

JERZY NOWIŃSKI

O PEWNYM ZASTOSOWANIU TRANSFORMACJI LAPLACE'A  
PRZY WYZNACZANIU UGIĘCIA ŁUKÓW

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
LI

Określenie linii ugięcia łuków, zwłaszcza zaś łuków o małej sztywności, wymagających uwzględnienia wpływu ugięcia na działanie obciążenia, przedstawia w praktyce konstruktorskiej zadanie dość kłopotliwe. Z drugiej strony zadanie to posiada znaczną wagę praktyczną między innymi z tego względu, że pozwala na stosunkowo łatwe określenie zgodności obliczeń teoretycznych z danymi doświadczeń przeprowadzonych na modelach lub na samych obiektach. Wydaje się równocześnie, że — chociaż teoria łuków stała się już w znacznej mierze klasycznym działem mechaniki budowli, gruntownie zbadanym i wyjaśnionym — sprawa wyznaczania ugięcia łuków nie straciła jeszcze w pełni swej aktualności. Autor niniejszych słów miał możliwość bezpośredniego przekonania się o tym w czasie doświadczalnych badań wielkiego modelu sklepienia w pewnej instytucji naukowej.

Z tych względów wydaje się pożyteczne rozważenie raz jeszcze omawianego zagadnienia przez sformułowanie równania różniczkowego linii ugięcia łuków i rozwiązanie tego równania za pomocą przekształcenia Laplace'a<sup>1)</sup>. Uzyskuje się w ten sposób tzw. uniwersalne równanie linii ugięcia ważne dla dowolnego typu łuku i dla dowolnego obciążenia zarówno dla łuków sztywnych, jak i dla łuków wiotkich.

Najlepiej zilustrują to zresztą następujące dalej rozważania.

Weźmy w tym celu pod uwagę łuk symetryczny względem osi pionowej dowolnie utwierdzony w węzłowiach i dowolnie obciążony. Oznaczmy przez  $r$  (w ogólności zmienny) promień krzywizny osi łuku, przez  $\varphi$  kąt stycznej do osi łuku z poziomem i przez  $s$  współrzędną mierzoną wzdłuż osi łuku poczynając od «lewej» podpory (rys. 1). Obciążenie jednostkowe pionowe (liczone na razie na jednostkę długości osi łuku) w miejscu  $T$ , w którym  $s = t$  i  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , niech będzie  $p(t)$ , a moment zginający, siła poprzeczna (prostopadła do osi łuku) i siła podłużna (styczna do osi łuku) w punkcie  $S$  — w którym  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  — niech będą odpowiednio równe  $M(s)$ ,  $Q(s)$  i  $N(s)$ . Inne oznaczenia wynikają wprost z rys. 1.

<sup>1)</sup> Transformację Laplace'a do zagadnień statyki zastosował pierwszy w literaturze polskiej J. Naleszkie wicz jeszcze w 1949 r. w wartościowej pracy opublikowanej w zesz. 2, t. 1 Arch. Mech. Stos., [2].

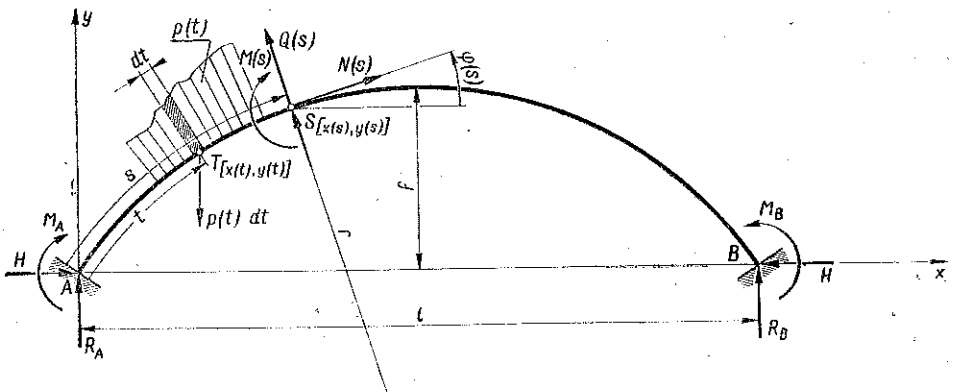
Jak wiadomo ([1], s. 338),

$$(1) \quad M(s) = M_A + R_A x(s) - H y(s) - \int_0^s p(t) |x(s) - x(t)| dt,$$

$$(2) \quad Q(s) = R_A \cos \varphi - H \sin \varphi - \int_0^s p(t) \cos \varphi dt.$$

Jeżeli skorzystamy ze wzoru na pochodną względem parametru  $\alpha$  całki określonej, posiadającej górną granicę i funkcję podcałkową zależną od tego parametru, [8],

$$(3) \quad \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\alpha} f(x, \alpha) dx = \int_0^{\alpha} f'_\alpha(x, \alpha) d\alpha + f(\alpha, \alpha),$$



Rys. 1.

to potwierdzimy znany związek ([1], s. 339)

$$(4) \quad \frac{dM(s)}{ds} = Q(s).$$

Tutaj, oczywiście, przyjęliśmy

$$(5) \quad \sin \varphi(s) = \frac{dy(s)}{ds}, \quad \cos \varphi(s) = \frac{dx(s)}{ds}.$$

Różniczkując powtórnie obie strony równości (4) i uwzględniając (3) otrzymujemy

$$(6) \quad \frac{dQ(s)}{ds} = R_A \frac{d^2 x(s)}{ds^2} - H \frac{d^2 y(s)}{ds^2} - \int_0^s p(t) \frac{d^2 x(s)}{ds^2} dt - p(s) \frac{dx(s)}{ds}.$$

Założmy, że rozważania nasze dotyczą łuków o małej krzywiznie i o małej wyniosłości  $\zeta = f/l$  (por. rys. 1). Możemy wówczas przyjąć, że <sup>2)</sup>  $\cos \varphi \approx \text{const} = \cos \varphi_{l/4} = \kappa$ , gdzie  $\varphi_{l/4}$  jest nachyleniem stycznej do osi łuku w jednej czwartej rozpiętości, wobec czego  $x''(s) = 0$  i w dalszym ciągu na podstawie (6)

$$(7) \quad \frac{dQ(s)}{ds} = -H \frac{d^2 y(s)}{ds^2} - \kappa p(s).$$

Przyjmijmy, że oś łuku posiada — ze znanych względów dogodny dla łuków — kształt paraboli drugiego stopnia o równaniu

$$(8) \quad y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

Wówczas, naturalnie,

$$(9.1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2}$$

i z przyjętym stopniem dokładności

$$(9.2) \quad \frac{d^2 y}{ds^2} = -\frac{8f}{l^2} \kappa^2.$$

Po uwzględnieniu (4) i (9.2) wzór (7) zapisać można w postaci

$$(10) \quad \frac{d^2 M}{ds^2} = h - \kappa p(s),$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenie

$$(11) \quad h = \frac{8f}{l^2} H \kappa^2.$$

Jak wynika ze wzoru (7), który zapisać teraz można w postaci

$$(12) \quad \frac{dQ}{ds} = h - \kappa p(s),$$

wzór na pochodną siły poprzecznej w łukach różni się od wzoru na pochodną siły poprzecznej w belkach stałym (oczywiście, na skutek przyjętych poprzednio uproszczeń) składnikiem  $h$  zależnym od wielkości rozporu łuku  $H$ . Wartość tego składnika w ogólności nie jest z góry znana.

<sup>2)</sup> Gdy  $\varphi$  jest małym kątem, to jak wiadomo — por. [8], s. 145 — błąd wzoru  $\cos \varphi = 1$  nie przekracza 10% jeszcze dla  $\varphi = 25,8^\circ$ . Jeżeli przyjąć np.  $\zeta = 1/8$ , to według dalej podanego równania osi łuku — wzór (8) —  $\varphi_0 = 26,6^\circ$  i  $\varphi_{l/4} = 14^\circ$ , wobec czego  $\cos \varphi_0 = 0,89$  i  $\cos \varphi_{l/4} = 0,97$ . Największe zatem odchylenia  $\cos \varphi$  od wartości pośredniej  $\cos \varphi_{l/4}$  wynoszą od  $-8,3\%$  do  $+3,1\%$ .

Przypomnijmy, że jeżeli krzywizna i wyniosłość łuku są — jak to założyliśmy — małe, to powstałe pod wpływem odkształcenia łuku przyrosty długości elementu osi łuku  $ds$  i elementarnego kąta  $d\varphi$  są odpowiednio równe ([1], s. 354)

$$(13) \quad \frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{N(s)}{EF}, \quad \frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M(s)}{EI} - \frac{N(s)}{EFr}$$

Tutaj  $\Delta$  oznacza symbol przyrostu wywołanego odkształceniem łuku,  $d\varphi$  kąt pomiędzy bliskimi przekrojami oraz  $F$  i  $I$  odpowiednio pole i moment bezwładności poprzecznego przekroju łuku. Według W. Wierzbickiego ([1], s. 354) uproszczone wzory (13) można przy ścisłości przeciętnych obliczeń technicznych stosować przy  $\zeta < 0,3$ , nawet jeżeli w drugim z tych wzorów pominąć ostatni składnik.

Oznaczmy ugięcie łuku przez  $\eta = \eta(x)$  przyjmując dodatni zwrot ugięcia w dół. Wówczas skutek zmiany długości elementu osi łuku i zmiany nachylenia elementu powstaje, jak wiadomo ([4], s. 5), przyrost ugięcia równy

$$(14) \quad d\eta = -\frac{\Delta ds}{ds} dy - \Delta\varphi dx.$$

Przyjmijmy z wystarczającą dokładnością dla rozpatrywanych łuków o małej wyniosłości

$$(15) \quad N \approx \frac{H}{\cos \varphi_{l/4}} = \text{const},$$

gdzie  $\varphi_{l/4}$  oznacza jak poprzednio kąt z poziomem stycznej do osi łuku w jednej czwartej rozpiętości. Otrzymujemy wówczas z pierwszego ze wzorów (13)

$$(16) \quad \frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{H}{EF \cos \varphi_{l/4}} = \text{const}.$$

Różniczkujemy obie strony wzoru (14) względem zmiennej  $x$  i otrzymujemy przy uwzględnieniu (16)

$$(17) \quad \frac{d^2 \eta}{dx^2} = -\frac{\Delta ds}{ds} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{\Delta d\varphi}{ds} \frac{1}{\cos \varphi}$$

(tutaj zużytkowaliśmy przemienność znaków  $\Delta$  i  $d$ ).

Jeżeli teraz uwzględnimy wzór (9.1), drugi ze wzorów (13) oraz (16), to otrzymamy (przyjmując z wystarczającą dokładnością  $1/r = d^2 y/dx^2$ )

$$(18) \quad \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{M(s)}{EI \cos \varphi_{l/4}} - \frac{8f}{l^2} \frac{1 + \cos \varphi_{l/4}}{\cos \varphi_{l/4}} \frac{N}{EF}$$

Przyjmijmy za B. F r i t z e m ([4], s. 7)

$$(19) \quad \frac{1 + \cos \varphi_{l/4}}{\cos \varphi_{l/4}} \approx 2,$$

gdyż nawet dla  $\cos 30^\circ = 0,866$  wartość powyższego ułamka nie przekracza 2,15.

Oznaczmy jeszcze

$$(20) \quad \begin{cases} EI \cos \varphi_{l/4} = EI_0, \\ EF \cos \varphi_{l/4} = EF_0. \end{cases}$$

Wówczas zamiast (18) otrzymujemy ostatecznie po uwzględnieniu (11) i (15)

$$(21) \quad \frac{d^2 \eta}{dx^2} = -\frac{M(s)}{EI_0} - \frac{2}{EF_0} h.$$

Wzór (21) zapożyczyliśmy w nieco zmienionej postaci od B. Fritza ([4], s. 7). Gdy we wzorze tym odrzucimy drugi składnik związany z działaniem siły osiowej  $N$ , to otrzymujemy wzór jeszcze bardziej uproszczony, który według wspomnianej wyżej opinii W. Wierzbickiego o dokładności wzorów (13) mógłby być jeszcze wystarczająco dokładny dla płaskich łuków<sup>3)</sup>. W dalszym ciągu zajmiemy się jednak przede wszystkim wzorem ściślejszym (21), gdyż posługiwanie się nim nie sprawia szczególnych trudności rachunkowych.

Zrózniczkujemy obie strony wzoru (21) względem zmiennej  $x$ . Otrzymujemy wówczas po uwzględnieniu (10) i zastąpieniu zmiennej  $s$  zmienną  $x$

$$(22) \quad \frac{d^4 \eta}{dx^4} + \frac{h_0}{EI_0} = \frac{p(x)}{EI_0},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenie

$$(23) \quad h_0 = \frac{8f}{l^2} H,$$

a  $p(x) = p(s)/\kappa$  oznacza obciążenie łuku na jednostkę długości rzutu poziomego. W dalszym ciągu będziemy się już tylko posługiwać zmienną  $x$ , wobec czego potrzebne dalej wzory (1) i (10) można zapisać w postaci

$$(24) \quad M(x) = M_A + R_A x - Hy - \int_0^x p(t)[x - x(t)] dt,$$

$$(25) \quad \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = h_0 - p(x).$$

<sup>3)</sup> A. S t r a s s n e r, [3], wykazuje, że stosunek ugięcia wywołanego działaniem momentu i ugięcia wywołanego siłą osiową jest w pewnych wypadkach bliski 400.

Równanie różniczkowe (22) rozpatrywanego problemu brzegowego rozwiązujemy za pomocą transformacji Laplace'a. Dokonujemy najpierw transformacji lewej strony (22). Ze wzoru na transformatę pochodnej i stałej (por. [5], s. 115) otrzymujemy wówczas

$$(26) \quad Y(s) s^4 - \eta_0 s^3 - \eta_0' s^2 - \eta_0'' s - \eta_0''' + \frac{h_0}{EI_0} \frac{1}{s},$$

gdzie  $Y(s)$  jest transformatą funkcji poszukiwanej  $\eta(x)$ , a wielkości  $\eta_0^{(i)}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) są odpowiednio wartościami funkcji i jej pochodnych prawostronnych w początku układu. Wielkości te odpowiadają tzw. parametrom początkowym Cauchy'ego. Rezultat transformacji prawej strony (22) zależy, oczywiście, od sposobu obciążenia łuku. Rozpatrzmy tutaj trzy przypadki najczęściej spotykane w praktyce, mianowicie obciążenie równomierne  $p_0$  na pewnym odcinku łuku ( $a, b$ ), obciążenie siłą skupioną  $P$  w miejscu  $c$  i obciążenie momentem skupionym  $M_0$  w miejscu  $d$ .

*Przypadek 1. Obciążenie równomierne* <sup>4)</sup>

$$p(x) = \langle p_0 \rangle_a^b.$$

Mamy wówczas ( $\mathcal{L}$  = symbol transformacji)

$$(27) \quad \frac{1}{EI_0} \mathcal{L} \langle p_0 \rangle_a^b = \frac{p_0}{EI_0} \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}.$$

*Przypadek 2. Siła skupiona  $P$  w punkcie  $x = c$ .*

Założymy, jak to się zwykle czyni, że zamiast siły skupionej działa obciążenie ciągle równomierne  $p_0$  w przedziale  $(c, c+a)$ , przy czym  $P = p_0 a$ .

Jeżeli zastosujemy wzór (27) i założymy, że  $a \rightarrow 0$ , to transformata prawej strony (22) przybierze w danym razie postać

$$(28) \quad \frac{P}{EI_0} e^{-cs}.$$

*Przypadek 3. Moment skupiony  $M_0$  w punkcie  $x = d$ .*

Postępując podobnie jak w poprzednim przypadku przyjmujemy istnienie dwóch sił  $\pm P$  w punktach  $d$  oraz  $d+a$  takich, że  $M_0 = -Pa$ .

<sup>4)</sup> Zapożyczamy tutaj od T. Iwińskiego, [5], oznaczenie funkcji nieciągłych, ściślej, funkcji tzw. schodkowych za pomocą ostrych nawiasów (litera przy prawym nawiasie określa przedział, poza którego granicami funkcja jest tożsamościowo równa zeru). Wzór na transformatę funkcji schodkowej znaleźć można np. w [6], s. 346.

Jeżeli  $a \rightarrow 0$ , to transformata prawej strony (22) zmierza w tym przypadku do wartości

$$(29) \quad -\frac{M_0}{EI_0} s e^{-ds}$$

Gdy zatem obciążenie łuku stanowi pewna ilość obciążeń równomiernych  $p_i$  rozłożonych w przedziałach  $(a_i, b_i)$  oraz pewna ilość sił skupionych  $P_j$  działających w punktach  $c_j$  i pewna ilość momentów skupionych  $M_k$  działających w punktach  $d_k$ , to równanie (22) przybiera po wykonaniu transformacji następującą postać:

$$(30) \quad Y(s) = \frac{\eta_0}{s} + \frac{\eta'_0}{s^2} + \frac{\eta''_0}{s^3} + \frac{\eta'''_0}{s^4} - \frac{h_0}{EI_0 s^5} + \sum_i \frac{p_i}{EI_0} \frac{e^{-a_i s} - e^{-b_i s}}{s^3} + \\ + \sum_j \frac{P_j}{EI_0} \frac{e^{-c_j s}}{s^4} - \sum_k \frac{M_k}{EI_0} \frac{e^{-d_k s}}{s^3}$$

Wobec tego, że dla łuków przemieszczenie pionowe podpór na ogół pomijamy, to możemy przyjąć  $\eta_0 = 0$ . Dokonując teraz transformacji odwrotnej<sup>5)</sup> wzoru (30) otrzymujemy

$$(31) \quad \eta(x) = \eta'_0 x + \eta''_0 \frac{x^2}{2} + \eta'''_0 \frac{x^3}{6} - \frac{h_0}{24 EI_0} x^4 + S(x),$$

gdzie składnik

$$(31.1) \quad S(x) = \sum_i \frac{p_i}{24 EI_0} [\langle (x - a_i)^4 \rangle'_{a_i} - \langle (x - b_i)^4 \rangle'_{b_i}] + \\ + \sum_j \frac{P_j}{6 EI_0} \langle (x - c_j)^3 \rangle'_{c_j} - \sum_k \frac{M_k}{2 EI_0} \langle (x - d_k)^3 \rangle'_{d_k}$$

zależy od rodzaju obciążenia (jest to tzw. funkcja obciążenia, [5]).

Otrzymaliśmy równanie ugięcia osi łuku, które można nazwać uniwersalnym. Przez dwukrotne różniczkowanie obu stron (31) względem zmiennej  $x$  i uwzględnienie wzoru (21), w którym funkcję  $M(s)$  można zastąpić funkcją  $M(x)$  według (24), otrzymujemy

$$(32) \quad M(x) = -EI_0 \left( \eta''_0 + \eta'''_0 x - \frac{h_0}{24 EI_0} x^2 + \frac{2h}{EF_0} + S''(x) \right)$$

Uzyskaliśmy w ten sposób analityczne przedstawienie momentu zginającego w dowolnym przekroju łuku przy dowolnym obciążeniu. Naturalnie, pomijając odpowiednie składniki funkcji  $S''(x)$  można na podstawie (32)

<sup>5)</sup> Stosowne wzory znaleźć można w [5] na s. 113.



uzyskać z łatwością również analityczne przedstawienie np. linii wpływowych dla siły skupionej lub momentu skupionego.

Podobnie różniczkowanie wzoru (32) względem zmiennej  $x$  doprowadza do wyrażenia analitycznego dla siły poprzecznej  $Q(x)$ . Występujące w równaniu (31) trzy stałe  $\eta_0$ ,  $\eta_0''$  i  $\eta_0'''$  można wyznaczyć z warunków brzegowych (jeden z tych warunków, mianowicie  $\eta(0) = 0$ , dopiero co wykorzystaliśmy). Co do stałej  $h$ , to — jako zależna od rozporu łuku — zależy ona od rodzaju obciążenia. Stała ta musi być wyznaczona oddzielnie, na przykład za pomocą twierdzeń energetycznych, lub — w danym razie bardziej konsekwentnie — z rozważań nad przesunięciami poziomymi cząstek łuku,  $\xi(x)$ , które do tej pory pomijaliśmy milczeniem, aczkolwiek bez ich uwzględnienia zagadnienie brzegowe (22) daje się rozwiązać tylko z dokładnością do jednej stałej. Jeden z parametrów początkowych  $\eta_0^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) można wyznaczyć raz na zawsze z warunku brzegowego obowiązującego na ogół dla łuków (jeżeli podpory są, oczywiście, nieugiętne)

$$(33) \quad \eta(l) = 0.$$

W ten sposób otrzymujemy z (31)

$$(34) \quad \eta_0''' = - \left[ \frac{6}{l^2} \eta_0' + \frac{3}{l} \eta_0'' - \frac{h_0 l}{4EI_0} + \frac{6}{l^3} S(l) \right]$$

i w dalszym ciągu wzór na ugięcie łuku

$$(35) \quad \eta(x) = x \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \eta_0' + \frac{x^3}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \eta_0'' - \frac{h_0}{24EI_0} x^4 \left( 1 - \frac{l}{x} \right) - \frac{x^3}{l^3} S(l) + S(x),$$

zawierający już tylko dwie stałe (oraz, przypomnamy, nie znany parametr  $h$ ). Dla wyznaczenia tych stałych trzeba rozpatrywać warunki utwierdzenia wezłowi łuku i (w przypadku łuków jedno- i trójprzegubowych) również znikanie momentu w przegubie zwornikowym.

Gdy wezłowia posiadają przeguby, to jest w tych miejscach

$$(36) \quad M(0) = M(l) = 0,$$

wobec czego z (21) otrzymujemy następujące dwa warunki:

$$(37) \quad \eta_0'' = \eta_l'' = - \frac{2}{EF_0} h_0 x^2.$$

Gdy wezłowia są sztywno utwierdzone, to otrzymujemy warunki brzegowe w postaci

$$(38) \quad \eta_0' = \eta_l' = 0.$$

W ten sposób uwzględniając warunki (37) otrzymujemy na przykład dla łuku dwuprzegubowego po dwukrotnym zróżniczkowaniu (35) i po podstawieniu  $x = l$  kolejno

$$(39.1) \quad \eta''(x) = -\frac{6x}{l^2} \eta'_0 - \frac{2h_0 x^2}{EF_0} \left(1 - \frac{3x}{l}\right) - \frac{h_0}{4EI_0} x(2x-l) - \frac{6x}{l^3} S(l) + S''(x),$$

$$(39.2) \quad \eta'_0 = h_0 l \left( \frac{x^2}{EF_0} - \frac{l^2}{24EI_0} \right) + \frac{l}{6} S''(l) - \frac{l}{l} S(l).$$

Tutaj nieokreślony jeszcze parametr  $h_0$  obliczyć można na przykład z pomocą znanego wzoru (por. [1], s. 379)

$$(40) \quad H = \frac{\int_0^l \overline{M(x)} y dx}{\int_0^l y^2 dx + \frac{I}{F} l},$$

w którym  $\overline{M(x)}$  oznacza, jak wiadomo, moment zginający obliczony dla odpowiedniej belki prostej.

Nie ma żadnej zasadniczej trudności, aby w podobny sposób uzyskać uniwersalne równanie linii ugięcia dla łuków o małej sztywności. W tym przypadku trzeba uwzględnić wpływ ugięcia na wielkość momentu zginającego, natomiast można pomijać ten wpływ jako nieznaczny na wielkość rozporu<sup>6)</sup>. Mamy w ten sposób zamiast (24)

$$(41) \quad M(x) = M_A + R_A x - H(y - \eta) - \int_0^x p(t)[x - x(t)] dt,$$

a zamiast (25)

$$(42) \quad \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = h_0 - p(x) + H \frac{d^3 \eta}{dx^2}.$$

Jeżeli teraz podstawimy (42) do dwukrotnie zróżniczkowanego równania (21), to zamiast (22) otrzymamy równanie różniczkowe problemu

$$(43) \quad \frac{d^4 \eta}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{h_0}{EI_0} = \frac{p(x)}{EI_0},$$

które otrzymuje się z dwukrotnie zróżniczkowanego równania B. Fritza ([4], s. 7).

<sup>6)</sup> Por. [4], tablice na s. 27, 40, 54 i 64.

Tutaj przyjęto oznaczenie

$$(44) \quad \alpha^2 = \frac{l^2 h_0}{8 f E I_0}$$

Postępując jak poprzednio znajdujemy transformatę lewej strony równania (43) w postaci

$$(45) \quad Y(s) s^2 (s^2 + \alpha^2) - s (s^2 + \alpha^2) \eta_0 - (s^2 + \alpha^2) \eta_0' - s \eta_0'' - \eta_0''' + \frac{h_0}{E I_0} \frac{1}{s}$$

Rezultaty transformacji prawej strony (43) zależnej od obciążenia nie różnią się w danym przypadku niczym od uzyskanych poprzednio dla obciążenia równomiernego  $p_0$  w przedziale  $(a, b)$  oraz dla siły skupionej  $P$  i dla momentu skupionego  $M$  odpowiednio w punktach  $c$  i  $d$ . Gdy zatem obciążenie łuku stanowi pewna ilość takich obciążeń, to otrzymujemy podobnie jak w (30)

$$(46) \quad Y(s) = \frac{\eta_0}{s} + \frac{\eta_0'}{s^2} + \frac{\eta_0''}{s(s^2 + \alpha^2)} + \frac{\eta_0'''}{s^2(s^2 + \alpha^2)} - \frac{h_0}{E I_0 s^3(s^2 + \alpha^2)} + \\ + \sum_i \frac{p_i}{E I_0} \frac{e^{-a_i s} - e^{-b_i s}}{s^3(s^2 + \alpha^2)} + \sum_j \frac{P_j}{E I_0} \frac{e^{-c_j s}}{s^2(s^2 + \alpha^2)} - \sum_k \frac{M_k}{E I_0} \frac{e^{-d_k s}}{s(s^2 + \alpha^2)}$$

Przyjmując  $\eta_0 = 0$  i uwzględniając wzory na transformację odwrotną,

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + \alpha^2)} \right\} &= \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2}, & \rho^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s^2 + \alpha^2)} \right\} &= \frac{x}{\alpha^2} - \frac{\sin \alpha x}{\alpha^3}, \\ \rho^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3(s^2 + \alpha^2)} \right\} &= \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{\cos \alpha x - 1}{\alpha^4}, \end{aligned} \right.$$

otrzymujemy ostatecznie bez trudności

$$(48) \quad \eta(x) = \eta_0' x + \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha^2} \eta_0'' + \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha^3} \eta_0''' - \\ - \frac{h_0}{E I_0 \alpha^4} \left( \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \cos \alpha x - 1 \right) + S(x),$$

gdzie funkcję obciążenia przedstawia następujący wzór:

$$(49) \quad S(x) = \sum_i \frac{p_i}{E I_0 \alpha^4} \left[ \left\langle \frac{\alpha^2 (x - a_i)^2}{2} + \cos \alpha (x - a_i) - 1 \right\rangle_{a_i}^l - \right. \\ \left. - \left\langle \frac{\alpha^2 (x - b_i)^2}{2} + \cos \alpha (x - b_i) - 1 \right\rangle_{b_i}^l \right] + \sum_j \frac{P_j}{E I_0 \alpha^3} \langle \alpha (x - c_j) - \\ - \sin \alpha (x - c_j) \rangle_{c_j}^l - \sum_k \frac{M_k}{E I_0 \alpha^2} \langle 1 - \cos \alpha (x - d_k) \rangle_{d_k}^l$$

Występujące w równaniu «uniwersalnym» linii ugięcia osi łuku trzy parametry początkowe  $\eta_0^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) oraz zależny od rozporu parametr  $h_0$  wyznaczamy w sposób poprzednio wyjaśniony. Na przykład  $\eta_0'''$  znajdujemy z dość ogólnego warunku brzegowego  $\eta(l) = 0$ . Otrzymujemy w ten sposób z (48)

$$(50) \quad \eta_0''' = \frac{\alpha^3}{\sin \alpha l - \alpha l} \left[ l \eta_0' + \frac{1 - \cos \alpha l}{\alpha^2} \eta_0'' - \frac{h_0}{EI_0 \alpha^4} \left( \frac{\alpha^2 l^2}{2} + \cos \alpha l - 1 \right) + S(l) \right]$$

i w dalszym ciągu wzór dla ugięcia

$$(51) \quad \eta(x) = \left( x - \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha l - \sin \alpha l} l \right) \eta_0' + \left[ (1 - \cos \alpha x) - (\alpha x - \sin \alpha x) \frac{1 - \cos \alpha l}{\alpha l - \sin \alpha l} \right] \frac{\eta_0''}{\alpha^2} + \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha l - \sin \alpha l} \left[ \frac{h_0}{EI_0 \alpha^4} \left( \frac{\alpha^2 l^2}{2} + \cos \alpha l - 1 \right) - S(l) \right] - \frac{h_0}{EI_0 \alpha^4} \left( \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \cos \alpha x - 1 \right) + S(x).$$

Oczywiście wykonując przejścia graniczne dla  $\alpha \rightarrow 0$  przeobrażamy z łatwością wzory (48) - (50) odpowiednio we wzory (31), (32), (34) i (35), jak być powinno.

Obliczymy obecnie dla przykładu linię ugięcia łuku dwuprzegubowego obciążonego siłą skupioną w zworniku.

Wówczas we wzorze (40) przyjmując należy

$$(52) \quad \overline{M(x)} = \frac{P}{2} x - \left\langle P \left( x - \frac{l}{2} \right) \right\rangle_{l/2}^l$$

Obieramy następujące dane liczbowe (dla porównania wyników zgodne z [4], s. 35), znamionujące łuk mało wyniosły o małej sztywności:  $l = 180,00$  cm,  $f = 23,20$  cm,  $F_0 = 1,17$  cm<sup>2</sup>,  $E = 2\,072\,500$  kG/cm<sup>2</sup>,  $EI_0 = 32\,800$  kG/cm<sup>2</sup>,  $P = 8$  kG. Pomijamy dla uproszczenia różnice pomiędzy  $F$  i  $F_0$  oraz  $I$  i  $I_0$ , tzn. przyjmujemy  $\kappa \approx 1$ .

Ze wzoru (40) otrzymujemy po wykonaniu całkowania i podstawieniu danych liczbowych

$$(53) \quad H = Pl \frac{\frac{5}{48}}{\frac{8}{15} f + \frac{1}{Ff}} = 12,1 \text{ kG}$$

i w dalszym ciągu

$$(54) \quad h_0 = \frac{8f}{l^2} H = 0,07 \text{ kG/cm.}$$

Zastosujmy dla obliczenia ugięcia wzór (35), tzn. przyjmijmy, że pomimo małej sztywności łuku można w przybliżeniu pominąć wpływ ugięcia na wielkość momentu.

Ponieważ w danym razie funkcja obciążenia według wzoru (32) przyjmuje postać

$$(55) \quad S(x) = \frac{P}{6EI_0} \left\langle \left(x - \frac{l}{2}\right)^3 \right\rangle_{/1/2},$$

więc funkcja ugięcia według (35) jest

$$(56) \quad \eta(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \eta'_0 + \frac{x^3}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \eta''_0 - \frac{h_0}{24EI_0} x^4 \left(1 - \frac{l}{x}\right) - \frac{Px^3}{48EI_0} + \frac{P}{6EI_0} \left\langle \left(x - \frac{l}{2}\right)^3 \right\rangle_{/1/2}$$

Z (39.2) obliczamy stałą  $\eta'_0$  (przyjmując jak poprzednio  $\alpha \approx 1$ ):

$$(57) \quad \eta'_0 = h_0 l \left( \frac{1}{EF_0} - \frac{l^2}{24EI_0} \right) + \frac{Pl^3}{16EI_0} = -0,02469.$$

Z (37) znajdujemy  $\eta''_0 = -0,00577 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-2}$ .

Wobec tego ostatecznie linię ugięcia osi łuku przedstawia wzór

$$(58) \quad \eta(x) = -0,02469 x - 0,02887 \cdot 10^{-6} x^2 + 0,01169 \cdot 10^{-3} x^3 - 0,08892 \cdot 10^{-6} x^4 + 0,04065 \cdot 10^{-3} \left\langle (x - 90)^3 \right\rangle_{90}^{180}.$$

Dla  $x = l/2 = 90 \text{ cm}$  otrzymujemy największą strzałkę ugięcia równą  $\eta(l/2) = 0,46 \text{ cm}$ .

Obliczenie strzałki ugięcia łuku na podstawie wzoru ściślejszego (51) doprowadza do wielkości  $\eta(l/2) = 0,96 \text{ cm}$  ([4], s. 76). Wynika stąd, że posłużenie się rozwiązaniem przybliżonym (35) prowadziło w danym razie do dość znacznych błędów, co — wobec małej sztywności łuku — można było zresztą z góry przewidzieć.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Wierzbicki, *Mechanika budowli*, wyd. 4, Warszawa 1949.
- [2] J. Naleszkiewicz, *On the Cooperation of Two Cantilever Spars with a Shear Resisting Skin*, Arch. Mech. Stos. 2 (1949).
- [3] A. Strassner, *Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke*, t. 2, Berlin 1921.
- [4] B. Fritz, *Theorie und Berechnung vollwandiger Bogenträger*, Berlin 1934.
- [5] T. Iwiński, *O zastosowaniu transformacji Laplace'a do zagadnień statyki budowli*, Arch. Mech. Stos. 1 (1953).

[6] T. Iwiński i J. Nowiński, *O transformatach niektórych równań różniczkowych statyki budowli*, Arch. Mech. Stos. 2 (1954).

[7] O. Henkel, *Graphische Statik*, t. 2, Berlin i Lipsk 1922.

[8] I. N. Bronsztejn i K. A. Siemendiajew, *Sprawocznik po matematyce*, OGIЗ, 1948.

### Резюме

#### О НЕКОТОРОМ ПРИМЕНЕНИИ ТРАНСФОРМАЦИИ ЛАПЛАСА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРОГИБА АРОК

Выводится дифференциальное уравнение второго порядка (21) для прогиба арки, симметрической относительно вертикальной оси, произвольно опертой и нагруженной. Рассматриваются параболические арки малой кривизны и малого отношения подъема к пролету  $\zeta = f/l$  (фиг. 1). Полагая прогибы малыми, выражение для изгибающего момента в любом сечении принимает вид (21) и окончательно получается дифференциальное уравнение четвертого порядка (22). Полагая же прогибы большими, выражение для изгибающего момента принимает вид (41) и окончательно получается уравнение (43).

В обоих случаях, при помощи трансформации Лапласа, получается так наз. универсальное решение для прогиба арки, соответственно (31) и (43). В этих уравнениях учтено действие произвольных непрерывных нагрузок (напр. равномерных), а также сосредоточенных сил и моментов.

Вычислен пример двухшарнирной арки, нагруженной сосредоточенной силой в замке. Прогиб под силой равен 0,5 см, при использовании формулы (35) для жестких дуг. Более точная формула (51) приводит к максимальному значению прогиба 0,96 см (ср. [4]).

### S u m m a r y

#### APPLICATION OF THE LAPLACE TRANSFORMATION FOR THE DETERMINATION OF ARCH DEFLECTION

A differential equation of the second order, (21), is derived for the deflection of an arch, symmetrical in relation to the vertical axis, supported and loaded arbitrarily. The considerations of the paper concern parabolic arches of small curvature and small rise to span ratio,  $\zeta = f/l$  Fig. 1. If the deflections are assumed to be small, the expression for the bending moment in any cross-section takes the form (21) and a fourth order differential equation (22) results. If, on the other hand, the deflections are assumed to be great, the expression for the bending moment takes the form (41) and finally Eq. (43) is obtained.

In both cases the Laplace transformation can be used to obtain the so-called general equations for arch deflection, (31) and (48) respectively. In these equations the load is assumed to be composed of continuously distributed forces (uniformly, for instance) and concentrated forces and moments.

A numerical example is presented of a doubly hinged arch subjected to a concentrated force acting at the key. The deflection at the point of action of the force is equal to 0,46 cm if Eq. (35) derived for more rigid arches is used. The more accurate Eq. (51) leads to the maximum deflection which is equal to 0,96 cm (See [4]).

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 marca 1956 r.*