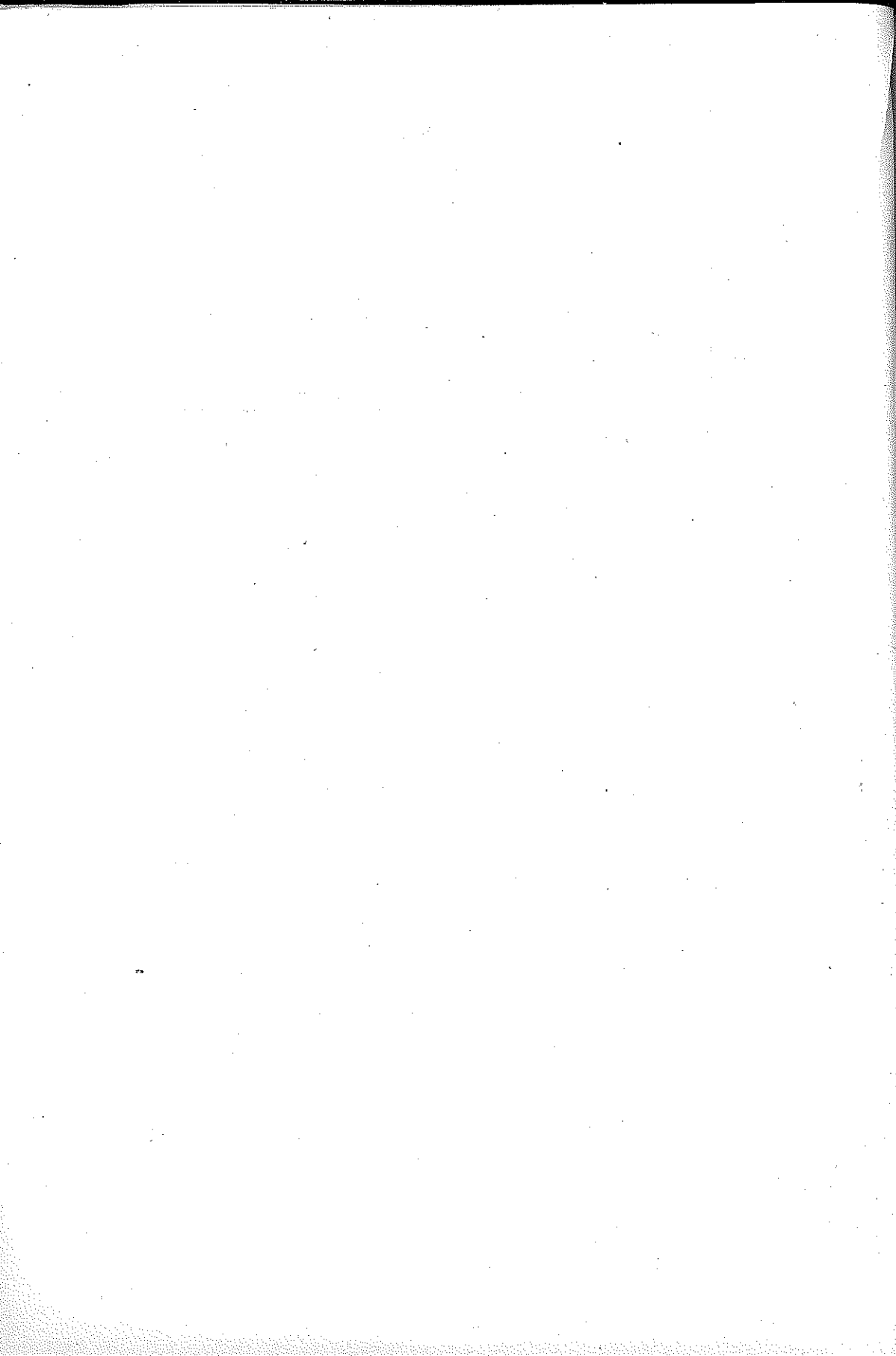


W. OLSZAK I W. URBANOWSKI

SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA GRUBOŚCIENNA POWŁOKA
KULISTA Z MATERIAŁU NIEJEDNORODNEGO,
PODDANA DZIAŁANIU CIŚNIENIA WEWNĘTRZNEGO
I ZEWNĘTRZNEGO

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXXVIII



W pracy naszej [3] rozpatrywaliśmy walec grubościenny o przekroju w kształcie pierścienia kołowego, obciążony ciśnieniem wewnętrznym p typu hydrostatycznego, przy czym o materiale walca założyliśmy, że jest on niejednorodny zarówno sprężysto, jak i plastycznie.

W niniejszej pracy *) zajmiemy się analogicznym zagadnieniem dla kuli grubościennej obciążonej równomiernym ciśnieniem wewnętrznym p i zewnętrznym q . Ze względu na zbliżony charakter obu problemów tok rozumowania będzie podobny. Wystąpią w niej również charakterystyczne wielkości, których znaczenie będzie zbliżone do znaczenia odpowiednich wielkości w pracy [3].

1. Układem rozpatrywanym będzie powłoka kulista grubościenna o promieniu wewnętrznym a i promieniu zewnętrznym b . Promień dowolnego jej punktu oznaczamy będziemy przez r . Wielkościom związanym z kierunkiem radialnym dodawamy będziemy wskaźnik r , wielkościom związanym z kierunkiem prostopadłym do radialnego wskaźnik t . Wobec założonej kulistej symetrii wszystkie kierunki prostopadłe do radialnego są równoważne.

Założmy dalej, że powierzchnia wewnętrzna powłoki obciążona jest ciśnieniem równomiernie rozłożonym p , a powierzchnia zewnętrzna ciśnieniem tego samego charakteru o wartości q . O różnicy ciśnień p i q zakładamy w dalszym ciągu, że wzrasta z czasem t , czyli że funkcja

$$(1.1) \quad \Pi(t) = p - q$$

jest funkcją rosnącą. Założenie to, jak przekonamy się w dalszym ciągu, posiada istotne znaczenie dla przebiegu odkształceń plastycznych.

Co do niejednorodności materiału przyjmujemy, że zarówno jego własności sprężyste, jak i własności plastyczne są funkcjami samego tylko promienia r . Rozpatrywać będziemy zatem ten szczególny typ materiału, który można by było nazwać kulisto symetrycznie niejednorodnym.

Odnosnie cech sprężystych i plastycznych materiału wprowadzimy jeszcze dalsze założenia, uczynimy to jednak dopiero wtedy, gdy konieczność tego wystąpi dostatecznie wyraźnie.

*) Praca przedstawiona na Konferencji Naukowej Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w sierpniu 1955 r. w Karpaczu.

2. Oznaczmy przez u przemieszczenie radialne rozpatrywanego punktu powłoki kulistej. Wielkość ta będzie oczywiście pewną funkcją promienia r i czasu t , tj. $u = u(r, t)$.

Jak wiadomo, składowe główne tensora odkształcenia (dwie istotnie różne wielkości) ε_r i ε_t mogą być wyrażone przez przemieszczenie $u(r, t)$ za pomocą zależności

$$(2.1) \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}.$$

Dalsze rozważania upraszczają się znacznie, gdy wprowadzimy funkcje pomocnicze¹⁾ ε_0 i ζ_0 określone równościami

$$(2.2) \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t) = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r}\right),$$

$$(2.3) \quad \zeta_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - 2\frac{u}{r}\right).$$

Znaczenie fizyczne funkcji ε_0 jest oczywiste: jest to średnie wydłużenie jednostkowe w rozpatrywanym punkcie. Funkcja ζ_0 ma natomiast charakter formalny. Jej określenie nawiązuje do funkcji ζ w pracy [3], której użyto tam zgodnie z propozycją W. P r a g e r a i P. G. H o d g e' a, [4].

Za pomocą funkcji ε_0 i ζ_0 możemy z łatwością wyznaczyć składowe tensora odkształceń:

$$(2.4) \quad \varepsilon_r = \frac{3}{2}(\varepsilon_0 + \zeta_0), \quad \varepsilon_t = \frac{3}{4}(\varepsilon_0 - \zeta_0)$$

i składowe dewiatora odkształceń

$$(2.5) \quad \begin{cases} e_r = \varepsilon_r - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + 3\zeta_0), \\ e_t = \varepsilon_t - \varepsilon_0 = -\frac{1}{4}(\varepsilon_0 + 3\zeta_0), \end{cases}$$

przy czym zgodnie z definicją dewiatora będzie

$$(2.6) \quad e_r + 2e_t = 0.$$

¹⁾ W celu podkreślenia analogii zachodzących pomiędzy pracą niniejszą a pracą [3] wielkości spełniające podobną rolę oznaczać będziemy tymi samymi symbolami, dodając im dla odróżnienia w pracy obecnej wskaźnik zero.

Dzięki temu podobnie jak w pracy [3] udało się wyrazić składowe tensora odkształcenia (2.4) i składowe dewiatora odkształceń (2.5) przez dwie funkcje ε_0 i ζ_0 w sposób wolny od operacji różniczkowania. Podobnie, odejmując stronami od siebie równania (2.2) i (2.3), dochodzimy z łatwością do zależności

$$(2.7) \quad u = \frac{3}{4} r (\varepsilon_0 - \zeta_0),$$

pozwalającej na obliczenie przemieszczenia radialnego u , gdy dane są funkcje ε_0 i ζ_0 .

3. Dla scharakteryzowania własności sprężystych materiału powłoki użyjemy dwóch wielkości: modułu odkształcenia postaciowego $G(r)$ i modułu ścisłości $V(r)$. Wielkości te, jak wiadomo, z modułem sprężystości $E(r)$ i współczynnikiem Poissona $\nu(r)$ łączą znane zależności

$$(3.1) \quad G(r) = \frac{E(r)}{2[1+\nu(r)]}, \quad V(r) = \frac{E(r)}{3[1-2\nu(r)]},$$

przy czym ze względu na założoną niejednorodność sprężystą cechy materiałowe $G(r)$, $V(r)$, $E(r)$ i $\nu(r)$ są na ogół pewnymi danymi funkcjami promienia r .

Posługując się modułami $G(r)$ i $V(r)$ możemy dla stanów sprężystych związek pomiędzy składowymi głównymi dewiatora naprężeń i składowymi głównymi dewiatora odkształceń zapisać w postaci

$$(3.2) \quad s_r = 2G(r)e_r, \quad s_t = 2G(r)e_t,$$

przy czym

$$(3.3) \quad s_r = \sigma_r - \sigma_0, \quad s_t = \sigma_t - \sigma_0,$$

gdzie

$$(3.4) \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_t)$$

jest średnim naprężeniem normalnym. Oczywiście tylko dwie składowe tensora naprężeń (a więc i dwie składowe dewiatora naprężeń) są istotnie różne. Ponadto ze względu na przyjętą kulistą symetrię rozpatrywane układy odkształceń i naprężeń są układami głównymi, tzn. odpowiednie kąty odkształcenia postaciowego i naprężenia styczne są równe zeru.

Dla pełnego zdefiniowania związku pomiędzy stanem odkształcenia i stanem naprężenia równości (3.2) wymagają uzupełnienia zrozumiąłą zależnością

$$(3.5) \quad \sigma_0 = 3V(r)\varepsilon_0.$$

Łącząc wzory (3.2) i (2.5) możemy wyrazić składowe dewiatora naprężeń przez funkcję ε_0 i ζ_0 otrzymując zależności

$$(3.6) \quad s_r = G(r) (\varepsilon_0 + 3 \zeta_0), \quad s_t = -\frac{1}{2} G(r) (\varepsilon_0 + 3 \zeta_0).$$

Wielkości s_r i s_t spełniają oczywiście związek leżący u podstaw definicji dewiatora:

$$(3.7) \quad s_r + 2 s_t = 0.$$

4. Przejdźmy obecnie do wyznaczenia funkcji ε_0 i ζ_0 , które jak to wyżej pokazano w zupełności określają stan odkształcenia i stan naprężenia w zakresie odkształceń sprężystych.

W tym celu napiszmy najpierw znane równanie równowagi punktu wewnętrznego dla wprowadzonego przez nas układu współrzędnych

$$(4.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{2}{r} (\sigma_t - \sigma_r),$$

które po uwzględnieniu związków (3.3) przyjmuje postać

$$(4.2) \quad \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = \frac{2}{r} (s_t - s_r) - \frac{\partial s_r}{\partial r}.$$

Równanie (4.2) jest oczywiście niezależne od związku pomiędzy stanem odkształcenia i stanem naprężenia i dlatego stosowane być może zarówno do stanów sprężystych, jak i stanów plastycznych. Ograniczając natomiast jego stosowalność do stanów sprężystych możemy, korzystając ze związków (3.5) i (3.6), przedstawić je w postaci

$$(4.3) \quad \frac{1}{3} \left[\frac{G'}{G} (\varepsilon_0 + 3 \zeta_0) + \varepsilon_0' + 3 \zeta_0' \right] + \frac{V'}{G} \varepsilon_0 + \frac{V}{G} \varepsilon_0' = -\frac{\varepsilon_0 + 3 \zeta_0}{r},$$

gdzie kreskami oznaczono pochodne względem r .

Jeżeli z kolei przyjmiemy, że współczynnik Poissona ν jest wielkością stałą²⁾ nie ograniczając w niczym zmienności modułów $G(r)$, $V(r)$ i $E(r)$, to równanie (4.3) można dalej przekształcić otrzymując w rezultacie

$$(4.4) \quad \varepsilon_0' + \frac{G'}{G} \varepsilon_0 + \mu \zeta_0' + \mu \frac{G'}{G} \zeta_0 = -\mu \frac{\varepsilon_0 + 3 \zeta_0}{r},$$

gdzie

$$(4.5) \quad \mu = 1 - 2\nu.$$

²⁾ Założenie takie, przyjmowane przez wielu autorów, umotywowane jest nieznacznymi zmianami wartości ν . Zagadnienie to omówiono szerzej w pracy [1].

Przejdźmy obecnie do drugiej zależności wiążącej funkcje ε_0 i ζ_0 .
W tym celu w znanym warunku nierozdzielności

$$(4.6) \quad \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_r) = \varepsilon_r,$$

otrzymanym ze wzorów (2.1) przez wyrugowanie u , wyrazimy ε_r i ε_t przez ε_0 i ζ_0 za pomocą równości (2.4):

$$(4.7) \quad \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} = \frac{\varepsilon_0 + 3\zeta_0}{r}.$$

Układ dwóch równań różniczkowych (4.4) i (4.7), który można zapisać w postaci

$$(4.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} [G(\varepsilon_0 + \mu\zeta_0)] = -\mu G \frac{\varepsilon_0 + 3\zeta_0}{r}, \\ \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon_0 + \mu\zeta_0) = \frac{\varepsilon_0 + 3\zeta_0}{r} + (1 + \mu) \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} \end{cases}$$

może służyć za podstawę do wyznaczenia nieznanymi funkcji ε_0 i ζ_0 .

5. Stan naprężenia w strefie sprężystej (zewnątrznej) rozpatrzmy przy założeniu, że materiał w stanie sprężystym posiada własność nieściśliwości, czyli że

$$(5.1) \quad \varepsilon_0 = 0,$$

czemu odpowiadają równości

$$(5.2) \quad \nu = 0,5, \quad \mu = 0.$$

Przyjmując nieściśliwość materiału w strefie sprężystej dopełniamy świadomie pewną nieściślność, której znaczenie jednak pomniejsza fakt, że unikamy w ten sposób drugiej nieściślności, jaką dopuszcza się zwykle przyjmując dwie różne i stałe wartości współczynnika Poissona w strefie sprężystej ($\nu \neq 0$) i plastycznej ($\nu = 0$). Odpowiada temu nieciągłość wartości tego współczynnika na granicy obydwu stref.

Rozwiązując przy założeniu (5.2) drugie z równań (4.8) otrzymujemy

$$(5.3) \quad \zeta_0 = \frac{B_0}{r^3},$$

gdzie B_0 jest stałą całkowania zależną od warunków brzegowych zagadnienia. Pierwsze równanie (4.8) jest oczywiście spełnione tożsamościowo.

Znaleziona wartość ζ_0 wprowadzona do wzoru (3.6) pozwala znaleźć składowe dewiatora naprężeń

$$(5.4) \quad s_r = 3G(r) \frac{B_0}{r^3}, \quad s_t = -\frac{3}{2}G(r) \frac{B_0}{r^3}.$$

Jeśli uwzględnimy wzory (5.4), to z równania (4.2) znajdziemy równanie różniczkowe

$$(5.5) \quad \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = -3 B_0 \frac{1}{r^3} G'(r).$$

Scałkowanie tego równania prowadzi do wzoru

$$(5.6) \quad \sigma_0 = -3 B_0 \left[\frac{G}{r^3} - 3 g_0(r) \right] + C_0,$$

gdzie użyto oznaczenia

$$(5.7) \quad g_0(r) = - \int \frac{G(r)}{r^4} dr;$$

natomiast C_0 oznacza stałą całkowania zależną od warunków brzegowych zagadnienia.

Określmy obecnie stałe B_0 i C_0 . W tym celu obliczymy najpierw wartość naprężenia radialnego

$$(5.8) \quad \sigma_r = s_r + \sigma_0 = 9 B_0 g_0(r) + C_0.$$

Mamy następujące warunki brzegowe dla strefy sprężystej:

$$(5.9) \quad \begin{cases} [\sigma_r]_{r=n} = \tilde{\sigma}_r = -\tilde{p}, \\ [\sigma_r]_{r=b} = \bar{\sigma}_r = -q. \end{cases}$$

W równaniach tych przez n oznaczono promień powierzchni kulistej oddzielającej strefę plastyczną (wewnętrzną) od strefy sprężystej (zewnątrznej), a przez \tilde{p} wzajemny jednostkowy nacisk obu stref na siebie. Wielkości n i \tilde{p} , na razie nieznanne, wyznaczone zostaną w toku późniejszych rozważań.

Z warunków (5.9) i równości (5.8) otrzymujemy układ równań

$$(5.10) \quad 9 B_0 g_0(n) + C_0 = -\tilde{p}, \quad 9 B_0 g_0(b) + C_0 = -q;$$

z którego wyznaczymy poszukiwane stałe:

$$(5.11) \quad 9 B_0 = - \frac{\tilde{p} - q}{g_0(n) - g_0(b)}, \quad C_0 = \frac{\tilde{p} g_0(b) - q g_0(n)}{g_0(n) - g_0(b)}.$$

Mając obliczone stałe B_0 i C_0 możemy już bez trudu wyznaczyć funkcje charakteryzujące stan odkształcenia i stan naprężenia. Otrzymujemy w ten sposób układ następujących wzorów:

$$(5.12) \quad \xi_0 = - \frac{1}{9} \frac{\tilde{p} - q}{g_0(n) - g_0(b)} \frac{1}{r^3},$$

$$(5.13) \quad u = \frac{1}{12} \frac{\tilde{p} - q}{g_0(n) - g_0(b)} \frac{1}{r^2};$$

$$(5.14) \quad \begin{cases} s_r = -\frac{1}{3} \frac{\tilde{p} - q}{g_0(n) - g_0(b)} \frac{G(r)}{r^3}, \\ s_t = \frac{1}{6} \frac{\tilde{p} - q}{g_0(n) - g_0(b)} \frac{G(r)}{r^3}, \end{cases}$$

$$(5.15) \quad \begin{cases} \sigma_r = -\frac{\tilde{p} - q}{g_0(n) - g_0(b)} g_0(r) + \frac{\tilde{p} g_0(b) - q g_0(n)}{g_0(n) - g_0(b)}, \\ \sigma_t = \frac{\tilde{p} - q}{g_0(n) - g_0(b)} \left[\frac{1}{2} \frac{G(r)}{r^3} - g_0(r) \right] + \frac{\tilde{p} g_0(b) - q g_0(n)}{g_0(n) - g_0(b)}; \end{cases}$$

$$(5.16) \quad \sigma_0 = \frac{\tilde{p} - q}{g_0(n) - g_0(b)} \left[\frac{1}{3} \frac{G(r)}{r^3} - g_0(r) \right] + \frac{\tilde{p} g_0(b) - q g_0(n)}{g_0(n) - g_0(b)}.$$

Gdy w szczególnym przypadku w strefie sprężystej materiał byłby jednorodny, tzn. $G = G_0 = \text{const}$, to funkcja $g_0(r)$ przyjęłaby postać

$$(5.17) \quad g_0(r) = \frac{1}{3} \frac{G_0}{r^3}.$$

Uwzględniając postać (5.17) funkcji $g_0(r)$ we wzorach (5.12) - (5.16) otrzymujemy następującą uproszczoną postać tych wzorów:

$$(5.18) \quad \zeta_0 = -\frac{1}{3 G_0} \frac{b^3}{b^3 - n^3} \frac{n^3}{r^3} (\tilde{p} - q);$$

$$(5.19) \quad u = \frac{1}{4 G_0} \frac{b^3}{b^3 - n^3} \frac{n^3}{r^3} (\tilde{p} - q);$$

$$(5.20) \quad \begin{cases} s_r = -\frac{b^3}{b^3 - n^3} \frac{n^3}{r^3} (\tilde{p} - q), \\ s_t = \frac{1}{2} \frac{b^3}{b^3 - n^3} \frac{n^3}{r^3} (\tilde{p} - q); \end{cases}$$

$$(5.21) \quad \begin{cases} \sigma_r = -\frac{b^3}{b^3 - n^3} \frac{n^3}{r^3} (\tilde{p} - q) + \frac{n^3 \tilde{p} - b^3 q}{b^3 - n^3}, \\ \sigma_t = \frac{1}{2} \frac{b^3}{b^3 - n^3} \frac{n^3}{r^3} (\tilde{p} - q) + \frac{n^3 \tilde{p} - b^3 q}{b^3 - n^3}; \end{cases}$$

$$(5.22) \quad \sigma_0 = \frac{n^3 \tilde{p} - b^3 q}{b^3 - n^3}.$$

Pragniemy przy tym podkreślić, że aczkolwiek wzory (5.20) - (5.22) uzyskane zostały przy przyjęciu nieściśliwości materiału $\varepsilon_0 = 0$, to jednak pokrywają się one z analogicznymi wzorami wynikającymi z teorii, która z założenia tego nie korzysta.

6. Podane w punkcie poprzednim wartości naprężeń odnoszą się do strefy sprężystej, co do której przyjęto, że jest strefą zewnętrzną w stosunku do strefy plastycznej (wewnętrznej). Jak wykażemy w dalszym ciągu, możliwe są i inne przypadki, dla których przedstawiona metoda może być również zastosowana. Różnice polegać będą tylko na sposobie określenia warunków brzegowych dla każdej z dwóch stref. Toteż nie będziemy tu przytaczali innych możliwych sposobów rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia.

Przejdźmy obecnie do wyznaczenia stanu naprężenia w strefie plastycznej, tzn. dla $a \leq r \leq n$.

Zgodnie z założeniem podstawowym naszej pracy przyjmujemy, że warunek plastyczności, spełniony w całej strefie plastycznej, posiada postać

$$(6.1) \quad J_2 = \frac{1}{2}(s_r^2 - 2s_t^2) = [K(r)]^2,$$

gdzie $K(r)$ jest modułem plastyczności zależnym od promienia. Przyjęto zatem, że materiał kuli wykazuje plastyczną niejednorodność i spełnia ponadto warunek «idealnej plastyczności»; nie jest zatem możliwy wzrost wartości niezmiennika J_2 ponad wartość $[K(r)]^2$.

Dodatkowym założeniem upraszczającym będzie powszechnie przyjmowane założenie o nieściśliwości materiału w stanie plastycznym, czyli że dla strefy plastycznej będziemy również przyjmowali

$$(6.2) \quad \varepsilon_0 = 0, \quad \nu = 0,5.$$

Jeżeli w równości (6.1) uwzględnimy oczywisty związek (3.7), to możemy mu nadać postać

$$(6.3) \quad \frac{3}{4}s_r^2 = [K(r)]^2.$$

Układ równości (3.7) i (6.3) pozwala na wyznaczenie składowych głównych dewiatora naprężeń:

$$(6.4) \quad s_r = -\kappa \frac{2\sqrt{3}}{3} K(r), \quad s_t = \kappa \frac{\sqrt{3}}{3} K(r).$$

W równościach tych symbol $\kappa = \pm 1$ i można go zapisać jako

$$(6.5) \quad \kappa = -\text{sign } s_r = -\frac{s_r}{|s_r|} \quad \text{lub} \quad \kappa = \text{sign } s_t = \frac{s_t}{|s_t|};$$

wskazuje to na istnienie (formalnie biorąc) dwóch rozwiązań. Fizykalny sens posiada z nich jednakże tylko jedno, które określa warunek na powierzchni wewnętrznej kuli. Otrzymujemy z niego

$$(6.6) \quad \nu = 1.$$

Gdy ponadto przez $Q(r)$ oznaczymy granicę plastyczności materiału kuli, związaną z modułem $K(r)$ znaną równością

$$(6.7) \quad K(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} Q(r),$$

to wzory (6.5) można zapisać w ostatecznej postaci

$$(6.8) \quad s_r = -\frac{2}{3} Q(r), \quad s_t = \frac{1}{3} Q(r).$$

Do wyznaczenia składowych stanu naprężenia σ_r i σ_t potrzebna jest na razie nieznaną jeszcze wartość średniego naprężenia normalnego σ_0 . Obliczymy ją z równania (4.2), które po uwzględnieniu wzorów (6.8) może być przekształcone do postaci

$$(6.9) \quad \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 2 \frac{Q(r)}{r} + \frac{2}{3} \frac{dQ(r)}{dr}.$$

Po scałkowaniu równania (6.9) otrzymujemy

$$(6.10) \quad \sigma_0 = h_0(r) + \frac{2}{3} Q(r) + D,$$

przy czym D jest stałą całkowania zależną od warunków brzegowych, a przez $h_0(r)$ oznaczyliśmy wyrażenie

$$(6.11) \quad h_0(r) = 2 \int \frac{Q(r)}{r} dr.$$

Stałą D wyznaczyć można z warunku

$$(6.12) \quad [\sigma_r]_{r=a} = \bar{\sigma}_r = [h_0(r) + D]_{r=a} = -p;$$

otrzymamy mianowicie

$$(6.13) \quad D = -[h_0(a) + p].$$

Postępując się wzorami (3.3), (6.8), (6.10) i (6.13) możemy już z łatwością wyznaczyć składowe stanu naprężenia w strefie plastycznej

$$(6.14) \quad \begin{cases} \sigma_r = h_0(r) - h_0(a) - p, \\ \sigma_t = h_0(r) - h_0(a) + Q(r) - p; \end{cases}$$

$$(6.15) \quad \sigma_0 = h_0(r) - h_0(a) + \frac{2}{3} Q(r) - p.$$

W przypadku szczególnym, gdyby materiał był plastycznie jednorodny i gdyby zatem było

$$(6.16) \quad Q(r) = Q_0 = \text{const},$$

wyrażenie dla składowych stanu naprężenia odpowiednio uprościłoby się i otrzymalibyśmy następujące wzory:

$$(6.17) \quad h_0(r) = 2 Q_0 \ln r;$$

$$(6.18) \quad \begin{cases} \sigma_r = 2 Q_0 \ln \frac{r}{a} - p, \\ \sigma_t = Q \left(2 \ln \frac{r}{a} + 1 \right) - p; \end{cases}$$

$$(6.19) \quad \sigma_0 = \frac{2}{3} Q_0 \left(3 \ln \frac{r}{a} + 1 \right) - p.$$

Wzory (6.14) i (6.15) oraz wynikające z nich wzory (6.18) i (6.19) stosują się jedynie w strefie plastycznej, tzn. dla $a \leq r \leq n$, gdzie n jest promieniem powierzchni kulistej oddzielającej strefę plastyczną od strefy sprężystej, na razie jeszcze nie określonym.

7. Do wzorów określających składowe stanu naprężenia dla strefy sprężystej (5.14) - (5.16) lub (5.20) - (5.22) wchodzi wartość wzajemnego jednostkowego nacisku obu stref na siebie. Wielkość tę, dotychczas nie określoną, możemy wyznaczyć z następującego warunku: niezmiennik J_2 składowych stanu naprężenia w strefie sprężystej

$$(7.1) \quad J_2 = \frac{1}{2} (s_r^2 + 2 s_t^2) = \left[\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{\tilde{p} - q}{g_0(n) - g_0(b)} \frac{G(r)}{r^3} \right]^2$$

na granicy tej strefy ($r = n$) osiąga swą wartość krytyczną

$$[K(n)]^2 = \frac{1}{3} [Q(n)]^2.$$

Tak sformułowany warunek pozwala na wyznaczenie wartości \tilde{p} , dającej się przedstawić wyrażeniem

$$(7.2) \quad \tilde{p} = 2 \frac{Q(n)}{G(n)} [g_0(n) - g_0(b)] n^3 + q,$$

które w przypadku materiału jednorodnego zarówno sprężystości, jak i plastyczności $[G(n) = G_0 = \text{const}, Q(n) = Q_0 = \text{const}]$ przyjmuje prostą postać

$$(7.3) \quad \tilde{p} = \frac{2}{3} Q_0 \left(1 - \frac{n^3}{b^3} \right) + q.$$

Ostatnią nie wyznaczoną wielkość n znajdziemy z warunku, że dla $r = n$ wartość średniego naprężenia normalnego σ_0 nie wykazuje nieciągłości przy przejściu od strefy plastycznej do strefy sprężystej. Porównując zatem dla $r = n$ prawe strony wzorów (5.16) i (6.15) i uwzględniając wzór (7.3) otrzymujemy równanie na ogół przestępne

$$(7.4) \quad \Pi = p - q = h_0(n) - h_0(a) 2 [g_0(n) - g_0(b)] \frac{Q(n)}{G(n)} n^3,$$

które dla przypadku materiału jednorodnego sprężyste i plastycznie daje się uprościć do postaci

$$(7.5) \quad \Pi = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{n^3}{b^3} + 3 \ln \frac{n}{a} \right) Q_0.$$

Rozwiązując równanie (7.4) lub (7.5) względem n przy danej wartości różnicy ciśnień $\Pi = p - q$ oraz wprowadzając tak znalezionej wartości n do wzorów (7.2) lub (7.3) mamy już wszystkie wielkości potrzebne do obliczenia składowych stanu naprężenia w strefie sprężystej.

8. Utrzymując obecnie w mocy nasze pierwotne założenie, że odkształcenia plastyczne zaczną się formować na wewnętrznej powierzchni powłoki, spróbujmy określić wartość pierwszej krytycznej różnicy ciśnień Π_1 odpowiadającej pojawieniu się pierwszych odkształceń trwałych.

Jak wiadomo, związek pomiędzy promieniem n , określającym granicę pomiędzy obydwu strefami (sprężystą i plastyczną), a odpowiadającą mu wartością różnicy ciśnień Π podany został w postaci równania (7.4). Poszukiwaną przez nas różnicę Π_1 znajdujemy z tego równania przyjmując $n = a$, co odpowiada nieistnieniu strefy plastycznej oraz chwili jej powstawania. Z warunku powyższego otrzymujemy

$$(8.1) \quad \Pi_1 = \Pi(t_1) = 2 \frac{Q(a)}{G(a)} a^3 [g_0(a) - g_0(b)],$$

przy czym w ogólnym przypadku materiału sprężyste i plastycznie jednorodnego odpowiednia wartość wynosiłaby

$$(8.2) \quad \Pi_1 = \frac{2}{3} Q_0 \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right).$$

Gdy różnica ciśnień Π , o której założyliśmy, że jest rosnącą funkcją czasu, po osiągnięciu wartości Π_1 wzrasta nadal, to przy wewnętrznej powierzchni powłoki zacznie się formować strefa plastyczna ograniczona od zewnątrz przez powierzchnię kulistą, określoną stopniowo zwiększającym się promieniem zewnętrznym n . Strefa ta, otoczona strefą sprężystą, kształtuje się zatem w warunkach tzw. «płynięcia» wstrzymywanego przez obecność tego właśnie obszaru sprężystego.

W miarę upływu czasu różnica ciśnień Π , zgodnie z założeniem, wzrasta nadal, aż w pewnym momencie zewnętrzna granica strefy plastycznej osiągnie powierzchnię zewnętrzną kuli, czyli zajdzie wtedy równość $n = b$. Stan odpowiadający tej chwili nazywamy drugim stanem krytycznym, a związaną z nim wartość Π drugą krytyczną różnicą ciśnień. Oznaczamy ją przez Π_2 . Wartość tę można łatwo wyznaczyć z równania (7.4) przyjmując $n = b$. Znajdziemy w ten sposób

$$(8.3) \quad \Pi_2 = \Pi(t_2) = h_0(b) - h_0(a).$$

Wzór ten w szczególnym przypadku materiału plastycznie jednorodnego [$Q(r) = Q_0 \text{ const}$] przyjmuje postać

$$(8.4) \quad \Pi_2 = 2 Q_0 \ln \frac{b}{a}.$$

Mając wyznaczone różnice krytyczne ciśnień Π_1 i Π_2 możemy określić granice, w których zawiera się różnica ciśnień Π , gdy powłoka kulista przechodzi kolejno przez trzy różne fazy odkształcenia. Fazami tymi są stany następujące:

(1) stan odkształceń sprężystych

$$(8.5) \quad \Pi < 2 \frac{Q(a)}{G(a)} a^3 [g_0(a) - g_0(b)];$$

(2) stan odkształceń sprężysto-plastycznych

$$(8.6) \quad 2 \frac{Q(a)}{G(a)} a^3 [g_0(a) - g_0(b)] \leq \Pi < h_0(b) - h_0(a);$$

(3) stan odkształceń czysto plastycznych

$$\Pi = h_0(b) - h_0(a).$$

9. Rozpatrzmy obecnie mechanizm formowania się strefy plastycznej, a w szczególności rozpatrzmy warunki wpływające na sposób i kierunek rozprzestrzeniania się strefy plastycznej w powłoce kulistej.

Przyjmujemy przy tym, o czym już była mowa we wstępie niniejszej pracy, że różnica ciśnień $\Pi(t) = p - q$ jest rosnącą funkcją czasu t . Wynika stąd, że w pierwszej fazie rozpatrywanego zjawiska, tzn. dla t dostatecznie małych, stan odkształcenia w powłoce będzie stanem odkształceń sprężystych. Składowe stanu naprężenia odpowiadającego tej fazie znajdujemy ze wzorów (5.15) lub (5.21) zastępując w nich wielkości \tilde{p} i n odpowiednio przez p i a .

Przy pewnej dostatecznie dużej wartości różnica ciśnień, którą oznaczyliśmy przez Π_1 i którą nazywamy pierwszą wartością krytyczną, poja-

wią się w przekroju powłoki pierwsze odkształcenia plastyczne, rozłożone również kulisto symetrycznie (ze względu na kulistą symetrię). Podobnie jak w pracy [3] zanalizujemy obecnie zagadnienie miejsca, w którym pojawiają się pierwsze odkształcenia tego rodzaju.

Nie trudno ustalić, że warunkiem koniecznym pojawienia się odkształceń plastycznych na wewnętrznej powierzchni powłoki jest to, aby stosunek niezmiennika J_2 składowych stanu naprężenia w stanie całkowicie sprężystym do wielkości $[K(r)]^2$, tzn. stosunek $J_2 : [K(r)]^2$, był funkcją malejącą zmiennej r w całym przedziale $[a, b]$. Stosunek ten można przedstawić w postaci

$$(9.1) \quad \frac{J_2}{[K(r)]^2} = \left[\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{\Pi(t)}{g_0(a) - g_0(b)} \frac{G(r)}{K(r)} \frac{1}{r^3} \right]^2$$

Jeśli jeszcze w wyrażeniu tym pominiemy czynniki niezależne od r , to interesujące nas obecnie zagadnienie można ująć w ten sposób, że warunkiem koniecznym wystąpienia pierwszych odkształceń plastycznych na wewnętrznej powierzchni powłoki jest warunek, aby funkcja

$$(9.2) \quad f_0(r) = \frac{G(r)}{Q(r)} \frac{1}{r^3}$$

była funkcją malejącą w przedziale $[a, b]$. Przy takim też założeniu słuszne są wyniki uzyskane w niniejszej pracy.

Oczywiście, gdyby funkcja $f_0(r)$ określona przez własności sprężyste i plastyczne materiału była funkcją rosnącą, to pierwsze odkształcenia plastyczne pojawiłyby się na zewnętrznej powierzchni powłoki. Nie ma też żadnych zasadniczych trudności w wyznaczeniu stanu odkształcenia i stanu naprężenia dla powłoki zbudowanej z tego rodzaju materiału. Postępowanie byłoby analogiczne. Dlatego też nie będziemy się tutaj zajmowali tymi przypadkami.

Na szczególne natomiast wyróżnienie zasługuje przypadek, gdy funkcja $f_0(r)$ jest stałą w całym przedziale $[a, b]$, czyli gdy

$$(9.3) \quad \frac{G(r)}{Q(r)} = \frac{1}{\Omega_0} r^3$$

Symbol Ω_0 oznacza współczynnik materiałowy (stały) o wymiarze objętości. W przypadku tym powłoka doznaje uplastycznienia jednocześnie w całej swej grubości, gdy różnica ciśnień Π osiągnie wartość $\Pi_{1,2}$ określoną wzorem

$$(9.4) \quad \Pi_{1,2} = 2 \Omega_0 [g_0(a) - g_0(b)].$$

Znaleźliśmy zatem warunek (9.3), który powinny spełniać funkcje $G(r)$ i $Q(r)$, aby stan krytyczny osiągnięty został we wszystkich punktach ścianki jednocześnie. Grubościenną powłokę tego typu można by nazwać powłoką «jednakowego wyteżenia».

W przypadkach, w których istnieje praktyczna możliwość realizacji takiego ustroju, uznać go należy za ekonomiczniejszy od jakiegokolwiek innego.

Zauważmy jeszcze, że gdy materiał powłoki można traktować jako materiał sprężyste jednorodny, tj. gdy $G(r) = G_0 = \text{const}$, znajdujemy następujący rozkład granicy plastyczności

$$(9.5) \quad Q(r) = \Omega_0 \frac{G_0}{r^3},$$

który powoduje, że ustrój nasz w tym szczególnym przypadku jest powłoką kulistą «jednakowego wyteżenia». Odpowiednia różnica krytyczna ciśnień wynosi

$$(9.6) \quad \Pi_{1,2} = \frac{2}{3} \Omega_0 \frac{G_0}{a^3} \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right).$$

Na zakończenie rozważań o powierzchniach pierwszych odkształceń plastycznych podkreślimy jeszcze fakt, że gdy funkcja $f_0(r)$ nie jest funkcją monotoniczną, to nie można z góry przewidzieć, gdzie zaczną się formować pierwsze odkształcenia plastyczne. Na ogół mogą się one wtedy pojawić na pewnej powierzchni kulistej, położonej pomiędzy powierzchnią wewnętrzną i zewnętrzną powłoki.

10. Omawiany dotychczas przypadek niejednorodności sprężystej i plastycznej charakteryzował się tym, że niejednorodność plastyczna była niezależna od niejednorodności sprężystej. Ciała o takiej własności zostały zakwalifikowane w pracy [2] do grupy (IV₂) i oznaczone symbolem $C_{P,P}$.

Rozpatrzmy obecnie powłokę kulistą wykonaną z materiału, którego niejednorodność plastyczna jest sprzężona z niejednorodnością sprężystą w sposób określony w pracy [2]. Jako jeden z możliwych i szczególnie charakterystycznych sposobów sprzężenia przyjęliśmy tam sprzężenie określone za pomocą kryterium granicznej wartości energii odkształcenia postaciowego. Ciała wykonane z tego rodzaju materiału zaliczone zostały w pracy [2] do grupy (IV₁) i oznaczone symbolem $C_{P,P} = C_s$. Dla ciał takich związek pomiędzy odpowiednimi modułami posiada postać

$$(10.1) \quad [Q(r)]^2 = Q_0^2 \frac{G(r)}{G_0}.$$

Jeżeli zażądamy, aby oprócz warunku (10.1) spełniony był jeszcze warunek (9.3), zapewniający jednoczesne przechodzenie w stan plastyczny całej powłoki kulistej, to z obu tych warunków z łatwością wyznaczymy postać funkcji czyniących zadość tym żądaniom. Są nimi następujące funkcje:

$$(10.2) \quad G(r) = \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{Q_0^2}{G_0} r^6, \quad Q(r) = \frac{1}{\Omega_0} \frac{Q_0^2}{G_0} r^3.$$

Za pomocą tych równań znajdujemy z łatwością najpierw funkcje pomocnicze

$$(10.3) \quad g_0(r) = -\frac{1}{3} \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{Q_0^2}{G_0} r^3,$$

$$(10.4) \quad h_0(r) = \frac{2}{3} \frac{1}{\Omega_0} \frac{Q_0^2}{G_0} r^3,$$

a następnie wartość krytycznej różnicy $\Pi_{1,2}$ powodującej jednoczesne uplastycznienie całej kuli. Wynosi ona

$$(10.5) \quad \Pi_{1,2} = H(t_{1,2}) = \frac{2}{3} \frac{1}{\Omega_0} \frac{Q_0^2}{G_0} (b^3 - a^3)$$

i odnosi się do przypadku, gdy niejednorodność plastyczna ustroju jest sprzężona z jego niejednorodnością sprężystą.

Literatura cytowana w tekście

[1] J. Nowiński i W. Olszak, *O podstawach teorii ciał sprężystych fizycznie nieliniowych*, Arch. Mech. Stos. 1 (1954).

[2] W. Olszak, *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych (I)*, Arch. Mech. Stos. 3 (1954).

[3] W. Olszak i W. Urbanowski, *Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej*, Arch. Mech. Stos. 3 (1955).

[4] W. Prager i P. G. Hodge, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, New York-Londyn 1951.

Резюме

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ТОЛСТОСТЕННАЯ СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ИЗ НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИИ

Рассматривается толстостенная сферическая оболочка, внутренний радиус которой a , а внешний b , под действием внутреннего давления p и внешнего q , причем предположено, что разность давлений $\Pi = p - q$ является возрастающей функцией времени t .

Вводя функции ε_0 (среднее удлинение) и ζ_0 , определенные равенствами (2.2) и (2.3), в которых u обозначает радиальное перемещение, а r — радиальную координату точки в системе сферических координат, выражено при их помощи составляющие девиатора деформаций (2.5) и девиатора напряжений (3.6); при этом принято, что модули $G(r)$ и $V(r)$ являются некоторыми функциями радиуса r . Если предположить, что неоднородность есть такого типа, для которого можно принять $\nu = \text{const}$, то неизвестные функции ε_0 и ζ_0 являются решением системы уравнений (4.8).

Определение напряженного состояния в упругой (внешней) зоне проводится при упрощении $\varepsilon_0 = 0$, и $\nu = 1/2$. Учитывая граничные условия для этой зоны (5.9), получены выражения для напряжений в упругой зоне в виде (5.15).

Принимая условие пластичности в виде (6.1), т.е. предполагая, что материал оболочки также и пластически неоднороден, найдены составляющие напряженного состояния в пластической зоне в виде (6.14).

Неизвестное пока в формулах (5.15) значение взаимного давления обеих зон \tilde{p} определяется из условия, что при переходе из упругой в пластическую зону J_2 не должно изменяться скачкообразно. Полученное значение давления определено формулой (7.2).

Последнюю неизвестную величину, а именно радиус n сферы, разграничивающей обе зоны, определяют из условия, так чтобы среднее нормальное напряжение также, при переходе через границу зон, не совершало скачка. Это условие приводит к трансцендентному уравнению (7.4), которое можно решить относительно n .

Из уравнения (7.4) определяется значение разности давлений (8.1), соответствующее первым пластическим деформациям на внутренней поверхности оболочки, и значение (8.3), отвечающее полной пластификации всего сечения.

Далее формулируется условие (9.3), которому должны удовлетворять функции $G(r)$ и $Q(r)$, чтобы все сечение подвергалось пластификации одновременно.

Аналогичное условие для случая, когда упругая неоднородность сопряжена с пластической неоднородностью, принимает вид (10.1).

S u m m a r y

THICK-WALLED ELASTO-PLASTIC SPHERICAL SHELL OF NON-HOMOGENEOUS MATERIAL, SUBJECTED TO INTERNAL AND EXTERNAL PRESSURE

A thick-walled spherical shell whose internal and external radii are a and b respectively, subjected to internal and external pressure p and q , is considered with the assumption that the difference of pressures $\Pi = p - q$ is an increasing function of time t .

Introducing the functions ε_0 (mean elongation) and ζ_0 defined by Eqs. (2.2) and (2.3) (where u denotes the radial displacement and r the radial coordinate of the considered point in a spherical system of coordinates) the components of the strain deviator, (2.5), and those of the stress deviator, (3.6), are expressed in terms of these functions, the moduli $G(r)$ and $\nu(r)$ being functions of the radius r . If we assume that the non-homogeneity is of a type for which we can take $\nu = \text{const}$, the unknown functions ε_0 and ζ_0 constitute the solution of the system of equations (4.8).

The stresses in the elastic (external) region are determined with the simplifying assumption of $\varepsilon_0 = 0$ and $\nu = 1/2$. Introducing the boundary conditions for that region, (5.9), formulae for stresses in the elastic region are obtained in the form (5.15).

Taking the yield condition in the form (6.1), which means that the material of the shell is also plastically non-homogeneous, the stress components in the plastic region are found in the form (6.14).

The unknown value of the pressure \tilde{p} between both regions in Eqs. (5.15) is found from the condition that J_2 should not «jump» when passing from the elastic to the plastic zone. The corresponding expression is (7.2).

The last unknown value, that of the radius n of the sphere constituting the boundary between these two zones, is obtained from the condition that the mean normal stress should not «jump» when crossing the boundary between the zones. This condition leads to a transcendental equation, (7.4), which can be solved for n .

From Eq. (7.4) the following are determined: the value of the pressure difference, (8.1), corresponding to the first plastic deformations at the internal surface of the shell; the value (8.3), corresponding to the plastification of the whole shell.

The condition (9.3) is established which should be satisfied by the functions $G(r)$ and $Q(r)$ in order that the plastic state should occur simultaneously in the whole shell. An analogous condition in the case of elastic and plastic non-homogeneity of the conjugate type takes the form (10.1).