FRANCISZEK SZELĄGOWSKI

JEDNOKIERUNKOWE ROZCIĄGANIE PIERŚCIENIA KOŁOWEGO

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LII

(4) $$R_\Theta + iR_r = \frac{1}{2}\left[2R_\Theta + i(R_r - \Theta_\Theta) + i(R_r + \Theta_\Theta)\right] =$$

$$= \frac{e^{2i\Theta}}{2}\left[2X_y + i(X_x - Y_y)\right] + \frac{i}{2}(X_x + Y_y) = \frac{ip}{2}(1 - e^{2i\Theta}) =$$

$$= \frac{ip}{2}\left(1 - \frac{e^{2\zeta}}{R_0^2}\right) = -\frac{i}{4}\Phi'(\zeta) + \frac{e^{2\zeta}}{2R_0^2}F(\zeta) + \frac{i}{4}\left[\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)\right],$$

gdzie X_y, X_x oraz Y_y oznaczają naprężenia w układzie współrzędnych prostokątnych.

Na wewnętrznym obwodzie pierścienia kołowego o promieniu R, wobec istnienia ośrodka sztywnego, wartości odpowiednich przemieszczeń v i u są równe zeru. Uwzględniając to założenie znajdziemy ze wzoru (3) drugi warunek brzegowy dla $r = R$ w następującej postaci:

(5) $$-ie^{\zeta_1}\Phi(\zeta) + ik\int \Phi_1(\zeta_1)e^{\zeta_1}d\zeta_1 + 2\int F(\zeta)e^{\zeta}d\zeta = 0.$$

Ponieważ funkcje $\Phi(\zeta)$ i $F(\zeta)$ są holomorficzne w obszarze pierścienia, więc mogą być przedstawione w postaci szeregów L a u r e n t a:

$$\Phi(\zeta) = a_0 + \sum a_n e^{n\zeta} + \sum b_n e^{-n\zeta},$$

$$F(\zeta) = c_0 + \sum c_n e^{n\zeta} + \sum d_n e^{-n\zeta}.$$

W rozpatrywanym zagadnieniu należy przyjąć tylko pewne wyrazy powyższych szeregów, mianowicie:

(6) $$\Phi(\zeta) = a_0 + a_2 e^{2\zeta} + b_2 e^{-2\zeta},$$

(7) $$\Phi_1(\zeta_1) = a_0 + a_2 e^{2\zeta_1} + b_2 e^{-2\zeta_1},$$

(8) $$F(\zeta) = ic_0 + id_2 e^{-2\zeta} + id_4 e^{-4\zeta}.$$

Jak to wskazują obliczenia wstępne, współczynniki przy pozostałych wyrazach otrzymują wartości zerowe.

Po wprowadzeniu do wzorów (4) i (5) wartości funkcji $\Phi(\zeta)$, $\Phi_1(\zeta^1)$ i $F(\zeta)$, określonych wzorami (6), (7) i (8), otrzymujemy w wyniku odpowiednich działań sześć następujących równań:

$$\frac{d_2}{R_0^2} + a_0 = p, \qquad -a_0 R^2 + ka_0 R^2 - 2d_2 = 0,$$

$$-\frac{a_2 R_0^2}{2} + c_0 + \frac{b_2}{2R_0^2} = -p, \qquad -a_2 R^4 - kb_2 + 2c_0 R^2 = 0,$$

$$\frac{3}{2}\frac{b_2}{R_0^2} + \frac{d_4}{R_0^4} + \frac{a_2 R_0^2}{2} = 0, \qquad -b_2 + \frac{ka_2}{3}R^4 - \frac{2}{3}\frac{d_4}{R^2} = 0.$$

Z równań tych możemy wyznaczyć sześć niewiadomych współczynników a_0, a_2, b_2, c_0, d_2 i d_4.

Wartości tych współczynników są następujące:

$$a_0 = p\left(1 - \frac{\frac{R^2}{R_0^2}}{\frac{2}{k-1} + \frac{R^2}{R_0^2}}\right), \qquad a_2 = \frac{2p}{R_0^2\left[1 - \frac{R^2}{R_0^2} + \frac{\left(1 + k\frac{R^6}{R_0^6}\right)\left(k + \frac{R^2}{R_0^2}\right)}{3\frac{R^2}{R_0^2}\left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right)}\right]},$$

$$b_2 = -a_2\frac{R_0^4}{3}\frac{1 + k\frac{R^6}{R_0^6}}{1 - \frac{R^2}{R_0^2}}, \qquad c_0 = -p + \frac{a_2 R_0^2}{2} - \frac{b_2}{2R_0^2},$$

$$d_2 = \frac{pR^2}{\frac{2}{k-1} + \frac{R^2}{R_0^2}}, \qquad d_4 = -\frac{3}{2}b_2 R_0^2 - \frac{a_2}{2}R_0^6.$$

Mając w ten sposób określone funkcje $\Phi(\zeta)$, $\Phi_1(\zeta_1)$ i $F(\zeta)$ można z kolei określić ze wzorów (1) i (2) wartości naprężeń R_Θ, R_r i Θ_Θ w dowolnym punkcie pierścienia. Prowadzi to do następujących wzorów:

$$R_\Theta = \frac{1}{2}\left(-c_0 + a_2 r^2 + \frac{b_2}{r^2} + \frac{d_4}{r^4}\right)\sin 2\Theta, \tag{9}$$

$$R_r = \frac{1}{2}\left(c_0 + \frac{2b_2}{r^2} + \frac{d_4}{r^4}\right)\cos 2\Theta + \frac{d_2}{2r^2} + \frac{a_0}{2}, \tag{10}$$

$$\Theta_\Theta = \frac{1}{2}\left(-c_0 + 2a_2 r^2 - \frac{d_4}{r^4}\right)\cos 2\Theta - \frac{d_2}{2r^2} + \frac{a_0}{2}. \tag{11}$$

Za pomocą tych wzorów można określić (z pewnym przybliżeniem) stan naprężenia w jednokierunkowo rozciąganym pasmie z ośrodkiem sztywnym zarysu kołowego (rys. 2) wychodząc z założenia, że w rzeczywistości wpływ takiego ośrodka sztywnego na rozkład naprężeń w tarczy nieograniczonej znika w pewnym dostatecznie wielkim obszarze. Obszar ten został tutaj wyznaczony okręgiem koła o promieniu R_0.

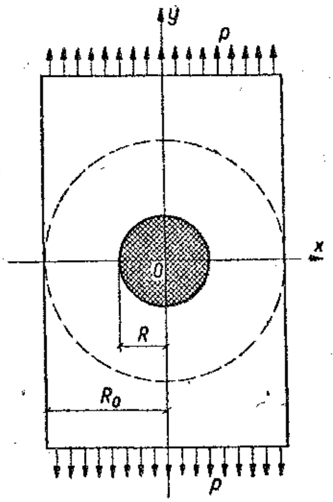
Jako drugi przykład zostanie rozpatrzony przypadek jednokierunkowego rozciągania pierścienia kołowego naprężeniami p, działającymi na zewnętrznym obwodzie koła o promieniu R_0, oraz naprężeniami q, działającymi na wewnętrznym obwodzie koła o promieniu R (rys. 3).

Zgodnie ze wzorem (4) można napisać dla zewnętrznego obwodu pierścienia

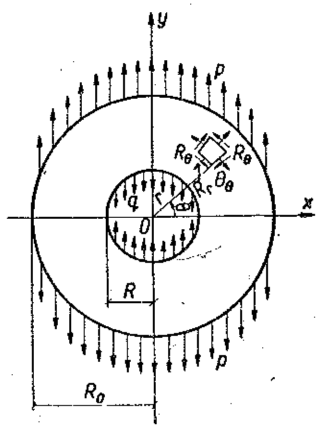
$$\frac{ip}{2}\left(1-\frac{e^{2\zeta}}{R_0^2}\right)=-\frac{i}{4}\Phi'(\zeta)+\frac{e^{2\zeta}}{2R_0^2}F(\zeta)+\frac{i}{4}\left[\Phi(\zeta)+\Phi_1(\zeta_1)\right] \tag{12}$$

oraz dla wewnętrznego obwodu pierścienia odpowiednio

$$\frac{iq}{2}\left(1-\frac{e^{2\zeta}}{R^2}\right)=-\frac{i}{4}\Phi'(\zeta)+\frac{e^{2\zeta}}{2R^2}F(\zeta)+\frac{i}{4}\left[\Phi(\zeta)+\Phi_1(\zeta_1)\right]. \tag{13}$$



Rys. 2



Rys. 3

Ponieważ w rozpatrywanym zagadnieniu funkcje $\Phi(\zeta)$ i $F(\zeta)$ są holomorficzne w obszarze pierścienia, zatem można je przyjąć, ogólnie rzecz biorąc, w postaci szeregów L a u r e n t a.

Jak wskazują obliczenia wstępne, funkcje te należy przyjąć, podobnie jak to miało miejsce w zagadnieniu rozpatrzonym poprzednio w postaci szczególnej

$$\Phi(\zeta)=m+\alpha e^{2\zeta}+\beta e^{-2\zeta}, \tag{14}$$

$$\Phi_1(\zeta_1)=m+\alpha e^{2\zeta_1}+\beta e^{-2\zeta_1}, \tag{15}$$

$$F(\zeta)=in+i\gamma e^{-2\zeta}+i\delta e^{-4\zeta}, \tag{16}$$

gdyż pozostałe współczynniki szeregów L a u r e n t a przybierają wartości zerowe.

Z kolei wprowadzając do wzorów (12) i (13) wyrażenia (14), (15) i (16) znajdziemy

$$\frac{ip}{2}\left(1-\frac{e^{2\zeta}}{R_0^2}\right)=-\frac{i}{2}(\alpha e^{2\zeta}-\beta e^{-2\zeta})+\frac{ie^{2\zeta}}{2R_0^2}(n+\gamma e^{-2\zeta}+\delta e^{-4\zeta})+$$
$$+\frac{i}{4}[2m+\alpha(e^{2\zeta}+e^{2\zeta_1})+\beta(e^{-2\zeta}+e^{-2\zeta_1})],$$

$$\frac{iq}{2}\left(1-\frac{e^{2\zeta}}{R^2}\right)=-\frac{i}{2}(\alpha e^{2\zeta}-\beta e^{-2\zeta})+\frac{ie^{2\zeta}}{2R^2}(n+\gamma e^{-2\zeta}+\delta e^{-4\zeta})+$$
$$+\frac{i}{4}[2m+\alpha(e^{2\zeta}+e^{2\zeta_1})+\beta(e^{-2\zeta}+e^{-2\zeta_1})].$$

Stąd otrzymujemy układ sześciu równań dla wyznaczenia sześciu niewiadomych współczynników m, α, β, n, γ oraz δ:

$$\frac{\gamma}{R_0^2}+m=p, \qquad \frac{\beta}{2R_0^2}+n-\frac{\alpha R_0^2}{2}=-p,$$

$$\alpha R_0^2+\frac{3\beta}{R_0^2}+\frac{2\delta}{R_0^4}=0, \qquad \frac{\gamma}{R^2}+m=q,$$

$$\frac{\beta}{2R^2}+n-\frac{\alpha R^2}{2}=-q, \qquad \alpha R^2+\frac{3\beta}{R^2}+\frac{2\delta}{R^4}=0.$$

Wartości tych współczynników są następujące:

$$m=p+\frac{p-q}{\frac{R_0^2}{R^2}-1}, \qquad \alpha=\frac{6(p-q)}{R^2}\,\frac{\frac{R_0^2}{R^2}}{1-\frac{R_0^6}{R^6}-3\frac{R_0^2}{R^2}\left(1-\frac{R_0^2}{R^2}\right)},$$

$$\beta=-\frac{\alpha R^4}{3}\,\frac{\frac{R_0^6}{R^6}-1}{\frac{R_0^2}{R^2}-1}, \qquad n=-p+\frac{\alpha R_0^2}{2}-\frac{\beta}{2R_0^2},$$

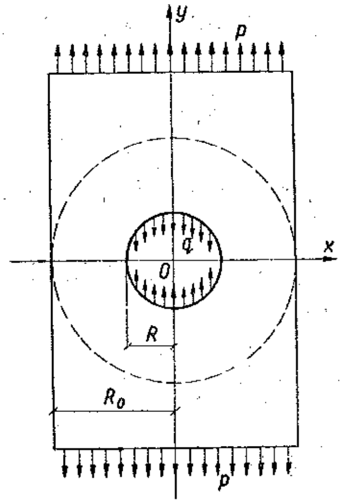
$$\gamma=\frac{p-q}{\frac{1}{R_0^2}-\frac{1}{R^2}}, \qquad \delta=-\frac{\alpha R_0^6}{2}-\frac{3\beta R_0^2}{2}.$$

Mając w ten sposób oznaczone współczynniki występujące w funkcjach (14), (15) i (16) można ostatecznie określić ze wzorów (1) i (2) wartości naprężeń R_Θ, R_r i Θ_Θ w dowolnym punkcie obszaru pierścieniowego w następującej postaci:

$$R_\Theta=\frac{1}{2}\left(-n+\alpha r^2+\frac{\beta}{r^2}+\frac{\delta}{r^4}\right)\sin 2\Theta,$$

$$R_r = \frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{r^2} + \frac{\delta}{r^4} + n\right)\cos 2\Theta + \frac{\gamma}{2r^2} + \frac{m}{2},$$

$$\Theta_\Theta = \frac{1}{2}\left(2\alpha r^2 - \frac{\delta}{r^4} - n\right)\cos 2\Theta - \frac{\gamma}{2r^2} + \frac{m}{2}.$$



Rys. 4

Powyższe wzory podobnie zresztą jak w uprzednio rozpatrzonym zagadnieniu umożliwiają również w pewnym przybliżeniu określenie stanu naprężenia w pasmie jednokierunkowo rozciąganym z otworem kołowym, obciążonym na obwodzie naprężeniami działającymi w tym samym kierunku (rys. 4). I w tym przypadku przyjmiemy założenie, że wpływ otworu oraz jego obciążenia znikają w pewnym dostatecznie wielkim obszarze tarczy nieograniczonej. Obszar ten został objęty okręgiem koła o promieniu R_0.

Резюме

ОДНОСТОРОННЕЕ РАСТЯЖЕНИЕ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Вопросы, касающиеся определения напряжений и перемещений в круговом кольце, по сравнению с проблемой бесконечной плоскости с отверстием, в общем более сложны. Однако, в некоторых особых случаях и этого рода задачи могут решаться довольно просто. В качестве примера рассматривается одностороннее растяжение кругового кольца с жесткой круговой шайбой (рис. 1); на внешней окружности радиусом в R_0 растягивающие напряжения p расположены равномерно вдоль диаметра.

Затем, в качестве второго примера, рассматривается случай одностороннего растяжения кругового кольца напряжениями p, действующими на внешней окружности радиусом в R_0, а также напряжениями q, действующими на внутренней окружности радиусом R (рис. 3).

Полученные формулы, определяющие значения напряжений R_Θ, R_r и Θ_Θ дают возможность, с некоторым приближением, определять напряжения в односторонне растягиваемой полосе (рис. 2 и 4), исходя из предположения, что, в действительности, влияние жесткой шайбы или отверстия на распределение напряжений в бесконечной плоскости исчезает в некоторой, достаточно удаленной зоне. Последняя в описанных случаях, ограничена окружностью радиусом R_0.

Summary

ONE-DIRECTIONAL TENSION OF A CIRCULAR RING

Problems concerning the determination of stress of strain in a circular ring are, in general, more complicated than analogous problems for an infinite plate with a hole. However, these problems can be solved in some cases in a relatively simple manner. As an example the problem of one-directional tension of a circular ring is considered having a rigid circular inclusion (Fig. 1), and subjected to a tensile load p acting on the periphery of the circle of radius R_0 and uniformly distributed along the diameter.

The second example is furnished by the problem of one-directional tension of a circular ring by a load p acting on the outer circle, of radius R_0, and a load q acting on the inner circle, of radius R (Fig. 3).

The equations obtained, determining the values of the stresse R_Θ, R_r, Θ_Θ, enable also an approximate determination of the stresses in a strip subjected to tension (Figs. 2 and 4), starting from the assumption that the influence of a rigid inclusion or a hole on stress distribution in an infinite plate becomes insignificant beyond a certain region, sufficiently large and bounded in our case by a circle of radius R_0.

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 listopada 1954 r.