{\delta}_{i0,1}\varphi + \bar{\delta}_{i0,2}\varphi^2 + \dots + \bar{\delta}_{i0,r}\varphi^r + \dots$$

W celu otrzymania wzorów na kolejne współczynniki $\bar{\delta}_{ik,r}$ i $\bar{\delta}_{i0,r}$ musimy przedstawić w postaci szeregów funkcje $\varrho_N(\varphi, s)$ oraz $\varepsilon_N(\varphi, s)$ podane równaniami (3.13):

$$(3.18) \quad \begin{cases} \varrho_N(\varphi, s) = a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \dots + a_r\varphi^r + \dots, \\ \varepsilon_N(\varphi, s) = b_1\varphi + b_2\varphi^2 + \dots + b_r\varphi^r + \dots, \end{cases}$$

⁶⁾ Oczywiście znając przebieg funkcji $\bar{\delta}_{ik}(\varphi)$ można je przedstawić w sposób przybliżony za pomocą wzorów typu $A + B e^{\alpha\varphi} + C e^{\alpha\varphi}$ lub $A(1 - e^{\alpha\varphi})$, co pozwala wykorzystać wzory (3.10) lub (3.15) w celu przybliżonego obliczenia funkcji nadliczbowych.

gdzie współczynniki a_r i b_r są funkcjami zmiennej s :

$$(3.19) \quad a_r = -\frac{1}{E_z J_z} y_c \frac{\alpha^r}{r!}, \quad b_r = -\frac{1}{E_z F_z} \frac{\alpha^r}{r!}.$$

Podstawiając szeregi (3.18) z uwzględnieniem wzorów (3.19) w prawe, zaś szeregi (3.17) w lewe strony równań (3.12) otrzymamy wzory na współczynniki $\bar{\delta}_{ik,r}$ i $\bar{\delta}_{i0,r}$:

$$(3.20.1) \quad \bar{\delta}_{ik,r} = \int_s M_i^{(z)} N_{kb} a_r ds + \int_s N_i^{(z)} N_{kb} b_r ds,$$

$$(3.20.2) \quad \bar{\delta}_{i0,r} = \int_s M_i^{(z)} N_b^0 a_r ds + \int_s N_i^{(z)} N_b^0 b_r ds.$$

W przypadku ogólnym wszystkie wielkości występujące pod całkami we wzorach (3.20) są funkcjami zmiennej s . Jeżeli przekrój poprzeczny prętów układu jest stały lub zmienia się skokami i jest stały na dłuższych odcinkach, wówczas współczynniki a_r i b_r mogą być wyprowadzone przed znak całki, a całkowanie iloczynu dwu pozostałych funkcji najwygodniej można przeprowadzić metodami stosowanymi w mechanice budowli. Jeżeli przekrój zmienia się w sposób ciągły, całki należy obliczać numerycznie.

Przy użyciu szeregów (3.16) i (3.17.1) oraz wzoru

$$\int_0^{\varphi} \varphi_1^m (\varphi - \varphi_1)^n d\varphi_1 = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)\cdots(n+m+1)} \varphi^{n+m+1}$$

otrzymuje się rozwinięcie w szereg całek określonych, występujących w równaniach (3.5):

$$(3.21) \quad \int_0^{\varphi} \frac{dX_k}{d\varphi_1} \bar{\delta}_{ik} (\varphi - \varphi_1) d\varphi_1 = z_{ik,2} \varphi^2 + z_{ik,3} \varphi^3 + \cdots + z_{ik,r} \varphi^r + \cdots,$$

przy czym współczynniki $z_{ik,r}$ podają następujące wzory:

$$z_{ik,2} = \frac{1}{2} x_{k,1} \bar{\delta}_{ik,1},$$

$$z_{ik,3} = \frac{1}{3} x_{k,1} \bar{\delta}_{ik,2} + \frac{1}{3} x_{k,2} \bar{\delta}_{ik,1},$$

$$z_{ik,4} = \frac{1}{4} x_{k,1} \bar{\delta}_{ik,3} + \frac{1}{6} x_{k,2} \bar{\delta}_{ik,2} + \frac{1}{4} x_{k,3} \bar{\delta}_{ik,1},$$

i ogólnie

$$z_{ik,r} = \sum_{p=1}^{r-1} x_{k,p} \bar{\delta}_{ik,r-p} \frac{1}{\binom{r}{p}}.$$

Podstawiając szeregi (3.16), (3.17.2) oraz (3.21) do układu równań całkowych (3.5) otrzymamy

$$\sum_{k=1}^n \delta_{1k} (x_{k,1} \varphi + \dots + x_{k,r} \varphi^r + \dots) + \sum_{k=1}^n (z_{1k,2} \varphi^2 + \dots + z_{1k,r} \varphi^r + \dots) + \bar{\delta}_{10,1} \varphi + \dots + \bar{\delta}_{10,r} \varphi^r + \dots = 0,$$

$$\dots$$

$$\sum_{k=1}^n \delta_{nk} (x_{k,1} \varphi + \dots + x_{k,r} \varphi^r + \dots) + \sum_{k=1}^n (z_{nk,2} \varphi^2 + \dots + z_{nk,r} \varphi^r + \dots) + \bar{\delta}_{n0,1} \varphi + \dots + \bar{\delta}_{n0,r} \varphi^r + \dots = 0.$$

Układy równań dla wyznaczenia współczynników $x_{k,r}$ otrzymane przez grupowanie wyrazów przy kolejnych potęgach φ , przedstawiają się następująco:

dla współczynników $x_{k,1}$:

$$\sum_{k=1}^n \delta_{1k} x_{k,1} + \bar{\delta}_{10,1} = 0,$$

$$\dots$$

$$\sum_{k=1}^n \delta_{nk} x_{k,1} + \bar{\delta}_{n0,1} = 0,$$

i ogólnie dla $r \geq 2$

$$\sum_{k=1}^n \delta_{1k} x_{k,r} + \sum_{k=1}^n z_{1k,r} + \bar{\delta}_{10,r} = 0,$$

$$\dots$$

$$\sum_{k=1}^n \delta_{nk} x_{k,r} + \sum_{k=1}^n z_{nk,r} + \bar{\delta}_{n0,r} = 0.$$

Jak widać, do obliczenia współczynników $x_{k,r}$ r -go rzędu potrzebne są współczynniki $\bar{\delta}_{i0,r}$ rzędu r -go oraz $\bar{\delta}_{ik,r}$ rzędu $(r-1)$ -go.

Zbieżność szeregów (3.16) jest bardzo różna; w wielu przypadkach, szczególnie dla wartości φ nie przekraczających 2-2,5, wystarcza obliczenie dwu lub trzech, a nawet wyjątkowo jednego wyrazu $x_{k,r}$, co zapewnia wystarczającą dokładność rzędu kilku procent. Czasem jednak zbieżność może być bardzo wolna i dla $\varphi = 4$ konieczne byłoby obliczenie nawet kilkunastu wyrazów. Wtedy rzeczą bardziej celową jest przedstawienie rozwiązania w postaci

$$(3.22) \quad X_k(\varphi) = (1 - e^{\mu_k \varphi}) (w_{k,0} + w_{k,1} \varphi + \dots + w_{k,r} \varphi^r + \dots).$$

Wzory na współczynniki $w_{k,r}$ przedstawiają się następująco:

$$w_{k,0} = -\frac{1}{\mu_k} x_{k,1},$$

$$w_{k,1} = -\frac{1}{\mu_k} x_{k,2} - \frac{1}{2} \mu_k w_{k,0},$$

$$w_{k,2} = -\frac{1}{\mu_k} x_{k,3} - \frac{1}{2} \mu_k w_{k,1} - \frac{1}{6} \mu_k^2 w_{k,0},$$

$$w_{k,3} = -\frac{1}{\mu_k} x_{k,4} - \frac{1}{2} \mu_k w_{k,2} - \frac{1}{6} \mu_k^2 w_{k,1} - \frac{1}{24} \mu_k^3 w_{k,0};$$

ogólnie dla $r \geq 1$

$$w_{k,r} = -\frac{1}{\mu_k} x_{k,r+1} - \sum_{p=1}^r \frac{1}{(p+1)!} \mu_k^p w_{k,r-p}.$$

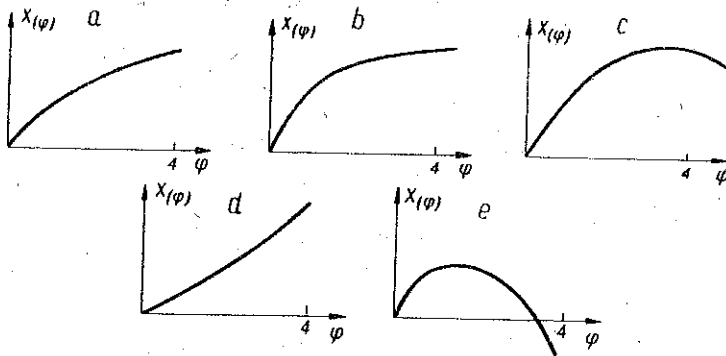
Najszybszą zbieżność uzyskuje się na ogół przyjmując

$$(3.23) \quad \mu_k = \frac{2 x_{k,2}}{x_{k,1}}.$$

Wówczas wyraz $w_{k,1}$ jest równy zero, a następne można często pominąć (przy wymaganej dokładności rzędu kilku procent); w przypadku tym wielkość nadliczbową przedstawia wzór

$$(3.24) \quad X_k(\varphi) = w_{k,0} (1 - e^{\mu_k \varphi}).$$

Obecnie podamy ogólne uwagi dotyczące przebiegu funkcji $X_k(\varphi)$ w interesującym nas przedziale $0 < \varphi < 4$.

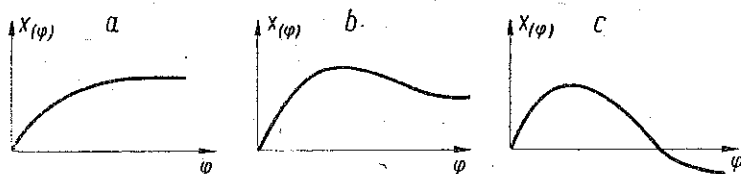


Rys. 12

Wykres typowy przedstawia krzywa *a* na rys. 12. Stopień zakrzywienia może być różny i zależy (w przypadkach gdy wyjściowe siły normalne N_b^0 mają w całym układzie ten sam znak, zaś przy wykresach zmieniają-

cych znak, gdy przekrój poprzeczny prętów jest stały) od charakteru przekroju poprzecznego. W przekrojach płyt mocnych wykres może być zbliżony do linii prostej, natomiast gdy płyta jest bardzo słaba, rzędne wykresu mogą ustalać się już przy wartościach $\varphi < 4$ (rys. 12b). Decydującą rolę w tych przypadkach odgrywają zatem współczynniki α ; większym współczynnikiem α odpowiadają silniej zakrzywione wykresy. Wykresy znacznie odbiegające od powyżej opisanych mogą powstać, gdy przekrój poprzeczny prętów jest zmienny (zwłaszcza, gdy jego wysokość jest zmienna), zaś wyjściowe siły normalne N_b^0 są częściowo dodatnie, częściowo ujemne, np. przy obciążeniu belki ciągłej ciężarem własnym. W tych przypadkach wykresy wielkości statycznie niewyznaczalnych mogą mieć maksimum (rys. 12c) lub przeciwnie, może wystąpić słabe zakrzywienie odwrotne (rys. 12d). W przypadku skrajnym możliwa jest nawet zmiana znaku wielkości statycznie niewyznaczalnej (rys. 12e)⁷⁾.

Podane powyżej zależności wynikające z omówienia wzorów (3.10) i (3.15) występują wyraźnie w układach jednokrotnie niewyznaczalnych. W układach wielokrotnie niewyznaczalnych mogą się zatrzeć z powodu wzajemnego oddziaływania wielkości nadliczbowych.



Rys. 13

Uprzednio zaznaczyliśmy, że podane uwagi odnoszą się do przedziału $0 < \varphi < 4$. Wykres wielkości nadliczbowych przy nieograniczenie rosnących wartościach zmiennej φ asymptotycznie zbliża się do pewnej wartości końcowej, przy czym typowy jest wykres a na rys. 13. W przypadkach bardziej skomplikowanych możliwe są wykresy b i c. Oczywiście dane powyższe nie mają żadnego praktycznego znaczenia.

Jak już wspomniano, wystarczającą dokładność daje zazwyczaj pierwsze przybliżenie znalezione za pomocą wzoru (3.24). Jedyne w przypadkach, gdy wielkość nadliczbowa ma przebieg typu c lub e (rys. 12), zbieżność może być wolniejsza, ponieważ funkcje $\delta_{k0}(\varphi)$ składają się wtedy z dwu składników odpowiadających dodatniej lub ujemnej części całek (3.2) lub (3.12.2). Szeregi $\bar{\delta}_{k0,r}$ przedstawiające oba składniki funkcji $\bar{\delta}_{k0}(\varphi)$ są zawsze szybko zbieżne, lecz ich różnica może być wolno zbieżna. Dlatego w tych przypadkach często korzystne jest prze-

⁷⁾ Przebieg wykresu N_b^0 decyduje w belkach ciągłych; w przypadku ogólnym (układy ramowe) decydujący wpływ na wykres ma oczywiście przebieg funkcji $\bar{\delta}_{k0}(\varphi)$.

przewodzenie obliczeń osobno dla obu wymienionych składników funkcji $\delta_{k0}(\varphi)$, po czym wyniki należy do siebie dodać. Przykład 8 zapozna czytelnika bliżej ze stroną rachunkową tego zagadnienia. Należy zaznaczyć, że nawet w przypadku słabej zbieżności szeregu wystarcza uwzględnienie wyrazów $w_{k,2}$ oraz $w_{k,3}$. Obliczone wielkości nadliczbowe działają na pełny przekrój zespolony. Momenty zginające i siły normalne przekazywane do poszczególnych przekrojów podane są w postaci:

$$(3.25) \quad \begin{cases} M^{(X)} = X_1 M_1 + X_2 M_2 + \dots + X_n M_n, \\ N^{(X)} = X_1 N_1 + X_2 N_2 + \dots + X_n N_n. \end{cases}$$

Momenty zginające i siły normalne przekazywane na część betonową otrzymamy ze wzorów:

$$(3.26) \quad \begin{cases} M_b^{(X)} = X_1 M_{1b} + X_2 M_{2b} + \dots + X_n M_{nb}, \\ N_b^{(X)} = X_1 N_{1b} + X_2 N_{2b} + \dots + X_n N_{nb}. \end{cases}$$

Na część stalową przekroju działają siły wewnętrzne $M_z^{(X)}$ i $N_z^{(X)}$, które można obliczyć za pomocą wzorów (2.2), jeżeli znane są wielkości $M^{(X)}$, $N^{(X)}$, $M_b^{(X)}$ i $N_b^{(X)}$. Jednak znajomość tych sił wewnętrznych nie jest potrzebna, ponieważ naprężenia w części stalowej obliczamy bez ich użycia (por. przykład 7).

Wielkości $M_b^{(X)}$ oraz $N_b^{(X)}$ powodują odkształcenia plastyczne betonu i w rezultacie zmieniają składowe siły wewnętrznych części betonowej o $\delta M_b^{(X)}$ oraz $\delta N_b^{(X)}$. Na podstawie wzorów przybliżonych możemy określić jedynie zmiany sił normalnych:

$$(3.27) \quad \delta N_b^{(X)}(\varphi) = - \int_0^{\varphi} \frac{dN_b^{(X)}}{d\varphi_1} (1 - e^{\alpha(\varphi - \varphi_1)}) d\varphi_1.$$

Wyrażając funkcje podcałkowe szeregami potęgowymi można uzyskać nowe szeregi przedstawiające funkcję $\delta N_b^{(X)}$, których zbieżność jest jednak niewystarczająca, lecz można ją polepszyć przez wydzielenie odpowiednich funkcji, podobnie jak to uczyniliśmy dla wyznaczenia wielkości nadliczbowych. Opisany powyżej sposób obliczenia wymaga jednak zbyt dużego nakładu pracy; z tego względu podamy metodę, za pomocą której można otrzymać wyniki ściśle w przypadku stosowania rozwiązań zamkniętych lub przy rozwijaniu rozwiązania w szereg potęgowy — wyniki przybliżone o dużej dokładności.

Założmy, że nadliczbowa k określona jest jako

$$(3.28) \quad X_k(\varphi) = X_k^* (1 - e^{\mu_k \varphi}).$$

Podstawiając wyrażenie (3.28) do równania (3.27) otrzymamy po scałkowaniu

$$(3.29) \quad \delta N_b^{(X_k)}(\varphi) = - N_b^{(X_k)}(\varphi) P(\mu_k, \alpha, \varphi).$$

Funkcję $P(\mu, \alpha, \varphi)$ określa wzór

$$P = 1 - \frac{\mu}{\mu - \alpha} \frac{e^{\alpha\varphi} - e^{\mu\varphi}}{1 - e^{\mu\varphi}},$$

zaś w przypadkach szczególnych dla $\alpha = \mu$

$$P = 1 + \mu \frac{e^{\mu\varphi} \varphi}{1 - e^{\mu\varphi}},$$

dla $\mu = 0$ ⁸⁾

$$P = 1 + \frac{1}{\alpha} \frac{1 - e^{\alpha\varphi}}{\varphi}.$$

Wartości funkcji $P(\mu, \alpha, \varphi)$ podano w tablicy 9.

Tablica 9. Wartości funkcji $P(\mu, \alpha, \varphi)$

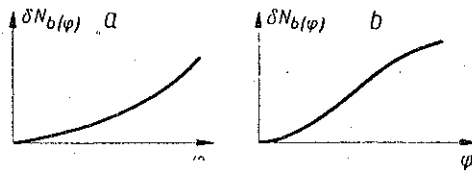
| φ | μ | $-\alpha$ | | | | | | | | | | | |
|-----------|-------|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 | 0,55 | 0,60 |
| 1 | -1,20 | 0,03 | 0,06 | 0,09 | 0,11 | 0,14 | 0,16 | 0,18 | 0,21 | 0,23 | 0,25 | 0,27 | 0,29 |
| | -0,80 | 0,03 | 0,05 | 0,08 | 0,10 | 0,13 | 0,15 | 0,17 | 0,20 | 0,22 | 0,24 | 0,26 | 0,27 |
| | -0,40 | 0,03 | 0,05 | 0,07 | 0,10 | 0,12 | 0,14 | 0,17 | 0,19 | 0,21 | 0,23 | 0,25 | 0,26 |
| | 0 | 0,02 | 0,05 | 0,07 | 0,10 | 0,12 | 0,14 | 0,16 | 0,18 | 0,20 | 0,21 | 0,23 | 0,25 |
| | +0,40 | 0,02 | 0,05 | 0,07 | 0,09 | 0,11 | 0,13 | 0,15 | 0,16 | 0,18 | 0,20 | 0,22 | 0,23 |
| 2 | -1,20 | 0,07 | 0,13 | 0,18 | 0,24 | 0,28 | 0,33 | 0,37 | 0,41 | 0,44 | 0,48 | 0,51 | 0,54 |
| | -0,80 | 0,06 | 0,12 | 0,17 | 0,22 | 0,26 | 0,30 | 0,34 | 0,38 | 0,41 | 0,45 | 0,47 | 0,50 |
| | -0,40 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,24 | 0,27 | 0,30 | 0,35 | 0,38 | 0,41 | 0,44 | 0,46 |
| | 0 | 0,05 | 0,10 | 0,14 | 0,18 | 0,21 | 0,25 | 0,28 | 0,31 | 0,34 | 0,37 | 0,40 | 0,42 |
| | +0,40 | 0,04 | 0,08 | 0,12 | 0,15 | 0,19 | 0,22 | 0,25 | 0,27 | 0,30 | 0,33 | 0,35 | 0,37 |
| 3 | -1,20 | 0,11 | 0,20 | 0,28 | 0,36 | 0,42 | 0,48 | 0,53 | 0,58 | 0,62 | 0,66 | 0,69 | 0,72 |
| | -0,80 | 0,10 | 0,18 | 0,26 | 0,33 | 0,39 | 0,44 | 0,49 | 0,54 | 0,58 | 0,61 | 0,64 | 0,67 |
| | -0,40 | 0,09 | 0,16 | 0,23 | 0,29 | 0,35 | 0,40 | 0,44 | 0,48 | 0,52 | 0,55 | 0,58 | 0,61 |
| | 0 | 0,07 | 0,14 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,34 | 0,38 | 0,42 | 0,45 | 0,48 | 0,51 | 0,54 |
| | +0,40 | 0,06 | 0,11 | 0,16 | 0,20 | 0,24 | 0,28 | 0,32 | 0,35 | 0,38 | 0,41 | 0,43 | 0,46 |
| 4 | -1,20 | 0,15 | 0,27 | 0,39 | 0,47 | 0,54 | 0,61 | 0,66 | 0,71 | 0,75 | 0,78 | 0,81 | 0,83 |
| | -0,80 | 0,13 | 0,25 | 0,35 | 0,43 | 0,49 | 0,57 | 0,62 | 0,66 | 0,70 | 0,74 | 0,77 | 0,79 |
| | -0,40 | 0,12 | 0,22 | 0,30 | 0,38 | 0,44 | 0,50 | 0,55 | 0,60 | 0,63 | 0,67 | 0,70 | 0,72 |
| | 0 | 0,10 | 0,17 | 0,25 | 0,31 | 0,37 | 0,42 | 0,46 | 0,50 | 0,54 | 0,57 | 0,60 | 0,62 |
| | +0,40 | 0,07 | 0,13 | 0,19 | 0,24 | 0,29 | 0,33 | 0,36 | 0,40 | 0,43 | 0,46 | 0,48 | 0,51 |

Jak widać, przy stosowaniu rozwiązań zamkniętych wzór (3.29) daje wyniki ściśle ⁹⁾. Również przy stosowaniu rozwiązań w postaci szeregów,

⁸⁾ W tym przypadku zakłada się $X_k(\varphi) = X_k^*(\varphi)$.

⁹⁾ Np. w rozwiązaniu przykładu 5 jest $X_1^* = -172,7$, w innych przypadkach rozwiązanie można przedstawić jako sumę składników typu (3.28). Np. w przykładzie 6 otrzymamy $X_1(\varphi) = -154,3(1 - e^{-0,43\varphi}) - 9,0(1 - e^{-0,22\varphi})$.

gdy poprzestajemy na pierwszym przybliżeniu (3.24), obliczone przy użyciu równania (3.29) wielkości $\delta N_b^{(X)}$ będą ściśle odpowiadały przyjętemu przebiegowi wielkości nadliczbowej, ponieważ wówczas $X_k^* = w_{k,0}$, zaś współczynnik μ_k przedstawiony jest wzorem (3.23). Jeżeli konieczne jest użycie dalszych wyrazów szeregu $w_{k,r}$, równanie (3.29) określa wartości przybliżone. Współczynnik μ_k należy w tych przypadkach dobrać w taki sposób, aby zastępcza funkcja (3.28) możliwie dobrze przybliżała rzeczywisty przebieg funkcji nadliczbowej. W rzadkich wypadkach, gdy funkcja $X_k(\varphi)$ zmienia znak, należy ją zastąpić dwoma wyrazami typu (3.28) stosując do każdego z nich wzór (3.29).



Rys. 14

Przebieg funkcji $\delta N_b^{(X)}$ przedstawia rys. 14. Wykres typu *a* powstaje przy małych, zaś wykres typu *b* przy dużych wartościach współczynników a i μ . Pochodna dla $\varphi = 0$ jest zawsze równa zero. Wielkość $\delta N_b^{(X)}$ może przy dużych wartościach współczynników a i μ wynosić do kilkudziesięciu procent wielkości wzbudzających $N_b^{(X)}$.

Na część stałą przenoszą się siły wewnętrzne wskutek odkształceń plastycznych betonu:

$$(3.30) \quad \begin{cases} \delta N_z^{(X)} = -\delta N_b^{(X)}, \\ \delta M_z^{(X)} = -\delta N_b^{(X)} y_c. \end{cases}$$

Ostateczną wartość sił wewnętrznych powstałych pod wpływem wielkości nadliczbowych otrzymać można zatem ze wzorów

$$(3.31) \quad \Delta N_b^{(X)} = N_b^{(X)} + \delta N_b^{(X)}, \quad \Delta N_z^{(X)} = N_z^{(X)} - \delta N_b^{(X)}, \quad \Delta M_z^{(X)} = M_z^{(X)} - \delta N_b^{(X)} y_c.$$

Wzory powyższe nie mają jednak zastosowania, ponieważ naprężenie wygodniej jest obliczać osobno dla obu składników. Naprężenia tak w stali $\sigma_z^{(X)}$ jak i w betonie $\sigma_b^{(X)}$ wywoływane wielkościami $M^{(X)}$ i $N^{(X)}$ [wzory (3.25)] należy obliczać za pomocą wzorów wytrzymałości materiałów przy uwzględnieniu momentów bezwładności J_c i powierzchni przekroju poprzecznego F_c . Naprężenia $\delta\sigma_z^{(X)}$ w stali powodowane działaniem składowych $\delta N_z^{(X)}$ i $\delta M_z^{(X)}$ należy obliczać zgodnie z zasadami ogólnymi, przenosząc wymienione składowe na przekrój stalowy. Natomiast naprężenia $\delta\sigma_b$ w betonie powodowane odkształceniami plastycznymi można określić dokładnie tylko dla osi ciężkości części betonowej:

$$(3.32) \quad \delta\sigma_{bsr}^X = \frac{\delta N_b^{(X)}}{F_b}.$$

Oczywiście określenie $\delta M_b^{(X)}$, a zatem $\delta\sigma_b^{(X)}$ w dowolnym punkcie części betonowej nie nastrocza żadnych trudności, konieczne jednak by-

łoby korzystanie w tym przypadku z rozwiązań ściśtych rozdziału drugiego. Można by też wyprowadzić wzór analogiczny do wzoru (2.11). Wzór ten jednak zawierałby nowe, skomplikowane funkcje. Ponieważ z drugiej strony naprężenia te nie są duże, można dla celów praktycznych zadowolić się przybliżeniem według wzoru (3.32).

Przykład 7. Rozwiążemy za pomocą szeregow temat z przykładu szóstego. Poza obliczeniem wielkości statycznie niewyznaczalnej określimy zmiany sił wewnętrznych układu w kilku punktach oraz zmiany naprężeń w przekroju nad podporą środkową. Przykład ten zawiera zatem w skrócie pełne przeliczenie prostego układu statycznie niewyznaczalnego.

Naprzód za pomocą wzorów (3.19) obliczymy współczynniki a_r dla obu przekrojów poprzecznych. Odcinek A-1

$$a_r = -0,9589 \cdot 10^{-6} \frac{(-0,19)^r}{r!}, \quad a_1 = 0,1822 \cdot 10^{-6}, \quad a_2 = -0,01731 \cdot 10^{-6}.$$

Odcinek 1-B

$$a_r = -0,6179 \frac{(-0,26)^r}{r!}, \quad a_1 = 0,1606 \cdot 10^{-6}, \quad a_2 = -0,02088 \cdot 10^{-6}.$$

Korzystając z wartości całek obliczonych w przykładzie 6 otrzymamy [wzory (3.20)]:

$$\bar{\delta}_{11,1} = (2,442 \cdot 0,1822 + 2,982 \cdot 0,1606) \cdot 10^{-6} = 0,9238 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{10,1} = (852,1 \cdot 0,1822 + 1040,6 \cdot 0,1606) \cdot 10^{-6} = 322,3 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{10,2} = (-852,1 \cdot 0,01731 - 1040,6 \cdot 0,02088) \cdot 10^{-6} = -36,48 \cdot 10^{-6}.$$

W dalszym ciągu obliczamy współczynniki $x_{1,r}$:

$$x_{1,1} = -\frac{322,3}{4,753} = -67,81,$$

$$z_{11,2} = -\frac{1}{2} 67,81 \cdot 0,9238 \cdot 10^{-6} = -31,32 \cdot 10^{-6},$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{4,753} (-36,48 - 31,32) = 14,26.$$

Stąd

$$\mu_1 = -\frac{2 \cdot 14,26}{67,81} = -0,4206, \quad w_{1,0} = -\frac{67,81}{0,4206} = -161,2.$$

Zatem pierwsze przybliżenie (tabl. 10):

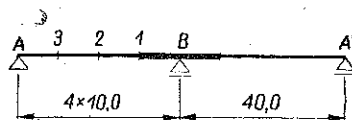
$$X_1(\varphi) = -161,2(1 - e^{-0,421\varphi}).$$

Tablica 10

| φ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------------------|-------|-------|--------|--------|
| $X_1(\varphi)$ tm | -55,4 | -91,8 | -115,6 | -131,3 |

Jak widać, błąd pierwszego przybliżenia nie przekracza nigdzie 0,2%.

Obecnie przeprowadzimy tabelarycznie obliczenie zmian sił wewnętrznych układu w czterech punktach (por. rys. 15) dla $\varphi=4$, przyjmując $X(4) = -131,3$ tm (tablice 11 i 12).



Rys. 15

Tablica 11

| | B | 1 ^L | 1 ^P | 2 | 3 |
|----------------------|--------|----------------|----------------|-------|-------|
| α | -0,26 | -0,26 | -0,19 | -0,19 | -0,19 |
| N_b^0 t | 135 | 101,2 | 113,6 | 75,7 | 37,9 |
| $\Delta N_b^{(0)}$ t | -87,3 | -65,4 | -60,5 | -40,3 | -20,2 |
| $N_b^{(X)}$ t | -50,8 | -38,1 | -42,7 | -28,4 | -14,2 |
| $P(\alpha)$ | 0,45 | 0,45 | 0,36 | 0,36 | 0,36 |
| $\delta N_b^{(X)}$ t | 22,9 | 17,1 | 15,4 | 10,2 | 5,1 |
| $\Delta N_b^{(X)}$ t | -27,9 | -21,0 | -27,3 | -18,2 | -9,1 |
| ΔN_b t | -115,2 | -86,4 | -87,8 | -58,5 | -29,3 |
| N_b t | 19,8 | 14,8 | 25,8 | 17,2 | 8,6 |

Dwa ostatnie wiersze tablicy 11 nie są konieczne do obliczenia naprężeń; podano je tylko dla orientacji ogólnej w przebiegu zjawiska.

Tablica 12

| | | | | | |
|--|--------|-------|-------|-------|-------|
| $\Delta N_z^{(0)} + \delta N_z^{(X)}$ t | 64,4 | 48,3 | 45,1 | 30,1 | 15,1 |
| $\Delta M_z^{(0)} + \delta M_z^{(X)}$ tm | 72,8 | 54,6 | 51,0 | 34,0 | 17,1 |
| $M^{(X)}$ tm | -131,3 | -98,4 | -98,4 | -65,6 | -32,8 |

Zestawienie naprężeń w przekroju nad podporą B. Naprężenia początkowe

$$\sigma_{zg}^0 = 95,7 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\sigma_{bg}^0 = 20 \text{ kG/cm}^2.$$

$$\sigma_{zd}^0 = -367,6 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\sigma_{bd}^0 = 13,5 \text{ kG/cm}^2.$$

Zmiany naprężeń w środku ciężkości części betonowej:

$$\Delta N_b = -87,3 - 50,8 + 22,9 = -115,2 \text{ t}$$

$$\Delta \sigma_{bsr} = -14,4 \text{ kG/cm}^2.$$

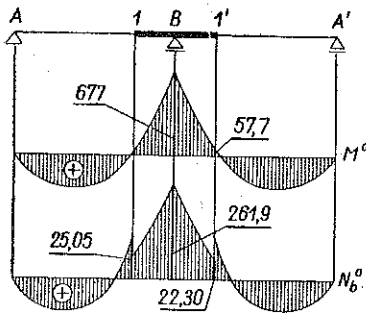
Zmiany naprężeń we włóknach górnych:

$$\begin{aligned} \text{od } \Delta N_b^{(0)} \quad \Delta \sigma_{bg}^{(0)} &= -14,3 \text{ kG/cm}^2, \\ \text{od } M^{(X)} \quad \sigma_{bg}^{(X)} &= -7,5 \text{ kG/cm}^2, \\ \text{od } \delta N_b^{(X)} \quad \delta \sigma_{bg}^{(X)} &\approx 2,9 \text{ kG/cm}^2, \\ \text{razem} \quad \Delta \sigma_{bg} &\approx -19 \text{ kG/cm}^2. \end{aligned}$$

Zmiany naprężeń w części stalowej:

$$\Delta \sigma_{zg} = 115,2 \text{ kG/cm}^2, \quad \Delta \sigma_{zd} = 117,2 \text{ kG/cm}^2.$$

Przykład 8. Obliczymy obecnie wielkość nadliczbowa, jaka powstaje pod obciążeniem stałym w układzie przedstawionym na rys. 10. Obciążenie równomiernie rozłożone $g = 3 \text{ t/mb}$. Wykresy M^0 oraz N_b^0 są przedstawione na rys. 16, zaś pozostałe potrzebne wykresy na rys. 10.



Rys. 16

Wartość całki $\int M_1^{(2)} N_b^0 ds$ na odcinku A-1 wynosi 910,8, a na odcinku 1-B — 1160,8.

Jak widać, funkcja $\delta_{10}(\varphi)$ jest sumą dwu funkcji o rzędnych przeciwnego znaku, co może być przyczyną wolniejszej zbieżności rozwiązania. Dlatego rozdzielimy $\delta_{10}(\varphi)$ na funkcje składowe odpowiadające dodatniej lub ujemnej części całki $\int M_1^{(2)} N_b^0 ds$. Szeregi otrzymane w ten sposób będą na pewno szybko zbieżne, ponieważ jednak (jak się okazuje w toku obliczeń) wynik jest różnicą dwu liczb bliższych sobie, jest rzeczą konieczną dla uzyskania dokładności rzędu 1% uwzględnienie wyrazów $w_{k,r}$ do $w_{1,3}$ włącznie. Zatem potrzebne jest obliczenie czterech kolejnych wyrazów $x_{1,r}$, co wymaga z kolei obliczenia czterech wyrazów $\delta_{10,r}$ oraz trzech wyrazów $\delta_{11,r}$.

Obliczenie podajemy poniżej w skrócie. Współczynniki $a_{N,r}$ (por. przykład 7): na odcinku A-1

$$\begin{aligned} a_{N,1} &= 0,1822 \cdot 10^{-6}, & a_{N,3} &= 0,001096 \cdot 10^{-6}, \\ a_{N,2} &= -0,01731 \cdot 10^{-6}, & a_{N,4} &= -0,00005206 \cdot 10^{-6}; \end{aligned}$$

na odcinku 1-B

$$\begin{aligned} a_{N,1} &= 0,1606 \cdot 10^{-6}, & a_{N,3} &= 0,001810 \cdot 10^{-6}, \\ a_{N,2} &= -0,02088 \cdot 10^{-6}, & a_{N,4} &= -0,0001176 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Współczynniki $\bar{\delta}_{11,r}$ obliczamy jak zwykle dla całości układu (por. przykład 7):

$$\bar{\delta}_{11,1} = 0,9238 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{11,2} = (-2,442 \cdot 0,01731 - 2,982 \cdot 0,02088) \cdot 10^{-6} = -0,1045 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{11,3} = (2,442 \cdot 0,001096 + 2,982 \cdot 0,001810) \cdot 10^{-6} = 0,008073 \cdot 10^{-6}.$$

Współczynniki $\bar{\delta}_{10,r}$ obliczamy osobno dla obu części układu: odcinek A-1

$$\bar{\delta}_{10,1} = 910,8 \cdot 0,1822 \cdot 10^{-6} = 165,9 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{10,2} = -910,8 \cdot 0,01731 \cdot 10^{-6} = -15,76 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{10,3} = 910,8 \cdot 0,001096 \cdot 10^{-6} = 0,9982 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{10,4} = -910,8 \cdot 0,00005206 \cdot 10^{-6} = -0,04741 \cdot 10^{-6},$$

odcinek 1-B

$$\bar{\delta}_{10,1} = -1160,8 \cdot 0,16060 \cdot 10^{-6} = -186,4 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{10,2} = 1160,8 \cdot 0,02088 \cdot 10^{-6} = 24,24 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{10,3} = -1160,8 \cdot 0,001810 \cdot 10^{-6} = -2,101 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{10,4} = 1160,8 \cdot 0,0001176 \cdot 10^{-6} = 0,1365 \cdot 10^{-6}.$$

Jak widać, w wyniku sumowania wyrazów dodatnich i ujemnych otrzymalibyśmy szereg bardzo wolno zbieżny.

Współczynnik $\delta_{11} = 4,753 \cdot 10^{-6}$ (według przykładów 6 i 7). Teraz możemy obliczyć funkcję $X_1(\varphi)$: odcinek A-1

$$x_{1,1} = -\frac{165,9}{4,753} = -34,90,$$

$$z_{11,2} = -\frac{1}{2} 34,90 \cdot 0,9238 \cdot 10^{-6} = -16,12 \cdot 10^{-6},$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{4,753} (-16,12 - 15,76) = 6,707,$$

$$z_{11,3} = \left(\frac{1}{3} 34,90 \cdot 0,1045 + \frac{1}{3} 6,707 \cdot 0,9238 \right) \cdot 10^{-6} = 3,281 \cdot 10^{-6},$$

$$x_{1,3} = -\frac{1}{4,753} (3,281 + 0,998) = -0,9003,$$

$$z_{11,4} = \left(-\frac{1}{4} 34,90 \cdot 0,008073 - \frac{1}{6} 6,707 \cdot 0,1045 - \frac{1}{4} 0,9003 \cdot 0,9238 \right) \cdot 10^{-6} = -0,3951 \cdot 10^{-6},$$

$$x_{1,4} = -\frac{1}{4,753}(-0,3951 - 0,0474) = 0,0931,$$

$$\mu_1 = -\frac{13,414}{34,90} = -0,384,$$

$$w_{1,0} = -\frac{34,90}{0,384} = -90,89,$$

$$w_{1,2} = \frac{1}{6} 0,1475 \cdot 90,89 - \frac{0,9003}{0,384} = -0,1102,$$

$$w_{1,3} = \frac{0,09310}{0,384} - \frac{1}{2} 0,384 \cdot 0,1102 - \frac{1}{24} 0,05664 \cdot 90,89 = 0,00679.$$

Na podstawie analogicznego obliczenia dla odcinka 1-B otrzymujemy:

$$\mu_1 = -0,454, \quad w_{1,0} = 86,39, \quad w_{1,2} = -0,0890, \quad w_{1,3} = 0,00493.$$

Zatem trzecie przybliżenie funkcji nadliczbowej będzie

$$X_1(\varphi) = -(90,89 + 0,1102 \varphi^2 - 0,00679 \varphi^3)(1 - e^{-0,384 \varphi}) + \\ + (86,39 - 0,0890 \varphi^2 + 0,00493 \varphi^3)(1 - e^{-0,454 \varphi}).$$

Wyniki drugiego i trzeciego przybliżenia zestawione są w tabelicy 13.

Tablica 13

| φ | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------------|----------|------|------|------|-------|
| $X_1(\varphi)$ | (II) tm | 2,48 | 2,37 | 0,81 | -1,57 |
| $X_1(\varphi)$ | (III) tm | 2,48 | 2,42 | 1,04 | -0,96 |

Rozwiązanie zamknięte prowadzi do równania (por. tablica 14)

$$X_1(\varphi) = -17,46 - 38,89 e^{-0,437 \varphi} + 56,35 e^{-0,218 \varphi}.$$

Tablica 14

| φ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------------|------|------|------|-------|
| $X_1(\varphi)$ | 2,48 | 2,42 | 1,04 | -0,94 |

Wykres funkcji $X_1(\varphi)$ przedstawia rys. 17.

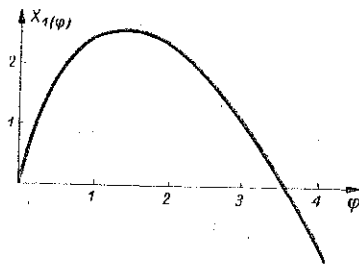
Jak łatwo stwierdzić, oba składowe szeregi $w_{1,r}$ są szybko zbieżne i pierwsze przybliżenie $w_{1,0}$ daje wyniki z błędem poniżej 1%. Obliczenie dwu dalszych wyrazów konieczne jest tylko dlatego, że różnice między wartościami dwu funkcji, które od siebie odejmujemy, są rzędu zaledwie 1-2%.

Szereg $w_{1,r}$ otrzymany przy użyciu pełnej funkcji $\bar{\delta}_{10}(\varphi)$ jest słabo zbieżny i trzy wyrazy dają dla $\varphi > 2$ wyniki obarczone znacznym błędem. Warto też zauważyć, że cztery obliczone wyrazy szeregu $x_{1,r}$ mogą dać dostatecznie dokładne wartości $X_1(\varphi)$ co najwyżej dla $\varphi = 1$.

Podany przykład przedstawia wypadek skrajny, który wymaga stosunkowo dużego nakładu pracy. Należy jednak pamiętać, że w praktyce przyjmowana do obliczeń wartość modułu pełzania wyjątkowo tylko przekracza $\varphi = 2,5$, poza tym zaś wystarczająca jest dokładność wyników rzędu 10%. Dlatego bardzo rzadko (nawet w przypadku zmieniającej znak wielkości nadliczbowej) zachodzi konieczność użycia aż trzech przybliżeń.

Na zakończenie podamy jeszcze kilka uwag natury praktycznej. Przedstawiona powyżej metoda szeregów potęgowych jest ogólna

i umożliwia rozwiązanie nawet skomplikowanych problemów w sposób stosunkowo prosty i, co najważniejsze, przy zastosowaniu działań arytmetycznych. Zakres praktycznej stosowalności rozwiązań zamkniętych określono na początku p. 3. Należy jeszcze podkreślić, że w wyliczonych tam przypadkach rozwiązania zamknięte powinny być stosowane¹⁰⁾. Powstaje pytanie, w jakim stopniu można zastępować



Rys. 17

rozwiązania szeregowe zamkniętymi (w celu uzyskania przybliżonych wyników orientacyjnych) w belkach o zmiennym przekroju poprzecznym, obliczając wielkości nadliczbowe z gotowych wzorów przy upraszczającym założeniu, że przekrój poprzeczny jest stały. Jest rzeczą konieczną rozróżnienie dwu zasadniczych przypadków obliczeń pełzania, przy czym wnioski ograniczamy do belek ciągłych.

Jednym z bardzo ważnych zastosowań obliczeń pełzania jest badanie zmian w siłach wewnętrznych, powstałych wskutek obniżenia podpór (dokonanego sztucznie w celu sprężenia płyty). Wykresy momentów wyjściowych, zatem także wyjściowych sił normalnych N_b^0 , mają wówczas w całym układzie ten sam znak. Z tego powodu nieduże różnice w charakterystykach przekrojów poprzecznych nie mają decydującego wpływu na rozwiązanie, co jest dobrze widoczne, gdy porównamy wyniki otrzymane uprzednio w przykładach 5 i 6. W dodatku trzeba również pamiętać, że wpływ $\Delta N_b^{(X)}$ wielkości nadliczbowych na siły wewnętrzne jest z reguły mniejszy (w punktach niebezpiecznych) niż wpływ ob-

¹⁰⁾ Co prawda, gdy rozwiązanie zamknięte posiada jedną wartość własną (czyli w przypadku równania różniczkowego pierwszego rzędu), wówczas pierwsze przybliżenie za pomocą wzoru (3.24) daje od razu ścisły wynik (dalsze wyrazy $w_{k,r}$ są równe zero).

ciążeń wyjściowych na układzie podstawowym $\Delta N_b^{(0)}$. Dlatego w prostszych konstrukcyjnie belkach ciągłych o stałej wysokości przekroju poprzecznego (w których moment bezwładności rośnie w bliskości podpory, lecz różnice między maksymalnym i minimalnym momentem bezwładności nie przekraczają kilkudziesięciu procent, zaś skoki osi ciężkości części stalowej nie są zbyt duże), można przeprowadzać przybliżone obliczenie wielkości nadliczbowych jak dla belki o stałym przekroju poprzecznym. Natomiast jeżeli zmienność przekroju poprzecznego jest wyraźniejsza (przede wszystkim w belkach o zmiennej wysokości), obliczenie przybliżone jest niemożliwe; właśnie w tych przypadkach szczególnie uwypatniają się korzyści rozwiązań szeregowych.

Innym zastosowaniem obliczeń pełzania jest badanie zmian w siłach wewnętrznych układu, powstałych pod działaniem ciężaru własnego. Z budowy wzoru (3.2) widoczne jest po uwzględnieniu równań (3.3.2), że w układach, w których nie występują siły normalne (zatem, praktycznie biorąc, tylko w belkach ciągłych) pełzanie nie powoduje powstania statycznej niewyznaczalności, jeżeli przekrój poprzeczny wszystkich prętów jest stały i jednakowy ¹¹⁾.

Wpływ ciężaru własnego w opisanych powyżej belkach ciągłych o stosunkowo niewielkich różnicach w przekroju poprzecznym nie jest zbyt duży (por. przykład 8) i nieraz może być pominięty. Natomiast w belkach o wyraźniejszej zmienności przekroju poprzecznego, przede wszystkim gdy ich wysokość jest zmienna, wielkości nadliczbowe, które zostały wywołane ciężarem własnym, mogą być bardzo istotne dla obliczeń. Obliczenie funkcji $\bar{\delta}_{i0}(\varphi)$ lub współczynników $\bar{\delta}_{i0,r}$ należy w tych przypadkach przeprowadzić dokładnie, ponieważ otrzymuje się je (wskutek zmiany znaku funkcji N_b^0) zawsze jako różnicę dwu bliskich sobie liczb. Wszelkie uproszczenia mogą zupełnie zniekształcić wynik.

3.5. Wpływ skurczu betonu. Wielkości nadliczbowe, które powstały pod wpływem skurczu betonu, obliczamy z uwzględnieniem pełzania rozwiązując układ równań (3.5), przy czym zamiast funkcji $\bar{\delta}_{i0}(\varphi)$ należy podstawić funkcje

$$(3.34) \quad \bar{\delta}_{is}(\varphi) = \int_s M_i^{(z)}(s) \varrho_s(\varphi, s) ds + \int_s N_i^{(z)}(s) \varepsilon_s(\varphi, s) ds.$$

Dla obliczeń na podstawie rozwiązań ścisłych rozdziału drugiego wielkości $\varrho_s(\varphi, s)$ i $\varepsilon_s(\varphi, s)$ obliczamy za pomocą następujących wzorów:

$$(3.35) \quad \begin{cases} \varrho_s(\varphi, s) = -\frac{\Delta M_{bs} + \Delta N_{bs} y_c}{E_z J_z}, \\ \varepsilon_s(\varphi, s) = -\frac{\Delta N_{bs}}{E_z F_z}. \end{cases}$$

¹¹⁾ Oczywiście tylko wtedy, gdy cały układ zabetonowano jednocześnie; założenie to towarzyszy wszystkim naszym rozważaniom.

Rozwiązania przybliżone dają:

$$(3.36) \quad \begin{cases} \varrho_s(\varphi, s) = \frac{F_b}{n J_z} \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} y_c (1 - e^{\alpha\varphi}), \\ \varepsilon_s(\varphi, s) = \frac{F_b}{n F_z} \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} (1 - e^{\alpha\varphi}). \end{cases}$$

Jeżeli przekrój poprzeczny prętów jest stały, wówczas wzór (3.34) można napisać z uwzględnieniem (3.36) w postaci

$$(3.37) \quad \bar{\delta}_{is}(\varphi) = A_{is}(1 - e^{\alpha\varphi}),$$

gdzie

$$A_{is} = \frac{F_b}{n J_z} \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} y_c \int_s M_i^{(z)} ds + \frac{F_b}{n F_z} \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} \int_s N_i^{(z)} ds.$$

Przy użyciu wzoru (3.37) równania te można sprowadzić do równań różniczkowych w sposób podany poprzednio. Np. dla układu jednokrotnie statycznie niewyznaczalnego otrzymamy wzór analogiczny do wzoru (3.15)

$$X_1(\varphi) = -\frac{A_{1s}}{A_{11} + \delta_{11}} (1 - e^{\mu\varphi}).$$

Dla układu jednokrotnie statycznie niewyznaczalnego o dwu rodzajach przekrojów poprzecznych lub o stałym przekroju poprzecznym, obliczonego na podstawie rozwiązań ścisłych, równanie nadliczbowej określone jest wzorem (3.10), przy czym zamiast wielkości A_{10}, B_{10}, C_{10} należy podstawiać odpowiednio obliczone wielkości A_{1s}, B_{1s}, C_{1s} .

Rozwiązania funkcyjne równań mają praktyczne znaczenie tylko w najprostszych przypadkach. Dla znalezienia rozwiązania w postaci szeregów należy funkcję $\bar{\delta}_{is}(\varphi)$ rozwinąć w szereg

$$\bar{\delta}_{is}(\varphi) = \bar{\delta}_{is,1} \varphi + \bar{\delta}_{is,2} \varphi^2 + \dots + \bar{\delta}_{is,r} \varphi^r + \dots,$$

gdzie

$$\bar{\delta}_{is,r} = \int_s M_i^{(z)} a_{s,r} ds + \int_s N_i^{(z)} b_{s,r} ds,$$

$$a_{s,r} = -\frac{F_b}{n J_z} \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} y_c \frac{\alpha^r}{r!}, \quad b_{s,r} = -\frac{F_b}{n F_z} \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} \frac{\alpha^r}{r!}.$$

Dalszy tok obliczeń jest identyczny z podanym dla przypadku obciążenia zewnętrznego.

Przykład 9. Dla belki z przykładu 5 przyjmując $\varepsilon = 20 \cdot 10^{-5}$ otrzymamy

$$A_{1s} = 2301 \cdot 10^{-5}, \\ X_1(\varphi) = -204,5 (1 - e^{-0,372 \varphi}).$$

Jak widać, wielkość nadliczbowa, powstała wskutek skurczu betonu, jest bardzo duża i musi być z tego powodu uwzględniona w obliczeniach, tym bardziej że naprężenia w betonie, które wywołuje na podporze środkowej, nakładają się na naprężenia $\sigma_{bs}^{(0)}$. Warto zauważyć, że z obliczenia przy użyciu wzorów statyki budowli (bez uwzględniania pełzania betonu) otrzymuje się nadliczbową równą $X_1 = -303,4$ tm. Zatem uwzględnienie pełzania daje w tym przypadku wyraźne korzyści.

Tablica 15

| φ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------------------|-------|--------|--------|--------|
| $X_1(\varphi)$ tm | -63,5 | -107,3 | -137,5 | -158,3 |

3.6. Rozwiązywanie równań za pomocą transformacji Laplace'a. Podany poprzednio sposób rozwiązywania funkcyjnego równań, polegający na kolejnym ich różniczkowaniu, jest niewygodny, ponieważ wymaga stosunkowo dużej liczby przekształceń, przy czym konieczne jest określenie dodatkowych warunków brzegowych. Trudności tych można częściowo uniknąć stosując transformację Laplace'a.

Weźmy pod uwagę układ równań w postaci (3.5.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \delta_{11} + \dots + X_n \delta_{1n} - \int_0^{\varphi} X_1(\varphi_1) \frac{d\bar{\delta}_{11}(\varphi - \varphi_1)}{d\varphi_1} d\varphi_1 - \\ \dots - \int_0^{\varphi} X_n(\varphi_1) \frac{d\bar{\delta}_{1n}(\varphi - \varphi_1)}{d\varphi_1} d\varphi_1 + \bar{\delta}_{10}(\varphi) = 0, \\ \dots \\ X_1 \delta_{n1} + \dots + X_n \delta_{nn} - \int_0^{\varphi} X_1(\varphi_1) \frac{d\bar{\delta}_{n1}(\varphi - \varphi_1)}{d\varphi_1} d\varphi_1 - \\ \dots - \int_0^{\varphi} X_n(\varphi_1) \frac{d\bar{\delta}_{nn}(\varphi - \varphi_1)}{d\varphi_1} d\varphi_1 + \bar{\delta}_{n0}(\varphi) = 0. \end{array} \right.$$

Niech $x_k(s)$ oznacza transformatę funkcji $X_k(\varphi)$: $\mathcal{L}\{X_k(\varphi)\} = x_k(s)$. Każda z całek występujących w równaniach (3.5.1) stanowi splot dwu funkcji, który transformuje się, jak wiadomo, na iloczyn odpowiednich funkcji zmiennej s zgodnie ze wzorem

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau \right\} = f_1(s) \cdot f_2(s),$$

gdzie

$$f_1(s) = \mathcal{L}\{F_1(t)\}, \quad f_2(s) = \mathcal{L}\{F_2(t)\}.$$

Według (3.38) mamy

$$x_1(s) = -\frac{\gamma_{10}(s)}{\delta_{11} + \gamma_{11}(s)}$$

Ponieważ [por. wzory (3.14)]

$$\bar{\delta}_{10}(\varphi) = A_{10}(1 - e^{a\varphi}), \quad \bar{\delta}_{11}(\varphi) = A_{11}(1 - e^{a\varphi}),$$

zatem

$$\gamma_{10}(s) = A_{10} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-a} \right), \quad \gamma_{11}(s) = -A_{11} \frac{\alpha}{s-a};$$

stąd

$$x_1(s) = -\frac{A_{10} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-a} \right)}{\delta_{11} - A_{11} \frac{\alpha}{s-a}}$$

Po krótkich przekształceniach otrzymamy

$$x_1(s) = -\frac{A_{10}}{A_{11} + \delta_{11}} \frac{1}{s} + \frac{A_{10}}{A_{11} + \delta_{11}} \frac{1}{s-a},$$

gdzie

$$\mu = a \frac{A_{11} + \delta_{11}}{\delta_{11}}.$$

Transformacja odwrotna daje wynik

$$X_1(\varphi) = -\frac{A_{10}}{A_{11} + \delta_{11}} (1 - e^{\mu\varphi}).$$

identyczny ze wzorem (3.15).

4. Inne zagadnienia

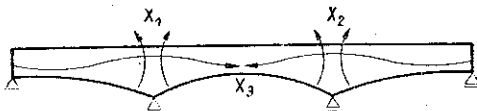
Uwzględnianie zbrojenia betonu. Uwzględnianie tego czynnika nie przedstawia żadnych trudności. Przekrój żelaza zbrojeniowego należy uważać za część przekroju poprzecznego dźwigara stalowego i w takim charakterze powinien być uwzględniony w obliczeniu wielkości geometrycznych. W przypadku różnych modułów sprężystości można stosować odpowiedni współczynnik analogiczny do współczynnika n . Jest rzeczą oczywistą, że wpływ zbrojenia betonu tak na odkształcenia, jak i na naprężenia jest w typowych przekrojach bardzo mały.

Układy sprężone kablami. Układy sprężone należy obliczać za pomocą wzorów podanych w rozdziałach 1 i 2.

Układ sprężony jest po naciągnięciu kabli statycznie wewnętrznie niewyznaczalny, przy czym każdy kabel daje jedną niewiadomą. Niewiadome te, jak również niewiadome przyjęte w prętach zespolonych, można obliczyć rozwiązując układ równań (3.5). Przykład założenia układu podstawowego przedstawiono na rys. 18. Wielkości δ_{ik} dla niewiadomych

przyjętych w kablach należy obliczać z uwzględnieniem odkształceń osiowych kabli, a czasem również prętów.

Obciążenia późniejsze. W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy, że wszystkie obciążenia wywołujące pełzanie betonu przyłożone są w tej samej chwili, mianowicie $t = 0$, której odpowiada wartość modułu pełzania $\varphi = 0$, tzn. w chwili rozszalowania konstrukcji. W praktyce niejednokrotnie znaczna część



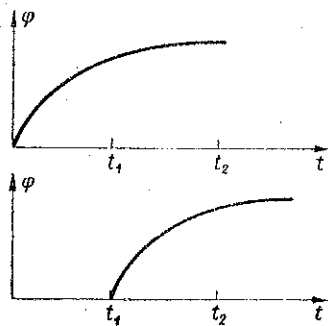
Rys. 18

obciążeń stałych może być przyłożona dopiero w późniejszym okresie (np. przy układaniu jezdni mostów). Obliczenie dla tych obciążeń należy przeprowadzać na zasadach ogólnych, przy czym konieczne jest odpowiednie zmniejszenie modułu pełzania; dla obciążenia przyłożonego w chwili $t = t_1$ moduł wynosi $\varphi_1 = \varphi(t) - \varphi(t_1)$.

Betonowanie niejednoczesne. Betonowanie odcinkami ma zastosowanie przy budowie każdego większego obiektu. Jeżeli proces ten trwa krótko, wówczas można przyjąć, że wiek betonu i szybkość narastania odkształceń plastycznych są w całym ustroju jednakowe. Jeżeli przerwy między betonowaniem poszczególnych części ustroju są duże, to odkształcenia plastyczne betonu w różnych punktach będą w danym okresie czasu różne. Ścisłe obliczenie wymagałoby wyprowadzenia wzorów uwzględniających zależność modułu pełzania od czasu. Przybliżony i wystarczająco dokładny sposób obliczenia objaśnimy na prostym przykładzie. Przypuśćmy, że w chwili $t = 0$ zabetonowano pierwszą część ustroju, zaś w chwili $t = t_1$ drugą. Obliczenie dla $t < t_1$ należy wykonać na zasadach ogólnych. Obliczenie dla $t_1 < t < t_2$ należy nawiązać do modułu pełzania betonu pierwszej części z tym, że przy obliczaniu wielkości δ_{i0} , δ_{ik} całki po drugiej części układu należy pomnożyć przez współczynnik

$$\frac{\varphi(t_2 - t_1)}{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}$$

gdzie t_2 oznacza chwilę odpowiadającą maksymalnej przyjętej wartości modułu pełzania dla pierwszej części układu (rys. 19). Oczywiście, obciążenie układu betonem w chwili $t = t_1$ powoduje powstawanie nowych obciążeń wyjściowych, które w sumie z już istniejącymi siłami wewnętrznymi stanowią podstawę do obliczenia dla $t_2 > t > t_1$. Obliczenie dla $t > t_2$ należy robić w założeniu, że beton pierwszej części podlega tylko odkształceniom sprężystym.



Rys. 19

Obliczenie dla $t > t_2$ należy robić w założeniu, że beton pierwszej części podlega tylko odkształceniom sprężystym.

Wpływ pełzania betonu na siły rozwarstwiające między płytą i dźwigarem stalowym. W urządzeniach statycznie wyznaczalnych zmiany sił rozwarstwiających powodowane pełzaniem betonu otrzymamy ze wzoru

$$(3.38.1) \quad \Delta R = \frac{d \Delta N_b}{ds}.$$

Różniczkowanie we wzorze (3.38) na ogół przeprowadza się numerycznie.

Dla układów statycznie niewyznaczalnych mamy analogiczne wzory

$$\Delta R^{(0)} = \frac{d \Delta N_b^{(0)}}{ds}, \quad R^{(X)} = \frac{d N_b^{(X)}}{ds}, \quad \delta R^{(X)} = \frac{d \delta N_b^{(X)}}{ds}.$$

Zatem można obliczać również sumaryczne zmiany w siłach rozwarstwiających

$$\Delta R = \frac{d \Delta N_b}{ds},$$

gdzie

$$\Delta N_b = \Delta N_b^{(0)} + \Delta N_b^{(X)}.$$

Ponieważ pełzanie zmniejsza siły normalne N_b , zatem zmniejsza również siły rozwarstwiające.

Literatura cytowana w tekście

[1] A. Chudzikiewicz, *Wpływ pełzania betonu na sprężone urządzenia prętowe*, Rozpr. Inżyn. 2 (1956).

[2] K. Klöppel, *Die Theorie der Stahlverbundbauweise in statisch unbestimmten Systemen unter Berücksichtigung des Kriecheinflusses*, Der Stahlbau (1951).

Резюме

ВЛИЯНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА НА КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Методы, излагаемые в настоящей работе, основываются на положениях теории ползучести бетона Д и ш и н г е р а.

Способы расчета влияния ползучести бетона в статически определимых системах рассматриваются во второй главе. Точные решения даны уравнениями (2.7); для практических целей приводятся приближенные решения (2.9) и (2.11), обладающие большой точностью в тонких сечениях.

Третья глава посвящена теории статически неопределимых систем. В качестве неизвестных принимаются переменные избыточные величины $X_k(\varphi)$. Применяя рассуждения метода сил, получается система интегральных уравнений (3.5). Обозначения заимствованы из метода сил, причем $\delta_{i0}(\varphi)$ представляет собой влияние пластических дефор-

маций, вызванных исходной нагрузкой (действующей от $\varphi=0$), а $\bar{\delta}_{ik}(\varphi)$ — влияние пластических деформаций, вызываемых постоянно действующей избыточной $X_k=1$. Замкнутое решение системы уравнений (3.5) принципиально возможно и достижимо, путем приведения к системе дифференциальных уравнений. Число уравнений соответствует числу неизвестных. В случае постоянного поперечного сечения всех стержней, это уравнения второй степени (при использовании точных формул второй главы) или первой степени (при применении приближенных формул). В случае кусочно-переменного поперечного сечения ряд уравнений равен числу различных поперечных сечений. По упомянутым причинам замкнутые решения применимы лишь в наиболее простых случаях [формулы (3.10) и (3.15); числовые примеры 4, 5 и 6]. Метод, позволяющий решать самые сложные вопросы, при применении лишь расчетных действий, дан степенными рядами. Здесь неизвестные принимаются в виде (3.16). Последовательные члены ряда $x_{k,r}$ получаются из систем алгебраических уравнений. Ряд (3.16) чаще всего сходится медленно. Для улучшения сходимости рядов следует решение представить в виде (3.22). Самая лучшая сходимость достигается, если принять коэффициент μ_k согласно (3.23). Тогда вообще достаточен один член ряда и решение можно выразить с удовлетворительной точностью формулой: $X_k(\varphi) = w_{k,0}(1 - e^{\mu_k \varphi})$. Более медленная сходимость ряда $w_{k,r}$ может выступать в редких случаях, когда избыточная неизвестная переходит через максимум или изменяет знак (рис. 12с и 12е). Однако всегда (для $\varphi < 4$) достаточно вычисление трех членов. Числовые примеры 7 и 8 объясняют способ вычислений при помощи рядов; результаты сопоставляются с точными решениями.

S u m m a r y

THE EFFECT OF CREEP OF CONCRETE ON COMPOSED BEAM STRUCTURES

The methods discussed in this paper are based on the assumptions of D i s c h i n g e r's theory of creep of concrete.

The calculation methods of the influence of creep of concrete in statically determinate structures are discussed in the second Article. Accurate solutions are given by Eqs. (2.7). For practical purposes, however, approximate solutions, (2.9) and (2.11), are proposed, the approximation being good for cross-sections with thin slabs.

The third Article is devoted to the theory of statically indeterminate structures. Using the well-known virtual work method we obtain the system of integral equations (3.5) in which the unknown functions $X_k(\varphi)$ are the redundant forces. The notations are taken from the stress

method; $\bar{\delta}_{i_0}(\varphi)$ represents the influence of plastic deformations due to the initial load (acting from $\varphi = 0$) and $\bar{\delta}_{ik}(\varphi)$ that of plastic deformations due to the constant action of the redundant force $X_k = 1$. The solution of the system of equations (3.5) is, in principle, possible, the number of equations being equal to that of the unknowns. This may be achieved by transforming (3.5) into a system of differential equations with constant coefficients (or by using the Laplace transformation). In the case of constant cross-section of all members the differential equations are of the second order (if the accurate formulae of the second Article are used), or of the first order (if approximate formulae are used). If the cross-section is sectionally variable the order of the equations is equal to the number of different cross-sections. In view of the above, solutions can easily be obtained only in the most simple cases [Eqs. (3.10) and (3.15); numerical examples 4, 5 and 6]. A method enabling the solution of most complicated cases by the use of arithmetic operations only is obtained with the aid of power series. The unknowns are taken in the form (3.16). The successive terms of the series $\bar{x}_{k,r}$ are obtained from systems of algebraic equations. The series (3.16) is usually slowly convergent. In order to obtain rapidly convergent series the solution should be represented in the form (3.22). The best convergence is secured by the assumption of the coefficient μ_k according to (3.23). Then, one term is usually sufficient and the solution can be represented with a sufficient accuracy by the equation $X_k(\varphi) = w_{k,0} (1 - e^{\mu_k \varphi})$. A slower convergence may appear in the rare cases where the redundant force passes through its maximum value or changes the sign (Figs. 12c and 12e). Three terms, however, are always sufficient for $\varphi < 4$. The series calculation method is illustrated by the examples 7 and 8; the results are compared with accurate solutions.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 października 1955 r.