

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

OBLICZANIE SIŁ KRYTYCZNYCH  
DLA SPRĘŻYSTYCH PRĘTÓW NIEPRYZMATYCZNYCH  
METODĄ INTERPOLACJI CZĘŚCIOWEJ

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
L

## SPIS TREŚCI

	Str.
1. Uwagi wstępne	369
2. Wyprowadzenie równania różniczkowego wybożenia sprężystego prętów zbieżnych	370
3. Całkowanie równania wybożenia sprężystego prętów zbieżnych	372
4. Rozwiązanie równania (3.20) metodą Mac Mahona	375
5. Rozwiązanie równania (3.20) metodą Kaläne	383
6. Inne rozwiązanie równania (3.20)	385
7. Metoda interpolacji częściowej	389
8. Szacowanie błędu interpolacji częściowej	394
9. Określanie przybliżeń podstawowych w postaci wielomianu	396
10. Przykład liczbowy	400
11. Rozwiązanie równania (3.20) metodą interpolacji częściowej	400

WYDAWCA  
WYDZIAŁ INŻYNIERII

## 1. Uwagi wstępne

Zagadnienie stateczności osiowo ściskanych idealnie sprężystych prętów niepryzmatycznych rozważane było przez wielu autorów i to zarówno metodami ścisłymi<sup>1)</sup>, jak i różnorodnymi metodami przybliżonymi<sup>2)</sup>. Uzyskanym w ten sposób rozwiązaniom można przypisać trojakie znaczenie.

(1) Rozwiązania można wykorzystać bezpośrednio w praktyce konstruktorskiej w przypadkach dużych smukłości, mianowicie wtedy, gdy naprężenie krytyczne w najmniejszym przekroju nie przekracza granicy sprężystości materiału.

(2) Uzyskane rozwiązania mogą stanowić podstawę rozwiązania zagadnienia wyboczenia sprężysto-plastycznego prętów niepryzmatycznych; odpowiednie rozwiązanie musi przechodzić ze wzrostem smukłości prętów w odpowiednie rozwiązanie w zakresie sprężystym.

(3) Możliwe się staje bezpośrednie porównanie wyników ścisłych z wynikami różnych metod przybliżonych. Jest to szczególnie ważne w tych przypadkach, gdy dana metoda przybliżona nie posiada oszacowania błędu bądź posiada oszacowanie niedość dokładne. Gdy porównanie wyników ścisłych z przybliżonymi wykaże mały błąd, to niekiedy można stosować daną metodę również i do innych przypadków pokrewnych nie posiadających rozwiązania ścisłego.

<sup>1)</sup> Największy wkład należy tu do A. N. Dinnik'a, [1], [2], [4]. W Polsce zagadnieniu temu dużo uwagi poświęcił F. Szelański, [25], [26]. Spośród prac, które ukazały się ostatnio na ten temat, należy wymienić pracę K. Zwillinga, [28].

<sup>2)</sup> Przypomnimy tu powszechnie stosowane metody wariacyjne i ortogonalizacyjne (Ritza - Timoszenki, Bubnowa - Galerkina i inne); metodę różnic skończonych (por. np. W. Nowacki, [16]) i pokrewną jej metodę K. Sattlera, [24], (*Durchbiegungsverfahren*); metodę zamiany równania różniczkowego na odpowiednie równanie całkowe i rozwiązywanie tego równania metodami przybliżonymi (por. np. H. Jung, [9], S. E. Mikieladze, [13]) i pokrewną jej metodę E. J. Nyströma, [17], (*Mittelwertmethode*) przystosowaną do zagadnień stateczności przez I. Sałę, [22], oraz wykorzystaną przezeń w pracy [23]; wreszcie metodę założenia równania ścisłego, zaproponowaną przez autora tej pracy, [29].

W rozważaniach ograniczymy się do prętów zbieżnych. Zajmiemy się mianowicie wyboczeniem prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych (np. ostrosłupów i stożków pełnych i ściętych) oraz wyboczeniem prętów płasko zbieżnych w płaszczyźnie i z płaszczyzny zbieżności<sup>3)</sup>. Najdokładniejsze tablice spośród obecnie znanych tablic wartości sił krytycznych dla prętów zbieżnych — zestawione przez D i n n i k a ([1] i [4]), przedrukowane w wielu podręcznikach i poradnikach technicznych (np. [3], [7], [15], [20]) — podają jedynie trzy cyfry i tylko dla ośmiu różnych przypadków zbieżności. Przypadki pośrednie można uzyskać drogą interpolacji, jednak z bardzo nieznaczoną dokładnością. Rozwiązanie takie, niejednokrotnie wystarczające dla bezpośrednich zastosowań, może okazać się mało dokładne jako podstawa do sporządzenia tablic wartości sił krytycznych w przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego, a z pewnością jest zbyt mało dokładne dla przeprowadzenia oceny błędu różnych metod przybliżonych. Praca niniejsza poświęcona jest sporządzeniu sześciocyfrowych tablic wartości sił krytycznych dla prętów przestrzennie równomiernie i płasko zbieżnych, które powinny — przynajmniej na razie — zaspokoić stale rosnące wymagania na tym polu.

## 2. Wyprowadzenie równania różniczkowego wyboczenia sprężystego prętów zbieżnych

Będziemy rozważali jedynie pierwszy i drugi przypadek wyboczenia (pręty jednostronnie utwierdzone i zamocowane dwuprzegubowo). Układy odniesienia przyjmiemy podobnie jak w pracy [29] (por. rys. 2, s. 242). W takim razie odpowiednie równanie różniczkowe zginania przybierze postać<sup>4)</sup>

$$(2.1) \quad y'' + \frac{Pl^2}{bB_0} y = 0,$$

gdzie przyjęto, że  $l$  oznacza długość pręta,  $t = x/l$  bezwymiarową zmienną niezależną,  $P$  siłą osiową ściskającą  $B = B(t) = El(t)$  sztywność przekroju,  $b = B(t)/B_0$  funkcję określającą zmianę sztywności wzdłuż osi pręta. Wskaźnikiem 0 będziemy oznaczali wielkości odnoszące się do przekroju podstawowego  $t = 0$ , wskaźnikiem 1 wielkości odnoszące się do przekroju  $t = 1$ . Przecinkiem u góry oznaczymy różniczkowanie względem zmiennej  $t$ .

<sup>3)</sup> Oznaczenia prętów niepryzmatycznych są zgodne z używanymi w pracach [29] i [30] i oparte na przeprowadzonej w pracy [29] klasyfikacji prętów afinicznych. Prętem zbieżnym będziemy nazywać pręt, dla którego wymiary przekroju zmieniają się liniowo wzdłuż osi.

<sup>4)</sup> Ponieważ interesować nas będzie jedynie stan krytyczny, któremu odpowiadają ugięcia nieskończenie małe, skorzystamy z liniowego równania różniczkowego zginania. Por. równanie (3.2.5) w pracy [29].

Warunkami brzegowymi dla równania (2.1) w pierwszym przypadku wyboczenia będą

$$(2.2) \quad \begin{cases} y = 0 & \text{dla } t = 1, \\ y' = 0 & \text{dla } t = 0, \end{cases}$$

oraz w drugim przypadku

$$(2.3) \quad \begin{cases} y = 0 & \text{dla } t = 0, \\ y = 0 & \text{dla } t = 1. \end{cases}$$

Są to warunki brzegowe jednorodne, zatem rozwiązanie zagadnienia będzie polegało na znalezieniu wartości właściwych równania (2.1).

Rozpatrzmy najpierw wyboczenie prętów przestrzennie równomiernie afinicznych. Jak wiadomo z rozważań przytoczonych w pracy [29] wystarczy rozpatrywać je tylko w jednej z płaszczyzn głównych. Mamy tutaj <sup>5)</sup>

$$(2.4) \quad b = \frac{EI_z}{EI_{z0}} = \kappa^4,$$

gdzie  $\kappa = \kappa(t)$  jest funkcją określającą zmianę liniowych wymiarów przekroju wzdłuż osi pręta. Podstawienie wyrażenia (2.4) do równania (2.1) daje

$$(2.5) \quad y'' + \frac{Pl^2}{B_0} [\kappa(t)]^{-4} y = 0.$$

W szczególnym przypadku prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych  $\kappa(t)$  jest funkcją liniową o postaci <sup>6)</sup>

$$(2.6) \quad \kappa = 1 + \kappa_0 lt$$

i równanie (2.5) przybiera postać

$$(2.7) \quad y'' + \frac{Pl^2}{B_0} (1 + \kappa_0 lt)^{-4} y = 0.$$

Analogicznie można wyprowadzić równanie wyboczenia sprężystego prętów płasko zbieżnych w płaszczyźnie zbieżności  $xy$  <sup>7)</sup>

$$(2.8) \quad y'' + \frac{Pl^2}{B_{z0}} (1 + \kappa_0 lt)^{-3} y = 0;$$

<sup>5)</sup> Por. wzór (3.3.10) w pracy [29].

<sup>6)</sup> Por. wzór (2.15) w pracy [29].

<sup>7)</sup> A. R. Rżanicyn, [21], zwraca uwagę, że jest to zarazem równanie wyboczenia cienkościennych prętów stożkowych o stałej grubości ścianek. Zgodnie z przyjętą przez nas klasyfikacją pręty takie nie należą jednak do prętów afinicznych.

oraz wyboczenia prętów płasko zbieżnych z płaszczyzny zbieżności (wyboczenie w płaszczyźnie  $xz$ )

$$(2.9) \quad z'' + \frac{Pl^2}{B_{y0}} (1 + \kappa_0 lt)^{-1} z = 0.$$

Jeżeli w równaniu (2.9) zastąpimy  $z$  przez  $y$ , to będziemy mogli trzy równania (2.7), (2.8) i (2.9) ująć w jedno, ogólniejsze:

$$(2.10) \quad y'' + \frac{Pl^2}{B_0} (1 + \kappa_0 lt)^{-n} y = 0.$$

Wartości własne  $P$  tego równania będą siłami krytycznymi dla prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych (przy podstawieniu  $n = 4$ ), dla prętów płasko zbieżnych przy wyboczeniu w płaszczyźnie zbieżności ( $n = 3$ ) lub przy wyboczeniu z płaszczyzny zbieżności ( $n = 1$ )<sup>8</sup>). Równanie (2.10) możemy więc nazwać równaniem wyboczenia sprężystego prętów zbieżnych.

### 5. Całkowanie równania wyboczenia sprężystego prętów zbieżnych

Zanim przejdziemy do całkowania równania (2.10), wprowadzimy nowe oznaczenia. Przez  $i_0$  oraz  $i_1$  będziemy oznaczali promienie bezwładności  $i_z$  odpowiednio przekroju podstawowego  $t = 0$  i przekroju  $t = 1$  (drugi koniec pręta). Stosunek tych wielkości oznaczymy przez  $k$ :

$$(3.1) \quad \frac{i_1}{i_0} = \kappa(1) = k.$$

Bezwymiarowa stała  $k$  będzie więc miarą zbieżności<sup>9</sup>) danego pręta przestrzennie równomiernie lub płasko zbieżnego. Będziemy rozpatrywali jedynie przedział zmienności  $0 \leq k \leq 1$  jako najważniejszy z uwagi na zastosowania praktyczne.

Po wprowadzeniu wielkości  $k$  do równania (2.10) otrzymujemy

$$(3.2) \quad y'' + \frac{Pl^2}{B_0} [1 - (1 - k)t]^{-n} y = 0.$$

Otrzymane równanie ulegnie znacznemu uproszczeniu przez wprowadzenie oznaczenia

$$(3.3) \quad \frac{Pl^2}{B_0} = W^2 (1 - k)^2$$

<sup>8</sup>) W pracy [29] wykładnik  $n$  był oznaczany przez  $n_1$ , wzór (4.1.2) i następne.

<sup>9</sup>) Polskie Normy (Rysunek Techniczny Maszynowy) wprowadzają pojęcie zbieżności stożka uzależniając zbieżność od obu średnic i długości stożka. W pracy niniejszej zbieżności będziemy uzależniać tylko od promieni bezwładności (średnic) obu podstaw.

oraz przez wprowadzenie nowej zmiennej niezależnej

$$(3.4) \quad 1 - (1 - k)t = u.$$

Uzyskujemy mianowicie równanie

$$(3.5) \quad y'' + W^2 u^{-n} y = 0$$

z następującymi warunkami brzegowymi:

$$(3.6) \quad \begin{cases} y = 0 & \text{dla } u = k, \\ y' = 0 & \text{dla } u = 1, \end{cases}$$

oraz

$$(3.7) \quad \begin{cases} y = 0 & \text{dla } u = k, \\ y = 0 & \text{dla } u = 1, \end{cases}$$

odpowiednio dla pierwszego i dla drugiego przypadku wybożenia.

Równanie (3.5) przez odpowiednie podstawienie<sup>10)</sup> daje się sprowadzić do równania różniczkowego B e s s e l a. Całka ogólna tego równania ma postać

$$(3.8) \quad y = \sqrt{u} \left[ C_1 J_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2W}{2-n} u^{\frac{2-n}{2}} \right) + C_2 Y_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2W}{2-n} u^{\frac{2-n}{2}} \right) \right],$$

gdzie  $J_p(x)$  i  $Y_p(x)$  oznaczają odpowiednio funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju<sup>11)</sup>  $p$ -tego rzędu (funkcje Bessela i Neumanna). Wzór (3.8) nie jest słuszny w przypadku  $n = 2$  [wtedy równanie (3.5) jest równaniem różniczkowym Eulera], jednak ten przypadek nie wchodzi w zakres naszych rozważań.

Gdy  $n < 2$ , rzędy i argumenty występujących we wzorze (3.8) funkcji Bessela są dodatnie; gdy natomiast  $n > 2$ , skorzystamy ze znanej zależności<sup>12)</sup>

$$(3.9) \quad J_{-p}(-x) = J_p(x)$$

i analogicznej dla funkcji  $Y$ , pisząc zamiast (3.8) całkę ogólną równania (3.5) w postaci

$$(3.10) \quad y = \sqrt{u} \left[ C_1 J_{\frac{1}{n-2}} \left( \frac{2W}{n-2} u^{\frac{2-n}{2}} \right) + C_2 Y_{\frac{1}{n-2}} \left( \frac{2W}{n-2} u^{\frac{2-n}{2}} \right) \right].$$

Rzędy i argumenty funkcji Bessela są tu również dodatnie, a więc występujące funkcje są wygodne do przeprowadzenia rachunków.

Przystąpimy teraz do uwzględnienia warunków brzegowych i obli-

<sup>10)</sup> Por. np. [10] lub [44].

<sup>11)</sup> Jahnke-Emde, [44], i niektóre inne podręczniki oznaczają funkcje Bessela drugiego rodzaju (Neumanna) przez  $N_p(x)$ .

<sup>12)</sup> Por. np. [44].

czenia wartości własnych. Uwzględnienie warunków (3.6) (pierwszy przypadek wybożenia) wymaga znajomości pochodnej  $y'$ . Różniczkując (3.8) otrzymujemy

$$(3.11) \quad y' = Wu^{\frac{1-n}{2}} \left[ C_1 J_{\frac{n-1}{2-n}} \left( \frac{2W}{2-n} u^{\frac{2-n}{2}} \right) + C_2 Y_{\frac{n-1}{2-n}} \left( \frac{2W}{2-n} u^{\frac{2-n}{2}} \right) \right].$$

Podstawiając (3.8) i (3.11) do równań (3.6), wobec założenia  $C_1^2 + C_2^2 > 0$ , uzyskujemy określający siłę krytyczną warunek

$$(3.12) \quad J_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2W}{2-n} k^{\frac{2-n}{2}} \right) Y_{\frac{n-1}{2-n}} \left( \frac{2W}{2-n} \right) - Y_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2W}{2-n} k^{\frac{2-n}{2}} \right) J_{\frac{n-1}{2-n}} \left( \frac{2W}{2-n} \right) = 0.$$

Równanie (3.12) zapiszemy teraz w prostszej postaci. Oznaczmy mianowicie stałą

$$(3.13) \quad \frac{2W}{2-n} = \xi$$

oraz wprowadzimy funkcję  $T_p(x)$  o własnościach zbliżonych do funkcji tangens<sup>13)</sup>,

$$(3.14) \quad T_p(x) = \frac{J_p(x)}{Y_p(x)}$$

i zamiast warunku (3.12) napiszemy warunek

$$(3.15) \quad T_{\frac{1}{2-n}} \left( k^{\frac{2-n}{2}} \xi \right) = T_{\frac{n-1}{2-n}}(\xi).$$

W przypadku  $n > 2$  przeprowadzamy analogiczny rachunek korzystając z całki (3.10). Zamiast (3.13) podstawimy tutaj

$$(3.16) \quad \frac{2W}{n-2} = \xi$$

i otrzymamy ostatecznie

$$(3.17) \quad T_{\frac{1}{n-2}} \left( k^{\frac{2-n}{2}} \xi \right) = T_{\frac{n-1}{n-2}}(\xi).$$

Przejdziemy teraz do drugiego przypadku wybożenia.

Uwzględnienie warunków brzegowych (3.7) jest znacznie prostsze niż warunków (3.6). Wobec założenia  $C_1^2 + C_2^2 > 0$  otrzymujemy od razu warunek

$$(3.18) \quad T_{\frac{1}{2-n}} \left( k^{\frac{2-n}{2}} \xi \right) = T_{\frac{1}{2-n}}(\xi),$$

<sup>13)</sup> Funkcję tę wprowadzają Jahnke i Emde, [44]. Gray i Mathews, [43], nie wprowadzają symbolu  $T_p(x)$ , a Watson, [46], oznacza nim inną funkcję.



gdzie  $\xi$  jest określone wzorem (3.13). Warunkiem tym będziemy się posługiwali w przypadku  $n < 2$ . Gdy  $n > 2$ , skorzystamy z całki (3.10) i wprowadzając  $\xi$  określone wzorem (3.16) uzyskamy warunek

$$(3.19) \quad T_{\frac{1}{n-2}}(k^{\frac{2-n}{2}} \xi) = T_{\frac{1}{n-2}}(\xi).$$

Wszystkie cztery warunki (3.15), (3.17), (3.18) i (3.19), określające siłę krytyczną dla idealnie sprężystych prętów zbieżnych w poszczególnych przypadkach wyboczenia, mają postać ogólną

$$(3.20) \quad T_p(k^{\frac{2-n}{2}} \xi) = T_q(\xi).$$

Równanie to można traktować dwojako: przy ustalonym  $k$  (a więc przy ustalonej zbieżności pręta) jest to równanie przestępne o niewiadomej  $\xi$ . Obliczając z niego  $\xi$  określimy już bez trudu wartość siły krytycznej ze związków (3.3) i (3.13) lub (3.16). W ujęciu ogólniejszym równanie (3.20) jest natomiast związkiem uwikłanym, określającym funkcję

$$(3.21) \quad \xi = \xi(k),$$

której znajomość [wobec związków (3.3) i (3.13) lub (3.16)] pozwoli określić ogólną zależność typu

$$(3.22) \quad P_k = P_k(k),$$

gdzie  $P_k$  oznacza siłę krytyczną przy określonym sposobie zamocowania końców pręta. Uzyskanie zależności (3.21) i (3.22) jest właśnie naszym celem.

#### 4. Rozwiązanie równania (3.20) metodą Mac Mahona

Równanie (3.20) występuje przy rozwiązywaniu wielu zagadnień fizyki matematycznej<sup>14)</sup>. Podano kilka metod obliczania jego pierwiastków bądź określenia funkcji (3.21), z których przytoczymy najważniejsze.

Pierwszy zajął się równaniem (3.20) Mac Mahon, [38]. Stosując metodę Stokesa obliczania pierwiastków funkcji Bessela otrzymał on zależność (3.21) wyrażoną za pomocą szeregu. Wzory swoje wyprowadził Mac Mahon dla przypadku  $p = q$ , jednak uogólnienie ich, jak pokażemy, nie przedstawia istotnej trudności.

Oznaczmy dla skrócenia zapisu

$$(4.1) \quad k^{\frac{2-n}{2}} = \theta$$

<sup>14)</sup> Oprócz zagadnień stateczności prętów należą tu drgania membran o kształcie pierścienia kołowego, przewodnictwo cieplne w walcu kołowym drążonym itp.

i zastąpimy w równaniu (3.20) funkcje Bessela szeregami asymptotycznymi, podanymi przez Hankela. Ogólne wzory Hankela mają postać

$$(4.2) \quad \begin{cases} J_p(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} [P_p(x) \cos \varphi_p - Q_p(x) \sin \varphi_p], \\ Y_p(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} [P_p(x) \sin \varphi_p + Q_p(x) \cos \varphi_p], \end{cases}$$

gdzie

$$(4.3) \quad \varphi_p = x - \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2},$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} P_p(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\prod_{j=0}^m [4p^2 - (2j+1)^2]}{(2m)!(8x)^{2m}}, \\ Q_p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\prod_{j=0}^m [4p^2 - (2j+1)^2]}{(2m-1)!(8x)^{2m-1}}. \end{cases}$$

Podstawiając wyrażenia (4.1) i (4.2) do równania (3.20) otrzymujemy po uproszczeniu

$$(4.5) \quad (\bar{P} \cos \bar{\varphi} - \bar{Q} \sin \bar{\varphi})(P \sin \varphi + Q \cos \varphi) - \\ - (\bar{P} \sin \bar{\varphi} + \bar{Q} \cos \bar{\varphi})(P \cos \varphi - Q \sin \varphi) = 0,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(4.6) \quad \begin{cases} P_p(\Theta \xi) = \bar{P}, & Q_p(\Theta \xi) = \bar{Q}, \\ P_q(\xi) = P, & Q_q(\xi) = Q, \\ \varphi_p(\Theta \xi) = \bar{\varphi}, & \varphi_q(\xi) = \varphi. \end{cases}$$

Grupując odpowiednio wyrazy w równaniu (4.5) dzięki znanym wzorom trygonometrycznym, przekształcamy je z łatwością do postaci

$$(4.7) \quad (\bar{P}P + \bar{Q}Q) \sin(\varphi - \bar{\varphi}) - (\bar{P}Q - \bar{Q}P) \cos(\varphi - \bar{\varphi}) = 0.$$

Wprowadźmy jeszcze oznaczenia

$$(4.8) \quad \begin{cases} \sqrt{P^2 + Q^2} = A, & \sqrt{\bar{P}^2 + \bar{Q}^2} = \bar{A}, \\ \operatorname{arctg} \frac{P}{Q} = \Psi, & \operatorname{arctg} \frac{\bar{P}}{\bar{Q}} = \bar{\Psi}. \end{cases}$$

Wtedy

$$(4.9) \quad \begin{cases} P = A \sin \Psi, & Q = A \cos \Psi, \\ \bar{P} = \bar{A} \sin \bar{\Psi}, & \bar{Q} = \bar{A} \cos \bar{\Psi} \end{cases}$$

i z równania (4.7) otrzymujemy kolejno

$$(4.10) \quad \begin{aligned} & \bar{A} A \cos(\bar{\Psi} - \Psi) \sin(\varphi - \bar{\varphi}) + A \bar{A} \sin(\bar{\Psi} - \Psi) \cos(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \\ & \sin(\varphi - \bar{\varphi} + \bar{\Psi} - \Psi) = 0, \\ & \varphi - \bar{\varphi} + \bar{\Psi} - \Psi = s\pi \end{aligned} \quad (s = 1, 2, 3 \dots).$$

Podstawiamy teraz [por. wzór (4.3)]

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \varphi - \bar{\varphi} &= \xi - \left(q + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} - \Theta \xi + \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}, \\ \varphi - \bar{\varphi} &= (1 - \Theta) \xi + (p - q) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

oraz

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \Psi &= \arctg \frac{P}{Q} = \operatorname{arctg} \frac{Q}{P} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{Q}{P}, \\ \Psi &= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} \left(\frac{Q}{P}\right)^{2m-1}. \end{aligned}$$

Znajdziemy również analogiczny wzór na  $\bar{\Psi}$ , a następnie równanie

$$(4.13) \quad (1 - \Theta) \xi - \left(s - \frac{p - q}{2}\right) \pi - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} \left[ \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P}}\right)^{2m-1} - \left(\frac{Q}{P}\right)^{2m-1} \right] = 0.$$

Wyrażenia  $P$  i  $Q$  są określone szeregami (4.4). Po wykonaniu dzielenia tych szeregów i podstawieniu wyniku do szeregu występującego w równaniu (4.13) otrzymujemy równanie o niewiadomej  $\xi$  typu

$$(4.14) \quad \xi = \frac{\left(s - \frac{p - q}{2}\right) \pi}{1 - \Theta} + \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_3}{\xi^3} + \frac{a_5}{\xi^5} + \dots$$

Oznaczmy jeszcze

$$(4.15) \quad \frac{\left(s - \frac{p - q}{2}\right) \pi}{1 - \Theta} = a_0.$$

Lagrange wykazał<sup>15)</sup>, że gdy  $a_0$  jest co do wartości bezwzględnej

<sup>15)</sup> Por. np. A. Kalähne, [36].

dostatecznie wielkie, to rozwiązanie równania (4.14) można przedstawić w postaci szeregu

$$(4.16) \quad \xi = a_0 + \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_3 - a_1^2}{a_0^3} + \frac{a_5 - 4a_1a_3 + 2a_1^3}{a_0^5} + \dots,$$

którego zbieżność zależy przede wszystkim od  $a_0$ . Ze wzrostem  $a_0$  zbieżność ta staje się szybsza.

M a c M a h o n podał wartości pierwszych pięciu wyrazów szeregu (4.16) w przypadku  $p = q$ . Obliczenie pierwszego, drugiego i trzeciego wyrazu jest stosunkowo łatwe, natomiast począwszy od czwartego wyrazu staje się żmudne; w piątym wyrazie współczynniki przekraczają już  $10^6$ . Toteż obliczanie pierwiastków równania (3.20) metodą M a c M a h o n a jest łatwe tylko w przypadku, gdy można poprzestać na niewielkiej ilości wyrazów szeregu (4.16).

Zbadamy teraz, od czego będzie w naszym przypadku zależała wielkość  $a_0$ , a więc zbieżność szeregu (4.16) i przydatność metody. Na stałe  $p$  i  $q$  (rzędy funkcji B e s s e l a) nie mamy wpływu, są one ustalone w danym zagadnieniu z góry. Liczba porządkowa pierwiastka  $s$  [wzór (4.10)] jest zarazem liczbą porządkową siły krytycznej. Interesować nas będzie jedynie najważniejsza dla zastosowań technicznych pierwsza wartość siły krytycznej, zatem podstawimy  $s = 1$ . Decydującą rolę będzie więc odgrywał parametr  $\theta$ , a więc za pośrednictwem wzoru (4.1) zbieżność pręta  $k$ . Im pręt jest bardziej zbliżony do przyrmatycznego (wtedy  $k$  jest bliższe jedności), tym szybciej jest zbieżny szereg (4.16). Można wykazać, że w przypadku granicznym  $k = 1$  (pręt przyrmatyczny), uzyskujemy rozwiązanie ściśle (w postaci zamkniętej). Metoda M a c M a h o n a jest więc zbliżona do metody małego parametru, przy czym rolę małego parametru gra tutaj różnica  $1 - \theta$ .

Zajmiemy się teraz poszczególnymi interesującymi nas przypadkami równania (3.20).

Dla prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych  $n = 4$ , zatem przy rozpatrywaniu pierwszego przypadku wyboczenia skorzystamy z równania (3.17) otrzymując po podstawieniu

$$(4.17) \quad T_{1/2} \left( \frac{\xi}{k} \right) = T_{3/2}(\xi).$$

Podobnie dla drugiego przypadku wyboczenia podstawiając  $n = 4$  do równania (3.19) otrzymujemy

$$(4.18) \quad T_{1/2} \left( \frac{\xi}{k} \right) = T_{1/2}(\xi).$$

Ponieważ funkcje Bessela rzędu  $p + 1/2$ , gdzie  $p$  jest liczbą całkowitą, dadzą się łatwo sprowadzić do funkcji trygonometrycznych, metody Mac Mahona nie będziemy tu stosować.

Dla prętów płasko zbieżnych przy rozpatrywaniu wybożenia w płaszczynie zbieżności mamy  $n = 3$ , więc z równania (3.17) otrzymujemy

$$(4.19) \quad T_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) = T_2(\xi)$$

dla pierwszego, a z równania (3.19)

$$(4.20) \quad T_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) = T_1(\xi)$$

dla drugiego przypadku wybożenia. Równanie (4.20) nie sprawia trudności, ponieważ mamy tu  $p = q = 1$ , więc możemy zastosować gotowe wzory Mac Mahona. Ograniczając się jak zwykle do pierwszego pierwiastka ( $s = 1$ ), otrzymujemy

$$(4.21) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{\pi\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}, \\ a_1 = \frac{3\sqrt{k}}{8}, \\ a_2 = \frac{21\sqrt{k}(1-k^{3/2})}{128(1-\sqrt{k})}, \\ \dots \end{cases}$$

Zatem

$$(4.22) \quad \xi = \frac{\pi\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} + \frac{3(1-\sqrt{k})}{8\pi} + \frac{21(1-k^{3/2})(1-\sqrt{k})^2}{128\pi^3 k} + \dots$$

Przejdziemy teraz do równania (4.19). Mamy tu  $p = 1$ ,  $q = 2$  oraz

$$\varphi = \xi - \frac{5}{4}\pi^2, \quad \bar{\varphi} = \frac{\xi}{\sqrt{k}} - \frac{3}{4}\pi,$$

$$\bar{P} = P_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) = 1 + \frac{15k}{128\xi^2} + \dots,$$

$$\bar{Q} = Q_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) = \frac{3\sqrt{k}}{8\xi} - \frac{105k^{3/2}}{1024\xi^3} + \dots,$$

$$P = P_2(\xi) = 1 - \frac{105}{128\xi^2} + \dots,$$

$$Q = Q_2(\xi) = \frac{15}{8\xi} + \frac{315}{1024\xi^3} + \dots$$

Ze wzoru (4.12) znajdziemy

$$\bar{\Psi} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{k}}{8\xi} + \frac{21k^{3/2}}{128\xi^3} + \dots, \quad \Psi = \frac{\pi}{2} - \frac{15}{8\xi} + \frac{45}{128\xi^3} + \dots$$

i ostatecznie

$$a_0 = \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}},$$

$$a_1 = \frac{(15-3\sqrt{k})\sqrt{k}}{8(1-\sqrt{k})},$$

$$a_3 = \frac{(45-21k^{3/2})\sqrt{k}}{128(1-\sqrt{k})},$$

.....

$$(4.23) \quad \xi = \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} + \frac{15-3\sqrt{k}}{4\pi} - \frac{(15-3\sqrt{k})^2(1-\sqrt{k})}{8\pi^3\sqrt{k}} + \dots$$

Dla wartości  $k$  odbiegających nieznacznie od jedności obliczenie odpowiedniej wartości  $\xi$  szeregiem (4.22) lub (4.23) nie przedstawi już teraz trudności. Wobec  $n = 3$  ze wzoru (3.16) otrzymujemy

$$(4.24) \quad W = \frac{\xi}{2},$$

a wartość siły krytycznej określi wzór (3.3):

$$(4.25) \quad P_k = \frac{(1-k)^2 \xi^2 B_0}{4 l^2}$$

Dla uzyskania analogii do wzoru E u l e r a, określającego siłę krytyczną dla idealnie sprężystego pręta pryzmatycznego, wprowadzimy (podobnie jak w pracy [29]) bezwymiarowy współczynnik  $\vartheta$  taki, że dla wszystkich przypadków wyboczenia mamy wzór

$$(4.26) \quad P_k = \vartheta \frac{EI_0}{L^2},$$

gdzie  $L$  oznacza długość zredukowaną<sup>16)</sup> pręta. Nazwiemy go współczyn-

<sup>16)</sup> Jest to długość zredukowana z uwagi na sposób zamocowania końców pręta. Niektórzy autorzy wprowadzają pojęcie długości zredukowanej ze względu na sposób obciążenia lub nawet ze względu na zmianę przekroju pręta niepryzmatycznego, co jednak wydaje się mniej logiczne.

nikami stateczności pręta. Z porównania (4.25) i (4.26) otrzymujemy dla pierwszego przypadku wybożenia (gdy  $L = 2l$  oraz  $B_0 = EI_0$ )

$$(4.27) \quad \vartheta = (1 - k)^2 \xi^2.$$

Dla drugiego przypadku ( $L = l$ )

$$(4.28) \quad \vartheta = \frac{(1 - k)^2 \xi^2}{4}.$$

Posługiwanie się funkcją  $\xi = \xi(k)$  jest niedogodne, bowiem gdy  $k$  zmierza do jedności, wzory (4.27) i (4.28) tracą sens. Dlatego też wprowadzimy funkcję  $\zeta = \zeta(k)$ , określając ją wzorem

$$(4.29) \quad \zeta = (1 - \sqrt{k}) \xi.$$

Wtedy dla pierwszego przypadku wybożenia prętów płasko zbieżnych w płaszczyźnie zbieżności mamy

$$(4.30) \quad \vartheta = (1 + \sqrt{k})^2 \zeta^2,$$

$$(4.31) \quad \zeta = \frac{\pi}{2} \sqrt{k} + \frac{(15 - 3\sqrt{k})(1 - \sqrt{k})}{4\pi} - \frac{(15 - 3\sqrt{k})^2 (1 - \sqrt{k})^2}{8\pi^3 \sqrt{k}} + \dots,$$

a dla drugiego przypadku

$$(4.32) \quad \vartheta = \frac{(1 + \sqrt{k})^2 \zeta^2}{4},$$

$$(4.33) \quad \zeta = \pi \sqrt{k} + \frac{3(1 - \sqrt{k})^2}{8\pi} + \frac{21(1 - k^{3/2})(1 - \sqrt{k})^3}{128\pi^3 k} + \dots$$

Gdy  $k$  zmierza do jedności, otrzymujemy w obu przypadkach  $\vartheta = \pi^2$ , więc wzór (4.26) — jak się można było spodziewać — przechodzi wprost we wzór E u l e r a.

Rozpatrzmy jeszcze wybożenie prętów płasko zbieżnych z płaszczyzny zbieżności. Podstawiając  $n = 1$  otrzymujemy z warunku (3.15) równanie

$$(4.34) \quad T_1(\xi \sqrt{k}) = T_0(\xi)$$

dla pierwszego, a z warunku (3.19) równanie

$$(4.35) \quad T_1(\xi \sqrt{k}) = T_1(\xi)$$

dla drugiego przypadku wybożenia. Zauważymy przede wszystkim, że równanie (4.35) mamy właściwie już rozwiązane. Wystarczy bowiem oznaczyć

$$(4.36) \quad \xi \sqrt{k} = \bar{\xi},$$

by otrzymać równanie (4.20) z niewiadomą  $\xi$ . Rozwiązaniem tego równania jest szereg (4.22). Powracając do niewiadomej  $\xi$  otrzymujemy ostatecznie

$$(4.37) \quad \xi = \frac{\pi}{1-\sqrt{k}} + \frac{3(1-\sqrt{k})}{8\pi\sqrt{k}} + \frac{21(1-k^{3/2})(1-\sqrt{k})^2}{128\pi^3 k^{3/2}} + \dots$$

Zajmiemy się teraz równaniem (4.34). Mamy tu  $p=1$ ,  $q=0$ , więc  $p \neq q$  i nie możemy się posłużyć gotowymi wzorami Mac Mahona. Metoda rozwiązania nie ulega jednak zmianie. Nie będziemy tu podawali obliczeń ograniczając się do ostatecznego wyniku:

$$a_0 = \frac{\pi}{1-\sqrt{k}}, \quad a_1 = \frac{3+\sqrt{k}}{8(1-\sqrt{k})\sqrt{k}},$$

$$a_3 = \frac{25k^{3/2} + 63}{384(1-\sqrt{k})k^{3/2}},$$

$$(4.38) \quad \xi = \frac{\pi}{1-\sqrt{k}} + \frac{3+\sqrt{k}}{4\pi\sqrt{k}} - \frac{(3+\sqrt{k})^2(1-\sqrt{k})}{8\pi^3 k} + \dots$$

Przejdziemy do obliczenia siły krytycznej. Z równania (3.13) wynika

$$(4.39) \quad W = \frac{\xi}{2},$$

a więc uwzględniając oznaczenie (3.3) otrzymamy wzór (4.25) taki sam, jak przy wyboczeniu w płaszczyźnie zbieżności. Bez zmiany pozostaną zatem wzory (4.27) i (4.28) określające współczynnik stateczności  $\vartheta$ . Dla uniknięcia symbolu nieoznaczonego wprowadzimy i tutaj funkcję  $\zeta(k)$  określając ją wzorem (4.29). Zależność (4.30) i (4.32) pozostaną bez zmiany, natomiast dla  $\zeta$  znajdziemy odpowiednio:

$$(4.40) \quad \zeta = \frac{\pi}{2} + \frac{(3+\sqrt{k})(1-\sqrt{k})}{4\pi\sqrt{k}} - \frac{(3+\sqrt{k})^2(1-\sqrt{k})^2}{8\pi^3 k} + \dots$$

dla pierwszego, a

$$(4.41) \quad \zeta = \pi + \frac{3(1-\sqrt{k})^2}{8\pi\sqrt{k}} + \frac{21(1-k^{3/2})(1-\sqrt{k})^3}{128\pi^3 k^{3/2}} + \dots$$

dla drugiego przypadku wyboczenia. Także i tutaj, gdy  $k$  zmierza do jedności,  $\vartheta$  zmierza do  $\pi^2$  i otrzymujemy wzór Eulera.



Na marginesie zauważymy, że stosując podstawienie (4.36) do równania (4.34) oraz podstawienie odwrotne do równania (4.19), otrzymujemy od razu rozwiązanie równań typu

$$(4.42) \quad T_1(\xi) = T_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right),$$

$$(4.43) \quad T_1(\xi) = T_2(\xi\sqrt{k}).$$

Równania te nie są nam potrzebne, jednak mogą znaleźć zastosowanie w innych działach fizyki matematycznej.

Jako ostateczny wniosek przyjmiemy, że metoda Mac Mahona pozwoli obliczyć siłę krytyczną dla prętów zbieżnych, nieznacznie odbiegających od pręta pryzmatycznego, oraz zbadać jej zależność od zbieżności pręta  $k$  w tym zakresie. Przy zwiększaniu się zbieżności pręta (a zmniejszaniu  $k$ ) nakład pracy obliczeniowej znacznie wzrasta, a dokładność obliczeń maleje.

### 5. Rozwiązanie równania (3.20) metodą Kalähne

W pracy [36] A. K a l ä h n e podaje «specjalną metodę obliczania pierwiastków równania typu (3.20) w pewnych przypadkach». Przytoczymy ją tutaj w skrócie, ponieważ będzie podstawą naszych dalszych rozważań.

Miejsce zerowe o liczbie porządkowej  $s$  funkcji  $J_p(x)$  będziemy oznaczali przez  $j_p^{(s)}$ , a funkcji  $Y_p(x)$  przez  $y_p^{(s)}$ . Przyjmiemy, że wartość tych miejsc zerowych jest znana w odpowiedniej liczbie  $i$  z odpowiednią dokładnością<sup>17)</sup>. Wykorzystując oznaczenie (4.1) napiszemy równanie (3.20) w postaci «rozwinętej»

$$(5.1) \quad J_p(\Theta\xi) Y_q(\xi) = J_q(\xi) Y_p(\Theta\xi).$$

Założymy teraz, że równanie (5.1) określa nie funkcję (3.21), lecz odwrotną do niej funkcję  $k = k(\xi)$ , a więc przy oznaczeniu (4.1) funkcję  $\Theta(\xi)$ . Jeżeli podstawimy  $\xi = j_q^{(s)}$ , to prawa strona równania (5.1) będzie równa zero. Ponieważ wiadomo, że  $Y_q(j_q^{(s)}) \neq 0$  dla dowolnych  $q$  i  $s$ , to dla spełnienia równania (5.1) musi być  $J_p(\Theta\xi) = 0$ , czyli  $\Theta\xi = j_p^{(s)}$ , a stąd wynika, że

$$(5.2) \quad \Theta = \frac{j_p^{(s)}}{j_q^{(s)}},$$

<sup>17)</sup> Obliczaniem pierwiastków funkcji  $J_p(x)$  i  $Y_p(x)$  zajmowało się wielu badaczy; spośród łatwiej dostępnych tablic należy wymienić W. N. F a d d i e j e w e j i M. K. G a w u r i n a, [42], oraz G. N. W a t s o n a, [46].

przy czym od doboru liczby porządkowej  $s_1$  zależy liczba siły krytycznej. Dla uzyskania pierwszej siły krytycznej należy przyjąć  $s_1$ , tak by  $j_p^{(s)}$  było najbliższym miejscem zerowym funkcji  $J_p(x)$  większym lub mniejszym od  $j_q^{(s)}$  zależnie od tego, czy chcemy uzyskać  $\theta < 1$ , czy też  $\theta > 1$  (a więc zależnie od  $k$  i  $n$ ).

Podobnie, jeżeli podstawimy  $\xi = y_q^{(s)}$ , to lewa strona równania (5.1) będzie równa zeru. Ponieważ  $J_q(y_q^{(s)}) \neq 0$  dla dowolnych  $q$  i  $s$ , przeto  $Y_p(\theta\xi) = 0$ , czyli  $\theta\xi = y_p^{(s)}$ , a stąd

$$(5.3) \quad \theta = \frac{y_p^{(s)}}{y_q^{(s)}},$$

przy czym  $s_1$  należy dobierać podobnie jak poprzednio.

Zilustrujemy metodę K a l ä h n e na przykładzie. Weźmiemy pod uwagę równanie (4.20) dla drugiego przypadku wybożenia prętów płasko zbieżnych w płaszczyźnie zbieżności. Mamy tu  $p = q = 1$ . Przyjmijmy np.  $\xi = j_1^{(3)} = 10,17347$  i założmy, że będziemy rozpatrywali pręty o  $k < 1$ . W takim razie  $\xi/\sqrt{k}$  ma być większe od  $\xi$ . Najbliższym większym pierwiastkiem funkcji  $J_1(x)$  jest  $j_1^{(4)} = 13,32369$ , a stąd

$$\sqrt{k} = \frac{j_1^{(3)}}{j_1^{(4)}} = \frac{10,17347}{13,32369} = 0,763562.$$

Dalsze obliczenia wykonamy bez trudu:  $k = 0,583027$ , a ze wzoru (4.28) znajdziemy  $\theta = 4,49876$ . Stwierdziliśmy więc, że dla dwuprzegubowego, płasko zbieżnego pręta przy wybożeniu w płaszczyźnie zbieżności współczynnik stateczności  $\theta$  wynosi 4,49876, gdy  $k = 0,583027$ .

Przyjmując za  $\xi$  inne pierwiastki funkcji  $J_1(x)$  oraz funkcji  $Y_1(x)$  otrzymujemy współczynniki stateczności  $\theta$  dla różnych innych wartości  $k$ . Im większe będziemy przyjmowali pierwiastki funkcji Bessela, tym bardziej  $k$  będzie się zbliżać do jedności, bowiem, jak wiadomo, różnica sąsiednich pierwiastków funkcji Bessela zmierza do wartości stałej  $\pi$ . Zwiększy się również «gęstość» otrzymywanych w wyniku wartości  $k$ . Najmniejsza wartość  $k$  jest określona najmniejszymi różnymi od zera pierwiastkami  $j_p$  lub  $y_p$ , tak np. w rozważanym przez nas powyżej przypadku najmniejszym pierwiastkiem jest  $y_1^{(1)} = 2,19714$ , któremu odpowiada  $k = 0,163745$ . Mniejszych  $k$  metodą K a l ä h n e otrzymać nie można. W przypadku innych równań, np. równania (4.19), sprawa przedstawia się jeszcze gorzej, bowiem najmniejszą wartością  $k$  jest 0,388485.

Metodą K a l ä h n e uzyskujemy więc dla pewnych wartości  $k$  odpowiednie wartości  $\theta$ . Uzyskanie  $\theta$  dla innej, z góry danej wartości  $k$ , może nastąpić drogą interpolacji. K a l ä h n e przeprowadzał interpolację na drodze graficznej, uzyskując 3 lub 4 cyfry dokładne. Dla  $k$  bli-

skich jedności uzyskanie wyższej dokładności jest stosunkowo łatwe, ponieważ możemy dysponować gęstymi węzłami interpolacji. Jednak i tu przy wykonywaniu interpolacji na drodze numerycznej występują pewne trudności rachunkowe, bowiem odstęp między węzłami nie są równe. Dla  $k$  oddalających się od jedności interpolacja staje się coraz trudniejsza i mniej dokładna, a wyniki interpolacji pomiędzy  $k = 0$  i najmniejszą wartością  $k$  otrzymaną z obliczeń należy uważać za mocno problematyczne<sup>18)</sup>.

Ostatecznie stwierdzamy, że metoda K a l ä h n e daje obraz poszukiwanej zależności (3.21) dla poszczególnych przypadków wybożenia, jednak dokładniejsze wyniki można uzyskać jedynie dla  $k$  bliskich jedności (podobnie jak w metodzie M a c M a h o n a). Przy silniejszej zbieżności prętów obiema metodami możemy otrzymać jedynie orientacyjne dane.

#### 6. Inne rozwiązanie równania (3.20)

Spośród innych rozwiązań równania typu (3.20) należy wspomnieć niedawną pracę B. P. B o g e r t a, [31], który podaje również bibliografię zagadnienia. B o g e r t zajął się równaniem

$$(6.1) \quad T_0(\xi) = T_1(k\xi),$$

a więc zbliżonym do (4.34), rozpatrując tylko przypadek  $k > 1$ , podczas gdy nas interesuje przede wszystkim przypadek  $k < 1$ . B o g e r t podaje czterocyfrową tablicę pierwiastków  $\xi$  równania (6.1) dla  $k = 1,00$  — (0,01) — 2,00 — (1) — 10,20. Tablicę tę otrzymał on metodą prostą, choć wymagającą znacznego nakładu pracy: dla  $k = 1,1, 1,2, \dots, 2, 3, \dots, 10, 20$  rozwiązywał on równanie przestępne (6.1) metodą zbliżoną do reguły *falsi*, natomiast dla pozostałych  $k$  otrzymał wyniki za pomocą wzoru interpolacyjnego E v e r e t t a.

Z podanej przez B o g e r t a bibliografii wynika, że materiał tablicowy dla równania (6.1) i pokrewnych — na ogół w Polsce niedostępny — jest bardzo skąpy. Dokładność tablic nie przekracza czterech cyfr, a odstęp zmiennej niezależnej są szerokie. Postaramy się przeto uzyskać dokładniejsze rozwiązania równań typu (3.20).

#### 7. Metoda interpolacji częściowej

Celem naszym jest w tej chwili uzyskanie tablic funkcji (3.21), a następnie funkcji (3.22) dla różnych wartości  $p$  i  $q$ . Przede wszystkim zestawimy dotychczasowe osiągnięcia na tym polu.

<sup>18)</sup> Podobnie czyni też K a l ä h n e używając w sporządzonych przez siebie tablicach dwójakich cyfr: cyfry duże uważa za pewne, małe za problematyczne. Dla  $k$  bardziej odbiegających od jedności K a l ä h n e podaje jedynie dwie duże i jedną małą cyfrę.

(1) Dzięki metodzie Mac Mahona znamy kilka pierwszych pochodnych poszukiwanej funkcji w punkcie  $k = 1$  oraz zachowanie się jej w pobliżu punktu  $k = 1$ .

(2) Dzięki metodzie Kälähne znamy (praktycznie z dowolną dokładnością) wartości poszukiwanej funkcji w kilkunastu lub kilkudziesięciu punktach  $k$  rozrzuconych w sposób nierównomierny.

(3) Korzystając z reguły *falsi* lub innej metody rozwiązywania równań przestępnych możemy przy dosyć dużym nakładzie pracy otrzymać niektóre rozwiązania równania (3.20), przy czym łatwiej dobierać  $\theta$  do danego  $\xi$  niż na odwrót. Prócz tego łatwo jest obliczyć kilka pierwszych pochodnych poszukiwanej funkcji w punkcie  $k = 0$  korzystając z rozwinięć funkcji Bessela na szeregi potęgowe i opierając się na znanych własnościach tych szeregów.

Stoimy zatem wobec następującego zagadnienia. Znamy wartości funkcji w kilkunastu punktach, porozrzucanych w sposób nierównomierny w przedziale  $0 < k < 1$  oraz wartości funkcji i kilku pierwszych jej pochodnych na brzegach tego przedziału. Należy znaleźć wartości funkcji w innych z góry oznaczonych punktach przedziału.

Jest to więc zagadnienie interpolacji. Omówimy teraz ważniejsze znane metody interpolacji, by rozważyć możliwości rozwiązania.

Interpolacja polega najczęściej na przybliżaniu danej funkcji inną o prostszej budowie, spełniającą określone warunki zgodności z funkcją daną. Jako funkcję przybliżającą obiera się zazwyczaj wielomian ze względu na prostotę rachunków.

Powszechnie znanym wielomianem interpolacyjnym jest wielomian Lagrange'a. Obliczenie jego współczynników jest na ogół żmudne, mimo że dla przypadku równych odstępów między punktami podano metody uproszczone<sup>19)</sup>, a nawet gotowe tablice<sup>20)</sup>. W naszym przypadku odstęp między punktami nie są równe. Stosując wielomian Lagrange'a nie wykorzystalibyśmy również stojących do dyspozycji warunków zgodności pochodnych na brzegach przedziału. Toteż posługiwanie się wielomianem Lagrange'a wymagałoby w naszym przypadku nieproporcjonalnie dużego wkładu pracy w stosunku do uzyskanych korzyści dokładności wyników.

Ogólniejsze zagadnienie interpolacji rozwiązał C. Hermite, [35]. Zajął się on poszukiwaniem wielomianu, który w  $n + 1$  punktach (węzłach) wykazywałby zgodność z daną funkcją nie tylko samych wartości, lecz również pochodnych do  $m_k - 1$  rzędu włącznie, przy czym liczba  $m_k$  może być różna dla poszczególnych punktów  $x_k$ . Hermite podał osza-

<sup>19)</sup> Por. np. pracę A. P. Filina, [32].

<sup>20)</sup> Np. K. A. Karpow, [45], podaje sześciocyfrową tablicę współczynników dla przypadku czterech i pięciu punktów.

cowanie błędu przybliżenia oraz metodę obliczania współczynników wielomianu interpolacyjnego.

Rozważania Hermite'a rozwinął Williot, [40], podając ogólny wzór na współczynniki wielomianu. Wzór ten wyprowadzony drogą nieelementarną jest jednak dosyć skomplikowany i raczej nieprzydatny do zastosowań. A. Łomnicki, [37], wyprowadził nieco prostszy wzór na drodze elementarnej, ograniczając się przy tym jednak do niezależności  $m_k$  od  $x_k$  (tj. przyjmował zgodność tej samej liczby pochodnych w każdym punkcie).

Niewątpliwie zastosowanie w naszym przypadku wielomianu Hermite'a pozwoliłoby uzyskać wysoką dokładność wyników, jednak obliczenie jego współczynników i następnie rachunki związane z uzyskanym wielomianem byłyby bardzo pracochłonne. Zastosowanie natomiast wzoru Łomnickiego nie może w naszym przypadku mieć miejsca, bowiem pochodne poszukiwanej funkcji znamy jedynie na brzegach przedziału.

Podamy tutaj inną metodę interpolacji, którą nazwiemy «interpolacją częściową». Będzie ona wykorzystywała wszystkie warunki Hermite'a, będzie jednak mniej dokładna od interpolacji Hermite'a przy wielokrotnie mniejszym nakładzie pracy.

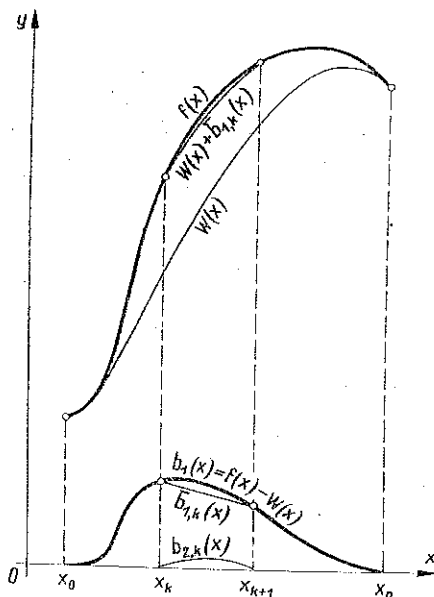
Myśl przewodnia metody interpolacji częściowej jest następująca. Spośród wszystkich warunków w ilości  $\sum_{k=0}^n m_k$  wykorzystamy najpierw tylko niektóre, specjalnie dobrane, i przybliżamy poszukiwaną funkcję  $f(x)$  przez funkcję  $W(x)$ , najczęściej wielomian. Warunki, które mają być najpierw spełnione, dobieramy w ten sposób, aby liczba punktów była niewielka (np. dwa na końcach przedziału), natomiast liczby  $m_k$  były w tych punktach możliwie duże (co odpowiada, jak wiemy, zgodności dużej liczby pochodnych). Zbudowanie funkcji  $W(x)$ , zwłaszcza gdy przyjmujemy, że ma ona być wielomianem, nie nastęrcza na ogół trudności rachunkowych. Następnie bierzemy pod uwagę pewne dwa sąsiednie węzły  $x_k$  oraz  $x_{k+1}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Funkcja

$$(7.1) \quad b_1(x) = f(x) - W(x)$$

oraz jej  $m_k - 1$  pochodnych w węźle  $x_k$  lub  $m_{k+1} - 1$  pochodnych w węźle  $x_{k+1}$  nie są na ogół równe zero, jakby to było w przypadku interpolacji Hermite'a. Przybliżymy teraz funkcję  $b_1(x)$  przez inną funkcję  $\bar{b}_{1,k}(x)$  (najczęściej wielomian) w ten sposób, by spełnione były warunki zgodności samej funkcji i jej  $m_k - 1$  pochodnych w węźle  $x_k$  oraz  $m_{k+1} - 1$  pochodnych w węźle  $x_{k+1}$ . W takim razie funkcja  $W(x) + \bar{b}_{1,k}(x)$  spełni wszystkie warunki w punktach  $x_k$  i  $x_{k+1}$  i będziemy ją mogli uważać za przybliżenie poszukiwanej funkcji  $f(x)$  obarczone błędem

$$(7.2) \quad b_{2,k}(x) = f(x) - W(x) - \bar{b}_{1,k}(x) = b_1(x) - \bar{b}_{1,k}(x).$$

Funkcja  $W(x)$  będzie jedna dla całego przedziału  $x_0 \leq x \leq x_n$  i nazwiemy ją przybliżeniem podstawowym, natomiast funkcję  $\bar{b}_{1,k}(x)$  dobierzemy dla każdego podprzedziału  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$  osobno, czemu daje wyraz wskaźnik  $k$ . Oczywiście dokładność metody będzie zależała w pierwszym rzędzie od doboru przybliżenia podstawowego  $W(x)$ . Gdy np. przybliżenie podstawowe obieramy w postaci wielomianu, to stopień jego musi być wyższy niż wielomianów  $\bar{b}_{1,k}(x)$ , bowiem w przeciwnym razie nie uzyskalibyśmy nic więcej ponad zwykłą interpolację Hermite'a w podprzedziale  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ . Gdy przybliżenie podstawowe będzie dostatecznie dokładne, to wartości funkcji  $b_1(x)$  będą małe i łatwe do interpolacji np. na drodze graficznej. Jak zobaczymy jednak w p. 9, zbudowanie wielomianu  $W(x)$  nawet przy stosunkowo dużej liczbie warunków zgodności jest łatwe ze względu na zgrupowanie tych warunków w niewielkiej liczbie punktów.



Rys. 1

Zauważymy również, że gdy dla większości węzłów  $m_k$  przyjmujemy wartości małe (np.  $m_k = 1$ ), to dla zwiększenia dokładności można przeprowadzić interpolację funkcji  $b_1(x)$  nie przez dwa, lecz przez trzy lub więcej punktów, co np. przy interpolowaniu na drodze graficznej nie następuje trudności.

Omówione postępowanie będziemy nazywali interpolacją częściową zwyczajną. Dokładność tej metody może ulec dalszej poprawie, gdy będziemy interpolowali — w drugim etapie — nie funkcję  $b_1(x)$ , lecz funkcję

$$(7.3) \quad \beta_1(x) = \frac{b_1(x)}{U(x)},$$

gdzie  $U(x)$  jest specjalnie dobraną funkcją «porównawczą» (interpolacja częściowa przyspieszona). Przybliżając funkcję  $\beta_1(x)$  przez funkcję  $\bar{\beta}_{1,k}(x)$  (najczęściej wielomian) tak, by spełnione były wymagane warunki zgodności, możemy uważać funkcję  $W(x) + \bar{\beta}_{1,k}(x)U(x)$  za przybliżenie poszukiwanej funkcji  $f(x)$  obciążone błędem

$$(7.4) \quad b_{2,k}(x) = f(x) - W(x) - \bar{\beta}_{1,k}(x)U(x) = b_1(x) - \bar{\beta}_{1,k}(x)U(x).$$

W przypadku gdy na przybliżenie podstawowe nakładamy jedynie warunki zgodności na końcach przedziału (w liczbie  $m_0$  na lewym i  $m_n$ ,

na prawym), jako funkcję porównawczą szczególnie wygodnie dobrać jest funkcję

$$(7.5) \quad U(x) = (x - x_0)^{m_0} (x - x_n)^{m_n},$$

jest to bowiem funkcja tego samego rzędu co funkcja  $b_1(x)$ .

Interpolację częściową zwyczajną ilustruje wykres na rysunku 1. Ilustracja graficzna interpolacji częściowej przyspieszonej jest nieco trudniejsza.

### 8. Szacowanie błędu interpolacji częściowej

Ponieważ stosowanie metody interpolacji częściowej jest na ogół łatwe, to o jej powodzeniu zadecyduje dokładność w porównaniu z dokładnością innych metod interpolacyjnych. Oszacowanie błędu będzie oczywiście zależało od doboru przybliżenia podstawowego  $W(x)$  oraz od sposobu interpolacji funkcji  $b_1(x)$  lub  $\beta_1(x)$  i daje się na ogół przeprowadzić drogą wskazaną przez Hermite'a przy pewnych modyfikacjach.

Podamy tu przykład oszacowania błędu interpolacji częściowej. Przyjmijmy mianowicie następujące dane:

(1)  $m_k = m \geq 2$  dla  $k = 0$  i  $k = n$ , co odpowiada zgodności na końcach przedziału co najmniej do pierwszej pochodnej włącznie; rząd pochodnej na obu końcach ten sam;

(2)  $m_k = 1$  dla innych wartości  $k$ ; zakładamy więc zgodność tylko samych wartości funkcji;

(3) wszystkie funkcje przybliżające będziemy przyjmowali w postaci wielomianów, przy czym dokonamy interpolacji funkcji  $b_1(x)$  lub  $\beta_1(x)$  przez dwa sąsiednie węzły.

Będzie to więc — w przypadku interpolacji częściowej zwyczajnej — interpolacja parabolą  $m$ -tego stopnia w podprzedziałach  $x_0 \leq x \leq x_1$  i  $x_{n-1} \leq x \leq x_n$  oraz liniowa w pozostałych. W przypadku interpolacji częściowej przyspieszonej wystarcza, jak łatwo sprawdzić, interpolacja liniowa we wszystkich przedziałach [gdzie funkcja porównawcza ma postać (7.5)]. Ponadto będziemy zakładali, jak zwykle, że funkcja  $f(x)$  jest różniczkowalna dostateczną liczbę razy.

Oszacujemy najpierw błąd przybliżenia funkcji  $f(x)$  funkcją  $W(x) + \bar{b}_{1,k}(x)$  w przedziale, w którym  $b_1(x)$  podlega interpolacji liniowej (interpolacja częściowa zwyczajna). Błąd ten jest równy zeru w węzłach  $x_k$  i  $x_{k+1}$ . Możemy zatem dobrać taką funkcję  $S_{2,k}(x)$  ograniczoną w przedziale  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ , że

$$(8.1) \quad b_{2,k}(x) = (x - x_k)(x - x_{k+1})S_{2,k}(x).$$

Zajmiemy się teraz funkcją zmiennej  $z$  w następującej postaci:

$$(8.2) \quad F_{2,k}(z) = b_1(z) - \bar{b}_{1,k}(z) - (z - x_k)(z - x_{k+1})S_{2,k}(x).$$

Z uwagi na zależności (7.2) i (8.1) funkcja ta jest równa zeru w trzech punktach:  $z = x_k$ ,  $z = x_{k+1}$  oraz  $z = x$ . Stosując dwukrotnie twierdzenie Rolle'a dochodzimy do wniosku, że wewnątrz przedziału  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$  istnieje przynajmniej jeden taki punkt  $\bar{x}$ , w którym  $F''_{2,k}(z) = 0$ , czyli

$$(8.3) \quad b_1''(\bar{x}) - \bar{b}_{1,h}''(\bar{x}) - 2! S_{2,k}(x) = 0.$$

Ale zauważmy, że  $\bar{b}_{1,h}''(\bar{x}) = 0$ , bowiem  $\bar{b}_{1,h}(x)$  jest wielomianem pierwszego stopnia, więc

$$(8.4) \quad S_{2,k}(x) = \frac{b_1''(\bar{x})}{2!},$$

a po podstawieniu do związku (8.1) znajdziemy

$$(8.5) \quad b_{2,k}(x) = (x - x_k)(x - x_{k+1}) \frac{b_1''(\bar{x})}{2!}.$$

Ponieważ rozpatrujemy przedział  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ , to możemy skorzystać z łatwej do wykazania nierówności

$$(8.6) \quad |(x - x_k)(x - x_{k+1})| \leq \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{4}$$

i oszacować wartość bezwzględną błędu  $b_{2,k}(x)$ :

$$(8.7) \quad |b_{2,k}(x)| \leq \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8} |b_1''(\bar{x})|.$$

Drugim etapem będzie oszacowanie funkcji  $|b_1''(x)|$ , co jest nieco trudniejsze. Weźmiemy najpierw pod uwagę funkcję (7.5). W naszym przypadku będzie ona określona wzorem

$$(8.8) \quad U(x) = [(x - x_0)(x - x_n)]^m.$$

Druga pochodna tej funkcji wynosi

$$(8.9) \quad U''(x) = m[(x - x_0)(x - x_n)]^{m-2} [(m-1)(2x - x_0 - x_n)^2 + 2(x - x_0)(x - x_n)].$$

Wprowadźmy teraz oznaczenie

$$(8.10) \quad \frac{b_1''(x)}{U''(x)} = S_1(x)$$

i zbadajmy następującą funkcję (zmiennej  $z$ ):

$$(8.11) \quad F_1(z) = f(z) - W(z) - [(z - x_0)(z - x_n)]^m S_1(x).$$

Ze względu na zależność (7.1) oraz założenie (1) funkcja (8.11) jest równa zeru w dwóch punktach:  $z = x_0$  oraz  $z = x_n$  (natomiast na ogół



nie jest równa zeru w punkcie  $z = x$ ). Z twierdzenia Rolle'a wynika, że pochodna  $F_1'(z)$  jest równa zeru przynajmniej w jednym punkcie wewnątrz przedziału  $(x_0, x_n)$ . Jak widać, jest ona także równa zeru dla  $z = x_0$  i  $z = x_n$ , więc ogółem ma co najmniej trzy miejsca zerowe. Podobnie wnosimy, że pochodna  $F_1''(z)$  ma co najmniej cztery miejsca zerowe. Z oznaczenia (8.10) i równań (8.9) i (8.11) wynika jednak, że  $z = x$  jest także miejscem zerowym funkcji  $F_1''(z)$ , więc ma ona co najmniej pięć miejsc zerowych. Gdyby zamiast pięciu różnych miejsc zerowych były cztery, w tym jedno podwójne, dowód nie uległby zmianie. Podobnie dowodzimy, że trzecia pochodna ma sześć, czwarta siedem itd.,  $(m-1)$ -sza pochodna ma  $m+2$  miejsc zerowych. Natomiast  $F_1^{(m)}(z)$  ma już tylko  $m+1$  miejsc zerowych, bowiem w punktach  $z = x_0$  i  $z = x_n$  jest na ogół różna od zera [założenie (1)]. Podobnie funkcja  $F_1^{(m+1)}(z)$  ma już tylko  $m$  miejsc zerowych itd. Pochodna  $F^{(2m)}(z)$  ma jedno miejsce zerowe wewnątrz przedziału  $(x_0, x_n)$ . Oznaczmy to miejsce zerowe przez  $\bar{x}$ . Stąd funkcja (8.11) daje zależność

$$(8.12) \quad f^{(2m)}(\bar{x}) - W^{(2m)}(\bar{x}) - (2m)! S_1(x) = 0.$$

Jeżeli przyjmiemy przybliżenie podstawowe  $W(x)$  w postaci wielomianu, będzie to wielomian co najwyżej stopnia  $2m-1$ , bowiem ma spełniać  $2m$  warunków [założenie (1)]. W takim razie  $W^{(2m)}(x) = 0$  oraz

$$(8.13) \quad S_1(x) = \frac{f^{(2m)}(\bar{x})}{(2m)!},$$

gdzie  $x_0 \leq \bar{x} \leq x_n$ . Ze wzorów (8.9) i (8.10) otrzymujemy

$$(8.14) \quad b_1''(x) = \frac{m f^{(2m)}(\bar{x})}{(2m)!} [(x-x_0)(x-x_n)]^{m-2} [(m-1)(2x-x_0-x_n)^2 + 2(x-x_0)(x-x_n)]$$

i możemy przystąpić do oszacowania wartości bezwzględnej tego wyrażenia. Skorzystamy mianowicie z oszacowania typu (8.6) oraz łatwej do wykazania nierówności (przy założeniu, że  $x_0 \leq x \leq x_n$ ):

$$(8.15) \quad (2x-x_0-x_n)^2 \leq (x_n-x_0)^2.$$

Otrzymamy po prostych przeliczeniach

$$(8.16) \quad |b_1''(x)| \leq \frac{m(2m-1)(x_n-x_0)^{2m-2} |f^{(2m)}(\bar{x})|}{2^{2m-3} (2m)!},$$

a po podstawieniu do nierówności (8.7) ostateczne oszacowanie błędu interpolacji częściowej zwyczajnej (przy uczynionych na początku założeniach) przyjmie postać

$$(8.17) \quad |b_{2,k}(x)| \leq \frac{m(2m-1)(x_n-x_0)^{2m-2} (x_{k+1}-x_k)^2 |f^{(2m)}(\bar{x})|}{2^{2m} (2m)!}.$$

Należy podkreślić, że w wyniku konieczności rozbicia procesu szacowania na dwa etapy ostateczne oszacowanie jest mało dokładne i należy je traktować orientacyjnie. Jak zobaczymy na przykładach, rzeczywisty błąd  $|b_{2,k}(x)|$  jest znacznie mniejszy.

Przejdziemy teraz do oszacowania błędu w przypadku interpolacji częściowej przyspieszonej, przy czym za funkcję porównawczą przyjmujemy funkcję (8.8). Błąd przybliżenia  $b_{2,k}(x)$  w każdym z podprzedziałów jest tu określony wzorem (7.4), gdzie  $\beta_{1,k}(x)$  jest z założenia (3) funkcją liniową. Przez  $b_2(x)$  (bez wskaźnika  $k$ ) oznaczmy funkcję równą  $b_{2,k}(x)$  w każdym z przedziałów  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ . Będzie to więc funkcja ciągła, choć, na ogół, nieróżniczkowalna w punktach  $x = x_k$ .

Ustalimy teraz wskaźnik  $k$ . Funkcja  $b_2(x)$  jest równa zero w punktach  $x_0, x_k, x_{k+1}$  oraz  $x_n$ , przy czym w punktach  $x_0$  i  $x_n$  posiada zero  $m$ -krotne. Możemy więc dobrać funkcję  $S_3(x)$  ograniczoną w przedziale  $x_0 \leq x \leq x_n$  (ciągłą, lecz na ogół nieróżniczkowalną w punktach  $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ) i taką, że

$$(8.18) \quad b_2(x) = (x - x_0)^m (x - x_k) (x - x_{k+1}) (x - x_n)^m S_3(x).$$

Będziemy teraz rozpatrywać funkcję  $F_3(z)$  określoną w przedziale  $x_0 \leq z \leq x_n$  wzorem

$$(8.19) \quad F_3(z) = f(z) - W(z) - [(z - x_0)(z - x_n)]^m \bar{\beta}_{1,k}(z) - \\ - (z - x_0)^m (z - x_k) (z - x_{k+1}) (z - x_n)^m S_3(x).$$

Funkcja ta jest równa zero w punktach  $x_0, x_n$  (zera  $m$ -krotne),  $x_k, x_{k+1}$  oraz  $x$ . Wobec tego, że wskaźnik  $k$  oraz  $x$  są chwilowo ustalone, funkcja ta jest różniczkowalna dostateczną ilość razy względem zmiennej  $z$  w całym przedziale  $x_0 \leq z \leq x_n$  i wystarczy przeprowadzić podobne rozumowanie jak poprzednio dla funkcji  $F_1(z)$ , by (pamiętając, że  $\bar{\beta}_{1,k}(z)$  jest funkcją liniową) uzyskać związek

$$(8.20) \quad S_3(x) = \frac{f^{(2m+2)}(\bar{x})}{(2m+2)!}$$

Ograniczając się teraz do przedziału  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$  mamy  $b_2(x) = b_{2,k}(x)$ , a po podstawieniu (8.20) do (8.18) i wyzyskaniu oszacowania (8.6) otrzymujemy ostatecznie oszacowanie

$$(8.21) \quad |b_{2,k}(x)| \leq \frac{(x_n - x_0)^{2m} (x_{k+1} - x_k)^2 |f^{(2m+2)}(\bar{x})|}{2^{2m+2} (2m+2)!}$$

Porównanie wzorów (8.17) i (8.21) wskazuje wyraźnie na wyższość interpolacji częściowej przyspieszonej.

Porównamy teraz uzyskane oszacowania (8.17) i (8.21) z oszacowaniami błędów przy innych sposobach interpolacji. Błąd najprostszej interpolacji—liniowej między punktami  $x_k$  i  $x_{k+1}$ —daje się oszacować przez

$$(8.22) \quad |b(x)| \leq \frac{(x_{k+1} - x_k)^2 |f''(\bar{x})|}{8},$$

gdzie  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ . Jak widać z porównania ze wzorami (8.17) i (8.21), błąd ten jest na ogół wielokrotnie większy. Błąd przy interpolacji Hermite'a jest określony wzorem <sup>21)</sup>

$$(8.23) \quad b(x) = \frac{f^{(2)}(\bar{x})}{(\Sigma)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k)^{m_k},$$

gdzie przez  $\Sigma$  oznaczono w skrócie  $\sum_{k=0}^n m_k$ . W naszym przypadku  $m_k = m$  dla  $k = 0$  i  $k = n$ , natomiast  $m_k = 1$  dla pozostałych  $k$ . Wobec tego  $\Sigma = 2m + n - 1$  oraz

$$(8.24) \quad b(x) = \frac{f^{(2m+n-1)}(\bar{x})}{(2m+n-1)!} (x - x_0)^m (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) (x - x_n)^m.$$

Noczyn  $(x - x_0)^m (x - x_n)^m$  możemy teraz oszacować za pomocą nierówności wzorem typu (8.6), natomiast (przy braku ustalonego z góry rozkładu węzłów  $x_k$ ) pozostałe czynniki możemy oszacować jedynie za pomocą nierówności

$$(8.25) \quad |x - x_k| \leq |x_n - x_0|.$$

Ostatecznie oszacowanie błędu interpolacji Hermite'a przedstawimy w naszym przypadku wzorem

$$(8.26) \quad |b(x)| \leq \frac{(x_n - x_0)^{2m+n-1} |f^{(2m+n-1)}(\bar{x})|}{2^{2m} (2m+n-1)!}.$$

Porównując wzory (8.17), (8.21) i (8.26) stwierdzamy, że na ogół błąd interpolacji częściowej będzie większy, jednak różnica między błędami jest zazwyczaj nieproporcjonalnie mała w stosunku do różnicy w nakładzie pracy obliczeniowej: wielomian Hermite'a ma tu stopień  $2m + n - 2$ , natomiast przy interpolacji częściowej posługujemy się wielomianem stopnia  $2m - 1$  (dla przybliżenia podstawowego), którego współczynniki dadzą się wyznaczyć w sposób uproszczony, oraz funkcjami liniowymi.

Dla porównania przytoczymy tu jeszcze oszacowanie błędu interpolacji przy użyciu samego tylko wielomianu  $W(x)$ , tj. dla przybliżenia podstawowego. Aby uzyskać to oszacowanie, wystarczy do wzoru (8.26) wstawić  $n = 1$  (pozostają tylko dwa punkty  $x = x_0$  i  $x = x_n$ ). Znajdziemy więc

$$(8.27) \quad |b(x)| \leq \frac{(x_n - x_0)^{2m} |f^{(2m)}(\bar{x})|}{2^{2m} (2m)!}.$$

<sup>21)</sup> Por. np. I. P. Natanson, [39].

Porównanie tego oszacowania z oszacowaniem (8.17) wskazuje wyraźnie na korzyści przeprowadzania powtórnej interpolacji, a więc stosowania interpolacji częściowej (zwłaszcza, gdy możemy dysponować dużą liczbą węzłów  $n + 1$ ).

### 9. Określanie przybliżeń podstawowych w postaci wielomianu

Ze względu na prostotę rachunku najwygodniej jest dobierać przybliżenie podstawowe w postaci wielomianu. Podamy tu gotowe wzory na współczynniki tego wielomianu w przypadku, gdy warunki interpolacyjne dotyczą jedynie końców przedziału  $x_0$  i  $x_n$ , a ich liczba wynosi odpowiednio  $m_0 = p$  oraz  $m_n = q$ , co jak zwykle oznacza zgodność pochodnych do rzędu  $p - 1$  lub  $q - 1$  włącznie<sup>21\*</sup>).

Dokonyjąc liniowego podstawienia

$$(9.1) \quad x = x_0 + (x_n - x_0)t$$

zamieniamy dowolny przedział  $(x_0, x_n)$  na przedział  $(0, 1)$ . Zajmiemy się zatem tylko przypadkiem  $x_0 = 0$ ,  $x_n = 1$ .

Przypuśćmy, że znamy wartości  $f^i(0) = a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, p - 1$ ) oraz  $f^i(1) = b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q - 1$ ) i szukamy współczynników  $c_j$  wielomianu stopnia  $p + q - 1$

$$(9.2) \quad W(x) = \sum_{j=0}^{p+q-1} c_j x^j,$$

który by wykazywał żądane warunki zgodności. W tym celu należałoby na ogół rozwiązać układ  $p + q$  równań liniowych o tyluż niewiadomych. Porównując ten wielomian ze wzorem *Maclaurina* stwierdzamy jednak od razu, że

$$(9.3) \quad c_j = \frac{a_j}{j!} \quad (j = 0, 1, \dots, p - 1),$$

i pozostaje do rozwiązania jedynie układ  $q$  równań o niewiadomych  $c_j$  ( $j = p, p + 1, \dots, p + q - 1$ ). Układ ten ma postać

$$(9.4) \quad \begin{cases} b_0 = \sum_{j=0}^{p+q-1} c_j, \\ b_1 = \sum_{j=0}^{p+q-1} j c_j, \\ \dots \\ b_{q-1} = \sum_{j=0}^{p+q-1} j(j-1) \dots (j-q+2) c_j. \end{cases}$$

<sup>21\*</sup> Oznaczenia  $p$  i  $q$  zostały wprowadzone jedynie dla skrócenia zapisu.

Oznaczmy teraz

$$(9.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0 - \sum_{j=0}^{p-1} c_j = d_0, \\ b_1 - \sum_{j=0}^{p-1} j c_j = d_1, \\ \dots \dots \dots \\ b_{q-1} - \sum_{j=0}^{p-1} j(j-1) \dots (j-q+2) c_j = d_{q-1}. \end{array} \right.$$

Wobec wzorów (9.3) wartości  $d_i$  są znane. Postacią normalną układu (9.4) będzie więc

$$(9.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=p}^{p+q-1} c_j = d_0, \\ \sum_{j=p}^{p+q-1} j c_j = d_1, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{j=p}^{p+q-1} j(j-1) \dots (j-q+2) c_j = d_{q-1}. \end{array} \right.$$

Podamy jedynie rozwiązanie układu (9.6) w najważniejszych dla zastosowań przypadkach szczególnych  $q = 2, 3$  i  $4$ :

(1)  $q = 2$

$$(9.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_p = (p+1)d_0 - d_1, \\ c_{p+1} = -pd_0 + d_1; \end{array} \right.$$

(2)  $q = 3$

$$(9.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_p = \frac{(p+1)(p+2)}{2} d_0 - (p+1)d_1 + \frac{1}{2} d_2, \\ c_{p+1} = -p(p+2)d_0 + (2p+1)d_1 - d_2, \\ c_{p+2} = \frac{p(p+1)}{2} d_0 - pd_1 + \frac{1}{2} d_2; \end{array} \right.$$

(3)  $q = 4$

$$(9.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_p = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} d_0 - \frac{(p+1)(p+2)}{2} d_1 + \frac{p+1}{2} d_2 - \frac{1}{6} d_3, \\ c_{p+1} = -\frac{p(p+2)(p+3)}{2} d_0 + \frac{(3p+1)(p+2)}{2} d_1 - \frac{3p+2}{2} d_2 + \frac{1}{2} d_3, \\ c_{p+2} = \frac{p(p+1)(p+3)}{2} d_0 - \frac{p(3p+5)}{2} d_1 + \frac{3p+1}{2} d_2 - \frac{1}{2} d_3, \\ c_{p+3} = -\frac{p(p+1)(p+2)}{6} d_0 + \frac{p(p+1)}{2} d_1 - \frac{p}{2} d_2 + \frac{1}{6} d_3. \end{array} \right.$$

Wzory (9.7) - (9.9) pozwalają określić przybliżenie podstawowe w postaci wielomianu przy dowolnej liczbie warunków  $m_0 = p$  oraz przy  $m_n = q \leq 4$ .

#### 10. Przykład liczbowy

Dla lepszego zobrazowania korzyści interpolacji częściowej pokażemy przeprowadzoną różnymi metodami interpolację dobrze znanej funkcji

$$(10.1) \quad y = \sin \frac{\pi}{2} x.$$

Założymy, że w punktach  $x = 0$  i  $x = 1$  znamy wartości samej funkcji i  $m$  pierwszych jej pochodnych, oraz że znamy wartości funkcji w dziewięciu punktach pośrednich dla prostoty rozłożonych równomiernie:  $x = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ . Będziemy poszukiwali wartości w punkcie  $x = 1/3$ ; wynik dokładny wynosi  $\sin \pi/6 = 0,5$ .

Zastosujemy najpierw metodę interpolacji częściowej przy założeniu  $m = 2$ . Przybliżenie podstawowe przyjmiemy w postaci wielomianu możliwie najniższego stopnia, który w punktach  $x = 0$  i  $x = 1$  wykazywałby z daną funkcją zgodność do pierwszych pochodnych włącznie. Będzie to wielomian

$$(10.2.1) \quad W(x) = \frac{\pi}{2} x - (\pi - 3) x^2 - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) x^3$$

lub

$$(10.2.2) \quad W(x) = 1,5707963 x - 0,1415927 x^2 - 0,4292037 x^3.$$

Zanim przejdziemy do szczegółowych obliczeń, przeprowadzimy oszacowanie błędu. Kres górny wartości bezwzględnej czwartej pochodnej funkcji  $\sin(\pi/2)x$  w przedziale  $0 \leq x \leq 1$  wynosi  $\pi^4/16$ , zatem podstawiając do (8.17) i (8.21)  $x_n - x_0 = 1$ ,  $x_{k+1} - x_k = 0,1$  (dla każdego  $k$ ), otrzymamy następujące oszacowanie błędu przy interpolacji częściowej zwyczajnej:

$$|b_{2,k}(x)| \leq \frac{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0,01 \cdot \pi^4}{16 \cdot 16 \cdot 24} \leq 0,00095$$

oraz przy interpolacji częściowej przyspieszonej:

$$|b_{2,k}(x)| \leq \frac{1 \cdot 0,01 \cdot \pi^6}{64 \cdot 64 \cdot 720} \leq 0,0000033.$$

Gdybyśmy korzystali tylko z przybliżenia wielomianem  $W(x)$ , błąd byłby oszacowany wzorem (8.27) i wynosiłby

$$|b(x)| \leq \frac{1 \cdot \pi^4}{16 \cdot 16 \cdot 24} \leq 0,016.$$

Mamy zatem prawo spodziewać się, że powtórna interpolacja, którą przeprowadzamy metodą interpolacji częściowej, da w wyniku 17-krotne zmniejszenie błędu (interpolacja częściowa zwyczajna) lub aż 5000-krotne zmniejszenie błędu (interpolacja częściowa przyspieszona).

Dla porównania przytoczymy jeszcze oszacowanie błędu przy zwykłej interpolacji liniowej pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami [wzór (8.22)]:

$$|b(x)| \leq \frac{0.01 \pi^2}{4 \cdot 8} \leq 0,0031.$$

Otrzymaliśmy wartość trzykrotnie większą niż przy interpolacji częściowej zwyczajnej, a pięciokrotnie mniejszą niż przy stosowaniu samego tylko wielomianu  $W(x)$ .

Oczywiście przy stosowaniu interpolacji Hermite'a błąd będzie znacznie mniejszy. Podstawiając do wzoru (8.26)  $m = 2$ ,  $n = 10$ ,  $|f^{(13)}(x)| \leq \pi^{13}/2^{13}$ , otrzymujemy

$$|b(x)| \leq \frac{1 \cdot \pi^{13}}{2^{13} \cdot 2^4 \cdot 13!} \leq 4 \cdot 10^{-9}.$$

Wielomian Hermite'a byłby jednak w tym przypadku wielomianem dwunastego stopnia i nakład pracy przy posługiwaniu się nim byłby bardzo wysoki. Zwiększenie dokładności — w stosunku do interpolacji częściowej przyspieszonej — nie przekracza trzech miejsc dziesiętnych.

Zauważmy jeszcze, że w tym szczególnym przypadku, gdy dana liczba pochodnych na brzegu przedziału jest niewielka, a odstęp między punktami są równe, bardzo korzystne byłoby posługiwanie się wielomianem Lagrange'a, np. przy użyciu gotowych tablic współczynników. Jednak przy nierównych odstępach węzłów i większej liczbie punktów, w których dane są pochodne, korzystanie z wielomianu Lagrange'a jest mniej dokładne, a znacznie trudniejsze.

Przejdziemy do obliczania rzeczywistej wielkości błędów. Chcemy znaleźć wartość funkcji w punkcie  $x = 1/3$ , więc przede wszystkim obliczamy błąd przybliżenia podstawowego  $b_1(x)$  w punktach sąsiednich  $x = 0,3$  i  $x = 0,4$ :

$$W(0,3) = \frac{432 + 147 \pi}{2000} = 0,4469071,$$

$$W(0,4) = \frac{44 + 9 \pi}{125} = 0,5781947.$$

Ponieważ <sup>22)</sup>  $f(0,3) = \sin 27^\circ = 0,4539905$ ,  $f(0,4) = \sin 36^\circ = 0,5877853$ , więc  $b(0,3) = 0,4539905 - 0,4469071 = 0,0070834$ ,  $b_1(0,4) = 0,5877853 - 0,5781947 = 0,0095906$ . Przy interpolacji częściowej zwyczajnej błąd

<sup>22)</sup> Wartości zaczerpnięte z tablic Chrienowa, [41].

ten będziemy, zgodnie z założeniem, interpolować liniowo<sup>22\*</sup>). Funkcji przybliżającej  $\bar{b}_{1,3}(x)$  nie ma potrzeby wypisywać w sposób jawny; obliczamy wprost  $\bar{b}_{1,3}(1/3) = 0,0079192$ , a ponieważ

$$W\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7 + 2\pi}{27} = 0,4919698,$$

to uzyskujemy ostatecznie przybliżenie

$$\sin \frac{\pi}{6} \approx 0,4919698 + 0,0079192 = 0,4998890,$$

obarczone błędem  $|b_{2,3}(1/3)| = 0,0001110$ , a więc około dziewięć razy mniejszym od oszacowanego. Błąd samego przybliżenia podstawowego wyniósł, jak widzimy, 0,0080302, czyli około połowy oszacowanego.

W przypadku interpolacji częściowej przyspieszonej obliczamy kolejno:  $U(0,3) = 0,3^2 \cdot 0,7^2 = 0,0441$ ,  $U(0,4) = 0,0576$ ,  $\beta_1(0,3) = 0,16062$ ,  $\beta_1(0,4) = 0,16650$ . Funkcję  $\beta_1(x)$  przybliżamy wielomianem liniowym używając  $\bar{\beta}_{1,3}(1/3) = 0,16258$  i ostatecznie

$$\sin \frac{\pi}{6} \approx 0,4919698 + \frac{4}{81} 0,16258 = 0,4999984.$$

Błąd wynosi tutaj  $1,6 \cdot 10^{-6}$ , tj. około połowy oszacowanego.

Stosując zwykłą interpolację liniową otrzymalibyśmy przybliżenie

$$\sin \frac{\pi}{6} \approx 0,4985888,$$

którego błąd wynosi 0,0014112, a więc również jest dwukrotnie mniejszy od oszacowanego. Oszacowanie (8.17) błędu interpolacji częściowej zwykłej jest więc stosunkowo niedokładne, jak to podkreślaliśmy już wyżej.

Stosunkowo niska dokładność wyniku uzyskanego w powyższym przykładzie metodą interpolacji częściowej jest spowodowana słabą dokładnością przybliżenia podstawowego. Zbadamy teraz zwiększenie dokładności przy przyjęciu  $m = 3$ , zamiast  $m = 2$ , a więc przy zgodności również i drugich pochodnych na brzegach przedziału. Wyniki obliczeń zestawione są w tabelicy 1.

<sup>22\*</sup>) Jedynie w przedziałach  $(0, 0,1)$  i  $(0,9, 1)$  należałoby stosować interpolację błędu  $b_1(x)$  parabolą drugiego stopnia. Wartości  $b_1(x)$  są jednak w tych przedziałach tak małe, że ta interpolacja paraboliczna jest raczej niepotrzebna.



Tablica 1. Błędy przy różnych metodach interpolacji

Metoda interpolacji	Błąd oszacowany	Wartość przybliżona	Błąd rzeczywisty
interpolacja częściowa zwyczajna	$4,9 \cdot 10^{-5}$	0,4999977	0,0000023
interpolacja częściowa przyspieszona	$3,6 \cdot 10^{-8}$	0,5000000	0,0000000
przybliżenie podstawowe	$3,3 \cdot 10^{-4}$	0,4998495	0,0001505
interpolacja liniowa	$3,1 \cdot 10^{-3}$	0,4985888	0,0014112
interpolacja Hermite'a	$1,2 \cdot 10^{-11}$	—	—

Interpolacja częściowa zwyczajna daje tu już pięć, przyspieszona siedem dokładnych znaków dziesiętnych. Błąd interpolacji częściowej zwyczajnej jest około dwadzieścia razy mniejszy od oszacowanego.

Korzystając z przybliżenia podstawowego wielomianem piątego stopnia uzyskaliśmy już stosunkowo dużą dokładność wyników. Oczywiście przyjęcie  $m = 4$  (tj. nałożenie na wielomian podstawowy ośmiu warunków) przyniosłoby w wyniku dalsze poważne zwiększenie dokładności (np. przyjęcie  $m = 3$  zamiast  $m = 2$  zmniejszyło błąd około 50 razy w przypadku interpolacji częściowej zwyczajnej, a około 100 razy w przypadku przyspieszonej) przy niewielkim wzroście nakładu pracy [współczynniki przybliżenia podstawowego określiłyby wzory (9.3) i (9.9)]. Istnieją jednak inne sposoby zwiększenia dokładności bez zmiany przybliżenia podstawowego, a polegają one na poprawieniu interpolacji funkcji  $b_1(x)$  lub  $\beta_1(x)$ .

Nie nastęrczy np. specjalnych trudności interpolowanie tych funkcji parabolą, przechodzącą przez trzy punkty (drugiego stopnia). Przeprowadzenie parabol wyższych stopni byłoby już nieco kłopotliwe w przypadku ogólnym, gdy odstęp między węzłami nie są równe. Natomiast duże możliwości otwierają się tutaj przed interpolacją funkcji  $b_1(x)$  i  $\beta_1(x)$  na drodze graficznej.

Interpolacji graficznej zazwyczaj nie bierze się pod uwagę, gdy chodzi o osiągnięcie większej dokładności. Wyjątek zachodzi jedynie wtedy, gdy zbiór wartości funkcji będzie niewielki. Pewnego rodzaju zmniejszenie zbioru wartości funkcji zachodzi właśnie przy interpolacji częściowej, gdzie zastępujemy interpolację samej funkcji interpolacją błędu. Interpolując np. błąd  $b_1(x)$  na drodze graficznej z dokładnością trzech znaków możemy uzyskać ostateczny wynik z dokładnością sześciu lub siedmiu znaków, o ile tylko przybliżenie podstawowe zostało dobrane właściwie.

Stosując interpolację częściową możemy z reguły osiągnąć wynik sześciu- i siedmiocyfrowy przy znacznie mniejszym nakładzie pracy niż przy innej metodzie interpolacji. Wyłączyć należy tutaj jedynie interpolację tablic o małym odstepie, gdy interpolacja liniowa okazuje się wystarczająca, lub interpolację tablic wzorami typu Lagrange'a,

zwłaszcza gdy posiadamy tablice współczynników interpolacyjnych. Natomiast dla nierównych odstępów zmiennej niezależnej i przy znajomości kilku pierwszych pochodnych poszukiwanej funkcji przynajmniej w dwóch punktach, interpolacja Lagrange'a lub Hermite'a wymaga większego nakładu pracy niż interpolacja częściowa.

#### 11. Rozwiązanie równania (3.20) metodą interpolacji częściowej

Zastosujemy teraz metodę interpolacji częściowej przyśpieszonej do obliczania pierwiastków równania typu (3.20). Zajmiemy się najpierw wybozczeniem prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych, a więc równaniami (4.17) i (4.18).

Szeregi nieskończone (4.4) występujące w rozwinięciach asymptotycznych funkcji Bessela (4.2) zamieniają się na zwykłe wielomiany, gdy rząd  $p$  funkcji jest o  $1/2$  większy od liczby całkowitej. Dla interesujących nas funkcji  $J_{1/2}(x)$ ,  $Y_{1/2}(x)$ ,  $J_{3/2}(x)$  oraz  $Y_{3/2}(x)$  otrzymujemy wyrażenia

$$(11.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{1/2}(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}, \\ J_{3/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \\ Y_{1/2}(x) = -\frac{\cos x}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}, \\ Y_{3/2}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \left( \frac{\cos x}{x} + \sin x \right) \end{array} \right.$$

i zamiast (4.17) i (4.18) możemy napisać równania

$$(11.2) \quad \operatorname{tg} \frac{\xi}{k} = \frac{\sin \xi - \xi \cos \xi}{\cos \xi + \xi \sin \xi}$$

dla pierwszego oraz

$$(11.3) \quad \operatorname{tg} \frac{\xi}{k} = \operatorname{tg} \xi$$

dla drugiego przypadku wybozczenia.

Równanie (11.2) przekształcimy najpierw do postaci

$$(11.4) \quad \xi = -\operatorname{tg} \left( \frac{1-k}{k} \xi \right).$$

Jednak postać ta jest jeszcze niewygodna do przeprowadzania interpolacji, bowiem najmniejszy pierwiastek  $\xi$  tego równania zmienia się od 0 do  $\infty$ , gdy  $k$  zmienia się od 0 od 1, jak łatwo się o tym przekonać np. na drodze graficznej. W przypadku prętów płasko zbieżnych wprowadziliśmy nową niewiadomą  $\zeta$  [wzór (4.29)]. Tutaj będzie korzystniej wprowadzić oznaczenie

$$(11.5) \quad \frac{1-k}{k} \xi = \chi.$$

Wtedy równanie (11.4) przybierze postać

$$(11.6) \quad \frac{k}{1-k} \chi = -\operatorname{tg} \chi,$$

przy czym  $\chi$  zmienia się od  $\pi$  do  $\pi/2$  ze zmianą  $k$  w granicach od 0 do 1.

Obliczanie pierwiastków równania (11.6) nadaje się bardzo dobrze do zastosowania interpolacji częściowej. Jest to równanie przestępne względem  $\chi$ , natomiast daje się łatwo rozwickłać względem  $k$ :

$$(11.7) \quad k = -\frac{\operatorname{tg} \chi}{\chi - \operatorname{tg} \chi},$$

więc znalezienie kilkunastu odpowiadających sobie par wartości  $k$  i  $\chi$  nie przedstawia trudności. Otrzymane ze wzoru (11.7) wartości  $k$  posłużą jako węzły interpolacji. Będą one rozmieszczone nierównomiernie, co znacznie utrudniłoby np. interpolację za pomocą wzoru *L a g r a n g e' a*, a nie przeszkadza przy interpolacji częściowej. Całkiem łatwo możemy również znaleźć potrzebne do prawidłowego przeprowadzenia interpolacji częściowej wartości kilku pierwszych pochodnych poszukiwanej funkcji  $\chi = \chi(k)$  na brzegach przedziału (0,1) posługując się znanymi wzorami na pochodne funkcji odwrotnej bądź też rozwijając funkcję (11.7) w szereg potęgowy i wykonując odpowiednie działania na szeregach. Dla przykładu posłużymy się drugim z tych sposobów.

Ponieważ wartości  $k = 0$  odpowiada  $\chi = \pi$ , rozwiniemy najpierw funkcję (11.7) w szereg potęgowy o środku w punkcie  $\chi = \pi$ :

$$k = -\frac{\operatorname{tg} [(\chi - \pi) + \pi]}{(\chi - \pi) + \pi - \operatorname{tg} [(\chi - \pi) + \pi]} = -\frac{\operatorname{tg} (\chi - \pi)}{(\chi - \pi) + \pi - \operatorname{tg} (\chi - \pi)},$$

a po podstawieniu w liczniku i mianowniku rozwinięcia

$$(11.8) \quad \operatorname{tg} (\chi - \pi) = (\chi - \pi) + \frac{(\chi - \pi)^3}{3} + \frac{2(\chi - \pi)^5}{15} + \dots$$

i wykonaniu dzielenia szeregów otrzymujemy

$$(11.9) \quad k = -\frac{1}{\pi}(\chi - \pi) - \frac{1}{3\pi}(\chi - \pi)^3 - \frac{1}{3\pi^3}(\chi - \pi)^4 + \dots$$

Odwrócenie szeregu (11.9) daje poszukiwane rozwinięcie

$$(11.10) \quad \chi = \pi - \pi k + \frac{\pi^3}{3} k^3 - \frac{\pi^3}{3} k^4 + \dots$$

Zupełnie podobnie rozwijamy funkcję (11.7) w szereg potęgowy o środku w punkcie  $\chi = \pi/2$ :

$$(11.11) \quad k = 1 - \frac{\pi}{2} \left( \chi - \frac{\pi}{2} \right) + \left( \frac{1}{4} \pi^2 - 1 \right) \left( \chi - \frac{\pi}{2} \right)^2 + \\ + \left( \frac{5}{6} \pi - \frac{1}{8} \pi^3 \right) \left( \chi - \frac{\pi}{2} \right)^3 + \dots$$

a odwrócenie tego szeregu daje

$$(11.12) \quad \chi = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} (k - 1) + \\ + \left( \frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3} \right) (k - 1)^2 - \left( \frac{2}{\pi} - \frac{56}{3\pi^3} + \frac{64}{\pi^5} \right) (k - 1)^3 + \dots$$

Pamiętając wzór ogólny na współczynniki szeregu Taylora znajdujemy już teraz bez trudu pochodne poszukiwanej funkcji w punkcie  $k = 0$  oraz w punkcie  $k = 1$ , co pozwoli zbudować przybliżenie podstawowe dla przedziału  $0 \leq k \leq 1$ . Przypadkiem  $k > 1$  (tj. gdy sztywność końca swobodnego jest większa niż utwierdzonego) nie będziemy się zajmowali, jak to już zaznaczyliśmy w p. 3; podobnie postępuje Dinnik prawdopodobnie nie widząc zastosowań technicznych dla takich prętów, a jedynie Z weiling, [28], badając zbieżność metody Engessera-Vianello, przytacza dla porównania wartość współczynnika  $\vartheta$  dla  $k = 2$  (z dokładnością do pięciu znaków dziesiętnych).

Możemy zatem przystąpić do budowania przybliżenia podstawowego. Przyjmijmy je w postaci wielomianu. W pierwszym rzędzie musimy zdecydować się na liczbę warunków, jakie nałożymy na ten wielomian w punktach  $k = 0$  i  $k = 1$ . Zauważymy przede wszystkim, że szereg (11.12) wydaje się znacznie szybciej zbieżny od szeregu (11.10), przynajmniej sądząc po współczynnikach przy kilku pierwszych wyrazach (ogólny wzór na  $n$ -ty wyraz szeregu nie daje się tutaj wyprowadzić). Nasuwa to myśl przyjęcia innej liczby warunków zgodności na jednym, a innej na drugim końcu przedziału. Jak wykazały próby, w takich przypadkach korzystniej jest nałożyć większą liczbę warunków w tym punkcie, które-

mu odpowiada szereg szybciej zbieżny, a mniejszą w punkcie pozostałym. Przyjmujemy zgodność dwóch pochodnych i samej funkcji w punkcie  $k=1$  oraz jednej pochodnej i funkcji w punkcie  $k=0$ , czyli będziemy poszukiwali przybliżenia podstawowego wśród wielomianów czwartego stopnia. Przyjmując za zmienną niezależną nie  $k$ , lecz  $k-1$  [co jest wygodne z uwagi na większą liczbę warunków nałożonych w punkcie  $k=1$ ; trzy pierwsze wyrazy szeregu (11.12) będą od razu trzema pierwszymi wyrazami wielomianu], otrzymujemy ostatecznie wielomian  $W(k)$ , który oznaczmy przez  $\chi_0$ :

$$(11.13) \quad \chi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}(k-1) + \left(\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3}\right)(k-1)^2 - \left(\pi - \frac{10}{\pi} + \frac{16}{\pi^3}\right)(k-1)^3 + \\ + \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{6}{\pi} - \frac{8}{\pi^3}\right)(k-1)^4.$$

Błąd  $b_1$  tego przybliżenia, który będziemy teraz interpolować, jest stosunkowo duży, dochodzi bowiem do 0,032. Okazuje się jednak, że nakładając na przybliżenie podstawowe w punkcie  $k=1$  warunek zgodności trzeciej pochodnej zmniejszamy błąd jedynie do 0,025, podobnie nie osiągamy większych korzyści żądając zgodności drugiej pochodnej w punkcie  $k=0$ . Pozostaniemy więc przy przybliżeniu (11.13) dobierając za to gęstą siatkę interpolacyjną wewnątrz przedziału  $0 < k < 1$ , co dzięki bardzo prostej zależności odwrotnej (11.7) nie przysporzy trudności. Podstawimy 19 pośrednich wartości  $\chi$  w równych odstępach między  $\pi/2$  i  $\pi$ , a więc co  $(1/40)\pi$  ( $4^\circ 30'$ ), uzyskując oczywiście wartości  $k$  w odstępach nierównych. Błąd  $b_1$  obliczymy ze wzoru

$$(11.14) \quad b_1(k) = \chi - \chi_0(k),$$

gdzie  $\chi$  jest wartością podstawioną do równania (11.7), a  $\chi_0(k)$  wartością obliczoną na podstawie wzoru (11.13) dla  $k$ , wyznaczonego z równania (11.7). Przeprowadzimy interpolację błędów dla  $k = 0,05, 0,1, \dots, 0,95$  przy użyciu funkcji porównawczej

$$(11.15) \quad U(k) = k^2(k-1)^3.$$

Ze wzoru (11.14) uzyskamy wtedy poszukiwane wartości  $\chi(k)$ .

Znając  $\chi(k)$  obliczymy już bez trudu siłę krytyczną określoną przez współczynnik stateczności  $\vartheta$  [wzór (4.26)]. Z podstawień (3.3), (3.16) i (11.5) otrzymujemy mianowicie

$$(11.16) \quad \frac{Pl^2}{B_0} = (1-k)^2 \xi^2 = k^2 \chi^2, \quad (11.16)$$

a zatem porównanie ze wzorem (4.26) — wobec  $L = 2l$  — daje

$$(11.17) \quad \vartheta = 4k^2 \chi^2.$$

Uzyskane wartości  $\chi$ ,  $\xi$  i  $\vartheta$  po zaokrągleniu do sześciu znaków dziesiętnych lub pięciu miejsc po przecinku zestawiono w tablicy 2.

Tablica 2. Wyboczenie sprężyste jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych

$k$	$\chi$	$\xi$	$\vartheta$
0,00	3,14159	0,00000	0,00000
0,05	2,98572	0,15714	0,08915
0,10	2,83631	0,31515	0,32180
0,15	2,69730	0,47599	0,65478
0,20	2,57042	0,64260	1,05713
0,25	2,45564	0,81855	1,50754
0,30	2,35218	1,00808	1,99179
0,35	2,25890	1,21633	2,50030
0,40	2,17462	1,44975	3,02655
0,45	2,09824	1,71674	3,56611
0,50	2,02876	2,02876	4,11587
0,55	1,96530	2,40203	4,67349
0,60	1,90709	2,86064	5,23729
0,65	1,85352	3,44225	5,80605
0,70	1,80403	4,20941	6,37889
0,75	1,75816	5,27449	6,95507
0,80	1,71551	6,86203	7,53399
0,85	1,67572	9,49574	8,11522
0,90	1,63851	14,7465	8,69843
0,95	1,60361	30,4685	9,28330
1,00	1,57080	$\infty$	9,86960

Przystąpimy teraz do ostatecznego rozwiązania drugiego przypadku wyboczenia sprężystego prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych. Równanie (11.3) jest znacznie prostsze od rozważanego poprzednio równania (11.2). Dla przypadku  $k < 1$  wynika z niego od razu (jak zwykle, bierzemy pod uwagę tylko pierwszą siłę krytyczną) związek

$$(11.18) \quad \frac{\xi}{k} = \xi + \pi,$$

czyli

$$(11.19) \quad \xi = \frac{k}{1-k} \pi.$$

Zatem współczynnik stateczności  $\vartheta$  [wzór (4.26)], wobec  $L=l$ , określa związek:

$$(11.20) \quad \vartheta = k^3 \pi^2.$$

Wartości  $\xi$  i  $\vartheta$  obliczone ze wzorów (11.19) i (11.20) podaje tablica 3.

Tablica 3. Wyboczenie sprężyste dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych

$k$	$\xi$	$\vartheta$	$k$	$\xi$	$\vartheta$
0,00	0,00000	0,00000	0,55	3,83972	2,98556
0,05	0,16535	0,02467	0,60	4,71239	3,55306
0,10	0,34907	0,09870	0,65	5,83439	4,16991
0,15	0,55440	0,22207	0,70	7,33038	4,83611
0,20	0,78540	0,39478	0,75	9,42478	5,55165
0,25	1,04720	0,61685	0,80	12,5664	6,31655
0,30	1,34640	0,88826	0,85	17,8024	7,13079
0,35	1,69163	1,20903	0,90	28,2743	7,99438
0,40	2,09440	1,57914	0,95	59,6903	8,90732
0,45	2,57039	1,99859	1,00	$\infty$	9,86960
0,50	3,14159	2,46740			

Tablica 4. Wyboczenie sprężyste w płaszczyźnie zbieżności jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych

$k$	$\xi'$	$\xi'$	$\vartheta'$
0,00	0,00000	0,00000	0,00000
0,05	0,67277	0,86654	0,67767
0,10	0,86071	1,25877	1,28345
0,15	0,98005	1,59955	1,84857
0,20	1,06762	1,93135	2,38727
0,25	1,13671	2,27341	2,90722
0,30	1,19366	2,63923	3,41310
0,35	1,24206	3,04135	3,90803
0,40	1,28409	3,49370	4,39415
0,45	1,32120	4,01361	4,87299
0,50	1,35438	4,62415	5,34572
0,55	1,38438	5,35792	5,81323
0,60	1,41173	6,26312	6,27624
0,65	1,43683	7,41497	6,73531
0,70	1,46004	8,93863	7,19092
0,75	1,48159	11,0587	7,64344
0,80	1,50170	14,2243	8,09320
0,85	1,52054	19,4828	8,54050
0,90	1,53826	29,9758	8,98554
0,95	1,55498	61,4117	9,42851
1,00	1,57080	$\infty$	9,86960

Zupełnie podobnie przebiega rozwiązanie metodą interpolacji częściowej zagadnienia stateczności sprężystej osiowo ścisanych prętów płasko zbieżnych, czyli obliczenie pierwiastków równań (4.19), (4.20), (4.34) i (4.35). Wyniki obliczeń podają tablice 4-6. Oczywiście przeprowadzono interpolację zmiennej  $\zeta$  [określonej wzorem (4.29)], a nie zmiennej  $\xi$  zmierzającej do nieskończoności, gdy  $k$  zdąży do jedności. Węzły interpolacji błędu  $b_1$  otrzymano częściowo metodą K a l ä h n e, częściowo (dla wartości  $k$  bliskich zeru) przez kilkakrotne rozwiązanie odpowiedniego równania regułą *falsi*<sup>23)</sup>, dobierając  $k$  do przyjętego  $\xi$  (co jest łatwiejsze niż dobór  $\xi$  do  $k$ , jak postępował np. B. P. B o g e r t, [31]) i obliczając odpowiednią wartość  $\zeta$ . Przybliżenia podstawowe przyjęto w postaci wielomianów czwartego lub piątego stopnia. Błąd  $b_1$  nie przekraczał 0,008, był zatem znacznie mniejszy niż w przypadku równania (11.6).

Wyboczenie dwuprzegubowych prętów płasko zbieżnych w płaszczyźnie zbieżności i z płaszczyzny zbieżności potraktowano łącznie (tablica 6).

Tablica 5. Wyboczenie sprężyste z płaszczyzny zbieżności jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych

$k$	$\xi''$	$\xi''$	$\eta''$
0,00	2,40483	2,40483	5,78319
0,05	2,03055	2,61537	6,17324
0,10	1,93463	2,82934	6,48421
0,15	1,87391	3,05844	6,75832
0,20	1,82929	3,30922	7,00861
0,25	1,79401	3,58803	7,24159
0,30	1,76487	3,90218	7,46122
0,35	1,74006	4,26077	7,67012
0,40	1,71850	4,67562	7,87012
0,45	1,69944	5,16265	8,06253
0,50	1,68238	5,74400	8,24838
0,55	1,66695	6,45152	8,42848
0,60	1,65287	7,33293	8,60349
0,65	1,63993	8,46310	8,77394
0,70	1,62797	9,96676	8,94028
0,75	1,61686	12,0684	9,10287
0,80	1,60648	15,2168	9,26205
0,85	1,59675	20,4593	9,41808
0,90	1,58760	30,9374	9,57121
0,95	1,57897	62,3591	9,72166
1,00	1,57080	$\infty$	9,86960

<sup>23)</sup> Korzystano przy tym z siedmiocyfrowych tablic funkcji B e s s e l a dołączonych do pracy G. N. W a t s o n a, [46].



Tablica 6. Wyboczenie sprężyste dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych

$k$	$\zeta'$	$\zeta''$	$\xi'$	$\xi''$	$\vartheta'$	$\vartheta''$
0,00	0,00000	3,83171	0,00000	3,83171	0,00000	3,67049
0,05	0,75173	3,36183	0,96823	4,33007	0,21152	4,23036
0,10	1,03802	3,28251	1,51808	4,80059	0,46667	4,66674
0,15	1,25518	3,24087	2,04860	5,28947	0,75804	5,05362
0,20	1,43762	3,21462	2,60068	5,81529	1,08216	5,41082
0,25	1,59828	3,19657	3,19657	6,39314	1,43691	5,74766
0,30	1,74368	3,18350	3,85532	7,03882	1,82078	6,06927
0,35	1,87759	3,17370	4,59751	7,77122	2,23261	6,37889
0,40	2,00248	3,16619	5,44825	8,61445	2,67151	6,67878
0,45	2,12003	3,16036	6,44035	9,60071	3,13678	6,97063
0,50	2,23147	3,15578	7,61873	10,7745	3,62781	7,25563
0,55	2,33772	3,15218	9,04758	12,1998	4,14410	7,53472
0,60	2,43946	3,14933	10,8227	13,9720	4,68520	7,80866
0,65	2,53728	3,14711	13,0940	16,2411	5,25074	8,07806
0,70	2,63161	3,14538	16,1113	19,2566	5,84039	8,34342
0,75	2,72284	3,14406	20,3235	23,4676	6,45384	8,60512
0,80	2,81125	3,14308	26,6286	29,7717	7,09081	8,86352
0,85	2,89713	3,14238	37,1210	40,2634	7,75108	9,11892
0,90	2,98069	3,14192	58,0842	61,2261	8,43444	9,37160
0,95	3,06212	3,14167	120,934	124,076	9,14067	9,62176
1,00	3,14159	3,14159	$\infty$	$\infty$	9,86960	9,86960

Jeżeli bowiem wszystkie wielkości odnoszące się do wyboczenia w płaszczyźnie zbieżności będziemy oznaczać jedną, a odnoszące się do wyboczenia z płaszczyzny zbieżności dwiema kreskami u góry, to ze wzoru (4.36) wynika

$$(11.21) \quad \xi' = \xi'' \sqrt{k}.$$

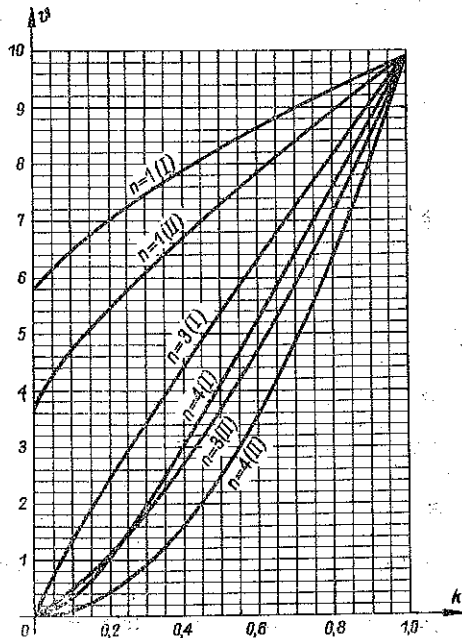
Wobec wzoru (4.29) mamy również

$$(11.22) \quad \zeta' = \zeta'' \sqrt{k},$$

a uwzględniając wzór (4.27) otrzymujemy ważny związek

$$(11.23) \quad \vartheta' = k \vartheta'',$$

pozwalający z jednego rozwiązania bez żadnych trudności otrzymać dru-



Rys. 2

gie. Dla prętów płasko zbieżnych utwierdzonych jednostronnie podobny związek nie daje się wyprowadzić i wyboczenie w płaszczyźnie i z płaszczyzny zbieżności ujęto w dwie odrębne tablice (4 i 5).

Tablice 2, 4 i 5 podają rozwiązania zarazem dla przypadku wyboczenia sprężystego dwuprzegubowych prętów dwuzbieżnych, ponieważ siła krytyczna dla takiego pręta jest równa wprost sile krytycznej dla jednej z jego połówek (a zatem pręta zbieżnego), odpowiednio jednostronnie utwierdzonej.

Zależność współczynników stateczności  $\theta$  od zbieżności prętów  $k$  ilustruje wykres na rysunku 2.

### Literatura cytowana w tekście

#### I. Teoria stateczności prętów

- [1] A. N. Dinnik, Izwestia Jekatierin. Gorn. Instituta, 1914 (cyt. według [15] i [25]).
- [2] A. N. Dinnik, *Ustojcziwost' uprugich sistem*, AN ZSRR, Moskwa-Leningrad 1950.
- [3] A. N. Dinnik, *Sprawocznik po techniczieskoj miechanike*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1949.
- [4] A. N. Dinnik, *Prodolnyj izgib. Kruczenje*, AN ZSRR i USRR, Moskwa 1955.
- [5] B. G. Galerkin, *Sobranje soczinienij*, t. 1, AN ZSRR, Moskwa 1952.
- [6] I. I. Goldienblat i A. M. Sizow, *Sprawocznik po rasczotu stroitelnych konstrukcij na ustojcziwost' i kolebanja*, Strojizdat, Moskwa 1952.
- [7] M. T. Huber, *Stereomechanika techniczna*, t. 2 i 4, PZWS, Warszawa 1951.
- [8] F. S. Jasiński, *Izbrannyje raboty po ustojcziwosti szatych stierzniej*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1952.
- [9] H. Jung, *Ein Beitrag zur Berechnung der Knicklasten*, Zeitschr. Angew. Math. Mech. 31 (1951) Berlin.
- [10] T. Kármán i M. Biot, *Matematyczieskije metody w inżeniernom die*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1948 (tłum. z ang.).
- [11] J. I. Korotkin, A. Z. Łokszin i N. L. Siwiers, *Izgib i ustojcziwost' stierzniej i stierzniewych sistem*, Maszgiz, Moskwa-Leningrad 1953.
- [12] S. D. Lejties, *Ustojcziwost' szatych stalnych stierzniej*, Strojizdat, Moskwa 1954.
- [13] S. E. Mikieladze, *Nowyje metody intiegrirowanja diffierencjalnych urawńienij*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1951.
- [14] J. Naleszkiewicz, *Rozważania ogólne nad zginaniem prostych belek ściskanych*, Księga Jubil. dla Uczcz. Zasług Prof. M. T. Hubera, Gdańsk 1950.
- [15] J. Naleszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, WK, Warszawa 1953.
- [16] W. Nowacki, *Z zastosowań rachunku różnic skończonych w mechanice budowl*, Arch. Mech. Stos., t. 3, Gdańsk 1951.
- [17] E. J. Nyström, *Zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Acta Mathematica 76 (1944), s. 157-184, Upsala (cyt. według [22]).

[18] M. Piątek, *Linia ugięcia belki obustronnie utwierdzonej przy dowolnym obciążeniu i zmiennym przekroju*, cz. 3, Mat. nadesł. na VI Zjazd Nauk. PZITB w Gdańsku, Wyd. Min. Budown., nr 37.

[19] A. Pflüger, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer, Berlin-Getynga-Heidelberg 1950.

[20] S. D. Ponomariew i inni, *Osnovy sowriemiennych nietodow rasczota na procznost' w maszynostrojenji*, Maszgiz, Moskwa 1952.

[21] A. R. Rżanicyn, *Ustojcziwost' rawnowiesja uprugich sistiem*, Gos-tiechizdat, Moskwa 1955.

[22] I. Sala, *Numerische Lösung von linearen homogenen Eigenwertaufgaben zweiter Ordnung durch Mittelwertmethoden*, Soc. Scient. Fennica, Commun. Phys. Math., 15 (1950), 13, Helsinki.

[23] I. Sala, *Über die unelastische Knickung eines verjüngten Stabes*, Suomen Teknillinen Korkeakoulu, Helsinki 1951.

[24] K. Sattler, *Das Durchbiegungsverfahren zur Lösung von Stabilitätsproblemen*, Die Bautechnik 30 (1953), s. 10-11, Berlin.

[25] F. Szelaḡowski, *W sprawie stateczności prętów o zmiennym momencie bezwładności*, wyd. Przegl. Techn., Warszawa 1927.

[26] F. Szelaḡowski, *W sprawie wyznaczania krytycznych wartości obciążeń prętów o zmiennym momencie bezwładności*, cz. 3, Mat. nadesł. na VI Zjazd Nauk. PZITB w Gdańsku, Wyd. Min. Budown., nr 37.

[27] S. P. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, New York 1936.

[28] K. Zeiling, *Gleichgewicht und Stabilität*, Berlin 1953.

[29] M. Życzkowski, *Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów niepryzmatycznych*, Rozpr. Inż. 2 (1954), Warszawa.

[30] M. Życzkowski, *W sprawie doboru optymalnego kształtu prętów osiowo ściskanych*, Rozpr. Inż. 4(1956).

## II. Teoria interpolacji i rozwiązywania równań przestępnych

[31] B. P. B o g e r t, *Some Roots of an Equation Involving Bessel Functions*, Journ. Math. Phys. 30 (1951), Massachusetts.

[32] A. P. Filin, *K opriedielenju koefficientow w intierpolacjonnych polinomach*, Inż. Sborn., t. 10, Moskwa 1951.

[33] A. O. G e l f o n d, *Isczislenje koniecznych raznostiej*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1952.

[34] W. L. Gonczarow, *Tieorja intierpolirowanja i pribliżenja funkcij*, Gos-tiechizdat, Moskwa 1954.

[35] C. Hermite, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*, Crelle Journ. 84 (1878), s. 70-79 (cyt. według [37] i [39]).

[36] A. Kalähne, *Über die Wurzeln einiger Zylinderfunktionen und gewisser aus ihnen gebildeter Gleichungen*, Zeitschr. Math. Phys. 54 (1907), Lipsk.

[37] A. Łomnicki, *Uogólnienie wzoru interpolacyjnego Lagrange'a*, Rozpr. Wdz. Mat.-Przyr. Akad. Umiejętn., seria A, t. 60, Kraków 1920.

[38] J. Mac Mahon, *On the Roots of the Bessel and certain Related Functions*, Annals Math. 9 (1894/1895) (cyt. według [36] i [43]).

[39] I. P. Natanson, *Konstruktijnaja tieorja funkcij*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1949.

[40] V. Williot, *Sur une generalisation de la formule de Lagrange*, Bull. Sci. Math., ser. 2, 14 (1890), s. 218-224 (cyt. według [37]).

### III. Tablice funkcji

- [41] L. S. Chrienow, *Tablicy trygonometryczeskich funkcij*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1951.
- [42] W. N. Faddiejewa i M. K. Gawurin, *Tablicy funkcij Biessela  $J_p(x)$  cietych nomerow*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1950.
- [43] A. Gray i G. B. Mathews, *Funkcji Biessela i ich przylozenia k fizikie i miechanikie*, Izd. Inostr. Lit., Moskwa 1953 (tłum. z ang.).
- [44] E. Jahnke i F. Emde, *Tafeln höherer Funktionen*, Lipsk 1948.
- [45] K. A. Karpow, *Tablicy koefficientow intierpolacjonnoj formuły Lagran-ge'a*, AN ZSRR, Moskwa 1954.
- [46] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge 1944.

### Резюме

#### ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ ДЛЯ УПРУГИХ НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ ЧАСТИЧНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Существующие таблицы значений критических сил, для чаще всего встречаемых идеально упругих непризматических стержней, составленные главным образом Динником, мало точны. Целью настоящей работы является приведение 5-ти или 6-тизначных таблиц при небольших интервалах аргумента (конусности стержня  $k$ ).

Искомые значения критических сил можно получить точным образом путем решения трансцендентных уравнений типа (3.20), в которых выступают Бесселевы функции. Такие уравнения определяют неявную функцию, являющуюся зависимостью коэффициента устойчивости от конусности стержня. Уравнения типа (3.20), встречающиеся в различных областях математической физики, уже рассматривались несколькими исследователями. Например, Д. МакМагон описал метод, заключающийся в разложении функции в степенный ряд, сходящийся в некоторой окрестности точки  $k=1$  (призматический стержень). Таким образом он высчитал значения нескольких первых производных искомой функции в точке  $k=1$ ; А. Каленэ предложил метод, основанный на знании корней Бесселевых функций  $J_p(x)$  и  $Y_p(x)$ , позволяющий решить уравнение для некоторых значений  $k$ , неравномерно распределенных в интервале  $0 < k < 1$ ; для других значений  $k$  можно получить результат путем интерполяции.

В настоящей работе приводится новый метод интерполяции, именуемой «методом частичной интерполяции», позволяющий использовать результаты Каленэ, равно как и МакМагона, а также вычислить корни уравнений типа (3.20) с требуемой точностью, при сравнительно небольшой затрате труда.

Обычная частичная интерполяция выяснена на рис. 1. Сначала создаем основное приближение  $W(x)$ , используя только часть име-

ющихся в нашем распоряжении условий, которые являются обычно условиями типа Эрмита на границах интервала (согласованность самой функции и нескольких первых производных). Затем, используя остальные условия, определяем погрешность в узлах интерполяции и эту погрешность  $b_1(x)$  соответственно интерполируем в отдельных подинтервалах (в простейшем случае, линейно). Сумма основного приближения и интерполированной погрешности считается приближением искомой функции. Ускоренная частичная интерполяция разнится от обычной тем, что во второй стадии интерполируется не сама погрешность  $b_1(x)$ , а ее отношение к некоторой сравнительной функции  $U(x)$ , что позволяет значительно уменьшить конечную погрешность интерполяции  $b_2(x)$ .

В работе приводится пример оценки погрешности при обычной частичной интерполяции, (8.17), и при ускоренной, (8.21), готовые формулы для коэффициентов основных приближений в форме полинома, (9.3), (9.7), (9.8) и (9.9), а также сравнение предлагаемого метода интерполяции с другими известными методами интерполяции на примере хорошо известной функции  $y = \sin(\pi/2)x$ . При помощи ускоренной частичной интерполяции вычисляются также корни соответственных трансцендентных уравнений и искомые значения коэффициентов устойчивости (таблицы 2 - 6).

#### S u m m a r y

#### COMPUTATION OF CRITICAL FORCES FOR ELASTIC NON-PRISMATIC BARS BY THE METHOD OF PARTIAL INTERPOLATION

The existing tables of critical forces for the most common perfectly elastic non-prismatic bars, prepared chiefly by Dinnik, are not accurate. The subject of this paper is to present a method for obtaining 5 or 6 figure tables with small intervals of the argument (the taper  $k$ ).

The values of the critical forces can be obtained in an accurate manner by solving transcendental equations of the type (3.20) involving Bessel's functions. Such an equation determines a composite function expressing the dependency of the stability coefficient on the taper. Equations of the type (3.20) appearing in various domains of theoretical physics have already been considered by several investigators, J. McMahon developed a method based on the expansion of a function in a power series convergent in a certain neighbourhood of the point  $k = 1$  (a prismatic bar), thus computing the values of the first several derivatives of the sought function, at the point  $k = 1$ . A. Kalähne proposed a method based on the knowledge of the zeros of Bessel functions  $J_p(x)$  and  $Y_p(x)$ . This method enables us to solve the equation considered

for certain values of  $k$  non-uniformly scattered over the interval  $0 < k < 1$ . For other values of the taper  $k$  the result can be obtained by interpolation.

A new interpolation method called the method of partial interpolation is proposed in this paper. This method enables us to use the results of Kalähne and MacMahon, and to calculate with required accuracy the roots of equations of the type (3.20). The amount of calculation work is relatively small.

The ordinary partial interpolation is illustrated in Fig. 1. First, we construct the basic approximation  $w(x)$  using some of the conditions available only. These are usually conditions of the Hermitian type, for the ends of the interval (the agreement of the function itself and its first few derivatives). Next, using the remaining conditions we calculate the error at the interpolation in nodal points. This error,  $b_1(x)$ , is interpolated in a suitable manner in each particular sub-interval (in the most simple case the interpolation is linear). The sum of the basic approximation and the interpolated error is believed to be the approximation of the function required. The accelerated partial interpolation method differs from the ordinary method by the fact that in the second stage we interpolate the ratio of the error  $b_1(x)$  to a certain reference function  $U(x)$  instead of interpolating the error itself. This enables a considerable reduction of the final interpolation error  $b_2(x)$ .

The paper gives an example of the evaluation of the error for the ordinary and the accelerated partial interpolations — Eqs. (8.17) and (8.21), respectively — and presents formulae for the coefficients of basic approximations assumed in the form of a polynomial, (9.3), (9.7), and (9.9). The method proposed is compared to known interpolation methods using the example of the well known function  $y = \sin(\pi/2)x$ . Finally, the accelerated partial interpolation method is used to calculate the roots of the corresponding transcendental equations and the required values of stability coefficients (Tabs. 2-6).

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 października 1955 r.*