

RYSZARD DĄBROWSKI

STATECZNOŚĆ MOSTU JEDNODŹWIGAROWEGO

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXXXVI**

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	581
2. Wyprowadzenie równań różniczkowych dla wyboczenia pasa prostego	585
3. Równanie różniczkowe dla pasa zakrzywionego	587
4. Rozwiązanie układu równań	591
5. Uwzględnienie zmienności parametrów K_1, \dots, K_6 . Metoda energetyczna	597
6. Przypadek jednostronnego obciążenia mostu	605
7. Zagadnienia dynamiczne ustroju	610

UZUPEŁNIENIE

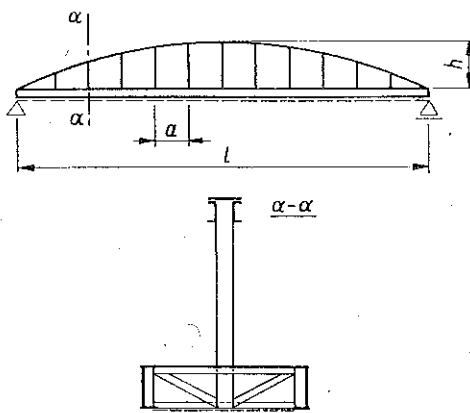
8. Rozwiązanie dla mostu dwudźwigarowego otwartego	614
9. Wyznaczenie stałych K_u, K_{up}, K_φ we wzorze (4.4) przy stałym momencie bezwładności wieszaka	615
10. Przybliżone obliczenie sztywności skrętnej pręta	617
11. Przykład liczbowy obliczenia stateczności na podstawie p. 3 i p. 4. Dyskusja wyników	618
12. Przykład obliczenia stateczności przy uwzględnieniu zmiennej długości wieszaków	623
13. Przykład obliczenia przy obciążeniu jednostronnym	626
14. Przykład obliczenia częstotliwości drgań własnych	629

1. Wstęp

Do nowszych konstrukcji mostowych należy zaliczyć ustrój nośny (rys. 1), złożony z *pojedynczego łuku* (lub dźwigara kratowego), umieszczonego w osi mostu, i *dźwigara usztywniającego*, połączonego z łukiem za pośrednictwem wieszaków. Dźwigar usztywniający powinien posiadać dużą sztywność skrętną i może np. składać się z dwu belek pełnościennej, połączonych u góry blachą jezdni a u dołu wykratowaniem. Wykratowanie dolne zamyka przekrój i nadaje mu znacznie większą sztywność skrętną od tej, jaką posiada przekrój otwarty. Jeszcze większą sztywność posiada przekrój zamknięty o dolnej ścianie pełnej. Przepony umieszczone co pewien odstęp zapewniają niezmienność geometryczną przekroju. Wieszaki — z uwagi na konieczność zapewnienia łukowi stateczności — powinny posiadać znaczną sztywność na zginanie w kierunku poprzecznym do osi mostu.

Jednostronne obciążenie mostu (obciążenie użytkowe) wywołuje momenty skręcające względem podłużnej osi mostu. Momenty te przenosi dźwigar usztywniający i poprzez przepony końcowe przekazuje je na łożyska. Przekrój zamknięty jest tutaj bez mała nieodzowny. Jest on w stanie przetrześć takie właśnie obciążenie przy naprężeniach normalnych nie przekraczających na ogół naprężeń od pełnego, symetrycznego obciążenia użytkowego.

Opisany ustrój znalazł już zastosowanie jako most dla pieszych o rozpiętości 62 m i szerokości dźwigara 3,15 m, [1]. Należy przypuszczać, że ustrój jednodźwigarowy może znaleźć zastosowanie nie tylko jako most dla pieszych o średniej rozpiętości, lecz również jako most drogowy. Mosty jednodźwigarowe były już proponowane dla rozpiętości ponad



Rys. 1

200 m — co prawda dźwigarem nośnym miał być ustrój wiszący, [2]. Opisywany ustrój mostowy może również służyć wyłącznie do przeprowadzenia rurociągów ponad przeszkodami wodnymi.

Jednodźwigarowy ustrój nośny może także znaleźć korzystne zastosowanie w stalowych konstrukcjach zasuw jazowych, przy czym ustrój znajduje się w położeniu poziomym, a łuk pod działaniem parcia wody na cały dźwigar usztywniający jest rozciągany. W tym przypadku interesujące jest zagadnienie wytrzymałościowe.

Porównajmy most jednodźwigarowy z odpowiednim (tzn. posiadającym tę samą szerokość jezdni) mostem dwudźwigarowym łukowym, górą otwartym (por. rys. 14a). Zarówno most dwudźwigarowy jak i jednodźwigarowy wymagają sztywnych wieszaków w celu zapewnienia stateczności pasa łuku. Wprawdzie siła normalna w jednym pasie mostu dwudźwigarowego jest mniej więcej dwukrotnie mniejsza aniżeli w pasie mostu jednodźwigarowego, to jednak można przyjąć, że zużycie materiału na pas i wieszaki jest w moście jednodźwigarowym nieco mniejsze. Zauważmy bowiem, że przy jednakowym bezpieczeństwie przed wybočeniem obu porównywanych elementów, obciążonych siłami $2N$ lub N , w tym samym stosunku 2 : 1 musiałyby pozostawać również odpowiednie momenty bezwładności pasów i wieszaków. Jeżeli tutaj jednak przyjąć dwa powinowate co do kształtu przekroje, których momenty bezwładności mają się do siebie w stosunku 2 : 1, to pola tych przekrojów pozostają w stosunku $\sqrt{2}$: 1. Rzeczywista zależność jest co prawda bardziej złożona, zwłaszcza przy wyboczeniu w obszarze plastycznym. Wniosek ogólny nie ulega jednak zmianie.

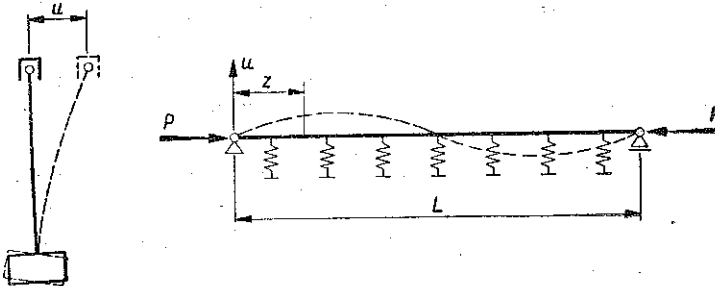
Most jednodźwigarowy przy jednakowym zużyciu materiału na jezdnię właściwą wykazuje mniejsze zużycie materiału na poprzecznicę. Wynika to w sposób oczywisty z porównania wykresów momentów w poprzecznicy przy obciążeniu działającym na całej szerokości mostu. Zużycie materiału na belki główne w racjonalnie zaprojektowanych porównywanych konstrukcjach powinno być mniej więcej jednakowe. Ponieważ przekrój skrzynkowy wystarczy dać tylko na części szerokości mostu, np. na jednej trzeciej szerokości, ilość materiału zużyta na pas dolny skrzynki nie powinna zbyt przekroczyć zużycia materiału na pasy dolne belek głównych mostu dwudźwigarowego. W rozwiązaniu jednodźwigarowym dochodzą co prawda przepony oraz żebra stężające dolnego pasa skrzynki. Przepony w postaci wykratowania nie powinny pochłonąć takiej ilości materiału, która by niekorzystnie zaważyła na ostatecznym wyniku ekonomicznym.

Obciążenie połowy szerokości jezdni jest niewątpliwie przypadkiem bardziej niekorzystnym w moście jednodźwigarowym. Jednakże dzięki dużej sztywności skrętnej przekroju zamkniętego o wymiarach ustroju

przy średniej rozpiętości mostu decyduje przypadek pełnego symetrycznego obciążenia jezdni.

Jako zaletę mostu jednodźwigarowego można wymienić to, że wydziela on w sposób naturalny dwa kierunki ruchu oraz zapewnia lepszą widoczność w kierunku poprzecznym. Może to mieć znaczenie przy usytuowaniu mostu w sąsiedztwie śluz lub innych obiektów, obsługiwane których wymaga dobrej widoczności w najbliższym otoczeniu. Ponieważ mosty stawiane przy takich obiektach posiadają zazwyczaj ograniczoną wysokość konstrukcyjną, ustrój belkowy stężony łukiem znajduje tam częste zastosowanie.

Wadą ustroju jednodźwigarowego jest skomplikowany węzeł podporowy oraz wzrost podatności skrętnej z rozpiętością mostu.

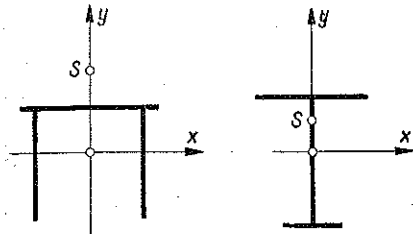


Rys. 2

Analizy wymaga przede wszystkim stateczność ustroju. Przypadek utraty stateczności przy pełnym (symetrycznym) obciążeniu użytkowym został już rozwiązany przy następujących założeniach upraszczających: (1) wieszaki są połączone z łukiem przegubowo, (2) przekrój łuku przy wyobczeniach nie doznaje skręcenia (rys. 2), (3) wieszaki posiadają jednakową sztywność zginania, tzn. wywierają jednakowy opór sprężysty przy jednostkowym przesunięciu poziomym górnego ich końca, (4) wieszaki są rozłożone na długości mostu w sposób ciągły oraz (5) pas łukowy traktuje się jako pręt prosty, [1], [3].

W założeniach (1) i (2) nie uwzględnia się sztywnego połączenia wieszaków z łukiem. W przypadku zamkniętego przekroju łuku nie uwzględnia się tym samym pewnej rezerwy sztywności. Z drugiej strony, jeżeli przekrój łuku jest przekrojem otwartym bądź też przekrojem teowym lub dwuteowym monosymetrycznym (rys. 3), należy w pewnych przypadkach liczyć się ze zmniejszeniem się siły krytycznej wskutek tendencji przekroju do wyobczenia w postaci zgięciowo-skrętnej. Nawet przy sztywnym połączeniu łuku z wieszakami rzeczywista siła krytyczna może być w pewnych przypadkach mniejsza od obliczonej przy założeniach (1) i (2), oczywiście przy zachowaniu w obu porównywanych przypadkach założeń (3)-(5).

Celem niniejszej pracy jest uwzględnienie *zgięciowo-skrętnej postaci wybożenia* pasa górnego o przekroju monosymetrycznym, jego *sztynnego połączenia z wieszakami* oraz niekorzystnego wpływu *zakrzywienia osi* w przypadku pasa łukowego. Sformułowane poprzednio założenia (3) i (4) zostają zachowane w pierwszej części pracy (punkty 2-4). Pozwolą one



Rys. 3

na proste ujęcie zagadnienia, prowadzące do równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Przyjmując w przypadku pasa łukowego sztywność wszystkich wieszaków równą sztywności wieszaka najbardziej podatnego (przy jednakowych przekrojach — środkowego) czyni się uproszczenie na korzyść bezpieczeństwa ustroju. A zatem w pierwszej części pracy przy uwzględnieniu

w prosty sposób możliwie dużej ilości czynników dodatkowych uwzględnione zostały najważniejsze wpływy niekorzystne.

Na osobną analizę zasługuje wpływ zmiennej sztywności wieszaków (wskutek zmiennej ich wysokości w ustroju łukowym) a także uwzględnienie skończonej ich ilości. Zagadnieniu temu poświęcony jest punkt 5.

W pracy niniejszej poza tematem wymienionym w jej tytule rozpatrzony został przypadek jednostronnego obciążenia mostu jako zagadnienie wytrzymałościowe nieliniowe (punkt 6) a ponadto poruszono zagadnienie dynamiczne rozpatrywanego ustroju (punkt 7).

Materiał pomocniczy a także odpowiednie przykłady liczbowe zebrane zostały w uzupełnieniu zamieszczonym na końcu pracy.

Zasługuje na podkreślenie, że przedstawione w niniejszej pracy rozwiązania w szczególnym przypadku odnoszą się również do mostu *dwudźwigarowego, górą otwartego*.

Ustrój dwudźwigarowy w odróżnieniu od ustroju jednodźwigarowego był przedmiotem analizy w kilku pracach.

Stateczność samego łuku o przekroju prostokątnym, obciążonego za pośrednictwem *wiotkich wieszaków*, była badana analitycznie (przy uwzględnieniu skręcania przekroju łuku i stabilizującego oddziaływania wieszaków) jak również doświadczalnie, [4].

Już przedtem rozwiązany był przypadek mostu łukowego dwudźwigarowego o *pasach prostokątnych* przy uwzględnieniu *sprężystego oporu* tzw. *pótram*, złożonych z pary sztywnych wieszaków i łączącej je poprzecznicy; skręcanie łuku nie było jednak przy tym brane pod uwagę, a połączenie wieszaków z łukiem traktowano jako przegubowe, [5]. Inne rozwiązanie tego samego zagadnienia omówione jest w [6].

Natomiast dla mostu dwudźwigarowego o *cienkościennym przekroju górnego pasa* w obu dźwigarach głównych rozwiązano zagadnienie stateczności (w przypadku obecności pótram) jedynie dla przypadku pasów prostych o stałym prze-

kroju i stałej sile normalnej, [7]. Zastosowanie tego rozwiązania należałoby poza tym ograniczyć do przypadku, kiedy w dźwigarach kratowych o pasach równoległych można pominąć oddziaływanie krzyżulców na sztywność skrętną dźwigara kratowego jako całości (por. [8]).

Stateczność mostów dwudźwigarowych łukowych *stężonych górą ryglami* (stężenie typu Vierendeela) była obszernie analizowana teoretycznie i doświadczalnie dla przypadku wiotkich wieszaków, [9]. Wyniki uzyskane dla zerowych sztywności rygli ilustrują pewne zależności zachodzące w moście dwudźwigarowym górą otwartym (w przypadku wiotkich wieszaków).

2. Wyprowadzenie równań różniczkowych dla wyboczenia pasa prostego

Jeżeli z pręta cienkościennego o stałym przekroju monosymetrycznym, ściskanego siłą osiową i posiadającego całkowitą swobodę odkształcenia między przekrojami końcowymi, wydzielimy element o długości dz i ułożymy dwa warunki równowagi: (1) sił poziomych q_x oraz (2) momentów skręcających względem osi ścinania m_z , to otrzymamy dwa znane równania różniczkowe (por. [10]):

$$(2.1.1) \quad -EJ_y u^{IV} - Pu'' + Py_0 \varphi'' = 0,$$

$$(2.1.2) \quad -EJ_\omega \varphi^{IV} - P \left(\frac{J_p}{A} - GJ_d \right) \varphi'' + Py_0 u'' = 0,$$

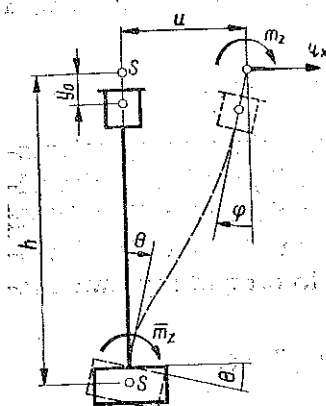
gdzie przyjęte zostały następujące oznaczenia:

- u przesunięcie poziome środka ścinania S ,
- φ kąt obrotu (kierunek dodatni jak pokazano na rys. 4),
- J_y moment bezwładności względem osi pionowej, tzn. osi symetrii,
- J_ω wycinkowy moment bezwładności (w cm^6),
- J_d moment bezwładności na czyste skręcanie,
- $J_p = J_x + J_y + Ay_0^2$ biegunowy moment bezwładności względem środka ścinania,
- A pole przekroju,
- y_0 odległość środka ścinania od środka ciężkości.

W przypadku, który mamy rozpatryć, przemieszczenie przekroju jest skrępowane. Przy odkształceniu wieszaki wywierają na łuk zarówno siły poziome Q_x jak i momenty skręcające M_z (rys. 4). Jednocześnie dolny koniec wieszaka wywiera na dźwigar usztywniający moment skręcający \bar{M}_z i powoduje jego obrót o kąt θ . Wartości q_x , m_z i \bar{m}_z , przypadające na jednostkę długości, wyznaczmy metodą deformacji rozpatrując po kolei odkształcenia $u = 1$, $\varphi = 1$ i $\theta = 1$.

Przekrój wieszaka może być w ogólnym przypadku zmienny. Przesunięcie $u = 1$ niech wywołuże u góry reakcję K_1 i moment K_2 ; moment u dołu oznaczmy przez K_3 (rys. 5a). Na podstawie wzajemności reakcji

stan $\varphi = 1$ wywołuje u góry reakcję K_2 ; występujący przy tym moment oznaczmy przez K_4 . U dołu wystąpi moment K_5 (rys. 5b). Wreszcie stan $\theta = 1$ wywołuje u góry reakcję K_3 i moment K_6 , przy czym u dołu działać będzie moment K_6 (rys. 5c). Na rys. 5 wszystkie siły i momenty naniesione są tak, jak w rzeczywistości oddziałują one na łuk lub dźwigar usztywniający.



Rys. 4

Wielkości odpowiednich sił i momentów przypadających na element dz otrzymamy dzieląc powyższe wartości przez a , gdzie a jest rozstawem wieszaków.

A zatem wskutek oddziaływań wieszaków i dźwigara usztywniającego do równania (2.1.1) dojdą składniki zależne od u , φ i θ , a mianowicie

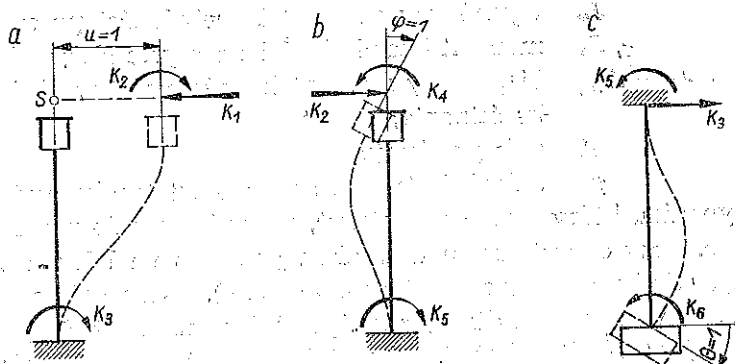
$$(2.2.1) \quad \frac{K_1}{a} u + \frac{K_2}{a} \varphi + \frac{K_3}{a} \theta.$$

Podobnie do równania (2.1.2)

$$(2.2.2) \quad \frac{K_2}{a} u + \frac{K_4}{a} \varphi + \frac{K_5}{a} \theta.$$

Do równania równowagi momentów działających na element dźwigara usztywniającego (które powinniśmy jeszcze ułożyć) wejdą, podobnie jak do równań poprzednich, dodatkowe składniki

$$(2.2.3) \quad \frac{K_3}{a} u + \frac{K_5}{a} \varphi + \frac{K_6}{a} \theta,$$



Rys. 5

przedstawiające obciążenie zewnętrzne dźwigara. Temu obciążeniu przeciwstawia się sztywność skrętna, wyrażająca się przez $EJ_{\omega} \theta'''' - GJ_d \theta''$, gdzie J_{ω} i J_d oznaczają wycinkowy moment bezwładności lub moment

bezwładności na czyste skręcanie przekroju dźwigara usztywniającego. Należy zauważyć, że w przekroju zamkniętym dominującą rolę odgrywa moment bezwładności $J_{\bar{a}}$, określony wzorem

$$(2.3) \quad J_{\bar{a}} = \frac{4 F^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

gdzie F jest polem powierzchni zawartym między linią środkową ścianek, t grubością ścianki, w ogólnym przypadku zmienną (całka w mianowniku rozciąga się na cały obwód zamknięty). Moment bezwładności $J_{\bar{a}}$ jest wielokrotnie większy od momentu bezwładności J_d dla odpowiedniego przekroju otwartego (bez wykratowania).

Dodając wyrażenia (2.2.1) i (2.2.2) do odpowiednich równań (2.1.1) lub (2.1.2) i mnożąc przez -1 otrzymamy

$$(2.4.1) \quad EJ_y u^{IV} + Pu'' - Py_0 \varphi'' + \frac{K_1}{a} u - \frac{K_2}{a} \varphi - \frac{K_3}{a} \theta = 0,$$

$$(2.4.2) \quad EJ_{\omega} \varphi^{IV} + \left(P \frac{J_p}{A} - GJ_d \right) \varphi'' - Py_0 u'' - \frac{K_2}{a} u + \frac{K_4}{a} \varphi + \frac{K_5}{a} \theta = 0.$$

Trzecie równanie odnoszące się do dźwigara usztywniającego jest następujące:

$$(2.4.3) \quad E\bar{J}_{\omega} \theta^{IV} - G\bar{J}_d \theta'' - \frac{K_3}{a} u + \frac{K_5}{a} \varphi + \frac{K_6}{a} \theta = 0.$$

3. Równanie różniczkowe dla pasa zakrzywionego

Rozpatrzmy warunki równowagi elementu łuku o przekroju monosymetrycznym (rys. 6). W przekroju prostopadłym do zakrzywionej osi podłużnej łuku działa moment zginający M_y i odpowiadająca mu siła tnąca Q_x , przechodząca przez środek ścinania, oraz moment skręcający M_z . Występujący w tym przekroju bimoment nie został uwidoczniony na rysunku.

W przypadku skręcania pręta zakrzywionego (bez siły podłużnej) obciążenie zewnętrzne elementu stanowi moment $m_z dz$ i siła $q_x dz$. Natomiast w przypadku wyboczenia skrętnego wielkości te będą przedstawiały wpływ siły podłużnej N powodującej wyboczenie.

Warunek równowagi momentów względem stycznej do (zakrzywionej) osi ścinania daje (rys. 7)

$$(3.1) \quad \frac{dM_z}{dz} + \frac{M_y}{R} + m_z = 0,$$

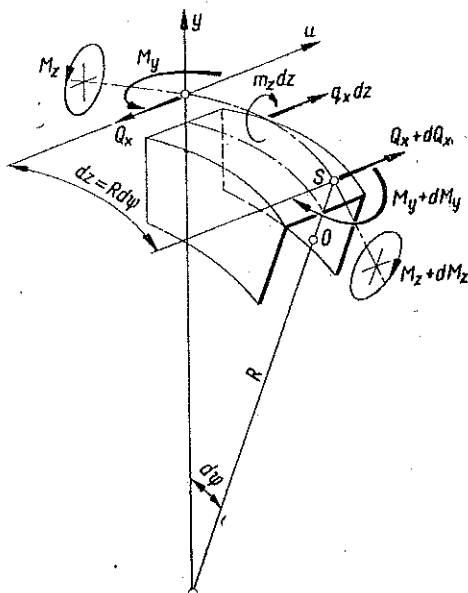
gdzie R jest promieniem krzywizny łuku. Dla łuku parabolicznego za R można w przybliżeniu przyjąć stałą wartość równą promieniowi koła przechodzącego przez klucz i wezłowania łuku $R \approx l^2/8h$.

Między momentem M_y i przemieszczeniem u , φ istnieje zależność

$$(3.2) \quad M_y = -EJ_y \left(u'' + \frac{\varphi}{R} \right).$$

Drugi składnik w nawiasie w (3.2) pochodzi stąd, że wskutek obrotu o kąt φ (rys. 8a) występują wydłużenia i skrócenia włókien o wartości $\pm \varphi x/R$, z którymi związane są naprężenia podłużne $\sigma_z = E\varphi x/R$. Naprężenia te dają moment

$$-\int \sigma_z x dA = -\frac{EJ_y}{R} \varphi.$$



Rys. 6

Między momentem M_z i przemieszczeniem φ , u zachodzi związek

$$(3.3) \quad M_z = -EJ_\omega \left(\varphi''' - \frac{u'''}{R} \right) + GJ_d \left(\varphi' - \frac{u'}{R} \right).$$

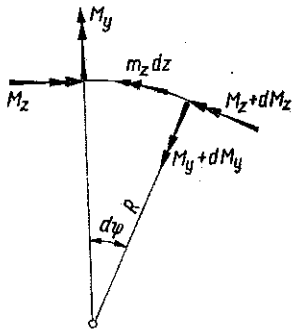
Zauważmy, że przy odkształceniu elementu, przy którym dwa sąsiednie przekroje obracają się o kąty $\varphi = u/R$ i $\varphi + d\varphi = (u + du)/R$, osie y obu przekrojów leżą w jednej płaszczyźnie (rys. 8b) i stąd mamy $M_z = 0$.

Po podstawieniu (3.2) i (3.3) do (3.1) otrzymamy

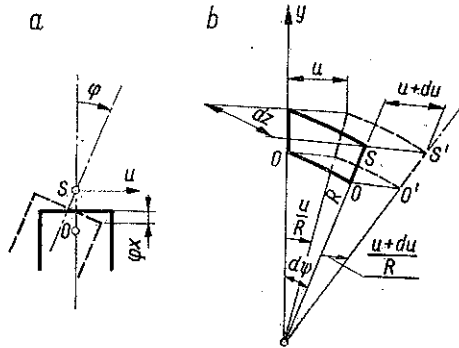
$$(3.4) \quad -EJ_\omega \varphi^{IV} + GJ_d \varphi'' + EJ_\omega \frac{u^{IV}}{R} - GJ_d \frac{u''}{R} - \frac{1}{R} EJ_y \left(u'' + \frac{\varphi}{R} \right) + m_z = 0.$$

Warunek równowagi momentów względem osi symetrii przekroju y daje zależność między siłą tnącą Q_x i momentami M_y i M_z (rys. 7)

$$(3.5) \quad Q_x = \frac{dM_y}{dz} - \frac{M_z}{R}$$



Rys. 7



Rys. 8

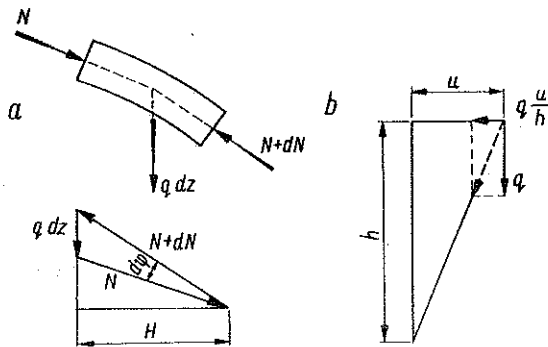
Po podstawieniu Q_x do warunku równowagi sił poziomych

$$\frac{dQ_x}{dz} + q_x = 0$$

i po podstawieniu (3.2) i (3.3) otrzymamy drugie równanie różniczkowe

$$(3.6) \quad -EJ_y u^{IV} - EJ_y \frac{\varphi''}{R} + \frac{1}{R} \left[EJ_\omega (\varphi^{IV} - \frac{u^{IV}}{R}) - GJ_d (\varphi'' - \frac{u''}{R}) \right] + q_x = 0.$$

W równaniach (3.4) i (3.6) wyrazy wyrażające wpływ zakrzywienia zawierają promień R . Jeżeli się je pominie (w przypadku $R = \infty$), pozostaną znane równania skręcania i zginania pręta prostego o przekroju monosymetrycznym. W przypadku wyboczenia takiego pręta prostego ściskanego siłą osiową P , zamiast q_x i m_z występują składniki zawierające P [por. równania (2.1.1) i (2.1.2)]. W taki sam sposób wpływ ten wyrazi się również w przypadku pręta zakrzywionego, jeżeli nie będziemy brali pod uwagę zmniejszania się siły osiowej N od wartości N_0 w kluczu do wartości $H = N_0 \cos \varphi_0$ w wezłowie (φ_0 jest



Rys. 9

od wartości N_0 w kluczu do wartości $H = N_0 \cos \varphi_0$ w wezłowie (φ_0 jest

kątem nachylenia osi łuku w węzłowie). Zauważmy przy tym, że wypadkową pionową sił N działających na element równowagi reakcja wieszaków, która zastąpiona została obciążeniem równomiernie rozłożonym q (rys. 9a).

Łuk obciążony za pośrednictwem wieszaków różni się tym od łuku obciążonego bezpośrednio (np. pod ciężarem własnym), że przy wyboczeniu kierunek działania obciążenia zmienia się wraz z pochyleniem wieszaków. Powstaje siła pozioma

$$(3.7) \quad q_x = -q \frac{u}{h}$$

stabilizująca ustrój (rys. 9b). Można ją uwzględnić w równaniu rzutów sił na oś x .

A zatem równanie *wyboczenia pręta zakrzywionego*, obciążonego za pośrednictwem *wiotkich wieszaków*, otrzymamy z równań (2.1.1) i (2.1.2), po uzupełnieniu ich wyrazami zawierającymi R w (3.4) i (3.6) i dodaniu q_x według (3.7) do pierwszego z nich:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \left(EJ_y + \frac{1}{R^2} EJ_\omega \right) u^{IV} + \left(P - \frac{1}{R^2} GJ_d \right) u'' - \frac{1}{R} EJ_\omega \varphi^{IV} + \\ + \left[\frac{1}{R} (EJ_y + GJ_d) - Py_0 \right] \varphi'' + \frac{q}{h} u = 0, \\ EJ_\omega \varphi^{IV} + \left(P \frac{J_p}{A} - GJ_d \right) \varphi'' - \frac{1}{R} EJ_\omega u^{IV} + \\ + \left[\frac{1}{R} (EJ_y + GJ_d) - Py_0 \right] u'' + \frac{EJ_y}{R^2} \varphi = 0, \end{cases}$$

Wyprowadzone równania (3.8), po opuszczeniu w pierwszym z nich składnika qu/h stanowią rozwiązanie przypadku wyboczenia *cieńkościennego pręta kolistego o przekroju monosymetrycznym*, obciążonego w *plaszczyźnie zakrzywienia obciążeniem równomiernie rozłożonym* $q = P/R$.

W szczególnym przypadku przekroju w postaci wąskiego prostokąta ($y_0 = 0$) otrzymamy, przy skróconych oznaczeniach $EJ_y = B$, $GJ_d = C$, równania

$$\begin{aligned} Bu^{IV} + \left(P - \frac{C}{R^2} \right) u'' + \frac{B+C}{R} \varphi'' &= 0, \\ \left(P \frac{J_p}{A} - C \right) \varphi'' + \frac{B+C}{R} u'' + \frac{B}{R^2} \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Równania te różnią się od równań wyprowadzonych dla tego samego zagadnienia przez Timoszenkę, [11], jedynie składnikiem $P(J_p/A)\varphi''$, występującym w drugim z nich. Ponieważ skrajnym przypadkiem pręta zakrzywionego przy $R \rightarrow \infty$ jest pręt prosty obciążony siłą P , drugie równanie przedstawiać będzie przypadek wybożenia skrętnego tego pręta. Obecność tego wyrazu jest zatem uzasadniona.

Uwzględnienie zginania wieszaków i ich sztywnego połączenia z łukiem i belką usztywniającą nie nastęrczy trudności, jeżeli założymy, że momenty zamocowania, jakimi wieszaki oddziałują na łuk, wywołują jedynie skręcanie tego ostatniego. W rzeczywistości skutek tego, że wieszaki poza środkiem przesła nie są prostopadłe do osi łuku, powstają również pewne momenty zginające względem osi y ; są one tym mniejsze, im łuk jest bardziej płaski. Przeprowadzone uproszczenie jest celowe, ponieważ już przedtem dla uproszczenia przyjęta została jednakowa długość wieszaków.

Poczynione dalej założenia — jak przyjęcie jednakowej siły podłużnej N oraz pominięcie momentów M_y , którymi dodatkowo wieszaki oddziałują na łuk — będące uproszczeniem dla łuku parabolicznego obciążonego za pośrednictwem pionowych wieszaków, są spełnione dla innego, podobnego ustroju nośnego. Jest nim łuk kołisty (o promieniu R) połączony z belką usztywniającą za pośrednictwem skośnych wieszaków, skierowanych koncentrycznie do środka krzywizny. Przy dostatecznie wiotkim łuku (w płaszczyźnie pionowej) jednakowe siły wystąpią we wszystkich wieszakach. Dzięki prostopadłości wieszaków do osi łuku w węzłach łączących wieszaki z łukiem występują jedynie momenty skręcające. Co prawda, dodatkowe momenty M_y wystąpią w miejscu zamocowania wieszaków z belką usztywniającą. Szeroka jezdnia posiadająca dużą sztywność na zginanie w swojej płaszczyźnie jest w stanie przenieść te momenty praktycznie bez odkształcenia. Pewne niedokładności wypływające stąd, że kąty łuku i belki nie będą ściśle odpowiadające, mają wpływ drugorzędny. W łuku parabolicznym pominięte wpływy, występujące na odcinkach skrajnych łuku, mają mniejsze znaczenie przy wyboczeniu według trzech i więcej półfal.

Reakcje wieszaków można zatem wyrazić przez (2.2.1), (2.2.2) i (2.2.3). Dwa pierwsze równania różniczkowe wybożenia ustroju jednodźwigarowego łukowego, obciążonego za pośrednictwem sztywnych wieszaków, są zatem następujące:

$$(3.9.1) \quad \left(EJ_y + \frac{1}{R^2} EJ_\omega \right) u^{IV} + \left(P - \frac{1}{R^2} GJ_d \right) u'' - \frac{1}{R} EJ_\omega \varphi^{IV} + \\ + \left[\frac{1}{R} (EJ_y + GJ_d) - Py_0 \right] \varphi'' + \left(\frac{K_1}{a} + \frac{q}{h} \right) u - \frac{K_2}{a} \varphi - \frac{K_3}{a} \theta = 0,$$

$$(3.9.2) \quad EJ_\omega \varphi^{IV} + \left(P \frac{J_p}{A} - GJ_d \right) \varphi'' - \frac{1}{R} EJ_\omega u^{IV} + \left[\frac{1}{R} (EJ_\omega + GJ_d) - Py_0 \right] u'' - \\ - \frac{K_2}{a} u + \left(\frac{K_4}{a} + \frac{EJ_y}{R^2} \right) \varphi + \frac{K_5}{a} \theta = 0.$$

Trzecie równanie jest identyczne z (2.4.3).

4. Rozwiązanie układu równań

Założenie niezmiennych parametrów K_1, \dots, K_6 w równaniach (2.4.1)–(2.4.3) odnoszących się do pasa prostego jest uzasadnione. Ale założenie to przyjęte zostało również w równaniach (3.9.1) i (3.9.2). Będzie ono zbli-

zone do stanu rzeczywistego w przypadku, kiedy momenty bezwładności wieszaków wzrastają ku środkowi mostu. Dla racjonalniejszego rozmieszczenia materiału może być celowe zastosowanie w środkowej części mostu wieszaków o szerszych i grubszych przykładkach albo też zastosowanie wieszaków poszerzających się ku dołowi z zachowaniem jednakowego nachylenia przykładek we wszystkich wieszakach.

O ile niezmiennosc parametrów K_1 , K_2 i K_4 jest teoretycznie możliwa, to niemożliwe jest jednoczesne zachowanie stałej wartości parametrów K_3 czy K_5 . Obowiązują bowiem zależności (rys. 6)

$$K_3 = K_1 h - K_2, \quad K_5 = K_2 h - K_4,$$

gdzie h jest zmienne. Poczynione założenia (spełnione w przypadku pasów równoległych) nie ma odpowiednika w schemacie statycznym o pasie zakrzywionym. Należy je traktować jako uproszczenie matematyczne dające pewien dodatkowy zapas bezpieczeństwa.

Rozwiązaniem układu równań (2.4.1)-(2.4.3) lub (3.9.1), (3.9.2) i (2.4.3) są funkcje

$$(4.1) \quad u = A_1 \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad \varphi = A_2 \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad \theta = A_3 \sin \frac{n\pi z}{L},$$

gdzie n jest ilością półfal przypadającą na długości L łuku. Spełniają one warunki brzegowe, gdy $z = 0$ i $z = L$, to jest $u = \varphi = 0$, oraz $u'' = \varphi'' = 0$.

Po podstawieniu (4.1) do (3.9.1), (3.9.2) i (2.4.3) otrzymamy trzy równania algebraiczne, które — po pomnożeniu dwóch pierwszych z nich przez $L^2/n^2\pi^2$ oraz wprowadzeniu sił zastępczych

$$(4.2) \quad \begin{cases} P_{yn} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_y}{L^2}, \\ P_{\varphi n} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{n^2 \pi^2 EJ_\omega}{L^2} + GJ_d \right), \end{cases}$$

gdzie $r^2 = J_p/A$ przybiorą postać

$$(4.3) \quad \begin{cases} A_1 \left[P_{yn} + \frac{r^2}{R^2} P_{\varphi n} - P + \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \left(\frac{K_1}{a} + \frac{q}{h} \right) \right] + \\ + A_2 \left(P_{y0} - \frac{r^2}{R} P_{\varphi n} - \frac{EJ_y}{R} - \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \frac{K_2}{a} \right) - A_3 \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \frac{K_3}{a} = 0, \\ A_1 \left(P_{y0} - \frac{r^2}{R} P_{\varphi n} - \frac{EJ_y}{R} - \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \frac{K_2}{a} \right) + \\ + A_2 \left[r^2 (P_{\varphi n} - P) + \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \left(\frac{EJ_y}{R^2} + \frac{K_4}{a} \right) \right] + A_3 \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \frac{K_5}{a} = 0, \\ - A_1 \frac{K_3}{a} + A_2 \frac{K_5}{a} + A_3 \left(EJ_\omega \frac{n^4 \pi^4}{L^4} + GJ_d \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{K_6}{a} \right) = 0. \end{cases}$$

W ostatnim równaniu nie występuje P . Z tego równania wyznaczmy wartość A_3 i podstawimy ją do dwóch pozostałych równań (4.3). W ten sposób otrzymuje się układ dwóch równań jednorodnych względem A_1 i A_2 , które po wprowadzeniu sztywności zastępczych

$$(4.4) \quad \begin{cases} K_u = K_1 - \frac{K_3^2}{R_n + K_6} + \frac{qa}{h}, \\ K_{u\varphi} = K_2 + \frac{K_3 K_5}{R_n + K_6}, \\ K_\varphi = K_4 - \frac{K_5^2}{R_n + K_6}, \end{cases}$$

gdzie

$$(4.5) \quad R_n = a \left(EJ_\omega \frac{n^4 \pi^4}{L^4} + GJ_d \frac{n^3 \pi^2}{L^2} \right)$$

jest sztywnością zastępczą skręcania dźwigara, oraz oznaczeń

$$(4.6) \quad \begin{cases} B = P y_n + \frac{L^2}{n^2 \pi^2 a} K_u + \frac{r^2}{R^2} P \varphi_n, \\ C = P \varphi_n + \frac{L^2}{n^2 \pi^2 a} \frac{1}{r^2} \left(K_\varphi + \frac{EJ_y}{R^2} a \right), \\ a = \frac{L^2}{n^2 \pi^2 a} \frac{K_{u\varphi}}{r^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{EJ_y}{r^2} + P \varphi_n \right) \end{cases}$$

przedstawić można w prostszej postaci

$$(4.7) \quad \begin{cases} A_1 (B - P) + A_2 (P y_0 - r^2 a) = 0, \\ A_1 (P y_0 - r^2 a) + A_2 r^2 (C - P) = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie A_1 i A_2 różne od zera istnieje tylko wtedy, jeżeli wyznacznik układu równa się zeru. Z warunku tego wypływa równanie kwadratowe na siłę krytyczną P . Z dwóch pierwiastków interesuje nas mniejszy

$$(4.8) \quad P = \frac{r^2}{\varrho^2} \left[\frac{1}{2} (B + C - 2 y_0 a) - \sqrt{\frac{1}{4} (B + C - 2 y_0 a)^2 - \frac{\varrho^2}{r^2} BC + \varrho^2 a^2} \right],$$

gdzie jest $\varrho^2 = r^2 - y_0^2 = (J_x + J_y)/A$, przy czym ϱ i r są biegunowymi promieniami bezwładności względem środka ciężkości lub środka ścinania.

W przypadku, kiedy pod pierwiastkiem wyrażenie w nawiasie jest dużo większe od pozostałych, dla uzyskania dostatecznej dokładności przy obliczeniu suwakiem wzór (4.8) można sprowadzić do postaci przybliżonej

$$(4.8.1) \quad P \approx \frac{BC - r^2 a^2}{B + C - 2 y_0 a}$$

Wielkości B i C oznaczają, jak łatwo sprawdzić, siły wyboczenia pręta zakrzywionego w ośrodku sprężystym przy całkowicie skrepowanym obrocie φ pręta lub przy całkowicie skrepowanym przesunięciu poziomym u . Wartości B , C i α zależą od ilości n półfal sinusoidy. Należy przyjąć takie n , przy którym otrzymuje się minimalną wartość P .

Przy określaniu współczynnika bezpieczeństwa należy otrzymaną siłę wyboczenia sprężystego porównać z rzeczywistą siłą normalną w $l/4$ lub w węzłowie łuku.

Jeżeli naprężenie krytyczne $\sigma_k = P/A$ przekracza granicę proporcjonalności, za siłę krytyczną należy przyjąć wartość

$$P^* = \sigma^* A,$$

gdzie σ^* jest naprężeniem wyboczenia w obszarze plastycznym, przyporządkowanym wartości σ_k na hiperboli Eulera.

4.1. Uwagi do przedstawionego rozwiązania. Należy zwrócić uwagę na znak minus przy wyrażeniach zawierających y_0 . Otrzymany on został dla przypadku, kiedy środek ścinania leży powyżej środka ciężkości (por. rys. 4). W przeciwnym przypadku (np. dla przekrojów według rys. 3, lecz odwróconych do góry) należy przyjąć $+2y_0\alpha$. Jak łatwo zauważyć, siła krytyczna wówczas zmaleje. A zatem korzystne jest takie umieszczenie przekroju, ażeby środek ścinania leżał powyżej środka ciężkości.

Wpływ sztywności skrętnej łuku, sztywności wieszaków a także sztywności skrętnej belki usztywniającej na wielkość siły krytycznej można ocenić na podstawie przykładu liczbowego, załączonego w uzupełnieniu.

Zakrzywienie osi łuku *zmniejsza* siłę krytyczną. Można o tym wnioskować na podstawie następującego rozumowania. Przemieszczenie przekroju łuku można przedstawić jako obrót dookoła pewnego punktu na osi y . Jego odległość od środka ścinania $y_{obr} = u/\varphi$ (mierzona do dołu — rys. 4) można określić ze wzoru (4.7):

$$y_{obr} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{r^2 \alpha - P y_0}{B - P}.$$

Wartość ta z reguły jest dodatnia, co oznacza, że postać odkształcona jest podobna do przedstawionej na rys. 4. Momenty M_y , które powstają przy dodatnim przesunięciu u , dają na skutek zakrzywienia dodatkowy moment M_y/R względem osi podłużnej, działający w kierunku dodatnich kątów φ — a zatem zwiększający skreślenie przekroju.

W niniejszej pracy założono, że *belka usztywniająca nie ulega przesunięciu poziomemu*. Wpływ tego przesunięcia na podatność «sprężystego podłoża» łuku najłatwiej można ocenić w układzie uproszczonym, w którym między wieszakami i łukiem występuje jedynie siła pozioma.

Przyjmując, że obciążenie poziome działające na górne końce wieższaków zmienia się według sinusoidy $w = w_0 \sin n\pi z/l$, otrzymujemy maksymalne przesunięcie poziome górnego końca wieższaka przy $\bar{J}_d = \infty$

$$u = u_1 + u_2 = \frac{w_0 a h^3}{3 E J_v} + \frac{w_0 (l/n)^4}{\pi^4 E J_y},$$

gdzie u_1 wyraża wpływ zginania wieższaka o stałym momencie bezwładności J_v , zaś u_2 poziome przesunięcie belki o stałym momencie bezwładności J_y względem osi y . Współczynnik $\kappa = u_2/u_1$ określa stosunkowy wpływ przesunięcia belki. Dla $E/G = 2,6$ mamy

$$\kappa = 3 \frac{J_v}{\bar{J}_y} \frac{L^4}{n^4 \pi^4 a h^3}.$$

Współczynnik κ maleje proporcjonalnie do czwartej potęgi ilości półfal wyboczenia. W racjonalnie zaprojektowanej konstrukcji ilości półfal będzie zazwyczaj większa od jedności, a stosunek \bar{J}_v/\bar{J}_y tej wielkości, że współczynnik κ jest znacznie mniejszy od jedności i może być przyjęty za równy zeru.

Dla przykładu przytoczonego w uzupełnieniu przy $J_v = 10\,870 \text{ cm}^4$, $\bar{J}_y = 5,25 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$, $L = 63,55 \text{ m}$, $h = 6,0 \text{ m}$ oraz przy $n = 3$ otrzymujemy $\kappa = 0,0116$.

W uzupełnieniu podane są między innymi stałe sprężyste K_1 - K_6 oraz K_u , $K_{u\varphi}$ i K_φ przy uwzględnieniu poziomego przesunięcia przekrojów belki usztywniającej dla przypadku stałego momentu bezwładności wieższaków.

Można również pominąć wpływ siły rozciągającej w belce na wielkość kąta skręcenia czy też na wielkość przesunięcia poziomego przekrojów belki. Siła rozciągająca zwiększa sztywność skrętną do wartości

$$G \bar{J}_d + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} E \bar{J}_\omega + P \frac{\bar{J}_p}{A}$$

oraz sztywność zginania do wartości

$$E \bar{J}_y + P \frac{L^2}{n^2 \pi^2}.$$

W belkach o przekroju zamkniętym, w których sztywność wycinkową można pominąć (we wzorach została ona zachowana, ponieważ odnoszą się one również do przekrojów otwartych), wzrost sztywności skrętnej określa współczynnik

$$\eta_1 = \frac{P}{GA} \frac{\bar{J}_p}{\bar{J}_d}.$$

W wymienionym przykładzie przy $P = 521 \text{ t}$, $\bar{J}_p = 5,70 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$, $\bar{A} = 405 \text{ cm}^4$ otrzymamy $\eta_1 = 0,0143$ czyli $\approx 1,4\%$.

Podobnie wzrost sztywności zginania można określić współczynnikiem

$$\eta_2 = \frac{P}{P_{yn}}.$$

W rozpatrzonym przykładzie dla $n = 3$ jest $\eta_2 = 0,0214$ czyli $\approx 2,1\%$.

Należy mieć to na uwadze, że w moście drogowym jezdnia będzie szersza niż w moście dla pieszych, a przekrój skrzynkowy wystarczy dać tylko na części szerokości mostu, np. na jednej trzeciej szerokości. Wpływ wygięcia jezdni i siły rozciągającej w belce ulegnie większej redukcji. Z wpływami tymi należałoby się liczyć w jednodźwigarowej konstrukcji nośnej o wybitnie wąskiej belce usztywniającej, mieszczącej np. tylko rurociąg.

Przedstawione w punktach 2-4 rozwiązanie opiera się przede wszystkim na założeniu, że wieszaki, za pośrednictwem których obciążenie działa na łuk, są rozłożone na długości łuku w sposób ciągły. Jeżeli postać wyboczenia jest taka, że na jedną półfalę przypadają przynajmniej dwa lub trzy wieszaki, dokładność wyników jest zadowalająca.

Wpływ zmiennej wysokości wieszaków w ustroju łukowym rozpatrzone będzie w punkcie 5 za pomocą metody energetycznej.

4.2 Dalsze zastosowania. Przedstawione rozwiązanie może być z łatwością zastosowane również do analizy stateczności mostu o dwóch łukach umieszczonych po obu stronach jezdni (por. uzupełnienie).

W przypadku wieszaków wiotkich w równaniach (3.9.1) i (3.9.2) odpadają wyrazy zawierające θ , a ponadto $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 0$. Dzięki temu upraszczają się wzory (4.6), w których $K_\varphi = K_{u\varphi} = 0$ i $K_u = qa/h$.

Przy założeniu pasa prostego ($R = \infty$) we wzorach (4.6) odpadają wyrazy zawierające R . Porównanie wyników z obliczeniem dla rzeczywistego promienia krzywizny pozwala ocenić wpływ zakrzywienia. Ponadto przypadek pasów prostych odnosi się przede wszystkim do mostów dwudźwigarowych. Założenie stałej długości «wieszaków» jest tutaj praktycznie spełnione. Zmienia się natomiast siła N w pasie. Z reguły zmieniać się będą również jego przekrój i momenty bezwładności. Jeżeli przekrój będzie malał w ten sposób, że iloraz N/J_y , a także ilorazy N/J_ω i N/J_x (pierwszy dla przekroju otwartego, drugi dla zamkniętego) będą stałe lub też będą zmieniać się w wąskich granicach, wyniki otrzymane ze wzoru (4.8) będą dostatecznie dokładne. Dla pasa o stałym przekroju siła krytyczna według (4.8) porównana z rzeczywistą siłą w środku rozpiętości mostu daje mniejszy współczynnik bezpieczeństwa od rzeczywistego. Z drugiej jednak strony nie została uwzględniona podatność skrajnej ramy poprzecznej. Pominięcie obecności krzyżulców (w «sprężystym podłożu» uwzględnia się tylko sztywność zginania słupków kratownicy i połączone z nimi poprzecznic) jest słuszne w przypadku kratownic jednościennej, w których elementy pasa i wykratowania łączą się za pomocą pojedynczych blach węzłowych. W kratownicach dwuściennych, w których elementy te są połączone za pomocą dwóch (zewnątrznych) blach węzłowych, opór sprężysty jest większy. Kratownica jako całość nabiera cech pręta o przekroju zamkniętym (co prawda odkształcalnym). Wyznaczenie sztywności skrętnej takiego przekroju stanowi osobne zagadnienie.

5. Uwzględnienie zmienności parametrów K_1, \dots, K_n . Metoda energetyczna

Wzór (4.8) wyprowadzony w punkcie 4 nie daje wyników dokładnych w przypadku, kiedy parametry K_1, \dots, K_n są zmienne, np. silnie wzrastają dla wieszaków położonych bliżej węzłowi łuku wskutek zmniejszania się wysokości przy stałym J_v .

Równania (3.9.1), (3.9.2) i (2.4.3) obejmują wprawdzie również przypadek zmiennych sztywności wieszaków, jednak rozwiązanie komplikuje się tak znacznie, że właściwą rzeczą będzie uciec się do metody energetycznej.

Opierając się na wymienionych równaniach różniczkowych nie trudno będzie ułożyć wyrażenie na energię potencjalną układu.

Praca sił wewnętrznych w łuku i belce usztywniającej wynosi

$$(5.1) \quad \Pi_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EJ_y \left(u'' + \frac{\varphi}{R} \right)^2 + EJ_\omega \left(\varphi'' - \frac{u''}{R} \right)^2 + GJ_d \left(\varphi' - \frac{u'}{R} \right)^2 \right] ds + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l (E\bar{J}_\omega \theta''^2 + G\bar{J}_d \theta'^2) dz.$$

Objasnić wypada jedynie dwa pierwsze składniki pierwszej całki. Według rozważań przytoczonych w p. 3 wydłużenie ε_z dla dowolnego punktu przekroju łuku określone jest przez wzór

$$\varepsilon_z = \left(u'' + \frac{\varphi}{R} \right) x + \left(\varphi'' - \frac{u''}{R} \right) \omega,$$

gdzie ω oznacza powierzchnię wycinkową tego punktu. Elementarna praca przy uwzględnieniu $\int \omega x dA = 0$ wynosi

$$\frac{1}{2} E \int_A \varepsilon_z^2 dA = \frac{1}{2} E \left[\left(u'' + \frac{\varphi}{R} \right)^2 \int_A x^2 dA + \left(\varphi'' - \frac{u''}{R} \right)^2 \int_A \omega^2 dA \right],$$

a przy uwzględnieniu związków $J_y = \int_A x^2 dA$ i $J_\omega = \int_A \omega^2 dA$ otrzymuje się dwa pierwsze składniki pierwszej całki w (5.1).

Praca sił zewnętrznych przy uwzględnieniu poziomej składowej $q a_r / h_r$ siły w wieszaku, gdzie przez h_r i u_r oznaczono wysokość wieszaka i przesunięcie jego górnego końca w węźle r wynosi

$$(5.2) \quad V = -\frac{1}{2} \int_0^l P(u'^2 - 2y_0 u' \varphi' + r^2 \varphi'^2) ds + \frac{1}{2} q a \sum_{r=1}^{n-1} \frac{u_r^2}{h_r}.$$

Tutaj przez n oznaczono ilość pól.

W wyrażeniu na energię sprężystą wieszaków uwzględnimy skończoną ich ilość oraz nieprostopadłość osi wieszaka od osi łuku.

Obrót węzła łuku o kąt φ_r dookoła osi łuku oznacza, że górny koniec wieszaka doznaje w płaszczyźnie prostopadłej do podłużnej osi mostu obrotu o kąt $\varphi_r \cos \psi_r$, gdzie ψ_r jest kątem nachylenia stycznej do łuku. Jednocześnie górny koniec wieszaka ulega skręceniu dookoła własnej osi o kąt $\varphi_r \sin \psi_r$. Całkowita energia sprężysta wieszaków, wyrażająca pracę końcową (rys. 5) sił narastających od zera, wynosi

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \Pi_2 = & \frac{\mu}{2} \sum_{r=1}^{n-1} [(K_{1r} u_r - K_{2r} \varphi_r \cos \psi_r - K_{3r} \theta_r) u_r + \\ & + (K_{4r} \varphi_r \cos \psi_r - K_{2r} u_r + K_{5r} \theta_r) \varphi_r \cos \psi_r + \\ & + (K_{6r} \theta_r - K_{3r} u_r + K_{5r} \varphi_r \cos \psi_r) \theta_r] + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{G J_v}{h_r} \varphi_r^2 \sin^2 \psi_r, \end{aligned}$$

przy czym ostatni składnik wyraża energię skręcania wieszaków przy założeniu swobody deplanacji końców.

W powyższym wyrażeniu zmienne sztywności K_{1r}, \dots, K_{6r} pomnożono przez stały współczynnik μ . Pozwala to na rozwiązanie prostszego zadania sformułowanego w następujący sposób. Dla danej siły P (za siłę P należy przyjąć rzeczywistą siłę pomnożoną przez wymagany współczynnik bezpieczeństwa ν) określić minimalne dopuszczalne sztywności wieszaków, czyli inaczej wyznaczyć minimalny dopuszczalny współczynnik μ . Przy $\mu \leq 1$ założone sztywności są wystarczające i zapewniają wymagany współczynnik bezpieczeństwa.

Przy założonych wielkościach geometrycznych, modułach E i G oraz sile P parametr μ określić można ogólnie z zagadnienia wariacyjnego

$$\delta \Pi = \delta(\Pi_1 + \Pi_2 + V) = 0.$$

Tutaj przy założeniu stałej siły P i stałego przekroju łuku rozwiązanie ma przebieg prostszy aniżeli w przypadku dowolnej zmienności tych wielkości.

Przemieszczenia u, φ i θ przyjmiemy w postaci szeregów

$$(5.4) \quad u = \sum_{i=1}^p a_i U_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^p b_i \Phi_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^p c_i \Theta_i,$$

gdzie U_i, Φ_i i Θ_i są funkcjami ortogonalnymi, zaś a_i, b_i i c_i odpowiednimi współczynnikami.

W rozpatrywanym zagadnieniu przyjęte będą funkcje

$$(5.5) \quad U_i = \Phi_i = \sin \frac{i\pi s}{L}, \quad \Theta_i = \sin \frac{i\pi z}{l},$$

przy czym s i z mierzone są na osi łuku lub belki usztywniającej.

Po podstawieniu funkcji (5.4) do wzorów (5.1), (5.2) i (5.3) otrzymamy wyrażenie na całkowitą energię potencjalną układu:

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad \Pi = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \int_0^L \left[EJ_y \left(a_i^2 U_i'^2 + 2 a_i b_i U_i'' \frac{\Phi_i}{R} + b_i^2 \frac{\Phi_i^2}{R^2} \right) + \right. \\
 & + EJ_\omega \left(b_i^2 \Phi_i'^2 - 2 a_i b_i \Phi_i'' \frac{U_i}{R} + a_i^2 \frac{U_i'^2}{R^2} \right) + \\
 & + GJ_d \left(b_i^2 \Phi_i'^2 - 2 a_i b_i \Phi_i' \frac{U_i}{R} + a_i^2 \frac{U_i'^2}{R^2} \right) \Big] ds + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \int_0^L (E\bar{J}_\omega c_i^2 \Theta_i'^2 + G\bar{J}_d c_i^2 \Theta_i'^2) dz - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \int_0^L P (a_i^2 U_i'^2 - 2 y_0 a_i b_i U_i' \Phi_i' + r^2 b_i^2 \Phi_i'^2) ds + \\
 & + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left(a_i a_j \sum_{r=1}^{n-1} K_{1r} U_{ir} U_{jr} + b_i b_j \sum_{r=1}^{n-1} K_{4r} \Phi_{ir} \Phi_{jr} \cos^2 \psi_r + \right. \\
 & + c_i c_j \sum_{r=1}^{n-1} K_{6r} \Theta_{ir} \Theta_{jr} - 2 a_i b_j \sum_{r=1}^{n-1} K_{2r} U_{ir} \Phi_{jr} \cos \psi_r - \\
 & \left. - 2 a_i c_j \sum_{r=1}^{n-1} K_{3r} U_{ir} \Theta_{jr} + 2 b_i c_j \sum_{r=1}^{n-1} K_{5r} \Phi_{ir} \Theta_{jr} \cos \psi_r \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p b_i b_j \sum_{r=1}^{n-1} \frac{GJ_d^v}{h_r} \Phi_{ir} \Phi_{jr} \sin^2 \psi_r + \frac{1}{2} q a \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{h_r} U_{ir} U_{jr}.
 \end{aligned}$$

Wykorzystano tutaj następujące własności przyjętych funkcji ortogonalnych:

$$(5.7) \quad \begin{cases} \int_0^L U_i' U_j' ds = \int_0^L \Phi_i' \Phi_j' ds = \int_0^L \Theta_i' \Theta_j' dz = 0, & \int_0^L U_i' \Phi_j' ds = 0, \\ \int_0^L U_i'' U_j'' ds = \int_0^L \Phi_i'' \Phi_j'' ds = \int_0^L \Theta_i'' \Theta_j'' dz = 0, & \int_0^L U_i'' \Phi_j ds = \int_0^L \Phi_i \Phi_j ds = 0 \end{cases}$$

dla $i \neq j$.

Rozpatrzmy teraz równania pomocnicze

$$(5.8) \quad EJ_y \int_0^L a_i^2 U_i'^2 ds - \lambda_i^{(1)} P \int_0^L a_i^2 U_i'^2 ds = 0,$$

$$(5.9) \quad EJ_\omega \int_0^L b_i^2 \Phi_i'^2 ds + GJ_d \int_0^L b_i^2 \Phi_i'^2 ds - \lambda_i^{(2)} P r^2 \int_0^L b_i^2 \Phi_i'^2 ds = 0,$$

$$(5.10) \quad \frac{EJ_\omega}{R} \int_0^L a_i b_i \Phi_i'' U_i'' ds + \frac{GJ_d}{R} \int_0^L a_i b_i \Phi_i' U_i' ds - \lambda_i^{(3)} P y_0 \int_0^L a_i b_i \Phi_i' U_i' ds = 0.$$

Równanie (5.8) przedstawia warunek wyboczenia pręta prostego w przypadku skrępowania obrotu i dla założonych funkcji według (5.5) jest spełnione, gdy

$$(5.8.1) \quad \lambda_i^{(1)} = \frac{P_{yi}}{P}, \quad P_{yi} = i^2 \frac{\pi^2 EJ_y}{L^2}.$$

Podobnie równanie (5.9) dotyczy przypadku wyboczenia skrętnego pręta prostego przy osi obrotu znajdującej się w osi ścinania. Równaniu temu czyni zadość

$$(5.9.1) \quad \lambda_i^{(2)} = \frac{P_{\varphi i}}{P}, \quad P_{\varphi i} = \frac{1}{r^2} \left(i^2 \frac{\pi^2 EJ_\omega}{L^2} + GJ_d \right).$$

Przy spełnieniu dodatkowego założenia

$$(5.11) \quad U_i' = \Phi_i', \quad U_i'' = \Phi_i'',$$

równanie (5.10) przedstawiające analogiczny przypadek wyboczenia co równanie (5.9) daje

$$(5.10.1) \quad \lambda_i^{(3)} = \frac{P_{\varphi i}}{P} \frac{r^2}{R y_0}.$$

Uwzględniając w (5.6) równania (5.8), (5.9) i (5.10) i wprowadzając skrócone oznaczenia

$$(5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_i = \frac{EJ_\omega}{R^2} \int_0^L U_i'^2 ds + \frac{GJ_d}{R^2} \int_0^L U_i'^2 ds, \\ B_i = \frac{EJ_y}{R^2} \int_0^L \Phi_i^2 ds, \\ C_i = \frac{EJ_y}{R} \int_0^L U_i'' \Phi_i ds, \\ D_i = EJ_\omega \int_0^L \Theta_i'^2 dz + GJ_d \int_0^L \Theta_i'^2 dz, \\ N_i^{(1)} = (\lambda_i^{(1)} - 1) P \int_0^L U_i'^2 ds, \\ N_i^{(2)} = (\lambda_i^{(2)} - 1) P r^2 \int_0^L \Phi_i'^2 ds, \\ N_i^{(3)} = -(\lambda_i^{(3)} - 1) P y_0 \int_0^L \Phi_i'^2 ds \end{array} \right.$$

oraz

$$(5.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij} = \sum_{r=1}^{n-1} K_{1r} U_{ir} U_{jr}, \\ \beta_{ij} = \sum_{r=1}^{n-1} K_{4r} \Phi_{ir} \Phi_{jr} \cos^2 \psi_r, \\ \gamma_{ij} = \sum_{r=1}^{n-1} K_{6r} \Theta_{ir} \Theta_{jr}, \\ \bar{a}\beta_{ij} = - \sum_{r=1}^{n-1} K_{2r} U_{ir} \Phi_{jr} \cos \psi_r, \\ \bar{a}\gamma_{ij} = - \sum_{r=1}^{n-1} K_{3r} U_{ir} \Theta_{jr}, \\ \bar{\beta}\gamma_{ij} = \sum_{r=1}^{n-1} K_{5r} \Phi_{ir} \Theta_{jr} \cos \psi_r \end{array} \right.$$

i ponadto

$$(5.14) \quad \omega_{ij} = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{GJ_d}{h_r} \Phi_{ir} \Phi_{jr} \sin^2 \psi_r, \quad \delta_{ij} = qa \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{h_r} U_{ir} U_{jr}$$

otrzymamy następujące wyrażenie na całkowitą energię potencjalną układu:

$$(5.15) \quad \begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p [a_i^2 (N_i^{(1)} + A_i) + b_i^2 (N_i^{(2)} + B_i) + 2 a_i b_i (N_i^{(3)} + C_i) + c_i^2 D_i] + \\ & + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p [a_i a_j a_{ij} + b_i b_j \beta_{ij} + c_i c_j \gamma_{ij} + a_i b_j \bar{a}\beta_{ij} + a_i c_j \bar{a}\gamma_{ij} + b_i c_j \bar{\beta}\gamma_{ij}] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (a_i a_j \delta_{ij} + b_i b_j \omega_{ij}). \end{aligned}$$

Minimalna wartość energii potencjalnej zachodzi, gdy

$$(5.16) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Z (5.15) i (5.16) wypływa $3p$ równań jednorodnych, liniowych względem parametrów a_i , b_i i c_i . Dla $p = 3$ zestawione są one w tablicy 1. Rozwiązanie różne od zera istnieje, jeżeli wyznacznik układu jest równy zero. Z warunku tego wynika równanie algebraiczne $3p$ -stopnia względem poszukiwanego współczynnika μ .

Przedstawione rozwiązanie obejmuje jako szczególny przypadek *most dwudźwigarowy łukowy*, górą otwarty. W tym przypadku należy jedynie

opuścić wszystkie wyrażenia zawierające funkcje Θ_i i parametry c_i (a zatem $D_i = \gamma_{ij} = \alpha\gamma_{ij} = \beta\gamma_{ij} = 0$), natomiast zamiast K_1, K_2 i K_4 podstawić charakterystyki $K_u, K_{u\varphi}$ i K_φ , oznaczone na rys. 14. Otrzymamy zatem 2p równań liniowych oraz równanie wynikowe dla μ stopnia 2p.

Przy uwzględnieniu wszystkich wpływów rozwiązanie jest, jak widać, bardzo żmudne.

Poniżej ograniczymy się do przypadku, kiedy wieszaki są połączone z łukiem przegubowo, a przekrój łuku nie doznaje skręcenia ($\varphi = 0$). Ponadto pomija się ten wpływ zakrzywienia, który wyraża się wyrazami zawierającymi $R \neq \infty^1$. Energia potencjalna przy uwzględnieniu odkształceń u i θ wynosi

$$(5.17) \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EJ_y u''^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^L P u'^2 ds + \\ + \frac{1}{2} \int_0^L (E\bar{J}_\omega \theta''^2 + G\bar{J}_d \theta'^2) dz + \frac{\mu}{2} \sum_{r=1}^{n-1} K_r (u_r - \theta_r h_r)^2,$$

gdzie dla stałego momentu bezwładności $J_{\varphi r}$ wieszaka r stała sprężysta określona jest wzorem

$$\bar{K}_r = \frac{3 EJ_{\varphi r}}{h_r^3}.$$

Rozwiązanie podobnie jak w przypadku ogólnym przyjmujemy w postaci

$$(5.18) \quad u = \sum_{i=1}^p a_i U_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^p c_i \Theta_i$$

z funkcjami

$$U_i = \sin \frac{i\pi s}{L}, \quad \Theta_i = \sin \frac{i\pi z}{L},$$

spełniającymi warunki brzegowe swobodnego wygięcia i skrepowanego obrotu w wezłowie łuku.

Równanie pomocnicze

$$(5.19) \quad EJ_y \int_0^L a_i^2 U_i''^2 ds - \lambda_i P \int_0^L a_i^2 U_i'^2 ds = 0$$

odnosi się do przypadku wyboczenia pręta o przekroju bisymetrycznym

¹ Przypadek prostszy, kiedy wieszaki są u dołu połączone z poprzecznkami (most dwudźwigarowy), rozpatrzyli F. Bleich i H. Bleich w pracy [5].

Tablica 1

a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
$\alpha_{11} + \delta_{11} + \frac{N_1^{(1)} + A_1}{\mu}$	$\alpha_{12} + \delta_{12}$	\dots	$\frac{\alpha\beta_{11} + C_1}{\mu}$	$\frac{\alpha\beta_{12}}{\mu}$	\dots	$\frac{\alpha\gamma_{11}}{\mu}$	$\frac{\alpha\gamma_{12}}{\mu}$	\dots
$\alpha_{21} + \delta_{21}$	$\alpha_{22} + \delta_{22} + \frac{N_2^{(1)} + A_2}{\mu}$	\dots	$\frac{\alpha\beta_{21}}{\mu}$	$\frac{\alpha\beta_{22} + C_2}{\mu}$	\dots	$\frac{\alpha\gamma_{21}}{\mu}$	$\frac{\alpha\gamma_{22}}{\mu}$	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$\frac{\alpha\beta_{11} + C_1}{\mu}$	$\alpha\beta_{12}$	\dots	$\beta_{11} + \omega_{11} + \frac{N_1^{(2)} + B_1}{\mu}$	$\beta_{12} + \omega_{12}$	\dots	$\frac{\beta\gamma_{11}}{\mu}$	$\frac{\beta\gamma_{12}}{\mu}$	\dots
$\frac{\alpha\beta_{21}}{\mu}$	$\alpha\beta_{22} + \frac{N_2^{(2)} + C_2}{\mu}$	\dots	$\beta_{21} + \omega_{21}$	$\beta_{22} + \omega_{22} + \frac{N_2^{(2)} + B_2}{\mu}$	\dots	$\frac{\beta\gamma_{21}}{\mu}$	$\frac{\beta\gamma_{22}}{\mu}$	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$\frac{\alpha\gamma_{11}}{\mu}$	$\frac{\alpha\gamma_{12}}{\mu}$	\dots	$\frac{\beta\gamma_{11}}{\mu}$	$\frac{\beta\gamma_{12}}{\mu}$	\dots	$\gamma_{11} + \frac{D_1}{\mu}$	γ_{12}	\dots
$\frac{\alpha\gamma_{21}}{\mu}$	$\frac{\alpha\gamma_{22}}{\mu}$	\dots	$\frac{\beta\gamma_{21}}{\mu}$	$\frac{\beta\gamma_{22}}{\mu}$	\dots	γ_{21}	$\gamma_{22} + \frac{D_2}{\mu}$	\dots

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad \omega_{ij} = \omega_{ji}, \quad \alpha\beta_{ij} = \alpha\beta_{ji}, \quad \alpha\gamma_{ij} = \alpha\gamma_{ji}, \quad \beta\gamma_{ij} = \beta\gamma_{ji}.$$

Tok postępowania najlepiej objaśni przykład liczbowy podany w uzupełnieniu.

Dzięki zmniejszeniu długości wieszaków skrajnych może mieć miejsce większy wzrost siły krytycznej aniżeli wskutek sztywnego połączenia wieszaków z łukiem. Przy stosowaniu obliczenia na podstawie wzoru (4.8) i określaniu sztywności wieszaków o stałym momencie bezwładności na podstawie wieszaka najbardziej podatnego, tzn. środkowego, można zalecić mnożenie długości tego wieszaka przez współczynnik 0,85-0,9, zapewniający jeszcze pewien zapas bezpieczeństwa. Należy zwrócić uwagę na to, że postać wybożenia przy zmiennych długościach wieszaków znacznie odbiega od postaci wybożenia w przypadku jednakowych wieszaków (por. rys. 22 i 23).

6. Przypadek jednostronnego obciążenia mostu

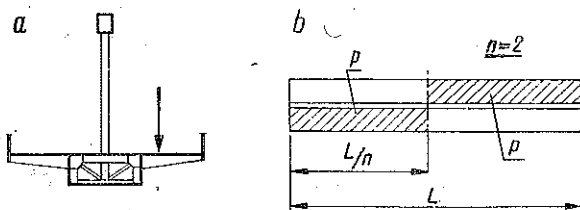
Przy obliczaniu ustroju jednodźwigarowego należy również rozpatrzyć przypadek jednostronnego obciążenia. Wprawdzie siła normalna w łuku jest w tym przypadku mniejsza niż przy pełnym obciążeniu użytkowym, to jednak dochodzi tu niekorzystny wpływ momentów skręcających, działających względem podłużnej osi mostu (rys. 10a).

Mamy tutaj do czynienia z zagadnieniem wytrzymałościowym. Konstrukcja powinna przy najniekorzystniejszym ustawieniu obciążenia posiadać wystarczający współczynnik bezpieczeństwa przed osiągnięciem granicy plastyczności we włókach skrajnych.

Podobnie jak w przypadku zwykłego pręta prostego ściskanego mimośrodowo zagadnienie wytrzymałościowe nabiera

cech zagadnienia stateczności, jeżeli rozpatrzyć zachowanie się elementu po uplastycznieniu części przekroju. Można wówczas określić obciążenie krytyczne — większe od obciążenia, przy którym we włóknach skrajnych osiągnięta została granica plastyczności. Dla pręta cienkościennego, który przy wybożeniu ulega wygięciu i skręceniu, zagadnienie to jest nader złożone.

Poniżej przeprowadzone będzie rozwiązanie wytrzymałościowe w oparciu o równania (3.9.1), (3.9.2) i (2.4.3) przy stałych parametrach K_1, \dots, K_6 . Najniekorzystniejsze obciążenie mnożymy przez współczynnik bezpieczeństwa (analogicznie do metody nośności granicznej należałoby zastosować różne mnożniki do ciężaru własnego i obciążenia użytkowego) i dla zwięk-



Rys. 10

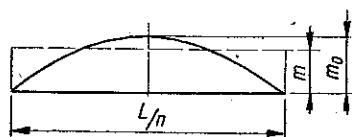
szego obciążenia sprawdzamy, czy nie została przekroczona granica plastyczności. Współczynnik, przy którym osiągnięta zostaje granica plastyczności, jest rzeczywistym współczynnikiem bezpieczeństwa.

Równania (3.9.1), (3.9.2) i (2.4.3) przedstawiają, jak wiadomo, warunki równowagi odkształconego elementu łuku lub belki. Nie zawierają one jedynie wyrazów wyrażających zewnętrzne obciążenie poprzeczne. Tym obciążeniem mogą być siły poziome i momenty skręcające, działające na łuk [odpowiednie wyrazy dojdą wówczas do równań (3.9.1) i (3.9.2)] oraz momenty skręcające, działające na belkę [odpowiedni wyraz należy uwzględnić w równaniu (2.4.3)].

Dla uproszczenia obliczeń można założyć, że obciążenia zewnętrzne zmieniają się według sinusoidy. Na przykład obciążenie belki momentami skręcającymi $m(z)$ i obciążenie łuku siłami poziomymi (parcie wiatru) można ogólnie przyjąć w postaci

$$(6.1) \quad m(z) = m_0 \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad w(z) = w_0 \sin \frac{n\pi z}{L}.$$

Obciążenie sinusoidalne zastępuje obciążenie równomiernie rozłożone. Przy określaniu m_0 w (6.1) można wyjść z warunku jednakowych maksymalnych odkształceń (kąta skręcenia) dla obu rozkładów obciążenia (rys. 11). Pomijając wpływ dodatkowych naprężeń normalnych mamy



Rys. 11

skąd

$$\frac{m(L/n)^2}{8 GJ_d} = \frac{m_0(L/n)^2}{\pi^2 GJ_d},$$

$$m_0 = \frac{\pi^2}{8} m.$$

Podobnie warunek jednakowych maksymalnych momentów daje dla obciążenia poziomego łuku zależność

$$w_0 = \frac{\pi^2}{8} w,$$

gdzie w podobnie jak m jest obciążeniem stałym na jednostkę długości. Wpływ obu obciążeń rozpatrzmy w dwóch etapach. Załóżmy najpierw, że łuk jest tak zamocowany, że niemożliwe jest jego przesunięcie i obrót. Na podstawie (2.4.3) przy $u = \varphi = 0$ otrzymamy równanie równowagi belki usztywniającej obciążonej momentem $m(z)$ (tutaj kąt obrotu oznaczono przez θ)

$$(6.2) \quad EJ_{\omega} \bar{\theta}^{IV} - GJ_d \bar{\theta}'' + \frac{K_6}{a} \bar{\theta} = m_0 \sin \frac{n\pi z}{L},$$

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że równanie (6.2) jest ściśle tylko dla pręta o przekroju otwartym, natomiast dla pręta o przekroju zamkniętym w naszym zagadnieniu może służyć jako wystarczająco dokładne przybliżenie. Ściśle

równanie skręcania pręta cienkościennego o przekroju zamkniętym ma postać (według U manskiego i Benscottera, por. [12] i [13]).

$$(a) \quad \frac{1}{\mu} E J_{\omega} \theta^{IV} - G J_{\bar{d}} \theta'' = m(z) - \frac{E J_{\omega}^{-}}{\mu G J_k} \frac{d^2 m(z)}{dz^2},$$

gdzie $\mu = 1 - J_{\bar{d}}/J_k$, przy czym $J_k = \oint h^2 dA$ jest tzw. *kierunkowym momentem bezwładności* (h jest odległością stycznej do konturu od środka ścinania).

W naszym zagadnieniu będziemy mieli

$$(b) \quad \frac{1}{\mu} E J_{\omega}^{-} \bar{\theta}^{IV} - G J_{\bar{d}} \bar{\theta}'' = m_0 \left(1 + \frac{E J_{\omega}^{-}}{\mu G J_k} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \sin \frac{n \pi z}{L} - \frac{K_6}{a} \left(\bar{\theta} - \frac{E J_{\omega}^{-}}{\mu G J_k} \bar{\theta}'' \right).$$

Po podstawieniu $\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 \sin n \pi z/L$ otrzymamy

$$(c) \quad \bar{\theta}_0 = \frac{m_0}{E S_n^*} \left(1 + \frac{E J_{\omega}^{-}}{\mu G J_k} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right),$$

gdzie

$$(d) \quad S_n^* = \frac{J_{\omega}^{-}}{\mu} \frac{n^4 \pi^4}{L^4} + J_{\bar{d}} \frac{G}{E} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{K_6}{E a} \left(1 + \frac{E J_{\omega}^{-}}{\mu G J_k} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right).$$

Drugi wyraz w nawiasie w (c) i (d) z reguły jest bardzo mały wobec jedności (w mianowniku występuje L^2) i może być pominięty. Współczynnik $\mu < 1$ wpływa na wielkość pierwszego wyrazu w (d) i oznacza po prostu zwiększenie wycinkowego momentu bezwładności. W rozpatrywanym zagadnieniu (dla przekroju zamkniętego), przy dużym L i małych n pierwszy wyraz w (d) jest dużo mniejszy od pozostałych. W (6.4) został on jednak zachowany dla przypadku przekroju otwartego.

W rozpatrywanym w niniejszej pracy przykładzie liczbowym jest $J_k = 3,07 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$, co przy $J_{\bar{d}} = 0,642 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$ daje $\mu = 1 - J_{\bar{d}}/J_k = 0,79$.

Przy $J_{\omega}^{-} = 2810 \cdot 10^6 \text{ cm}^6$, $L = 6355 \text{ cm}$ i $E/G = 2,6$ drugi wyraz w nawiasie w (d) wynosi

$$\frac{E J_{\omega}^{-}}{\mu G J_k} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = 0,74 \cdot 10^{-3} n^2$$

i jest bardzo mały wobec jedności; nawet dla $n = 3$ nie przekracza 1%.

Wpływ sztywności wycinkowej w stosunku do sztywności na czyste skręcanie we wspomnianym przykładzie wynosi

$$\frac{E J_{\omega}^{-}}{\mu G J_{\bar{d}}} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = 3,5 \cdot 10^{-3} n^2.$$

i jest również mały.

Podstawiając w (6.2)

$$\theta = \bar{\theta}_0 \sin \frac{n \pi z}{L}$$

otrzymuje się maksymalny kąt skręcania

$$(6.3) \quad \bar{\theta}_0 = \frac{m_0}{E S},$$

gdzie

$$(6.4) \quad S_n = J_{\omega}^{-} \frac{n^4 \pi^4}{L^4} + J_{\bar{d}} \frac{G}{E} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{K_6}{E a}$$

Obciążenie $m(z)$ wywołuje w miejscu zamocowania łuku reakcje poziome

$$(6.5) \quad \frac{K_3}{a} \bar{\theta} = \frac{K_3}{a} \frac{m_0}{ES_n} \sin \frac{n\pi z}{L}$$

i momenty

$$(6.6) \quad -\frac{K_5}{a} \bar{\theta} = -\frac{K_5}{a} \frac{m_0}{ES_n} \sin \frac{n\pi z}{L}$$

W drugim etapie wyobrażamy sobie, że łuk zostaje rozluźniony. Na skutek obciążeń (6.5) i (6.6) oraz parcia wiatru

$$(6.7) \quad w = w_0 \sin \frac{n\pi z}{L}$$

powstają odkształcenia u , φ i θ , przy czym to ostatnie sumuje się z odkształceniem θ z pierwszego etapu obciążenia.

Wielkość u , φ i θ określić można znów z równań (3.9.1), (3.9.2) i (2.4.3), przy czym w równaniu (3.9.1) należy po prawej stronie dopisać wyrażenia (6.5) i (6.7), natomiast w równaniu (3.9.2) wyrażenie (6.6). Równanie (2.4.3) pozostaje niezmienione.

Rozwiązaniem układu są znowu funkcje (4.1). Po wprowadzeniu oznaczeń (4.2), (4.4), (4.5) i (4.6) można otrzymany układ równań w podobny sposób jak w punkcie poprzednim sprowadzić do dwóch równań algebraicznych

$$(6.8) \quad \begin{cases} A_1(B-P) + A_2(P y_0 - r^2 a) = \left(\frac{K_3}{a} \frac{m_0}{ES} + w_0 \right) \frac{L^2}{n^2 \pi^2}, \\ A_1(P y_0 - r^2 a) + A_2 r^2 (C-P) = -\frac{K_5}{a} \frac{m_0}{ES} \frac{L^2}{n^2 \pi^2}. \end{cases}$$

Równania (6.8) w odróżnieniu od (4.7) są niejednorodne i określają jednoznacznie parametry A_1 i A_2 funkcji odkształceń u i φ według (4.1). Otrzymujemy

$$(6.9) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{\left(\frac{K_3}{a} \frac{m_0}{ES} + w_0 \right) (C-P) + \frac{K_5}{a} \frac{m_0}{ES} (P y_0 - r^2 a)}{r^2 (B-P)(C-P) - (P y_0 - r^2 a)^2} \frac{L^2}{n^2 \pi^2}, \\ A_2 = \frac{-\frac{K_5}{a} \frac{m_0}{ES} (P y_0 - r^2 a) - \left(\frac{K_3}{a} \frac{m_0}{ES} + w_0 \right) (C-P)}{r^2 (B-P)(C-P) - (P y_0 - r^2 a)^2} \frac{L^2}{n^2 \pi^2}. \end{cases}$$

Tym samym określone są również maksymalne krzywizny

$$(6.10) \quad u''_{max} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_1, \quad \varphi''_{max} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_2$$

oraz momenty M_y i bimomenty B_z :

$$(6.11) \quad M_y = -E J_y u'', \quad B_z = -E J_\omega \varphi''.$$

Naprężenia dodatkowe $\Delta\sigma$ ponad wartość $\sigma_N = P/A$ otrzymamy ze wzoru

$$(6.12) \quad \Delta\sigma = \frac{M_y}{J_y} x + \frac{B_z}{J_\omega} \omega,$$

gdzie x i ω jest odległością od osi symetrii względnie powierzchnią wy-cinkową rozpatrywanego punktu przekroju.

Po uwzględnieniu (6.11) i (6.10)

$$(6.13) \quad \Delta\sigma = \frac{n^2 \pi^2 E A_1}{L^2} x + \frac{n^2 \pi^2 E A_2}{L^2} \omega.$$

Ograniczając się jedynie do naprężeń normalnych od zginania ($A_2 = 0$) otrzymamy ostatecznie wielkość maksymalną naprężenia dodatkowego

$$(6.14) \quad \Delta\sigma = \frac{\left(\frac{K_3 m_0}{a S} + E w_0\right)(C - P) + \frac{K_3 m_0}{a S}(P y_0 - r^2 a)}{r^2(B - P)(C - P) - (P y_0 - r^2 a)^2} x_{max}.$$

Rozwiązanie przybliżone można otrzymać przy założeniu przegubowego połączenia wieszaka z łukiem i pominięciu skręcania łuku. Przyjmując w pierwszym z równań (6.8) $\varphi = 0$ ($A_2 = 0$) otrzymujemy

$$(6.15) \quad A_1(B - P) = \left(\frac{K_3 m_0}{a E S} + w_0\right) \frac{L^2}{n^2 \pi^2},$$

gdzie przez $\overline{K_3}$ oznaczono siłę poziomą w przegubie łączącym wieszak z łukiem dla stanu $\theta = 1$. Stąd

$$(6.16) \quad A_1 = \frac{\frac{\overline{K_3} m_0}{a E S} + w_0}{B - P} \frac{L^2}{n^2 \pi^2},$$

i według (6.13) przy $A_2 = 0$

$$(6.17) \quad \Delta\sigma = \frac{\frac{K_3 m_0}{a S} + E w_0}{B - P} x_{max}.$$

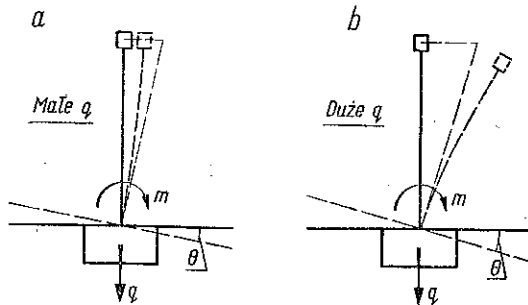
Wartość S określona jest przez (6.4), natomiast B przez (4.6), przy czym jednak wartość $K_u \equiv \overline{K_u}$ (dla przegubowego połączenia wieszaków z łukiem oznaczana przez K_u) określona jest odpowiednio przez

$$(6.18) \quad \overline{K_u} = \frac{\overline{K_3}^2}{R_n + \overline{K_6}} + \left(\frac{q a}{h}\right).$$

Dla pasa prostego należy w (4.6) przyjąć $R = \infty$, a w (6.18) odrzucić wyrażenia w nawiasach ².

Mimośrodowe obciążenie jezdni i jednocześnie działanie wiatru można uwzględnić tylko dla $n = 1$. Przy obciążeniu jezdni bardziej niekorzystny (jeżeli chodzi o naprężenia) może być przypadek obciążenia jednostronnego na przemian (rys. 10b), tzn. dla $n > 1$.

Należy również zwrócić uwagę na postać odkształcenia ustroju jednoźwigarowego przy obciążeniu mimośrodowym.



Rys. 12

Przy bardzo małej sile osiowej N łuk będzie przeciwwstawiać się przesunięciu poziomemu, do którego zmusza go za pośrednictwem wieszaków belka, skręcana obciążeniem jednostronnym. Kąt skręcenia θ belki połączonej z wieszakami będzie mniejszy aniżeli kąt skręcenia $[\theta]$, jaki powstałby przy skręcaniu samej belki, odłączonej od wieszaków (rys. 12a)

Jednakże już przy sile normalnej zbliżonej do eulerowskiej siły krytycznej $\pi^2 EJ/L^2$ (dla wybożenia według jednej półfali bez sprężystego oporu ze strony wieszaków) łuk będzie dążył do zwiększenia przesunięcia górnych końców wieszaków i zwiększenia kąta skręcenia belki. W tym przypadku $\theta > [\theta]$ (rys. 12b) i przesunięcie wierzchołka łuku będzie zatem większe zarówno od θh jak i od $[\theta]h$. Przesunięcie to należy oczywiście ograniczyć, np. od $1/200 h$ przy najniekorzystniejszym obciążeniu rzeczywistym.

7. Zagadnienia dynamiczne ustroju

W równaniach dynamiki poza siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi występują jeszcze siły bezwładności. Ażeby uzyskać możliwie przejrzyste rozwiązanie, celowym wydaje się rozpatryć jedynie ustrój uproszczony (pas prosty, wieszaki połączone z łukiem przegubowo, przekrój łuku bismetryczny). Wpływ sztywnego połączenia wieszaków z łukiem jak również wpływ zakrzywienia na wielkość statycznej siły krytycznej został już zbadany. Odpowiednie wnioski mogą być przeniesione również do zagadnień dynamicznych.

² Przedstawione rozwiązanie podobnie jak analogiczne rozwiązanie zagadnienia stateczności jest dokładne właśnie dla przypadku pasa prostego. Dla ustroju łukowego otrzymuje się wartości odkształceń większe od rzeczywistych.

Określmy najpierw okres drgań własnych ustroju, który dzięki przyjętym uproszczeniom posiada tylko swobodę przesunięcia u łuku i obrotu θ belki; masy wieszaków pomijamy lub dodajemy do mas pasa i belki.

Równania drgań zgięciowych i skrętnych dla prętów cienkościennych są znane, [14]. W naszym przypadku należy uwzględnić sprężyste oddziaływanie wieszaków, związane z przemieszczeniami u i θ , zarówno w równaniu drgań zgięciowych pasa jak i równaniu drgań skrętnych belki usztywniającej. Równania przybiorą postać

$$(7.1) \quad \begin{cases} EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + P \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\gamma}{g} J_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\bar{K}_1}{a} u - \frac{\bar{K}_3}{a} \theta = 0, \\ E\bar{J}_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - G\bar{J}_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma}{g} \bar{J}_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + m\bar{r}^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\bar{K}_3}{a} u + \frac{\bar{K}_6}{a} \theta = 0, \end{cases}$$

gdzie $u = u(z, t)$ i $\theta = \theta(z, t)$ są funkcjami z i czasu t , P jest siłą osiową w łuku, γ ciężarem właściwym pasa i belki, g przyspieszeniem ziemskim, m i \bar{m} masą pasa lub belki odniesioną do jednostki długości (należy do niej włączyć masy części konstrukcyjnych związanych, np. masę jezdni, i ewentualnie masę obciążenia użytkowego należy odpowiednio uwzględnić w masie belki), \bar{r} jest promieniem bezwładności belki. Parametry \bar{K}_1 , \bar{K}_3 i \bar{K}_6 oznaczają reakcje według rys. 6 dla przegubowego połączenia wieszaka z pasem.

Trzecie i czwarte wyrazy w równaniach (7.1) oznaczają siły bezwładności. Pierwsze z nich uwzględniają przesunięcia elementarnych mas w kierunku osi pręta; są one zazwyczaj małe w stosunku do drugich, w których uwzględnione jest przesunięcie poprzeczne względnie obrót elementarnych mas.

Dla pasa na obu końcach przegubowo podpartego oraz dla belki, której końce pozbawione są swobody obrotu, przyjmujemy

$$u = A_1 \sin \frac{n\pi z}{L} \sin \omega t, \quad \theta = A_2 \sin \frac{n\pi z}{L} \sin \omega t.$$

i z równań (7.1) otrzymujemy po przemnożeniu przez $L^2/n^2\pi^2$

$$(7.2) \quad \begin{cases} A_1 \left(P_{yn} + \frac{\bar{K}_1}{a} \frac{L^2}{n^2\pi^2} - P - \omega^2 a_n \right) - A_2 \frac{\bar{K}_3}{a} \frac{L^2}{n^2\pi^2} = 0, \\ -A_1 \frac{\bar{K}_3}{a} \frac{L^2}{n^2\pi^2} + A_2 \left(\bar{r}^2 P_{\theta n} + \frac{\bar{K}_6}{a} \frac{L^2}{n^2\pi^2} - \omega^2 \beta_n \right) = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(7.3) \quad a_n = \frac{\gamma}{g} J_y + m \frac{L^2}{n^2\pi^2}, \quad \beta_n = \frac{\gamma}{g} \bar{J}_\omega + \bar{m} \bar{r}^2 \frac{L^2}{n^2\pi^2},$$

zaś

$$(7.4) \quad P_{\theta n} = \frac{1}{\bar{r}^2} \left(E \bar{J}_\omega \frac{n^2\pi^2}{L^2} + G \bar{J}_d \right).$$

Dla $\theta = 0 (A_2 = 0)$ z pierwszego z równań (7.1) otrzymujemy częstotliwość kątową drgań własnych pasa przy całkowitym utwierdzeniu wieszaków u dołu:

$$(7.5) \quad \omega_u^2 = \frac{P_{yn} + \frac{\bar{K}_1}{a} \frac{L^2}{n^2 \pi^2} - P}{a_n}$$

Podobnie dla $u = 0 (A_1 = 0)$ z drugiego równania otrzymuje się częstotliwość kątową drgań własnych belki przy nieprzesuwanych górnych końcach wieszaków :

$$(7.6) \quad \omega_\theta^2 = \frac{\bar{r}^2 P_{\theta n} + \frac{\bar{K}_6}{a} \frac{L^2}{n^2 \pi^2}}{\beta_n}$$

Po podstawieniu (7.5) i (7.6) do (7.2) i przyrównaniu wyznacznika układu do zera otrzymuje się wzór na dwie częstotliwościątowe drgań własnych całego układu:

$$(7.7) \quad \omega^2 = \frac{\omega_u^2 + \omega_\theta^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_u^2 + \omega_\theta^2}{2}\right)^2 - \left(\omega_u^2 \omega_\theta^2 - \frac{\bar{K}_3^2}{a_n \beta_n a^2} \frac{L^4}{n^4 \pi^4}\right)}$$

Częstotliwość drgań skrętnych belki usztywniającej ω_θ z reguły jest znacznie większa od częstotliwości drgań zgięciowych pasa ω_u . Wartość ω w przybliżeniu można określić ze wzoru (7.5), jeżeli w nim zamiast \bar{K}_1 , przyjmuje się stałą K_u , uwzględniającą sprężyste zamocowanie wieszaków:

$$(7.8) \quad \omega^2 \approx \frac{P_{yn} + \frac{K_u}{a} \frac{L^2}{n^2 \pi^2} - P}{a_n}$$

Częstotliwość drgań ustroju jest tym mniejsza, im bardziej wiotkie są wieszaki i im większa jest siła P w łuku. W przypadku, kiedy drgania wymuszające mają częstotliwość zbliżoną do częstotliwości drgań własnych ustroju, należy liczyć się z dużymi amplitudami, jeżeli źródło zakłócające nie działa chwilowo. Istotne znaczenie posiadają tutaj czynniki tłumiące, które praktycznie można określić na drodze doświadczalnej.

Należy również wziąć pod uwagę możliwość wystąpienia w łuku oprócz siły statycznej P_0 pewnej siły dynamicznej zmieniającej się według zależności $P(t) = P_{dyn} \cos \delta t$. Równanie drgań zgięciowych dla pręta bisymetrycznego ma postać, [15],

$$(7.9) \quad E J_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (P_0 + P_{dyn} \cos \delta t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Ażeby uprościć zagadnienie rozpatrzmy jedynie drgania zgięciowe pasa, uwzględniając sprężysty opór wieszaków i połączonej z nimi belki usztywniającej za pomocą stałej \bar{K}_u .

Równanie (7.9) przybierze postać

$$(7.10) \quad EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (P_0 + P_{dyn} \cos \delta t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{K_u}{a} u = 0.$$

Rozwiązanie równań (7.9) i (7.10)

$$(7.11) \quad u(z, t) = T_n(t) \sin \frac{n \pi z}{L}$$

charakteryzuje się zmienną w czasie amplitudą T_n . Nieograniczony wzrost amplitudy T_n oznacza niestateczność pręta. Z (7.10) po uwzględnieniu (7.11) otrzymuje się równanie różniczkowe³

$$(7.12) \quad \frac{d^2 T_n}{dt^2} + \omega^2 \left(1 - \frac{P_{dyn}/B_n}{1 - P_0/B_n} \cos \delta t \right) T_n = 0,$$

gdzie

$$(7.13) \quad B_n = n^2 \frac{\pi^2 EJ_y}{L^2} + \frac{K_u}{a} \frac{L^2}{n^2 \pi^2}$$

oznacza siłę krytyczną wyboczenia pasa jako pręta w osrodku sprężystym, zaś

$$(7.14) \quad \omega = \frac{n \pi}{L} \sqrt{\frac{B_n - P_0}{m}}$$

jest częstotliwością kątową drgań własnych pasa ściskanego stałą siłą P_0 .

Rozwiązanie w przypadku, kiedy nie ma sprężystego osrodka i występuje jedynie podłużna siła dynamiczna $P_{dyn} \cos \delta t$ można znaleźć w literaturze, [15]. Rozwiązanie to może być wykorzystane również w rozpatrywanym przykładzie, przy czym siłę P_{yn} w przypadku zwykłego pręta odpowiada w naszym zagadnieniu siła B_n [por. (7.13)].

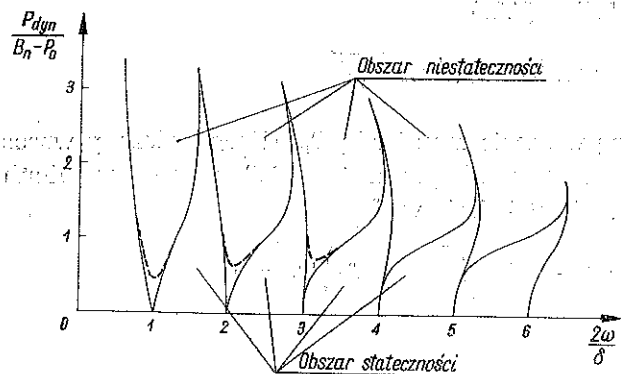
Jak wynika z tego rozwiązania, przypadki niestateczne grupują się wokół stosunków częstotliwości własnej ω do częstotliwości wzbudzającej δ wynoszących kolejno

$$\frac{\omega}{\delta} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \frac{k}{2}.$$

W pobliżu tych wartości amplitudy T_n rosną do nieskończoności i zachodzi dynamiczna utrata stateczności. Na rysunku 13, zaczerpniętym z pracy [15], przedstawione są strefy stateczności i niestateczności w zależności od stosunków $2\omega/\delta$ i $P_{dyn}/(B_n - P_0)$. Dla pręta idealnego (bez tłumienia)

³ Obok siły dynamicznej P_{dyn} wywołanej symetrycznym obciążeniem mostu może wystąpić pewien pulsujący moment skręcający działający na belkę. Moment ten wywoła dodatkowo siłę poziomą na górnym końcu wieszaka. Równanie (7.12) będzie wówczas względem T_n niejednorodne.

utrata stateczności możliwa jest dla dowolnie małej siły P_{dyn} (por. linie ciągle na rys. 13). Natomiast dla pręta rzeczywistego, w którym zachodzą straty energii, utrata stateczności może wystąpić tylko powyżej pewnej minimalnej wartości współczynnika $P_{dyn} / (B_n - P_0)$ (por. linie kreskowane od-



Rys. 13

odnoszące się do pewnej wartości tłumienia wewnętrznego, które było przyjęte jako wprost proporcjonalne do prędkości odkształceń). Duży wpływ mają opory nieliniowe, które sprawiają, że amplitudy drgań wywołanych siłą dynamiczną są ograniczone również w obszarze niestatecznym.

Ogólnie należy zauważyć, że ustrój jednodźwigarowy dzięki dużej sztywności skrętnej zachowuje się podobnie jak zwykły ustrój dwudźwigarowy górą otwarty. Można określić sztywność skrętną belki usztywniającej równoważną sztywności zginania poprzecznicy w ustroju dwudźwigarowym przyrównując maksymalne kąty skręcenia przy obciążeniu momentami rozłożonymi na długości mostu według jednej półfali sinusoidy (por. rys. 11):

$$\frac{m a b}{2 E J_b} = \frac{m L^2}{\pi^2 G J_d}$$

czyli

$$J_d = 0,53 \frac{L^2}{a b} J_b,$$

gdzie J_b jest momentem bezwładności poprzecznicy, b jej rozpiętością, zaś a odległością między poprzecznicy.

UZUPEŁNIENIE

8. Rozwiązanie dla mostu dwudźwigarowego otwartego

Wzór (4.8) wraz z (4.2), (4.4) i (4.6) można stosować również do wyznaczenia siły krytycznej dla pasa górnego mostu otwartego (rys. 14a). Rozwiązanie dwóch równań różniczkowych względem u i φ prowadzi do równań algebraicznych (4.8). W tych ostatnich K_u , $K_{u\varphi}$ i K_φ przedstawiają siły i momenty, którymi wieszak oddziałuje na przekrój łuku wskutek tego, że $u = 1$ i $\varphi = 1$; należy tylko za R podstawić sztywność poprzecznicy, przy symetrycznym zginaniu

$$R = K = \frac{2 E J_b}{b}$$

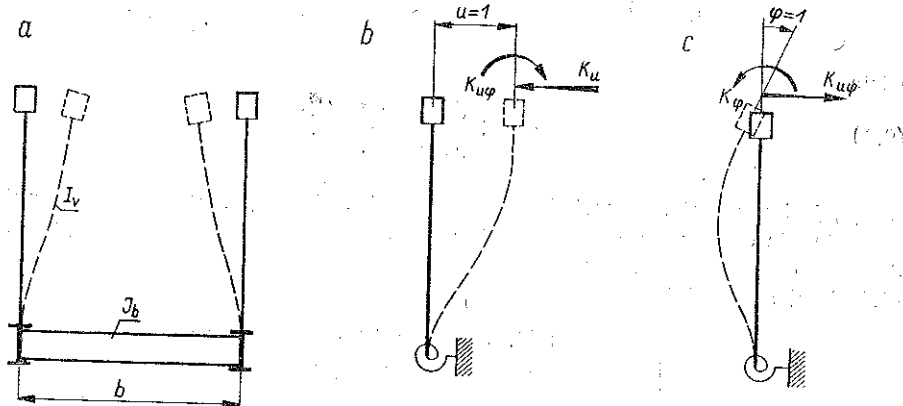
Dla dowodu rozpatrzmy np. przesunięcie $u=1$ (rys. 14b). Jeżeli pręt jest u dołu zamocowany, powstaje tam moment K_3 (rys. 5a). Kasując z kolei zamocowanie przekazujemy na pręt z powrotem moment $-K_3$, $K_6 / (K + K_6)$ (por. rys. 5c). Wywoła on dodatkową reakcję poziomą u góry

$$-K_3 \frac{K_6}{K + K_6} \frac{K_3}{K_6} = -\frac{K_3^2}{K + K_6}$$

A zatem całkowita reakcja wynosi podobnie jak K_u według (4.4)

$$K_1 = \frac{K_3^2}{K + K_6}$$

Analogicznie można udowodnić słuszność pozostałych zależności.



Rys. 14

9. Wyznaczenie stałych K_u , $K_{u\phi}$ i K_ϕ we wzorze (4.4) przy stałym momencie bezwładności wieszaka J_v

9.1. Z wielkości przedstawionych na rys. 5 wyznaczyć należy K_1 , K_2 i K_4 , zachodzi bowiem $K_3 = K_2$, $K_5 = K_1/2$ i $K_6 = K_4$. Otrzymujemy

$$K_1 = \frac{12 E J_v}{h^3}, \quad K_2 = \frac{6 E J_v}{h^3}, \quad K_4 = \frac{4 E J_v}{h}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$(9.1) \quad \varepsilon = R_n \frac{h}{2 E J_v} = \frac{n^2 \pi^2 a h}{2 E J_v L^2} \left(E J_v \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + G J_d \right)$$

mamy

$$(9.2) \quad K_u = \frac{6 E J_v}{h^3} \frac{1+2\varepsilon}{2+\varepsilon}, \quad K_{u\phi} = \frac{6 E J_v}{h^2} \frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}, \quad K_\phi = \frac{6 E J_v}{h} \frac{1+2/3\varepsilon}{2+\varepsilon}$$

Dla mostu dwudźwigarowego mamy $R_n \equiv K$ i stąd $\varepsilon = J_b h / J_v b$.

9.2. Przy wyznaczaniu stałych sprężystych K_1, \dots, K_6 (dla stanów przedstawionych na rys. 5) łatwo można również uwzględnić przesunięcie poziome dolnego końca wieszaka mając to na uwadze, że przesunięcia poziome belki usztywniającej podobnie jak obroty jej przekrojów i przemieszczenia łuku przebiegają na długości mostu według n półfal sinusoidy (w schemacie na rys. 5 należy na dolnym końcu wieszaka przy pełnym utwierdzeniu przeciw obrotowi założyć odpowiednio sprężyste podparcie):

$$(9.3) \quad \begin{cases} K_1 = \frac{6 E J_v}{h^3} \frac{2}{1+4\kappa}, & K_4 = \frac{6 E J_v}{h} \frac{2(1+\kappa)}{3(1+4\kappa)}, \\ K_2 = \frac{6 E J_v}{h^2} \frac{2}{1+4\kappa}, & K_5 = \frac{6 E J_v}{h} \frac{1-2\kappa}{3(1+4\kappa)}, \\ K_3 = K_2 & K_6 = \frac{6 E J_v}{h^2} \frac{2(1+\kappa)}{3(1+4\kappa)}, \end{cases}$$

gdzie

$$(9.4) \quad \kappa = 3 \frac{J_v}{J_y} \frac{L^4}{n^4 \pi^4 a h^3},$$

zaś J_y jest momentem bezwładności belki usztywniającej względem osi symetrii y .

Podobnie otrzymamy (w schemacie na rys. 14 b, c należy poza sprężystym utwierdzeniem dolnego końca wieszaka założyć jeszcze sprężyste podparcie o odpowiedniej stałej sprężystej)

$$(9.5) \quad \begin{cases} K_u = \frac{6 E J_v}{h^3} \frac{1+2\varepsilon}{2+\varepsilon+2\kappa(1+2\varepsilon)} + \frac{q a}{h}, \\ K_{u\varphi} = \frac{6 E J_v}{h^2} \frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon+2\kappa(1+2\varepsilon)}, \\ K_\varphi = \frac{6 E J_v}{h} \frac{1+\frac{2}{3}\varepsilon(1+\kappa)}{2+\varepsilon+2\kappa(1+2\varepsilon)}, \end{cases}$$

gdzie ε określone jest wzorem (9.1). Dla $\kappa = 0$ otrzymuje się wzory (9.2).

Pozioma składowa siły w wieszaku zwiększa wygięcie belki usztywniającej, związane z przesunięciem u łuku. Zwiększa się również wartość κ w stosunku $(q a/h) : \bar{K}_u$. Wpływ ten można tu pominąć.

9.3. We wzorach (9.5) łatwo jest również uwzględnić wpływ siły rozciągającej w dźwigarze usztywniającym, skoro się zważy, że siła ta zarówno zwiększa sztywność skręcania jak i zmniejsza podatność belki przy zginaniu. Zamiast ε i κ należy odpowiednio przyjąć

$$(9.6) \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon(1+\eta_1), \quad \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{1+\eta_2},$$

gdzie [por. punkt 4.1]

$$(9.7) \quad \eta_1 = \frac{\bar{P} \bar{r}^2}{G \bar{J}_d + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} E \bar{J}_\omega}, \quad \eta_2 = \frac{\bar{P} L^2}{n^2 \pi^2 E \bar{J}_y}.$$

(Siłę krytyczną i odpowiednią siłę rozciągającą \bar{P} w belce należy obliczyć metodą prób). Wpływ ten w mostach nie ma znaczenia. Uwzględnienie jego pozwoli natomiast na wyznaczenie obciążenia krytycznego kratownicy o pasach równoległych (niestężonej w przeszle), w której sztywności obu pasów są wielkościami tego samego rzędu.

Przy zmiennym momencie bezwładności wieszaka parametry K_1, \dots, K_6 oraz $K_u, K_{u\varphi}$ i K_φ najłatwiej będzie wyznaczyć metodą sił, przyjmując dla każdego z przedstawionych na rys. 5 i rys. 14 odkształcenia po dwie niewiadome.

10. Przybliżone obliczenie sztywności skrętnej pręta

10.1. Pręt o przekroju otwartym stężony wykratowaniem. Wykratowanie dolne przekształca przekrój praktycznie w przekrój zamknięty. Sztywność tego przekroju można scharakteryzować wielkościami J_ω^- i J_d^- jak dla pełnościennego przekroju zamkniętego przy wprowadzaniu pewnej grubości zastępczej t .

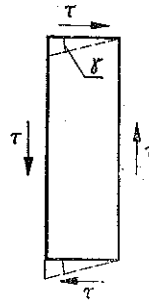
Na obwodzie płyty wyciętej z przekroju zamkniętego (rys. 15) działają naprężenia styczne τ . Te same naprężenia działające na kratownicę wywołują odkształcenia krzyżulców (rys. 16). Należy wyznaczyć odkształcenie kątowe odpowiadające kątom odkształcenia płyty

$$\gamma = \frac{\tau}{Gt}$$

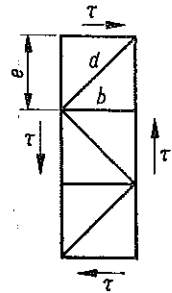
Z porównania obu odkształceń otrzymujemy

$$(10.1) \quad t_{zast} = \frac{E}{G} \frac{beA_d}{d^3},$$

gdzie A_d jest polem przekroju krzyżulca.



Rys. 15



Rys. 16

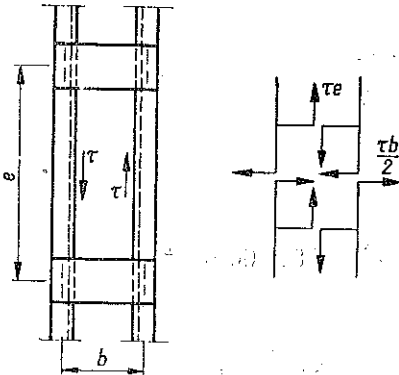
10.2. Przekrój wzmocniony przewiązkami. W przewiązkach działa siła tnąca τe , w środku pasa siła $\tau b/2$ (rys. 17). Uwzględniając wygięcie pasów i przewiązek otrzymujemy ostatecznie

$$(10.2) \quad t_{zast} = \frac{24 E/G}{be(b/J_b + e/J_e)},$$

gdzie J_e jest momentem bezwładności pasa, zaś J_b , momentem bezwładności przewiązki.

Przy określaniu J_e należy poza przekrojem półki uwzględnić również współpracującą część pionowych ścianek. Jest ona tym większa, im większy jest rozstaw przewiązek. W przekrojach nie posiadających dolnych półek należy dla określenia J_e rozpatrzeć pasmo płytowe, obciążone momentami skręcającymi $\tau eb/2$ w odstępach e . Po wyznaczeniu t_{zast} wartości J_ω^-, J_d^- i y_0 wyznacza się

według teorii prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym. W rozpatrywanym zagadnieniu J_ω^- można pominąć.



Rys. 17

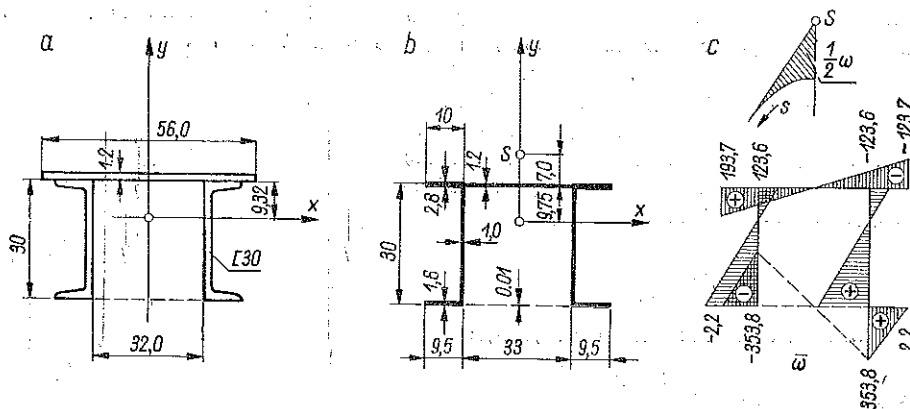
11. Przykład liczbowy obliczenia stateczności na podstawie p. 3 i 4. Dyskusja wyników

Rozpatrzmy schemat ustroju nośnego według rys. 1. Rozpiętość $l = 62,0$ m, $h = 6,0$ m. Przekrój łuku pokazany jest na rys. 18, przekrój belki usztywniającej na rys. 19.

11.1. Charakterystyki przekrojów. Dla łuku (rys. 18a) mamy $A = 184,8$ cm², $J_x = 26\,460$ cm⁴, $J_y = 59\,640$ cm⁴. Przekrój stężony przewiązkami co 1,55 m. Grubość zastępcza ścianki dolnej według (10.2), przy $J_e = 124$ cm⁴, wynosi

$$t_{zast} = 24 \cdot 2,6 \frac{124}{33,0 \cdot 155^2} = 0,00975 \approx 0,01 \text{ cm.}$$

(Wpływ odkształcenia przewiązek pominięto).



Rys. 18

Dla wyznaczenia $J_{\bar{\omega}}$ i $J_{\bar{a}}$ zastąpiono przekrój rzeczywisty przekrojem uproszczonym (rys. 18b). Według teorii prętów cienkościennych wyznaczono wykres tzw. powierzchni wycinkowych (rys. 18c)

$$\bar{\omega} = \omega - \frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} \int_0^s \frac{ds}{t},$$

spełniających warunek $\oint \bar{\omega} x dA = 0$ oraz

$$y_0 = 16,75 \text{ cm, } J_{\bar{\omega}} = \int \bar{\omega}^2 dA = 4\,840\,000 \text{ cm}^6.$$

Według (2.3) mamy

$$J_{\bar{a}} = \frac{4(33 \cdot 30)^2}{2 \frac{30}{1,0} + \frac{33}{1,2} + \frac{33}{0,01}} = 1155 \text{ cm}^4.$$

(Dla przekroju otwartego odpowiednia wartość J_d wynosiłaby tylko 107 cm⁴).

Po wprowadzeniu wartości y_p , obliczonej dla przekroju uproszczonego, mamy

$$J_p = 59\,640 + 26\,460 + 184,8 \cdot 16,75^2 = 138\,000 \text{ cm}^4,$$

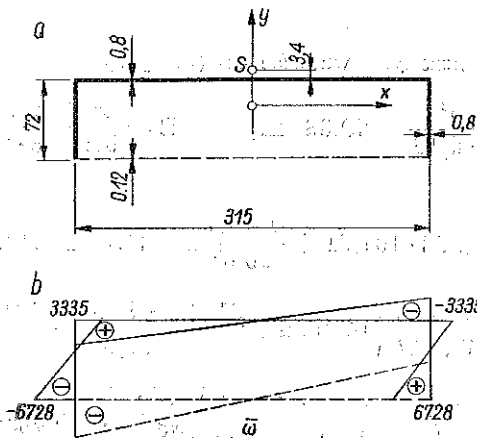
$$r^2 = \frac{138\,000}{184,8} = 747 \text{ cm}^2, \quad \rho^2 = \frac{26\,460 + 59\,640}{184,8} = 466 \text{ cm}^2.$$

Przekrój belki usztywniającej (rys. 19) jest usztywniony wykratowaniem (por. schemat na rys. 16). Przy $A_k = 38,2 \text{ cm}^2$, $b = 3,15 \text{ m}$ i $e = 1/2 \cdot 5,16 \text{ m}$ otrzymujemy się z (10.1)

$$t_{zast.} = 2,6 \frac{315 \cdot 258 \cdot 38,2}{408^3} = 0,119 \approx 0,12 \text{ cm},$$

a następnie

$$J_{\bar{\omega}} = 2810 \cdot 10^6 \text{ cm}^6, \quad J_{\bar{a}} = 642\,000 \text{ cm}^4.$$



Rys. 19

11.2. Sztywności zastępcze Przyjęto $h = 6,0 \text{ m}$, $a = 5,16 \text{ m}$. Dla wieszaka $J_p = 10\,870 \text{ cm}^4$. Długość łuku przy rozpiętości $l = 62,0 \text{ m}$ wynosi

$$L = 62,0 \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{6,0}{62,0} \right)^2 \right] = 63,55 \text{ m}.$$

Obliczenie siły krytycznej należy przeprowadzić dla kilku n . Z obliczeń przybliżonych wynika, że minimalna P zachodzi przy $n = 3$. Według (9.1) mamy

$$\varepsilon = \frac{3^2 \cdot 3,14^2 \cdot 5,16 \cdot 6,0}{2 \cdot 10,87 \cdot 10^{-3} \cdot 63,55^2} \left(2,810 \cdot 10^{-3} \frac{3^2 \cdot 3,14^2}{63,55^2} + \frac{6,42 \cdot 10^{-3}}{2,6} \right) = 3,123 (0,062 + 2,470) = 7,906.$$

(Wpływ sztywności wycinkowej jest, jak widać, bardzo mały).

Według (9.2) przy pominięciu wpływu poziomej składowej siły w wieszaku jest

$$K_u = \frac{6 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 10,87 \cdot 10^{-5}}{6,0^3} \frac{1 + 2 \cdot 7,906}{2 + 7,906} = 63,41 \cdot 1,6971 = 107,61 \text{ t/m,}$$

$$K_{u\varphi} = \frac{6 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 10,87 \cdot 10^{-5}}{6,0^2} \frac{1 + 7,906}{9,906} = 342,02 \text{ t,}$$

$$K_\varphi = \frac{6 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 10,87 \cdot 10^{-5}}{6,0} \frac{1 + \frac{2}{3} 7,906}{9,906} = 1445,04 \text{ tm,}$$

11.3. Wyznaczenie B , C i P . Według (4.2)

$$P_{yn} = \frac{9 \cdot 3,14^2 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 5,964 \cdot 10^{-4}}{63,55^2} = 275,1 \text{ t,}$$

$$P_{\varphi n} = \frac{1}{0,0747} \left(\frac{9 \cdot 3,14^2 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 4,84 \cdot 10^{-6}}{63,55^2} + 8,1 \cdot 10^6 \cdot 0,1155 \cdot 10^{-4} \right) = 1282,2 \text{ t.}$$

Po podstawieniu obliczonych wartości do (4.6) przy

$$\frac{L^2}{\pi^2 a} = \frac{63,55^2}{3,14^2 \cdot 5,16} = 79,382 \text{ m,} \quad R = \frac{l^2}{8h} = \frac{62,0^2}{8 \cdot 6,0} = 80,0 \text{ m}$$

znajdziemy

$$B = 275,1 + \frac{1}{9} 79,382 \cdot 107,61 + \frac{0,0747}{80,0^2} 1282,2 = 1224,2 \text{ t,}$$

$$C = 1282,2 + \frac{1}{9} \frac{79,382}{0,0747} \left(1445,04 + \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 5,964 \cdot 10^{-4}}{80,0^2} 5,16 \right) = 173\,097 \text{ t,}$$

$$\alpha = \frac{1}{9} 79,382 \frac{342,02}{0,0747} + \frac{1}{80,0} \left(\frac{21 \cdot 10^6 \cdot 5,964 \cdot 10^{-4}}{0,0747} + 1282,2 \right) = 42\,496 \text{ t/m,}$$

$$-2 y_0 \alpha = -2 \cdot 0,1675 \cdot 42\,496 = -14\,236 \text{ t}$$

i ostatecznie przy $r^2/e^2 = 0,0747/0,0466 = 1,603$ i $e^2/r^2 = 0,62382$

$$P = 1,603 \left[\frac{1}{2} (1224,2 + 173\,097 - 14236) - \sqrt{\frac{1}{4} 160\,085^2 - 0,62382 \cdot 1224,2 \cdot 173\,097 + 0,0466 \cdot 42\,496^2} \right] = 1,603 (80\,042,5 - 79\,741,8) = 482 \text{ t.}$$

Dla porównania obliczymy P za pomocą przybliżonego wzoru (4.8.1):

$$P = \frac{1224,2 \cdot 173\,097 - 0,0747 \cdot 42\,496^2}{1224,2 + 173\,097 - 14236} = \frac{212,0 \cdot 10^6 - 134,5 \cdot 10^6}{0,1601 \cdot 10^6} = 482 \text{ t.}$$

Odpowiednia smukłość zastępcza wynosi

$$\lambda = \pi \sqrt{2,1 \cdot 10^6 \cdot 184,8 / 482\,000} = 89,5.$$

A zatem wyboczenie zachodzi w obszarze plastycznym i przy odpowiednim stosunku modułu wyboczenia plastycznego E^* do modułu sprężystości E , tutaj $E^*/E = 0,84$, rzeczywista wartość siły krytycznej wynosi $P^* = 0,84 \cdot 482 = 405$ t.

Przyjmując, że obliczona siła P^* jest siłą normalną w węzłowie łuku, czyli $P^* = H^*/\cos \psi_0$, otrzymujemy przy $q = 8 H^* h/l^2$ dodatkowy wyraz we wzorze na sztywność K_u

$$\frac{qa}{h} = \frac{8 P^* a}{l^2} \cos \psi_0 = \frac{8 \cdot 405 \cdot 5,16}{62,0^2} 0,935 = 4,07 \text{ t/m.}$$

Przeprowadzając obliczenie dla nowego $K_u = 107,61 + 4,07 = 111,68$ t/m otrzymujemy $P = 521$ t, $\lambda = 0,86$.

11.4. Obliczenie przybliżone. Dla przegubowego połączenia wieszaków z łukiem i przy przyjęciu $R = \infty$ i $\varphi = 0$ (pręt prosty, przekrój nie doznaje skręcenia) otrzymuje się z pierwszego z równań (4.7) wobec $A_2 = 0$

$$(11.1) \quad P = P_{yn} + \frac{L^3}{n^2 \pi^2 a} \bar{K}_u,$$

gdzie sztywność zastępcza \bar{K}_u dla stałego momentu bezwładności J_v wieszaka określona jest przez wzór

$$(11.2) \quad \bar{K}_u = \frac{3 E J_v}{h^3} \frac{1}{1 + \frac{3}{2 \varepsilon}} = \frac{6 E J_v}{h^3} \frac{\varepsilon}{3 + 2 \varepsilon}.$$

Dla $n = 3$ oraz $\bar{h} = 6,0$ — $y_0 = 5,832$ m (zakłada się, że położenie osi łuku, tzn. miejsce geometryczne środków ciężkości, nie ulega zmianie) otrzymujemy

$$\varepsilon = 7,906 \frac{5,832}{6,0} = 7,685,$$

$$\bar{K}_u = \frac{6 \cdot 21 \cdot 10^8 \cdot 10,87 \cdot 10^{-6}}{5,832^3} \frac{7,685}{3 + 2 \cdot 7,685} = 69,0 \cdot 0,418 = 28,8 \text{ t/m}$$

$$P = 275,1 + \frac{1}{9} 79,38 \cdot 28,8 = 529 \text{ t.}$$

Przy założeniu niepodatnego utwierdzenia wieszaków w belce usztywniającej ($\varepsilon = \infty$) otrzymamy

$$\bar{K}_u = 69,0 \cdot 0,50 = 34,5 \text{ t/m,}$$

$$P = 275,1 + \frac{1}{9} 79,38 \cdot 34,5 = 580 \text{ t.}$$

11.5. Jeżeli natomiast przyjmiemy, że wieszaki są niepodatne ($J_v = \infty$) i uwzględnimy jedynie skręcenie belki, stała sprężysta dla $n = 3$ wyniesie

$$\bar{K}_u = G \bar{J}_d \frac{n^2 \pi^2 a}{h^3 L^2} \left(1 + \frac{E \bar{J}_\omega}{G \bar{J}_d} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) = 171,5 (1 + 0,025) = 176 \text{ t/m,}$$

natomiast siła krytyczna

$$P = P_{yn} + \frac{G \bar{J}_d}{h^3} \left(1 + \frac{E \bar{J}_\omega}{G \bar{J}_d} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) = 275,1 + 1510 \cdot 1,025 = 1805 \text{ t.}$$

Jak widać, przy wyboczeniu utworzonym z trzech półfal na podatność sprężystego «podłoża» składa się przede wszystkim odkształcalność wieszaków. Wpływ podatności skrętnej belki jest mniejszy. Jak wynika ze wzoru (9.1), wpływ podatności skrętnej w stosunku do podatności wieszaków określa współczynnik

$$\bar{\kappa} = \frac{3}{2\varepsilon} \approx \frac{3EJ_v L^2}{n^2 \pi^2 ah \left(GJ_d + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} EJ_o \right)} = 0,195.$$

Jednakże przekrój zamknięty jest tutaj nieodzowny, bowiem sztywność skrętna belki o przekroju otwartym jest daleko mniejsza aniżeli w przypadku przekroju zamkniętego i siła krytyczna łatwo mogłaby zmaleć do wartości P_{yn} dla $n = 1$.

11.6. W tablicy 1 zestawione są *wyniki obliczeń* dla ustroju uproszczonego (przegubowe połączenie wieszaków z łukiem) oraz obliczeń dokładniejszych (sztywne połączenie wieszaków z łukiem): (a) dla pasa prostego, (b) dla pasa zakrzywionego, (c) z uwzględnieniem poziomej składowej siły w wieszaku oraz (d) z uwzględnieniem poziomego wygięcia belki.

Z porównania dwóch pierwszych wyników dla $n = 3$ wynika, że podatność skrętna belki zmniejsza siłę krytyczną o 8,8%. Uwzględnienie sztywnego połączenia wieszaków z łukiem oznacza w tym przykładzie zwiększenie siły krytycznej tylko o 5,3%.

Z kolei uwzględnienie zakrzywienia daje zmniejszenie siły krytycznej o 13,5%, które częściowo zostaje zredukowane przez poziome składowe siły w wieszakach (8%). W rozpatrywanym przypadku mostu charakteryzującego się bardzo małą szerokością wyznaczoną również wpływ poziomego wygięcia belki usztywniającej, wyrażający się zmniejszeniem siły P o zaledwie 0,4%.

Interesujące jest również stwierdzenie, że dla przekroju odwróconego (przewiązkami do góry) obliczenie układu posiadającego sztywne połączenie wieszaków z łukiem daje wartości mniejsze aniżeli dla połączenia przegubowego, dla którego w obu przypadkach umieszczenia przekroju (przy jednakowym $h - y_0$) otrzymujemy ten sam wynik. Należy zauważyć, że w rozpatrywanym przykładzie stężenie łuku przewiązkami jest stosunkowo słabe.

11.7. Jeżeli dany przekrój łuku zastąpimy przekrojem bisymetrycznym o tej samej powierzchni, zamkniętym od dołu na całej długości (można sobie wyobrazić, że u góry i u dołu przekroju dano nakładki 560·6 zamiast jednej nakładki 560·12 u góry), otrzymamy przy zwiększonej sztywności skrętnej $J_d = 23\ 050\text{ cm}^4$ siłę $P = 622\text{ t}$ wobec $P = 529\text{ t}$ dla połączenia przegubowego, czyli o 17,5% więcej. Zauważmy, że dla pełnego skrepowania obrotu łuku siła krytyczna wynosiłaby tutaj $P = B$, czyli przy $B = 1300\text{ t}$ prawie 2,5 raza więcej niż dla połączenia przegubowego. Jednak w realnej konstrukcji nośnej nawet sztywność skrętna przekroju zamkniętego w stosunku do sztywności zginania wieszaków z reguły będzie za mała, ażeby siła krytyczna P mogła się zbliżyć do wartości B . Wytlumaczenie znaleźć można również w postaci wyboczenia. Przekrój pasa doznaje tylko nie wiele mniejszego skręcenia aniżeli przekrój o zerowej sztywności skrętnej. Oś obrotu leży poniżej środka ciężkości (przekrój bisymetryczny) w odległości

$$y_{obr} = \frac{r^2 a}{B - P} = \frac{0,0495 \cdot 64\ 332}{1300 - 622} = 4,70\text{ m}.$$

Dla $P = B$ wypada $y_{obr} = \infty$.

Tablica 2

Układ statyczny			Przekrój normalny			odwrócony n = 3	
			n = 2	n = 3	n = 4		
Przegubowe	Pas łukowy	Belka całkowicie niepodatna Z uwzględnieniem skręcenia belki	Bez uwzględnienia skręcenia pasa	580*		580*	
			Z uwzględnieniem skręcenia pasa	(596)*	529*	(644)*	529*
			i. w.		557		512**
			+wpływ sił normaln. w wieszakach		482		443**
			i.w. + wygięcie belki		521		478**
			519,5				

* Obliczono przy $\bar{h}=6,0-y_0=5,832$ m (\bar{h} jest wysokością mierzoną do środka ciężkości)
 ** „ „ „ $h=6,0-2y_0=5,665$ m

11.8. Stabilizujące działanie poziomej składowej sił w wieszakach uwydatnia się szczególnie w ustroju o wiotkich wieszakach (np. z lin stalowych). W rozpatrywanym przykładzie minimalna siła zachodzi przy $n=1$ i wynosi 75 t wobec $[P_y]_{n=1} = 30,6$ t.

12. Przykład obliczenia stateczności przy uwzględnieniu zmiennej długości wieszaków

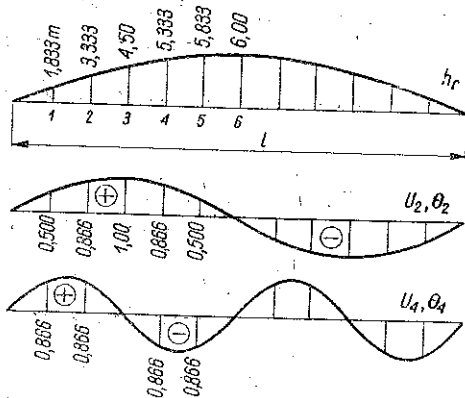
Most jednodźwigarowy o wymiarach podanych w przykładzie poprzednim oraz $h = h_0 = 6,0$ m. Obliczenie przybliżone dla $\varphi = 0$ i $Ku = \text{const}$ daje dla $n = 3$ oraz $\bar{h} = 6,0$ m: $P_0 = 510$ t. Wyznaczyć należy współczynnik μ dla siły krytycznej zwiększonej o 50%, $P = 1,5 \cdot 510 = 765$ t.

12.1. Wskutek zwiększenia sztywności «podoła» należy liczyć się z większą ilością półfal wybočenja aniżeli w przypadku $K = \text{const}$. Przyjęto antysymetryczną postać wybočenja:

$$u = a_2 \sin \frac{2\pi s}{L} + a_4 \sin \frac{4\pi s}{L}$$

$$\theta = c_2 \sin \frac{2\pi z}{L} + c_4 \sin \frac{4\pi z}{L}$$

Rzędne U_i, θ_i ($i=2,4$) oraz wysokości wieszaków podane są na rys. 20. Sztywności $K_r, K_r h_r$ i $K_r h_r^2$ podaje poniższa tablica, przy czym $K_0 = 3EJ_{\theta}/h^3 = 31,705$ t/m.



Rys. 20

Tablica 3

r	K_r	$K_r h_r$	$K_r h_r^2$	r	K_r	$K_r h_r$	$K_r h_r^2$
1	1108 t/m	2033 t	3725 tm	4	45,1	240	1280
2	184,5	615	2045	5	34,3	200	1165
3	75,1	338	1520	6	31,7	190,2	1141

Z (5.20) jest

$$P\lambda_2 = 2^2 \frac{\pi^2 E J_y}{L^2} = 4 \cdot 30,57 = 122,08 \text{ t},$$

$$P\lambda_4 = 4^2 \cdot 30,57 = 489,12 \text{ t}$$

i według (5.21)

$$N_2 = \left(122,3 - 765,0 \frac{2^2 \cdot 3,14^2}{2 \cdot 63,55} \right) = -199,5 \text{ t/m},$$

$$N_4 = \left(489,1 - 765,0 \frac{4^2 \cdot 3,14^2}{2 \cdot 63,55} \right) = -342,0 \text{ t/m},$$

$$D_2 = \frac{i^2 \pi^2}{2l} E \left(\frac{G}{E} \bar{J}_d + \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \bar{J}_\omega \right) = \frac{2^2 \cdot 9,87}{2 \cdot 62,0} 21 \cdot 10^8 \left(\frac{6,42 \cdot 10^{-3}}{2,6} + \right. \\ \left. + \frac{2^2 \cdot 9,87}{62,0^2} 2,81 \cdot 10^{-3} \right) = 6,68 \cdot 10^3 (2,47 + 0,0289) = 16,7 \cdot 10^3 \text{ tm},$$

$$D_4 = \frac{4^2 \cdot 9,87}{2 \cdot 62,0} 21 \cdot 10^3 (2,47 + 0,115) = 69,2 \cdot 10^3 \text{ tm},$$

$$a_{22} = \sum_r K_r U_{2r}^2 = 2(K_1 U_{21}^2 + K_2 U_{22}^2 + K_3 U_{23}^2 + \dots) = \\ = 2(1108 \cdot 0,500^2 + 184,5 \cdot 0,866^2 + 75,1 \cdot 1,0^2 + 45,1 \cdot 0,866^2 + \\ + 34,3 \cdot 0,500^2) = 1066 \text{ t/m},$$

$$a_{24} = \sum_r K_r U_{2r} U_{4r} = 2(1108 \cdot 0,500 \cdot 0,866 + 184,5 \cdot 0,866 \cdot 0,866 - \\ - 45,1 \cdot 0,866 \cdot 0,866 - 34,3 \cdot 0,500 \cdot 0,866) = 1140 \text{ t/m},$$

$$a_{44} = \sum_r K_r U_{4r}^2 = 2(1108 \cdot 0,866^2 + 184,5 \cdot 0,866^2 + 45,1 \cdot 0,866^2 + \\ + 34,3 \cdot 0,866^2) = 2060 \text{ t/m},$$

$$\beta_{22} = - \sum_r K_r h_r U_{2r} \Theta_{2r} = -2(2033 \cdot 0,500^2 + 615 \cdot 0,866^2 + \\ + 338 \cdot 1,0^2 + 240 \cdot 0,866^2 + 200 \cdot 0,500^2) = -3074 \text{ t},$$

$$\beta_{24} = - \sum_r K_r h_r U_{2r} \Theta_{4r} = -2(2033 \cdot 0,500 \cdot 0,866 + 615 \cdot 0,866 \cdot 0,866 - \\ - 240 \cdot 0,866 \cdot 0,866 - 200 \cdot 0,500 \cdot 0,866) = -2148 \text{ t},$$

$$\beta_{44} = - \sum_r K_r h_r U_{4r} \Theta_{4r} = -2(2033 \cdot 0,866^2 + 615 \cdot 0,866^2 + \\ + 240 \cdot 0,866^2 + 200 \cdot 0,866^2) = -4630 \text{ t},$$

$$\gamma_{22} = \sum_r K_r h_r^2 \Theta_{2r}^2 = 2(3725 \cdot 0,500^2 + 2045 \cdot 0,866^2 + \\ + 1520 \cdot 1,0^2 + 1280 \cdot 0,866^2 + 1165 \cdot 0,500^2) = 10475 \text{ tm},$$

$$\gamma_{24} = \sum_r K_r h_r^2 \Theta_{2r} \Theta_{4r} = 2(3725 \cdot 0,500 \cdot 0,866 + 2045 \cdot 0,866 \cdot 0,866 - \\ - 1280 \cdot 0,866 \cdot 0,866 - 1165 \cdot 0,500 \cdot 0,866) = 3370 \text{ tm},$$

$$\gamma_{44} = \sum_r K_r h_r^2 \Theta_{4r}^2 = 2(3725 \cdot 0,866^2 + 2045 \cdot 0,866^2 + \\ + 1280 \cdot 0,866^2 + 1165 \cdot 0,866^2) = 12330 \text{ tm}.$$

Po wprowadzeniu $\bar{\mu} = 1/\mu$ otrzymuje się według (5.23)

$$\begin{aligned} (1066 - 199,5 \bar{\mu}) a_2 + 1140 a_4 - 3074 c_2 - 2148 c_4 &= 0, \\ 1140 a_2 + (2060 - 342 \bar{\mu}) a_4 - 2148 c_2 - 4630 c_4 &= 0, \\ -3074 a_2 - 2148 a_4 + (10\,475 - 16\,700 \bar{\mu}) c_2 + 3370 c_4 &= 0, \\ -2148 a_2 - 4630 a_4 + 3370 c_2 + (12\,330 + 69\,200 \bar{\mu}) c_4 &= 0. \end{aligned}$$

Po przyrównaniu wyznacznika do zera albo na drodze eliminacji po uprzednim podzielenia całości przez jeden z parametrów, np. a_2 , otrzymuje się równanie czwartego stopnia:

$$\bar{\mu}^4 - 10,80 \bar{\mu}^3 + 9,05 \bar{\mu}^2 + 0,232 \bar{\mu} - 0,0008 = 0.$$

Minimalną dodatnią wartość najprościej będzie wyznaczyć drogą prób. Dla $\bar{\mu} = 0,9; 1,0; 1,1$ oblicza się wartość funkcji określonej lewą stroną równania i wyznacza się wykresie punkt przecięcia się jej z osią $\bar{\mu}$ (rys. 21). Ostatecznie otrzymuje się $\bar{\mu} = 0,943$ i

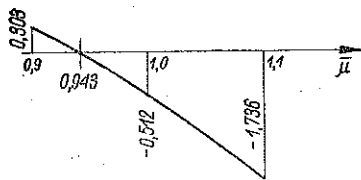
$$\bar{\mu} = \frac{1}{\mu} = 1,060 > 1.$$

Szywność podpór jest więc nieco za mała dla siły $P = 765$ t. Siła krytyczna przy obranych szywnościach podpór jest odpowiednio mniejsza od $P = 765$ t. Można zwiększyć jej dokładność oceniając wpływ sprężystego podłoża na podstawie wzoru słusznego dla $K = \text{const}$:

$$P = P_{yi} + K \frac{L^3}{i^2 \pi^2 a}.$$

Dla $i = 3$, $P_{yi} = 277,1$ t i $P_0 = 510$ t przy małych zmianach K siła P wzrośnie o

$$\frac{510 - 275}{510} \frac{\Delta K}{K} P = 0,46 \frac{\Delta K}{K} P.$$



Rys. 21

Wzrost siły krytycznej w stosunku do wartości P_0 otrzymanej dla stałej długości wieszaków można zatem ocenić jako równy

$$1,5 P_0 (0,54 + 0,46 \cdot 0,943) - P_0 = 0,45 P_0,$$

czyli wynosi 45%. Należy tutaj zauważyć, że wartości otrzymane metodą energetyczną są z reguły większe od wartości ścisłych.

Postać odkształcenia przy $a_2 = 1$ m określona jest równaniami

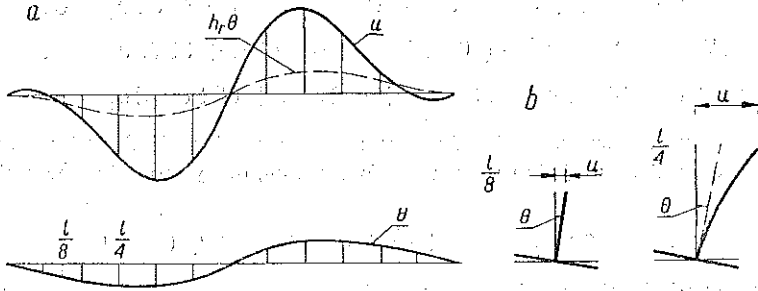
$$u = \sin \frac{2 \pi s}{L} - 0,601 \sin \frac{4 \pi s}{L} \text{ (w metrach)}$$

$$\theta = 0,0690 \sin \frac{2 \pi z}{l} - 0,0111 \sin \frac{4 \pi z}{l}.$$

Wykresy u , θ oraz odkształcenie przekroju mostu w $l/4$ i $l/8$ pokazane są na rys. 22.

W rozpatrywanym przykładzie wyboczenie ma miejsce w obszarze plastycznym. Ażeby otrzymać możliwie dokładną rzeczywistą siłę krytyczną P^* (przy uwzględ-

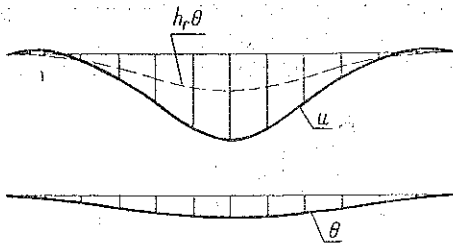
nieniu wszystkich najważniejszych wpływów), należy $\lambda \approx \pi \sqrt{EA/P}$ i E^*/E wyznaczyć dla siły $P = 1,45 \cdot 521 = 755 \text{ t}$ (stosownie do wyników z p. 11). Otrzymujemy $\lambda = 70,7$, $E^*/E = 0,556$ oraz $P^* = 0,556 \cdot 755 = 420 \text{ t}$.



Rys. 22

12.2. Przy założeniu symetrycznej postaci wybożenia, gdy

$$u = a_1 \sin \frac{\pi s}{L} + a_2 \sin \frac{3\pi s}{L}, \quad \theta = c_1 \sin \frac{\pi z}{L} + c_2 \sin \frac{3\pi z}{L},$$



Rys. 23

otrzymuje się dla siły $P = 765 \text{ t}$ wartość $\mu = 1,27$ oraz $\mu = 1/1,27 = 0,79 < 1,06$, a odpowiednią postać odkształcenia określona jest równaniami (rys. 23)

$$u = \frac{\pi s}{L} - 0,445 \sin \frac{3\pi s}{L},$$

$$\theta = 0,0890 \sin \frac{\pi z}{l} - 0,0122 \sin \frac{3\pi z}{l}.$$

W tym przypadku właściwa jest przyjęta poprzednio antysymetryczna postać wybożenia.

13. Przykład obliczenia przy obciążeniu jednostronnym

13.1. Obliczenie przeprowadza się metodą przybliżoną (pas prosty, przegubowe połączenie wieszaków z łukiem, $\varphi = 0$) dla $\bar{h} = 6,0 \text{ m}$. Z poprzednich obliczeń mamy

$$\min P_{(n=3)} = 510 \text{ t}, \quad \lambda_{zast} = 87,0, \quad E^*/E = 0,80,$$

$$\min P^* = 0,80 \cdot 510 = 408 \text{ t}.$$

Przyjęto: ciężar własny $g = 1,0 \text{ t/m}$, obciążenie użytkowe obustronne $p = 1,50 \text{ t/m}$. Współczynnik $\eta_1 = 1,5$ dla ciężaru własnego i $\eta_2 = 2,5$ dla obciążenia użytkowego. A zatem dla obciążenia pełnego wielkości graniczne wynoszą

$$q^{gr} = \eta_1 g + \eta_2 p = 1,5 \cdot 1,0 + 2,5 \cdot 1,5 = 5,25 \text{ t/m},$$

$$N_{max}^{gr} = \frac{q^{gr} l^2}{8h} \frac{1}{\cos \varphi_0} = \frac{5,25 \cdot 62,0^2}{8 \cdot 6,0 \cdot 0,935} = 450 \text{ t} > 408 \text{ t}.$$

Dla obciążenia jednostronnego znajdziemy

$$q^{gr} = \eta_1 g + \eta_2 \frac{p}{2} = 1,5 + 1,875 = 3,38 \text{ t/m},$$

$$N_{max}^{gr} = \frac{3,38 \cdot 62,0^2}{8 \cdot 6,0 \cdot 0,935} = 290 \text{ t} = P.$$

Odległość wypadkowej $p/2$ od osi mostu przyjęto równą 0,75 m:

$$m^{gr} = 1,875 \cdot 0,75 = 1,41 \text{ tm/m},$$

$$m_0^{gr} = \frac{\pi^2}{8} 1,41 = 1,73 \text{ tm/m}.$$

Obciążenie wiatrem pomija się.

Dla $n = 2$ według (9.1) jest $\epsilon = 3,47$ oraz

$$\bar{K}_u = \frac{6 EJ_v}{h^3} \frac{\epsilon}{3+2\epsilon} = 22,2 \text{ t/m}, \quad P_y = 122,4 \text{ t},$$

$$B = 122,4 + \frac{1}{4} 79,38 \cdot 22,2 = 562 \text{ t}.$$

Według (6.4) przy $\bar{K}_c = 3 EJ_v/h$ otrzymamy

$$S = 2,810 \cdot 10^{-3} \frac{2^4 \cdot 3,14^4}{63,55^4} + \frac{1}{2,6} 6,42 \cdot 10^{-3} \frac{2^2 \cdot 3,14^2}{63,55^2} + \frac{3 \cdot 10,87 \cdot 10^{-5}}{6,0 \cdot 5,16} =$$

$$= 16 \cdot 0,166 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 0,604 \cdot 10^{-5} + 1,055 \cdot 10^{-5} = 3,49 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2,$$

$$\bar{K}_s = \frac{3 EJ_v}{h^2} = 190 \text{ t}.$$

Według (6.17) dla $x_{max} = 0,28 \text{ m}$

$$\Delta\sigma = \frac{190 \cdot 1,73}{5,16 \cdot 3,49 \cdot 10^{-5}} \frac{1}{562 - 290} 0,28 = 1880 \text{ t/m}^2 = 188 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_N = \frac{290 \cdot 000}{184,8} = 1575 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma = \sigma_N + \Delta\sigma = 1575 + 188 = 1763 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{pl}.$$

Maksymalne przesunięcie wynosi na podstawie (6.16) i (6.17)

$$A_1 = \frac{\Delta\sigma}{E} \frac{L^2}{n^2 \pi^2 x_{max}} = \frac{1880}{21 \cdot 10^6} \frac{63,55^2}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,28} = 0,0327 \text{ m} = 3,27 \text{ cm}.$$

Większe przesunięcie występuje przy $n = 1$. W tym przypadku mamy

$$\epsilon = 0,860, \quad \bar{K}_u = 11,65 \text{ t/m}, \quad P_y = 30,6 \text{ t}, \quad B = 955 \text{ t},$$

$$S = 1,66 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2,$$

$$\Delta\sigma = \frac{190 \cdot 1,73}{5,16 \cdot 1,66 \cdot 10^{-5}} \frac{1}{955 - 290} 0,28 = 1620 \text{ t/m}^2 = 162 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma = 1575 + 162 = 1737 \text{ kg/cm}^2,$$

$$A_1 = \frac{1620}{21 \cdot 10^6} \frac{63,55^2}{1 \cdot 3,14^2 \cdot 0,28} = 0,113 \text{ m} = 11,3 \text{ cm}.$$

Obliczone przesunięcie zachodzi przy obciążeniu użytkowym zwiększonym 2-krotnie i obciążeniu stałym zwiększonym 1,5-krotnie. Dla rzeczywistego obciążenia otrzymamy

$$q = g + p/2 = 1,0 + 0,75 = 1,75 \text{ t/m},$$

$$N_{max} = 290 \frac{1,75}{3,38} = 150 \text{ t} = P,$$

$$m_0 = m_0^{gr}/2,5;$$

$$u_{max} = A_1 = \frac{11,3}{2,5} \frac{955 - 290}{955 - 150} = 3,72 \text{ cm}.$$

13.2. Jeśliby przyjmując, że moment skręcający przenosi belka i nie zachodzi o działywanie siły na łuk za pośrednictwem wieszaków, otrzyma się przesunięcie górnego końca wieszaka wynoszące

$$(13.1) \quad u_0 = \frac{m_0 L^2 h}{n^2 \pi^2 (GJ_d + EJ_w n^2 \pi^2 / L^2)}$$

co w naszym przykładzie dla stanu granicznego daje

$$u_0 \approx \frac{1,73 \cdot 63,55^2 \cdot 6,0}{1 \cdot 3,14^2 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 6,42 \cdot 10^{-3}} = 0,082 \text{ m} = 8,2 \text{ cm} < 11,3.$$

Różnica ugięć w stanie granicznym $\Delta u = 11,3 - 8,2 = 3,1 \text{ cm}$ pochodzi od zginania wieszaka siłą

$$H = \bar{K}_1 \Delta u = \frac{1}{2} 63,41 \cdot 0,031 = 0,985 \text{ t}.$$

Moment $M = Hh = 0,985 \cdot 6,0 = 5,9 \text{ tm}$ wywołuje maksymalne naprężenia w wieszaku

$$\sigma = \frac{M}{W_y} = \frac{590\,000}{680} = 870 \text{ kg/cm}^2.$$

Obliczenie powyższe odnosi się do przypadku pasa prostego. W przypadku pasa zakrzywionego i tych samych przekrojów wieszaków ugięcia wypadną mniejsze a przebieg ich nie będzie sinusoidalny. W pobliżu podpór wystąpią ugięcia pasa mniejsze aniżeli wypada to z przebiegu sinusoidalnego. Z drugiej strony należy zwrócić uwagę na to, że sztywność wieszaka skrajnego wypadnie wielokrotnie większa od sztywności wieszaka środkowego, tak że siła pozioma działająca na górny koniec wieszaka skrajnego może osiągnąć rząd wielkości siły działającej na wieszak środkowy. Z orientacyjnych obliczeń wynika jednak, że naprężenia w wieszaku skrajnym nie powinny przekraczać naprężeń występujących w wieszaku środkowym. Dokładniejsze obliczenie można przeprowadzić metodą energetyczną analogicznie jak w p. 5.

13.3. Uwzględnienie poziomego ugięcia belki. W rozpatrywanym przykładzie belka usztywniająca posiada stosunkowo małą szerokość (1/20 rozpiętości) i dla $n = 1$ należałoby znaleźć dokładniejsze wyniki uwzględniając przesunięcie poziome belki.

Ogólnie dla przegubowego połączenia wieszaków z łukiem mamy wówczas

$$\bar{K}_3 = \frac{3EJ_v}{h^2} \frac{1}{1+\kappa}, \quad \bar{K}_6 = \frac{3EJ_v}{h} \frac{1}{1+\kappa}, \quad \bar{K}_u = \frac{3EJ_v}{h} \frac{1}{1+\kappa + \frac{3}{2\varepsilon}}$$

gdzie κ określone jest wzorem (9.4).

Przy $\bar{J}_y = 5,25 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$ i $\varepsilon = 0,860$ mamy

$$\alpha = 3 \frac{0,01087 \cdot 10^6}{5,25 \cdot 10^6} \frac{63,55^4}{1 \cdot 3,14^2 \cdot 6,0 \cdot 5,16} = 0,93, \quad \frac{3}{2\varepsilon} = 1,745,$$

$$\bar{K}_u = 8,60 \text{ t/m}, \quad P_{yn} = 30,6 \text{ t}, \quad B_n = 715 \text{ t}, \quad S_n = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2,$$

$$K_a = 98,5 \text{ t}, \quad \Delta\sigma = 189 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma = 1575 + 189 = 1764 \text{ kg/cm}^2,$$

$$u_{max} = A_1 = 13,15 \text{ cm} > 11,3,$$

czyli o 11,6% więcej.

Samo maksymalne ugięcie można bezpośrednio wyznaczyć ze wzoru

$$(13.2) \quad u_{max} = \frac{u_0}{1 - \frac{P - P_{yn}}{\bar{K}_u \frac{L^2}{a n^2 \pi^2}}} \approx \frac{8,2}{1 - \frac{290 - 30,6}{8,60 \cdot 79,38}} = 13,2 \text{ cm},$$

gdzie u_0 jest przesunięciem określonym wzorem (13.1).

Wzór (13.2) wynika z rozumowania przytoczonego na końcu p. 4. Równoważąc element w przypadku odkształcenia przedstawionego na rys. 12b otrzymujemy dla miejsca maksymalnego wygięcia (które przebiega według n półfal sinusoidy) równanie

$$P \frac{n^2 \pi^2}{L^2} u_{max} = EJ_y \frac{n^4 \pi^4}{L^4} u_{max} + \frac{\bar{K}_u}{a} (u_{max} - u_0),$$

skąd wypływa wzór (13.2).

14. Przykład obliczenia częstotliwości drgań własnych

Rozważać będziemy układ uproszczony o pasie prostym i przegubowym połączeniu wieżaków. Poziome wygięcie belki pomija się.

Dla łuku przyjęto przekrój zwiększony o wielkości $A = 215 \text{ cm}^2$. Przy $\gamma = 7,85 \text{ t/m}^3$ $g = 9,81 \text{ m/sek}^2$ i $J_y = 5,964 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ mamy według (7.3) dla $n = 1$

$$a_n = \left(5,964 \cdot 10^{-4} + \frac{0,0215 \cdot 63,55^3}{n^2 \pi^2} \right) \frac{7,85}{9,81} = 7,05 \text{ t sek}^2,$$

$$\bar{K}_1 = \frac{3 EJ_y}{h^3} = 31,70 \text{ t/m}.$$

Dla $n = 1$ oraz $P = 215 \text{ t}$ przy

$$P_{yn} + \bar{K}_1 \frac{L^2}{a \cdot 1^2 \pi^2} = 30,6 + 31,70 \cdot 79,38 = 2550 \text{ t}$$

wynika z (7.5) częstotliwość kątowna ω_u i częstotliwość $\nu_u = \omega_u / 2\pi$,

$$\omega_u^2 = \frac{2550 - 215}{7,05} = 331 \text{ sek}^{-2},$$

$$\nu_u = \omega_u / 2\pi = 2,9 \text{ sek}^{-2}.$$

Dla belki przyjęto odpowiednio zwiększoną wartość $\bar{A}r^2 = 0,15 \text{ m}^4$ w celu uwzględnienia masy jezdni. Według (7.3) przy $\bar{J}_\omega = 2,81 \cdot 10^{-3} \text{ m}^6$ dla $n = 1$

$$\beta_n = \left(2,81 \cdot 10^{-3} + \frac{0,15 \cdot 63,55^2}{1^2 \pi^2} \right) \frac{7,85}{9,81} = 48,8 \text{ tm}^2 \text{ sek}^2,$$

$$\bar{K}_6 = \frac{3 E J_v}{h} = 1141 \text{ Tm}, \quad \bar{K}_6 \frac{L^2}{\alpha \cdot 1 \pi^2} = 1141 \cdot 79,38 = 90500 \text{ tm}^2.$$

Według (7.4) przy $\bar{J}_d = 0,642 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 P_{\theta n} &= 2,1 \cdot 10^7 \cdot 2,81 \cdot 10^{-3} \frac{1^2 \pi^3}{63,55^3} + 0,8 \cdot 10^7 \cdot 0,642 \cdot 10^{-2} = \\ &= 144 + 51500 \approx 51600 \text{ tm}^2. \end{aligned}$$

Według (7.6) częstotliwość kątowa ω_θ i częstotliwość ν_θ wynoszą

$$\omega_\theta^2 = \frac{51500 + 90500}{48,8} = 2910 \text{ sek}^{-2}, \quad \nu_\theta = \omega_\theta / 2\pi = 8,6 \text{ sek}^{-1}.$$

Dla całego układu przy

$$\bar{K}_3 = \frac{3 E J_v}{h^2} = 190,2 \text{ t}, \quad \bar{K}_3 \frac{L^2}{\alpha \cdot 1 \pi^2} = 190,2 \cdot 79,38 = 15099 \text{ tm},$$

$$a_n \beta_n = 7,05 \cdot 48,8 = 344,0 \text{ t}^2 \text{ m}^2 \text{ sek}^4$$

według (7.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \omega_{mm}^2 &= \frac{331 + 2910}{2} - \sqrt{1620,5^2 - \left(331 \cdot 2910 - \frac{15099^2}{344,0} \right)} = \\ &= 1620,5 - 1525 = 95,5 \text{ sek}^{-2}, \end{aligned}$$

$$\nu_{min} = \omega_{min} / 2\pi = 1,55 \text{ sek}^{-1}.$$

Ze wzoru przybliżonego (7.8) dla $n = 1$ przy

$$\bar{K}_u = 11,65 \text{ t/m}, \quad B_u = 30,6 + 11,65 \cdot 79,38 = 955 \text{ t}$$

mamy

$$\omega^2 \approx \frac{955 - 215}{7,05} = 105 \text{ sek}^{-2},$$

$$\nu = \omega / 2\pi = 1,63 \text{ sek}^{-1}.$$

Dla $n = 2$ przy

$$\bar{K}_u = 22,2 \text{ t/m}, \quad B_u = 4 \cdot 30,6 + 22,2 \cdot 79,38 = 562 \text{ t}, \quad a_n = 1,76 \text{ t/sek}^2$$

znajdziemy

$$\omega^2 = \frac{562 - 215}{1,76} = 201 \text{ sek}^{-2},$$

$$\nu = \omega / 2\pi = 2,26 \text{ sek}^{-1}.$$

Otrzymana częstotliwość jest niska. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że w wielu nowoczesnych mostach o małej wysokości konstrukcyjnej dochodzi ona do $0,5 \text{ sek}^{-1}$.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Haupt i N. J. Kleinschmidt, Stahlbau, 1955, s. 1.
- [2] E. Beyer i Fr. Tussing, Stahlbau, 1955, s. 81.
- [3] G. Schmidt, *Über die Knucksicherheit des Obergurtes einer Mittelträgerbrücke*, Bautechnik 1 (1949), s. 10.
- [4] W. G. Godden, *The Lateral Buckling of Tied Arches*, Proc. Inst. Civ. Engrs, t. 3, 1954, Pap. 5965.
- [5] F. Bleich i H. Bleich, *Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktweise elastisch gestützten Stabes*, Stahlbau, 1937, s. 17.
- [6] N. I. Poliwanow, *Żelezobetonyje mosty*, Nauczno-tiechn. Izdat. Awto-transport. Lit., Moskwa 1956, s. 559.
- [7] F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, New York 1952, s. 294.
- [8] W. I. Reut, *Prostranstwiennaja ustojcziwost' niekotorych tipow płoskich fiern*, Izv. AN SSSR Otd. tiechn. nauk, 9, 1956, s. 84.
- [9] L. Östlund, *Lateral Stability of Bridge Arches Braced with Transverse Bars*, Elanders Boktrykeri Aktiebolag, Göteborg 1954.
- [10] S. P. Timoszenko, *Ustojcziwost' uprugich sistiem*, Gos. Izdat. tiechn.-teor. lit., Moskwa 1955, s. 546.
- [11] S. Timoszenko, *Kippsicherheit des gekrümmten Stabes mit kreisförmiger Mittellinie*, Zeitschr. angew. Math. Mech. 1923, s. 358.
- [12] I. W. Urban, *Tieorija rasczota stierzniowych tonkostiennych konstrukcji*, Transzeldorizdat, Moskwa 1955.
- [13] S. U. Benscötter, *A Theory of Torsion Bending of Multicell Beams*, Journ. Appl. Mech. 1 (1954), s. 25.
- [14] W. Z. Własow, *Niekotoryje zadaczi soprotiwlenja matieriatow, stroitiei-noj miechaniki i tieorii uprugosti*, Izv. AN SSSR, Otd. tiechn. nauk, 9 (1950).
- [15] I. I. Goldienblat i A. M. Sizow, *Sprawocznik po rasczotu stroitiel-nych konstrukcji na ustojcziwost' i kolebanja*, Moskwa 1952.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ МОСТА С ОДИНАРНОЙ НЕСУЩЕЙ СИСТЕМОЙ

В работе обсуждается вопрос потери устойчивости пролетного строения, состоящего из одинарной главной несущей системы (фермы или арки с затяжкой), расположенной в оси моста и находящейся под действием перпендикулярной нагрузки, а также балки жесткости (как правило замкнутого сечения) имеющей целью обеспечить жесткость системы на кручение. Балка жесткости соединена с верхним поясом системы посредством жестких подвесок.

В первой части работы (п.п. 2-4) рассматривается случай потери устойчивости при полной симметричной нагрузке моста предполагая: (1) — что подвески распределены по длине моста непрерывно, (2) — что они жестко соединены с верхним поясом и (3) — что верхний пояс подвергается продольному изгибу по изгибно-крутильной форме, характеризующейся горизонтальным перемещением u и обо-

ротом φ , при чём балка жесткости подвергается только лишь кручению θ (рис. 4).

Сначала даются три дифференциальных уравнения, выведенные из трех уравнений равновесия для случая продольного изгиба прямого пояса, (2.4.1), (2.4.2) и (2.4.3), при чем воздействие подвесок (стоек) определяется методом деформации с помощью упругих постоянных K_1, \dots, K_6 (рис. 5).

Затем выводятся дифференциальные уравнения продольного изгиба тонкостенного и искривленного стержня моносимметричного сечения, нагруженного равномерно в плоскости кривизны (3.8).

Влияние искривления, определенное выражениями содержащими радиус кривизны R , учитывается затем в уравнениях (3.9.1) и (3.9.2), которые относятся к продольному изгибу моста с арочной системой, а именно моста с круговой аркой, подвески которой направлены радиально по отношению к центру кривизны, равно как и с параболической аркой с подвесками направленными вертикально — при постоянной нормальной силе и среднем радиусе кривизны.

Решение дифференциальных уравнений производится при упрощающем предположении постоянных параметров K_i ($i=1, \dots, 6$) и синусоидального вида перемещений при продольном изгибе. Уравнения равновесия сводятся к виду (4.7) и формуле (4.8) для критической силы P . (Для главной системы с параллельными поясами предположение постоянных жесткостей K_i можно считать оправданным, тогда как для арочной системы это продолжение является упрощением, дающим запас прочности если в исчислении принять значения K_i для наиболее податливой серединной подвески).

Затем в п. 5 основываясь на энергетическом методе дается общее решение вопроса устойчивости однобалочной арочной системы. Учитываются, в особенности, не принятые раньше во внимание факторы, как переменная жесткость подвесок, их конечное число и неперпендикулярность оси подвески к оси арки. Решение сводится к определению коэффициента μ , на который следует умножить принятые жесткости K_i , так чтобы продольный изгиб выступил при силе νP , где ν является требуемым коэффициентом запаса прочности.

В п. 6 при использовании выведенных в п. 2 и 3 уравнений рассматривается случай односторонней нагрузки моста как нелинейную задачу сопротивления материалов.

В п. 7 затронуты динамические вопросы, как определение частоты собственных колебаний и продольный изгиб при пульсирующей силе. В данном случае система упрощена к прямому поясу и шарнирному соединению подвесок с поясом.

В дополнении приводятся, между прочим, значения K_1 для постоянного момента инерции подвесок. Несложным способом учитывается дополнительное влияние горизонтального изгиба балки жесткости. В числовом примере дается определение устойчивости по формуле (4.8) вместе со сравнительными расчетами для оценки влияния податливости на кручение балки жесткости, жесткого соединения подвесок с верхним поясом, изгибания оси верхнего пояса и стабилизирующего действия горизонтальной составляющей силы в подвеске. На основании упрощенного исчисления энергетическим методом определяется также влияние переменной длины подвесок. Кроме того приводится расчёт приближенного значения частоты собственных колебаний системы.

Все решения могут быть применены, в частном случае, также к двубалочному мосту не имеющему верхних связей.

Summary

STABILITY OF A SINGLE GIRDER BRIDGE

The problem of loss of stability in a structure consisting of a single main girder (a truss or a tied arch) in the axis of the bridge carrying the vertical load, and a stiffening girder (usually of closed cross-section) securing the torsional rigidity of the structure. The stiffening girder is connected with the upper cord of the structure by means of rigid hangers.

In the first part of the paper (Arts. 2-4) consideration is given to the case of loss of stability under full symmetric load of the bridge, assuming that 1) the hangers are uniformly distributed along the bridge; 2) they are rigidly connected with the upper cord; 3) the upper cord buckles in the torsional-flexural form characterized by a horizontal displacement u and a rotation φ , the stiffening girder being subjected to torsion θ only (Fig. 4).

First, three differential equations are derived from the three equations of equilibrium in the case of buckling of a *straight cord* [Eqs. (2.4.1), (2.4.2) and (2.4.3)], where the action of the hangers (struts) is determined by means of the elastic constants K_1, \dots, K_n (Fig. 5).

Next, differential equations are derived for buckling of a *thin-walled curved bar* of monosymmetric cross-section uniformly loaded in the plane of the curvature, Eq. (12). Now, the influence of the curvature determined by terms containing the curvature radius R is taken into consideration in the Eqs. (3.9.1) and (3.9.2) concerning the buckling of bridges of *arched girder* either circular with radial hangers or parabolic with vertical hangers. In the latter case, constant normal force and constant mean radius of curvature are assumed.

The differential equations are solved with the simplifying assumption of constant parameters K_i ($i = 1, \dots, 6$) and sinusoidal buckling mode. The equations of equilibrium reduce to the Eq. (4.7) and the Eq. (4.8) for the critical force P . (For a main girder having parallel cords, the assumption of constant rigidities K_i may be considered to be satisfied. For an arch girder, a simplification providing increased safety is introduced if in the computation the values K_i are assumed as for the most flexible middle hanger.

Using the previous equations (Art. 2 and 3), the case of side load of a bridge is considered as a non-linear stress problem in Art. 6.

In Art. 7, such dynamic problem as that of computation of frequency of free vibration and buckling under pulsating force are considered. In these problems, the structure is simplified to that of a straight cord, and hinged joints between the hangers and the cord.

Next, in Art. 5, a *general* solution of the stability problem of a one-girdered arch structure is obtained on the basis of the *energy method*. In particular, certain influences disregarded above are now taken into consideration, for instance variable rigidity in the hangers, their finite number and the fact that they are not at right angles to the arch axis. The solution reduces to the determination of the parameter μ , by which the values assumed for the rigidities must be multiplied in order that buckling may occur for the force νP , where ν is the safety factor required.

In an appendix, among other quantities the values K_i are given for constant moment of inertia of the hangers. The influence of the deflection of the stiffening beam is taken into account in a simple way. A numerical example shows the computation of stability according to the Eq. (4.8), together with comparative computations for the appraisal of the influence of the torsion of the stiffening beam, the rigid joints between hangers and the upper cord, the curvature of the upper cord, and the stabilizing action of the horizontal component of the normal force in a hanger.

By means of a simplified calculation based on the energy method, the influence of a variable hanger length is determined. In addition, the approximate frequency of free vibration of the structure is calculated.

All the above solutions apply also to a double *girder bridge* without top bracing.

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 listopada 1956 r.