

LESZEK MARTINI

PIERŚCIEŃ KOŁOWY POD DZIAŁANIEM WEWNĘTRZNEGO
I ZEWNĘTRZNEGO CIŚNIENIA HYDROSTATYCZNEGO

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXXXII

SPIS TREŚCI

| | Str. |
|---|------|
| Wstęp | 495 |
| 1. Stan naprężenia w nieważkim pierścieniu kołowym pod działaniem równoważących się ciśnień hydrostatycznych | 496 |
| 2. Przemieszczenia nieważkiego pierścienia kołowego pod działaniem równoważących się ciśnień hydrostatycznych | 505 |
| 3. Wyznaczenie przestrzennego stanu naprężenia rury jednorodnej podanej równoważącemu się ciśnieniu wewnętrznemu i zewnętrznemu | 508 |
| 4. Stan naprężenia w ważkiej rurze pływającej poziomo w cieczy | 509 |

Wstęp

W pracy tej * wyznaczono stan naprężenia w jednorodnym pierścieniu kołowym pod działaniem wewnętrznego i zewnętrznego ciśnienia hydrostatycznego zmiennego liniowo wzdłuż jednej ze średnic. Zagadnienie powyższe odpowiada zagadnieniu wałkiej rury pustej (lub wypełnionej lekką cieczą) pływającej poziomo w cieczy ciężkiej. Problem ten można nazwać płaskim problemem «batyskafu».

W praktyce mamy bardzo często do czynienia z tego rodzaju obciążeniem rury. Wystarczy wspomnieć o rurociągach naftowych zakopanych w piasku (przechodzących np. przez pustynię) oraz pływających elektrycznych kablach podmorskich, w których olej izolacyjny znajduje się pod ciśnieniem hydrostatycznym.

W punkcie 1 wyznaczono stan naprężenia w nieważkim pierścieniu kołowym obciążonym ciśnieniem wewnętrznym $p_1 = -cx$ oraz zewnętrznym $p_2 = (R_1/R_2)^2 p_1$ (ciśnienia te są zmienne liniowo w kierunku osi x -ów), gdzie R_1 i R_2 jest odpowiednio promieniem wewnętrznym i zewnętrznym pierścienia. W punkcie 2 wyznaczono przemieszczenia pierścienia obciążonego tak samo jak w punkcie 1. W punkcie 3 wyznaczono stan naprężenia w rurze przez uzupełnienie stanu naprężenia z p. 1 naprężeniem normalnym, głównym, działającym w kierunku długości rury w zależności od warunków brzegowych określonych dla końców rury. Punkt 4 zawiera wyznaczenie stanu naprężenia w wałkiej rurze pływającej poziomo w cieczy jako sumy trzech stanów naprężenia, a mianowicie:

(1) stanu naprężenia odpowiadającego zadaniu Lamégo,

(2) stanu naprężenia, który jest rozwiązaniem szczególnym równań teorii sprężystości przy uwzględnieniu sił objętościowych (działających w kierunku osi x -ów);

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\gamma_0 x, \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

przy czym γ_0 jest to ciężar właściwy rury,

(3) stanu naprężenia w rurze nieważkiej, obciążonej ciśnieniem wewnętrznym $p_1 = -cx$ oraz zewnętrznym $p_2 = (R_1/R_2)^2 p_1$, gdzie R_1 i R_2 są promieniami rury.

* Praca przedstawiona na zebraniu naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w dniu 18 lutego 1957 r.

1. Stan naprężenia w nieważkim pierścieniu kołowym pod działaniem równoważących się ciśnień hydrostatycznych

Rozważmy na razie przypadek szczególny, gdy mamy do czynienia z nieważkim pierścieniem jednorodnym i gdy zarówno wewnętrzne jak i zewnętrzne ciśnienie hydrostatyczne zmienia się proporcjonalnie do rzędnej x . Wówczas wypadkowa ciśnień na brzegu wewnętrznym jest zrównoważona przez wypadkową ciśnień działających na brzeg zewnętrzny (co nie zachodzi w przypadku pierścienia ważkiego).

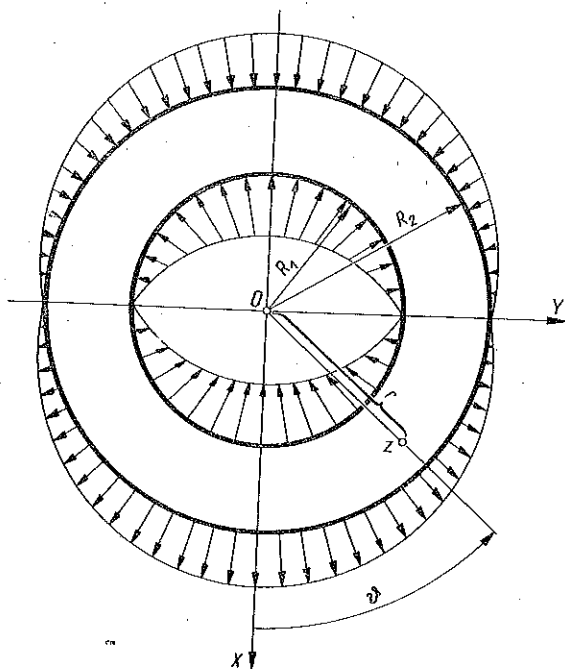
Ciśnienie wewnątrz pierścienia można przedstawić za pomocą wzoru

$$(1.1) \quad p_1 = -cx,$$

zaś ciśnienie zewnątrz pierścienia

$$(1.2) \quad p_2 = -c \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 x,$$

gdzie c jest to pewna stała, R_1 promień wewnętrzny, zaś R_2 promień zewnętrzny pierścienia (zakładamy, że $0 < R_1 < R_2$; rys. 1).



Rys. 1

Składowe stanu naprężenia wyznaczmy przy zastosowaniu metod funkcji analitycznych. Warunek brzegowy dla zasadniczego problemu biharmonicznego w przypadku rozwiązania regularnego (por. [1], § 42) można napisać w postaci (por. [1], § 41)

$$(1.3) \quad \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - e^{2i\alpha} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = p_n - ip_t,$$

gdzie $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ są to poszukiwane funkcje analityczne w obszarze zajęтым przez ciało¹. Zmienną $z = x + iy$ oraz sprzężoną z nią zmienną $\bar{z} = x - iy$ we wzorze (1.3) bierzemy na brzegu rozważanego

obszaru ciała; p_n i p_t są to odpowiednio składowa normalna i składowa styczna obciążenia brzegu; α jest to kąt, jaki tworzy normalna zewnętrzna z dodatnim kierunkiem osi x -ów.

¹ Funkcje $\varphi(z) = \int \Phi(z) dz$ oraz $\psi(z) = \int \Psi(z) dz$ noszą nazwę funkcji Goursata.

W przypadku gdy obszar zajęty przez ciało jest pierścieniem, tj. gdy $R_1 \leq |z| \leq R_2$, warunek brzegowy (1.3) składa się z dwóch warunków. Jeden jest spełniony na brzegu wewnętrznym pierścienia, tj. dla $|z| = R_1$, zaś drugi na brzegu zewnętrznym, czyli dla $|z| = R_2$.

Jeżeli przez $\sigma_r, \sigma_\vartheta$ i $\tau_{r\vartheta}$ oznaczymy składowe biegunowe stanu naprężenia rozważanego pierścienia (rys. 2), to możemy napisać, że dla brzegu wewnętrznego

$$(1.4) \quad \begin{cases} p_n = |\sigma_r|_{r=R_1} = \frac{cR_1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) \\ p_t = |\tau_{r\vartheta}|_{r=R_1} = 0 \end{cases}$$

zaś na brzegu zewnętrznym

$$(1.5) \quad \begin{cases} p_n = |\sigma_r|_{r=R_2} = \frac{cR_1^2}{2R_2} \left(s + \frac{1}{s} \right) \\ p_t = |\tau_{r\vartheta}|_{r=R_2} = 0 \end{cases}$$

gdzie

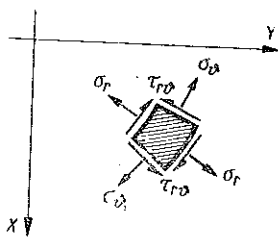
$$(1.6) \quad s = \frac{z}{|z|} = e^{i\vartheta}$$

Argument ϑ (rys. 1) odpowiada kątowi zawartemu pomiędzy promieniem wodzącym a dodatnim kierunkiem osi x -ów. Dla punktów na brzegu wewnętrznym kąt $\alpha = \vartheta + \pi$, zaś dla brzegu zewnętrznego $\alpha = \vartheta$. Możemy więc dla brzegu wewnętrznego warunek brzegowy napisać uwzględniając (1.6) następująco

$$(1.7) \quad \Phi(R_1 s) + \overline{\Phi(R_1 s)} - R_1 s \Phi'(R_1 s) - s^2 \Psi(R_1 s) = \frac{cR_1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right),$$

zaś dla brzegu zewnętrznego

$$(1.8) \quad \Phi(R_2 s) + \overline{\Phi(R_2 s)} - R_2 s \Phi'(R_2 s) - s^2 \Psi(R_2 s) = \frac{cR_1^2}{2R_2} \left(s + \frac{1}{s} \right).$$



Rys. 2

Funkcje $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ jako analityczne w pierścieniu $R_1 \leq |z| \leq R_2$ przedstawimy w postaci szeregów Lauranta zbieżnych dla $R_1 \leq |z| \leq R_2$:

Z uwagi na znaną wartość residuum tych funkcji możemy wyodrębnić wyrazy zawierające z^{-1} . Mamy (por. [1], § 35)

$$(1.9) \quad \Phi(z) = \frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

$$(1.10) \quad \Psi(z) = -\frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \kappa \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n.$$

Stałą materiałową $\kappa > 1$ można wyrazić za pomocą stałych Lamégo λ i μ lub stałej Poissona ν następująco:

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu.$$

We wzorach (1.9) i (1.10) przyjmujemy

$$(1.11) \quad a_{-1} = b_{-1} = 0.$$

Pozostałe współczynniki a_n i b_n rozwinięcia szeregów we wzorach (1.9) i (1.10) wyznaczmy z warunków (1.7) i (1.8). W tym celu obliczmy wyrażenia

$$(1.12) \quad \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} = \frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \frac{1}{r} \left(s + \frac{1}{s} \right) + \sum_{-\infty}^{\infty} r^n \left(a_n s^n + \overline{a_n} \frac{1}{s^n} \right),$$

gdzie $R_1 \leq r = |z| \leq R_2$, zaś $s = z/|z|$,

$$(1.13) \quad -z\Phi'(z) = \frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \frac{1}{rs} - \sum_{-\infty}^{\infty} n a_n r^n s^n,$$

$$(1.14) \quad -s^2\Psi(z) = \frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \kappa \frac{s}{r} - \sum_{-\infty}^{\infty} b_n r^n s^{n+2}.$$

Po podstawieniu funkcji (1.12), (1.13) i (1.14) do warunku (1.7) przy uwzględnieniu, że $r = R_1$, otrzymamy

$$(1.15) \quad -\frac{cR_1^2}{2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{s} + \sum_{-\infty}^{\infty} R_1^n \left[(1-n) a_n s^n + \frac{\overline{a_n}}{s^n} - b_n s^{n+2} \right] = 0,$$

zaś po podstawieniu funkcji (1.12), (1.13) i (1.14) do warunku (1.8) przy uwzględnieniu, że $r = R_2$ otrzymamy

$$(1.16) \quad -\frac{cR_1^2}{2R_2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{s} + \sum_{-\infty}^{\infty} R_2^n \left[(1-n) a_n s^n + \frac{\overline{a_n}}{s^n} - b_n s^{n+2} \right] = 0.$$

Zależności (1.15) i (1.16) uzupełnimy zależnościami otrzymanymi z nich przez sprzężenie:

$$(1.17) \quad -\frac{cR_1}{2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} s + \sum_{-\infty}^{\infty} R_1^n \left[(1-n) \frac{\overline{a_n}}{s^n} + a_n s^n - \frac{\overline{b_n}}{s^{n+2}} \right] = 0,$$

$$(1.18) \quad -\frac{cR_1^2}{2R_2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} s + \sum_{-\infty}^{\infty} R_2^n \left[(1-n) \frac{\overline{a_n}}{s^n} + a_n s^n - \frac{\overline{b_n}}{s^{n+2}} \right] = 0.$$

Ponieważ równości (1.15) - (1.18) muszą zachodzić dla każdej wartości $s = e^{i\theta}$, wobec tego współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej s w każdej z tych czterech równości muszą być równe zeru.

Weźmy wpiertw pod uwagę w równościach (1.15) - (1.18) wyrazy wolne (tzn. przy s^0) i wobec warunku ich znikania otrzymamy kolejno

$$(1.19) \quad a_0 + \bar{a}_0 - \frac{b_{-2}}{R_1^2} = 0,$$

$$(1.20) \quad a_0 + \bar{a}_0 - \frac{b_{-2}}{R_2^2} = 0,$$

$$(1.21) \quad \bar{a}_0 + a_0 - \frac{\bar{b}_{-2}}{R_1^2} = 0,$$

$$(1.22) \quad \bar{a}_0 + a_0 - \frac{\bar{b}_{-2}}{R_2^2} = 0.$$

Odejmując stronami (1.19) od (1.21) oraz (1.20) od (1.22) mamy

$$\frac{1}{R_1^2} (b_{-2} - \bar{b}_{-2}) = 0, \quad \frac{1}{R_2^2} (b_{-2} - \bar{b}_{-2}) = 0,$$

czyli wobec $0 < R_1 < R_2$ zachodzi wspólna zależność

$$(1.23) \quad b_{-2} - \bar{b}_{-2} = 0.$$

Dodając stronami (1.19) i (1.21) oraz (1.20) i (1.22) otrzymamy jednorodny układ równań

$$(1.24) \quad \begin{cases} 2(a_0 + \bar{a}_0) - \frac{1}{R_1^2} (b_{-2} + \bar{b}_{-2}) = 0, \\ 2(a_0 + \bar{a}_0) - \frac{1}{R_2^2} (b_{-2} + \bar{b}_{-2}) = 0. \end{cases}$$

Wyróżnik tego układu równań

$$\Delta = 2 \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \neq 0$$

wobec założenia $0 < R_1 < R_2$. Układ równań (1.24) ma zatem jednoznaczne rozwiązanie

$$(1.25) \quad a_0 + \bar{a}_0 = 0,$$

$$(1.26) \quad b_{-2} + \bar{b}_{-2} = 0.$$

Jak widać, wielkość

$$a_0 - \bar{a}_0 = 2 \operatorname{Ir} [\Phi(0)]$$

nie da się wyznaczyć z równań (1.19) - (1.22), gdyż funkcja $\Phi(z)$ daje się określić, przy warunkach brzegowych w postaci danych naprężeń, jedynie z dokładnością do urojonej części $\Phi(0)$ (por. [1], § 34).

Aby uniknąć wieloznaczności funkcji $\Phi(z)$, załóżmy

$$(1.27) \quad a_0 - \bar{a}_0 = 0.$$

Na podstawie (1.23), (1.25) - (1.27) mamy

$$(1.28) \quad a_0 = b_{-2} = 0,$$

Przejdźmy teraz do wykorzystania warunku znikania współczynników w równościach (1.15) i (1.16) przy s^1 oraz w równościach (1.17) i (1.18) przy s^{-1} . Dla wszystkich czterech warunków otrzymamy wspólną zależność

$$(1.29) \quad a_{-1} = b_{-1},$$

która wobec (1.11) jest spełniona.

Z uwagi na znikanie współczynników w równaniach (1.15) i (1.16) przy s^{-1} oraz w równaniach (1.17) i (1.18) przy s^1 mamy

$$(1.30) \quad -\frac{cR_1}{2} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + 2 \frac{a_{-1}}{R_1} + R_1 \bar{a}_1 - \frac{b_{-3}}{R_1^3} = 0.$$

$$(1.31) \quad -\frac{cR_1^2}{2R_2} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + 2 \frac{a_{-1}}{R_2} + R_2 \bar{a}_1 - \frac{b_{-3}}{R_2^3} = 0,$$

$$(1.32) \quad -\frac{cR_1}{2} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + 2 \frac{\bar{a}_{-1}}{R_1} + R_1 a_1 - \frac{b_{-3}}{R_1^3} = 0,$$

$$(1.33) \quad -\frac{cR_1^2}{2R_2} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} + 2 \frac{\bar{a}_{-1}}{R_2} + R_2 a_1 - \frac{b_{-3}}{R_2^3} = 0$$

Uwzględniając (1.11) i odejmując stronami równanie (1.30) od (1.32) oraz równanie (1.31) od (1.33) otrzymamy jednorodny układ równań

$$(1.34) \quad \begin{cases} R_1 (a_1 - \bar{a}_1) + \frac{1}{R_1^3} (b_{-3} - \bar{b}_{-3}) = 0, \\ R_2 (a_1 - \bar{a}_1) + \frac{1}{R_2^3} (b_{-3} - \bar{b}_{-3}) = 0. \end{cases}$$

Wobec tego, że wyróżnik tego układu równań

$$\Delta = \frac{R_1}{R_2^3} - \frac{R_2}{R_1^3} \neq 0,$$

gdź $R_1 < R_2$, otrzymamy rozwiązanie

$$(1.35) \quad a_1 - \bar{a}_1 = b_{-3} - \bar{b}_{-3} = 0;$$

Następnie dodając stronami równanie (1.30) do (1.32) oraz (1.31) do (1.33) otrzymamy po uwzględnieniu (1.11) i (1.35) układ równań o dwóch niewiadomych

$$(1.36) \quad \begin{cases} -cR_1 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + 2R_1 a_1 - 2 \frac{b_{-3}}{R_1^3} = 0, \\ -\frac{cR_1^2}{R_2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + 2R_2 a_1 - 2 \frac{b_{-3}}{R_2^3} = 0. \end{cases}$$

Wyróżnik tego układu równań

$$\Delta = 4 \left(\frac{R_2}{R_1^3} - \frac{R_1}{R_2^3} \right) \neq 0,$$

gdź $R_1 < R_2$. Rozwiązując ten układ równań otrzymamy

$$(1.37) \quad a_1 = \frac{c}{2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2},$$

$$(1.38) \quad b_{-3} = -\frac{c}{2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{R_1^4 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}.$$

Z warunku znikania współczynników przy s^k , gdzie $k = 2, 3, 4, 5, \dots$ w sumach (1.15) - (1.18) otrzymamy kolejno

$$(1.39) \quad (1-k) R_1^k a_k + \frac{\overline{a_{-k}}}{R_1^k} - R_1^{k-2} b_{k-2} = 0,$$

$$(1.40) \quad (1-k) R_2^k a_k + \frac{\overline{a_{-k}}}{R_2^k} - R_2^{k-2} b_{k-2} = 0,$$

$$(1.41) \quad (1+k) \frac{\overline{a_{-k}}}{R_1^k} + R_1^k a_k - \frac{\overline{b_{-k-2}}}{R_1^{k+2}} = 0,$$

$$(1.42) \quad (1+k) \frac{\overline{a_{-k}}}{R_2^k} + R_2^k a_k - \frac{\overline{b_{-k-2}}}{R_2^{k+2}} = 0.$$

Z warunku znikania współczynników przy s^{-k} ($k = 2, 3, 4, 5, \dots$), w sumach (1.15) - (1.18) otrzymamy kolejno

$$(1.43) \quad (1+k) \frac{a_{-k}}{R_1^k} + R_1^k \overline{a_k} - \frac{b_{-k-2}}{R_1^{k+2}} = 0,$$

$$(1.44) \quad (1+k) \frac{a_{-k}}{R_2^k} + R_2^k \overline{a_k} - \frac{b_{-k-2}}{R_2^{k+2}} = 0,$$

$$(1.45) \quad (1-k) R_1^k \overline{a_k} + \frac{a_{-k}}{R_1^k} - R_1^{k-2} \overline{b_{k-2}} = 0,$$

$$(1.46) \quad (1-k) R_2^k \overline{a_k} + \frac{a_{-k}}{R_2^k} - R_2^{k-2} \overline{b_{k-2}} = 0.$$

Odejmując od siebie kolejno stronami równania (1.39) i (1.45), (1.40) i (1.46), (1.41) i (1.43), (1.42) i (1.44) otrzymamy układ czterech równań jednorodnych o czterech niewiadomych:

$$(1.47) \quad \begin{cases} (k-1) R_1^k (a_k - \bar{a}_k) + \frac{1}{R_1^k} (a_{-k} - \bar{a}_{-k}) + R_1^{k-2} (b_{k-2} - \bar{b}_{k-2}) = 0, \\ (k-1) R_2^k (a_k - \bar{a}_k) + \frac{1}{R_2^k} (a_{-k} - \bar{a}_{-k}) + R_2^{k-2} (b_{k-2} - \bar{b}_{k-2}) = 0, \\ R_1^k (a_k - \bar{a}_k) - \frac{k+1}{R_1^k} (a_{-k} - \bar{a}_{-k}) + \frac{1}{R_1^{k+2}} (b_{-k-2} - \bar{b}_{-k-2}) = 0, \\ R_2^k (a_k - \bar{a}_k) - \frac{k+1}{R_2^k} (a_{-k} - \bar{a}_{-k}) + \frac{1}{R_2^{k+2}} (b_{-k-2} - \bar{b}_{-k-2}) = 0. \end{cases}$$

($k = 2, 3, 4, 5, \dots$).

Dodając do siebie kolejno stronami równania (1.39) i (1.45), (1.40) i (1.46), (1.41) i (1.43), (1.42) i (1.44) otrzymamy układ czterech równań jednorodnych o czterech niewiadomych

$$(1.48) \quad \begin{cases} (k-1) R_1^k (a_k + \bar{a}_k) - \frac{1}{R_1^k} (a_{-k} + \bar{a}_{-k}) + R_1^{k-2} (b_{k-2} + \bar{b}_{k-2}) = 0, \\ (k-1) R_2^k (a_k + \bar{a}_k) - \frac{1}{R_2^k} (a_{-k} + \bar{a}_{-k}) + R_2^{k-2} (b_{k-2} + \bar{b}_{k-2}) = 0, \\ R_1^k (a_k + \bar{a}_k) + \frac{k+1}{R_1^k} (a_{-k} + \bar{a}_{-k}) - \frac{1}{R_1^{k+2}} (b_{-k-2} + \bar{b}_{-k-2}) = 0, \\ R_2^k (a_k + \bar{a}_k) + \frac{k+1}{R_2^k} (a_{-k} + \bar{a}_{-k}) - \frac{1}{R_2^{k+2}} (b_{-k-2} + \bar{b}_{-k-2}) = 0 \end{cases}$$

($k = 2, 3, 4, 5, \dots$).

Wyróżniki obydwu układów równań (1.47) i (1.48) są sobie równe i wynoszą

$$(1.49) \quad \Delta = \frac{1}{R_1^2 R_2^2} \left\{ k^2 \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2k} - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2k} - 2(k^2 - 1) \right\}$$

($k = 2, 3, 4, 5, \dots$).

W celu zbadania ewentualnego znikania wyróżnika (1.49) oznaczymy, dla uproszczenia

$$(1.50) \quad x = \frac{R_2}{R_1}.$$

Z uwagi na to, że $0 < R_1 < R_2$ mamy

$$(1.51) \quad 1 < x.$$

Możemy zatem napisać

$$(1.52) \quad A = -\frac{R_1^{2k-2}}{R_2^{2k+2}} V_k(x),$$

gdzie

$$V_k(x) = x^{4k} - k^2 x^{2k+2} + 2(k^2 - 1)x^{2k} - k^2 x^{2k-2} + 1,$$

zaś

$$\frac{R_1^{2k-2}}{R_2^{2k+2}} \neq 0.$$

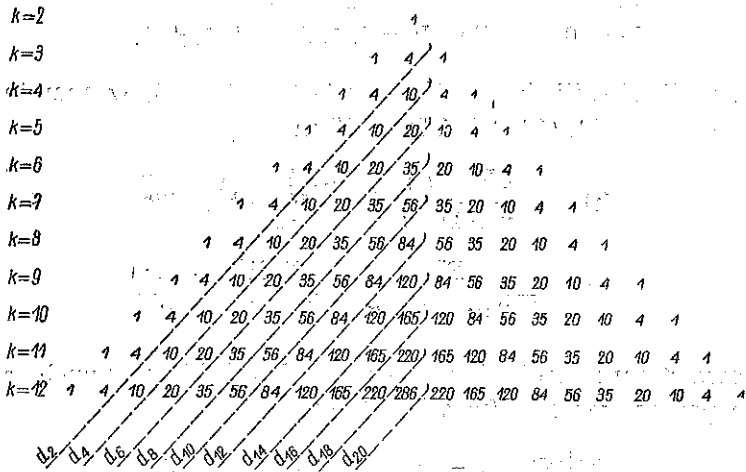
Zbadajmy miejsca zerowe wielomianu $V_k(x)$ dla $k = 2, 3, 4, 5, \dots$. Można łatwo stwierdzić, że wielomian $V_k(x)$ da się przedstawić w postaci

$$(1.53) \quad V_k(x) = (x^2 - 1)^4 W_k(x),$$

gdzie $W_k(x)$ jest pewnym wielomianem stopnia $4k - 8$ postaci

$$(1.54) \quad W_k(x) = x^{4k-8} + d_2 x^{4k-10} + d_4 x^{4k-12} + \dots + d_{2k-8} x^{2k} + d_{2k-6} x^{2k-2} + \dots + d_{2k-4} x^{2k-4} + d_{2k-6} x^{2k-6} + d_{2k-8} x^{2k-8} + \dots + d_4 x^4 + d_2 x^2 + 1.$$

Współczynniki przy wyrazach położonych symetrycznie względem wyrazu środkowego we wzorze (1.54), tj. wyrazu $d_{2k-4} x^{2k-4}$ są sobie równe. Współczynniki d_m obliczone dla różnych k dadzą się ułożyć w trójkąt liczbowy (rys. 3).



Rys. 3

W celu wyznaczenia współczynników d_m wielomianu $W_k(x)$ w wyrazach leżących po jednej stronie wyrazu środkowego $d_{2k-4} x^{2k-4}$ można posłużyć się następującym wzorem rekurencyjnym

$$(1.55) \quad d_{2n-4} = d_{2n-6} + \frac{n(n-1)}{2}$$

lub wzorem bezpośrednim

$$(1.56) \quad d_{2n-2} = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3},$$

przy czym w obu tych wzorach $n = 2, 3, 4, 5, \dots$

W celu posługiwania się wzorem (1.55) należy przyjąć

$$(1.57) \quad d_0 = 1, \quad d_{-2} = 0.$$

Jak łatwo stwierdzić, na podstawie wzorów (1.55) oraz (1.56) wszystkie współczynniki d_m ($m = 0, 2, 4, 6, \dots$) wielomianu $W_k(x)$ dla każdego $k = 2, 3, 4, 5, \dots$ są dodatnie: $0 < d_m$.

Ponieważ wielomian $W_k(x)$ ma jedynie wyrazy o parzystych potęgach x , to wynika z tego, że równanie $W_k(x) = 0$ ($k = 2, 3, 4, 5, \dots$) nie ma pierwiastków rzeczywistych, a wobec tego oraz wobec (1.53), (1.52) i (1.51) wyróżnik (1.49) obu układów równań (1.47) i (1.48) jest różny od zera, tj. $\Delta \neq 0$ dla $k = 2, 3, 4, 5, \dots$. Układy równań (1.47) i (1.48) mają jednoznaczne rozwiązanie:

$$\left. \begin{array}{l} a_k = 0 \\ b_{k-2} = 0 \end{array} \right\} \text{ dla } k = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \dots$$

lub

$$(1.58) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_k = 0 & \text{dla } k = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \dots, \\ b_k = 0 & \text{dla } k = 0, 1, 2, 3; \pm 4, \pm 5, \dots \end{array} \right.$$

W ten sposób określiliśmy obie funkcje (1.9) i (1.10) w oparciu o wzory (1.11), (1.28), (1.37), (1.38) i (1.59)². Mamy

$$(1.59) \quad \Phi(z) = \frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \left(\frac{1}{z} + \frac{\kappa-1}{R_1^2 + R_2^2} z \right),$$

$$(1.60) \quad \Psi(z) = -\frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \left(\frac{\kappa}{z} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{\kappa-1}{z^3} \right).$$

Składowe stanu naprężenia we współrzędnych biegunowych r, θ wyrazimy za pomocą wzorów (por. [1], § 39)

$$(1.61) \quad \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} = 2 \operatorname{Re} [\Phi(z)] = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)},$$

$$(1.62) \quad \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} + i\tau_{r\theta} = [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] e^{2i\theta} = z\Phi'(z) + \frac{z^2}{r^2} \Psi(z),$$

² Funkcję $\Phi(z)$ określiliśmy z dokładnością do części urojonej wyrazu wolnego (por. [1], § 34).

gdzie $z = r e^{i\vartheta}$. Mamy ostatecznie

$$(1.63) \quad \sigma_r = \frac{c R_1^2}{2(\kappa + 1)} \left[\kappa + 3 + \frac{\kappa - 1}{R_1^2 + R_2^2} \left(\frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} + r^2 \right) \right] \frac{\cos \vartheta}{r},$$

$$(1.64) \quad \sigma_\vartheta = -\frac{c R_1^2}{2} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left[1 + \frac{1}{R_1^2 + R_2^2} \left(\frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - 3 r^2 \right) \right] \frac{\cos \vartheta}{r},$$

$$(1.65) \quad \tau_{r\vartheta} = -\frac{c R_1^2}{2} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left[1 - \frac{1}{R_1^2 + R_2^2} \left(\frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} + r^2 \right) \right] \frac{\sin \vartheta}{r}.$$

Naprężenie obwodowe σ_ϑ na brzegu wewnętrznym pierścienia ($r = R_1$) wynosi

$$(1.66) \quad [\sigma_\vartheta]_{r=R_1} = -c R_1 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \cos \vartheta,$$

zaś na brzegu zewnętrznym, tj. dla $r = R_2$,

$$(1.67) \quad [\sigma_\vartheta]_{r=R_2} = c \frac{R_1^2}{R_2} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \cos \vartheta.$$

Naprężenie to zmienia znak przy przejściu od jednego brzegu do drugiego dla ustalonego ϑ . Znikanie tego naprężenia przy dowolnym ϑ otrzymujemy dla $r = \varrho_1$ ($R_1 < \varrho_1 < R_2$), gdzie

$$(1.68) \quad \varrho_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(R_1^2 + R_2^2)^2 + 12 R_1^2 R_2^2} + R_1^2 + R_2^2}{6}}.$$

Naprężenie styczne $\tau_{r\vartheta}$ zgodnie z warunkiem brzegowym znika na obu brzegach, zaś wartość maksymalną osiąga przy ustalonym ϑ dla $r = \varrho_2$ ($R_1 < \varrho_2 < R_2$), gdzie

$$(1.69) \quad \varrho_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(R_1^2 + R_2^2)^2 + 12 R_1^2 R_2^2} - (R_1^2 + R_2^2)}{2}}.$$

2. Przemieszczenia nieważkiego pierścienia kołowego pod działaniem równoważących się ciśnień hydrostatycznych

Przemieszczenie punktów pierścienia (dla którego stan naprężenia wyznaczono w p. 1) znajdziemy ze wzoru G. W. Kołosowa (por. [1], § 32)

$$(2.1) \quad 2\mu [(u + u_0) + i(v + v_0)] = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},$$

gdzie κ oraz μ są to stałe materiałowe określone poprzednio; u i v oznaczają składowe przemieszczenia w prostokątnym układzie współrzędnych; u_0 i v_0 składowe przemieszczenia całego pierścienia jako ciała sztywnego³.

³ Jak wiadomo, przemieszczenia punktów pierścienia przy warunkach brzegowych określonych dla naprężeń można otrzymać z dokładnością do pewnego przemieszczenia u_0 i v_0 dla pierścienia jako ciała sztywnego.

Funkcje Goursata $\varphi(z)$ oraz $\psi(z)$ mają postać

$$(2.2) \quad \varphi(z) = \int \Phi(z) dz = \frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \left(\ln z + \frac{\kappa-1}{R_1^2+R_2^2} \frac{z^2}{2} \right),$$

$$(2.3) \quad \psi(z) = \int \Psi(z) dz = -\frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \left(\kappa \ln z - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2+R_2^2} \frac{\kappa-1}{2z^2} \right).$$

Po podstawieniu (2.2) i (2.3) do (2.1) otrzymamy

$$(2.4) \quad 2\mu [(u+u_0) + i(v+v_0)] = \frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \left\{ \kappa \ln r^2 - (\kappa-1) \frac{r^2}{R_1^2+R_2^2} - \left[1 - \frac{\kappa-1}{2(R_1^2+R_2^2)} \left(\kappa r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \right) \right] s^2 \right\}.$$

Przyjmując że

$$(2.5) \quad 2\mu(u_0 + iv_0) = \frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \left(\kappa \ln R_1 R_2 - \frac{\kappa-1}{2} \right)$$

otrzymamy

$$(2.6) \quad 2\mu(u+iv) = \frac{cR_1^2}{2(\kappa+1)} \left\{ \kappa \ln \frac{r^2}{R_1 R_2} - (\kappa-1) \frac{2r^2 - (R_1^2+R_2^2)}{2(R_1^2+R_2^2)} - \left[1 - \frac{\kappa-1}{2(R_1^2+R_2^2)} \left(\kappa r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \right) \right] s^2 \right\}.$$

Po rozbiściu (2.6) na część rzeczywistą oraz urojoną i podzieleniu przez 2μ otrzymamy na składowe przemieszczenia punktów pierścienia we współrzędnych prostokątnych co następuje

$$(2.7) \quad \begin{cases} u = \frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left\{ \kappa \ln \frac{r^2}{R_1 R_2} - (\kappa-1) \frac{2r^2 - (R_1^2+R_2^2)}{2(R_1^2+R_2^2)} - \left[1 - \frac{\kappa-1}{2(R_1^2+R_2^2)} \left(\kappa r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \right) \right] \cos 2\vartheta \right\}, \\ v = \frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left[1 - \frac{\kappa-1}{2(R_1^2+R_2^2)} \left(\kappa r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \right) \right] \sin 2\vartheta. \end{cases}$$

Składowe prostokątne przemieszczenia punktów leżących na brzegu wewnętrznym pierścienia są określone wzorami

$$(2.8) \quad \begin{cases} [u]_{r=R_1} = \frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left\{ -\kappa \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\kappa-1}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2+R_2^2} - \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{\kappa R_1^2 - R_2^2}{R_1^2+R_2^2} \right] \cos 2\vartheta \right\}, \\ [v]_{r=R_1} = \frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{\kappa R_1^2 - R_2^2}{R_1^2+R_2^2} \right] \sin 2\vartheta. \end{cases}$$

zaś dla brzegu zewnętrznego

$$(2.9) \quad \begin{cases} [u]_{r=R_2} = \frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left\{ \kappa \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{\kappa-1}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} - \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{\kappa R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right] \cos 2\vartheta \right\}, \\ [v]_{r=R_2} = -\frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{\kappa R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right] \sin 2\vartheta. \end{cases}$$

Przemieszczenie punktów pierścienia możemy również przedstawić za pomocą składowych biegunowych v_r oraz v_ϑ . Między składowymi prostokątnymi przemieszczenia a składowymi biegunowymi istnieje następująca zależność (por. [1], § 39):

$$(2.10) \quad v_r + iv_\vartheta = (u + iv) \frac{1}{s}.$$

Stąd wynikają wzory:

$$(2.11) \quad \begin{cases} v_r = \frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left[\kappa \ln \frac{r^2}{R_1 R_2} + \frac{\kappa-1}{R_1^2 + R_2^2} \left(\frac{\kappa-2}{2} r^2 + \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} - \frac{R_1^2 R_2^2}{2r^2} \right) - 1 \right] \cos \vartheta, \\ v_\vartheta = \frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left[-\kappa \ln \frac{r^2}{R_1 R_2} + \frac{\kappa-1}{R_1^2 + R_2^2} \left(\frac{\kappa+2}{2} r^2 - \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} - \frac{R_1^2 R_2^2}{2r^2} \right) - 1 \right] \sin \vartheta. \end{cases}$$

Składowe przemieszczenia punktów leżących na brzegu wewnętrznym pierścienia we współrzędnych biegunowych wynoszą

$$(2.12) \quad \begin{cases} [v_r]_{r=R_1} = \frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left[-\kappa \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{(\kappa-1)^2}{2} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} - 1 \right] \cos \vartheta, \\ [v_\vartheta]_{r=R_1} = \frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left[\kappa \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\kappa-1}{2} \frac{(\kappa+1)R_1^2 - 2R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} - 1 \right] \sin \vartheta, \end{cases}$$

zaś dla brzegu zewnętrznego

$$(2.13) \quad \begin{cases} [v_r]_{r=R_2} = \frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left[\kappa \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{(\kappa-1)^2}{2} \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} - 1 \right] \cos \vartheta, \\ [v_\vartheta]_{r=R_2} = \frac{cR_1^2}{4\mu(\kappa+1)} \left[-\kappa \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\kappa-1}{2} \frac{(\kappa+1)R_2^2 - 2R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} - 1 \right] \sin \vartheta. \end{cases}$$

3. Wyznaczenie przestrzennego stanu naprężenia rury jednorodnej poddanej równoważącemu się ciśnieniu wewnętrznemu i zewnętrznemu

Przy założeniu istnienia płaskiego stanu odkształcenia w rurze otrzymamy na naprężenie główne σ_z^1 działające w kierunku osi rury wzór

$$(3.1) \quad \sigma_z^1 = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] = \frac{2\nu c R_1^2}{\kappa + 1} \left(\frac{\kappa - 1}{R_1^2 + R_2^2} r + \frac{1}{r} \right) \cos \vartheta,$$

gdzie ν jest stałą Poissona.

Wypadkowa tych naprężeń działająca na cały przekrój rury daje w wyniku moment zginający M_1 w płaszczyźnie zx

$$(3.2) \quad M_1 = \int_D \int \sigma_z^1 x dx dy = \frac{\nu c R_1^2 \pi}{2} (R_2^2 - R_1^2),$$

co otrzymamy po uwzględnieniu (3.1).

Pojawienie się tego momentu jest uwarunkowane istnieniem płaskiego stanu odkształcenia rury. Z takim przypadkiem mamy do czynienia przy długich rurociągach, gdzie nie ma możliwości ich wyginania się.

Dla rury krótkiej płaskie odkształcenie można zrealizować praktycznie dzięki odpowiedniemu zamocowaniu jej końców (podstaw). Podstawy rury muszą być utwierdzone w sposób zapewniający ich płaskość, wzajemną równoległość i stałą odległość (warunek przylgowego ślizgania się po stałych płaszczyznach) (por. [2], rozdz. 3).

Jeżeli końce takiej rury są swobodne i rura może się wyginać (np. łódź podwodna) to otrzymamy ostateczny stan naprężenia superponując stan naprężenia odpowiadający płaskiemu odkształceniu rury i stan naprężenia wynikły od działania momentu $-M_1$. Działanie tego momentu kasuje moment $+M_1$, który jest wypadkową naprężeń σ_z^1 na podstawach rury. Stan naprężenia pochodzący od momentu $-M_1$ nazwijmy stanem kompensującym i oznaczymy jego składową główną przez

$$(3.3) \quad \sigma_z^0 = -\frac{2\nu c R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} r \cos \vartheta.$$

Ostatecznie na wypadkowe naprężenie głównie w kierunku długości rury otrzymamy

$$(3.4) \quad \sigma_z = \sigma_z^0 + \sigma_z^1 = \frac{2\nu c R_1^2}{\kappa + 1} \left(\frac{1}{r} - \frac{2r}{R_1^2 + R_2^2} \right) \cos \vartheta.$$

Naprężenie to osiąga na brzegu wewnętrznym ($r = R_1$) wielkość

$$(3.5) \quad [\sigma_z]_{r=R_1} = \frac{2\nu c R_1}{\kappa + 1} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \cos \vartheta,$$

zaś na brzegu zewnętrznym

$$(3.6) \quad [\sigma_z]_{r=R_2} = -\frac{2\nu c R_1 R_2 R_2^2 - R_1^2}{\kappa + 1 R_2 R_1^2 + R_2^2} \cos \vartheta.$$

Napężenie σ_z przyjmuje wartość zera przy dowolnym ϑ dla $r = \varrho_3$ ($R_1 < \varrho_3 < R_2$), gdzie

$$(3.7) \quad \varrho_3 = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}}.$$

4. Stan napężenia w wąskiej rurze pływającej poziomo w cieczy

Weźmy pod uwagę rurę o promieniu wewnętrznym R_1 i zewnętrznym R_2 . Rura ta z materiału, którego ciężar właściwy wynosi γ_0 , wypełniona jest wewnątrz cieczą o ciężarze właściwym γ_1 i pływa poziomo w cieczy o ciężarze właściwym γ_2 . Średnie ciśnienie wewnątrz rury wynosi p_1 (mierzone na wysokości $x = 0$), zaś średnie ciśnienie zewnątrz rury wynosi p_2 (również mierzone na wysokości $x = 0$). Należy zaznaczyć, że z pięciu wielkości $R_1, R_2, \gamma_0, \gamma_1$ i γ_2 tylko cztery są niezależne, a pozostała piątka jest ich funkcją. Okoliczność ta wynika z warunku równowagi (pływania rury). Wielkości p_1 i p_2 są niezależne.

W celu wyznaczenia składowych stanu nateżenia przyjmijmy, że γ_2 jest funkcją R_1, R_2, γ_0 i γ_1 ; wtedy

$$(4.1) \quad \gamma_2 = \frac{\gamma_0(R_2^2 - R_1^2) + \gamma_1 R_1^2}{R_2^2},$$

co wynika z prawa Archimedeasa.

Całe zagadnienie można rozbić na trzy oddzielne zagadnienia mianowicie:

Zagadnienie pierwsze, czyli zadanie Lamégo.

Warunki brzegowe dla tego zagadnienia są następujące:

$$(4.2) \quad \begin{cases} [\sigma_r]_{r=R_1} = -p_1, & [\tau_{r\vartheta}]_{r=R_1} = 0, \\ [\sigma_r]_{r=R_2} = -p_2, & [\tau_{r\vartheta}]_{r=R_2} = 0. \end{cases}$$

Zagadnienie drugie odpowiada rozwiązaniu szczególnemu równań teorii sprężystości uwzględniających siły objętościowe. Warunki brzegowe dla tego zagadnienia są następujące:

$$(4.3) \quad \begin{cases} [\sigma_r]_{r=R_1} = -\gamma_0 x, & [\tau_{r\vartheta}]_{r=R_1} = 0, \\ [\sigma_r]_{r=R_2} = -\gamma_0 x, & [\tau_{r\vartheta}]_{r=R_2} = 0, \end{cases}$$

zaś rozwiązaniem jest

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\gamma_0 x, \quad \tau_{r\theta} = 0.$$

Zagadnienie trzecie odpowiada rozwiązaniu nieważkiej rury obciążonej równoważącymi się ciśnieniami hydrostatycznymi spełniającymi następujące warunki brzegowe

$$(4.4) \quad \begin{cases} [\sigma_r]_{r=R_1} = (\gamma_0 - \gamma_1) x, & [\tau_{r\theta}]_{r=R_1} = 0, \\ [\sigma_r]_{r=R_2} = (\gamma_0 - \gamma_1) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 x, & [\tau_{r\theta}]_{r=R_2} = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie trzeciego zagadnienia podają wzory (1.63), (1.64) i (1.65), w których należy podstawić $c = \gamma_0 - \gamma_1$.

Ostatecznie rozwiązanie problemu ogólnego otrzymamy dodając do siebie rozwiązania wszystkich trzech zagadnień szczególnych.

Literatura cytowana w tekście

[1] N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Groningen-Holland 1953 (tłum. z ros.).

[2] L. Martini, *Płaskie zagadnienie teorii sprężystości ciała poddanego działaniu sił skupionych*, Warszawa 1957.

Резюме

КРУГОВОЕ КОЛЬЦО ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

В работе определяется напряженное состояние в однородном круговом кольце под действием внутреннего и внешнего гидростатического давления, изменяющегося линейно вдоль одного из диаметров.

Эта задача отвечает весоной пустой трубе (или наполненной легкой жидкостью), плавающей в горизонтальном положении в тяжелой жидкости. Эту проблему можно назвать плоской задачей «батискафа».

На практике часто встречается этого рода нагрузка трубы. Достаточно напомнить о нефтепроводах, зарытых в песке (напр., в пустыне), а также о плавающих электрических, глубоководных кабелях, в которых изолирующее масло находится под гидростатическим давлением.

В пкт. 1 определяется напряженное состояние в невесоной круговом кольце под действием внутреннего $p_1 = -cx$ и внешнего $p_2 = (R_1/R_2)^2 p_1$ давлений (эти давления изменяются линейно по направлению к оси x); R_1 и R_2 — внутренний и наружный диаметры кольца.

В пкт. 2 определяются перемещения кольца, находящегося под действием нагрузки, такой же как в пкт. 1.

В пкт. 3 определяется напряженное состояние в трубе, дополняя напряженное состояние согласно пкт. 1 нормальным главным напряжением, действующим по продольному направлению трубы, в зависимости от краевых условий, определенных для концов трубы.

В пкт. 4 определяется напряженное состояние в весомой трубе, плавающей в горизонтальном положении в жидкости, как сумму трех напряженных состояний, а именно: (1) напряженного состояния, отвечающего задаче Ламе; (2) напряженного состояния, являющегося решением частных уравнений теории упругости при учете объемных сил (действующих по направлению к оси x) $\sigma_r = \sigma_s = -\gamma_0 x$, $\tau_{rs} = 0$, причем γ_0 есть удельный вес трубы; (3) напряженного состояния, в весо-мной трубе, находящейся под внутреннем $p_1 = -cx$, а также внеш-нем $p_2 = (R_1/R_2)^2 p_1$ давлениями, где R_1 и R_2 диаметры трубы.

Summary

THE PROBLEM OF A CIRCULAR RING UNDER THE ACTION OF INTERNAL AND EXTERNAL HYDROSTATIC PRESSURE

The state of stress in a homogeneous circular ring under the action of internal and external hydrostatic pressure linearly variable along one of the diameters is determined.

This problem corresponds to that of an empty tube (or a tube filled up with a light liquid) having a mass and immersed horizontally in a heavy liquid. It may be called the plane «bathyscaph» problem.

Tubes so loaded are often met in practice. Suffice it to mention oil pipe lines in sand (in desert regions) or subaqueous cables in which the insulating oil is under hydrostatic pressure.

In Art. 1, the state of stress in a weightless circular ring loaded by an internal pressure $p_1 = -cx$ and an external pressure $p_2 = (R_1/R_2)^2 p_1$ (the pressures are linearly variable in the x -direction) is determined. R_1 and R_2 are the inner and the outer radius of the ring.

In Art. 2, the displacements are obtained for the same ring.

In Art. 3, the state of stress in the tube is found by completing the state of stress obtained in the Art. 1 by a normal, principal stress acting in the direction of the tube axis depending on the boundary conditions for the tube ends.

In Art. 4, the state of stress in a tube having a mass and immersed horizontally in a liquid is determined as a sum of the following:

(1) the state of stress corresponding to the Lamé problem;

(2) the state of stress constituting a particular solution of the equations of the theory of elasticity taking into consideration mass forces (acting in the x -direction),

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\gamma_0 x, \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

where γ_0 is the specific gravity of the tube;

(3) the state of stress in a weightless tube loaded by an internal pressure $p_1 = -cx$ and an external pressure $p_2 = (R_1/R_2)^2 p_1$ where R_1 and R_2 are the radii of the tube.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji w dniu 16 marca 1957 r.