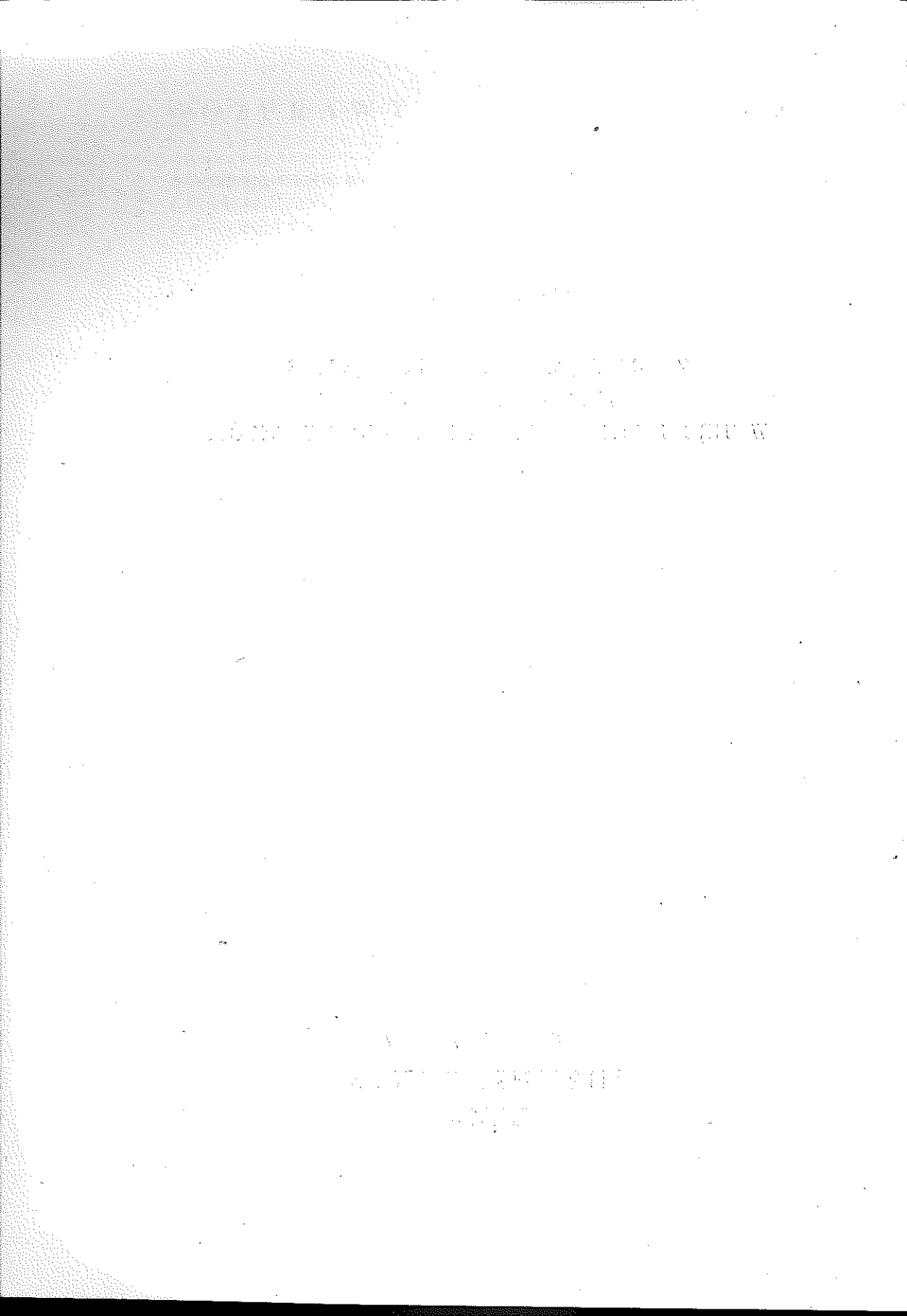


JAN MADEJSKI

ZAPRAWA, OPÓŹNIENIE SPRĘŻYSTE
I NAPRĘŻENIA RESZTKOWE
W UJĘCIU DYNAMICZNEJ TEORII PLASTYCZNOŚCI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXXX



1. Podstawowym modelem stereomechanicznym jest jednorodne continuum materialne: model ten, początkowo izotropowy, uogólniony został później przez wprowadzenie pojęcia anizotropii i «regularnej»¹ niejednorodności. Jeżeli chodzi o ciała stałe o budowie krystalicznej, to szczególną anizotropię objawiają, jak wiadomo, monokrystality. Pojedyncze kryształy, które można «wyhodować» za pomocą metod Tammana, Czochralskiego, Kyropoulosa, Bridgmana, Chalmersa, Kapicy i in., poddane obciążeniu doznają odkształceń plastycznych wskutek poślizgów na charakterystycznych dla danego typu kryształu płaszczyznach poślizgu i w określonych kierunkach poślizgu. Monokrystality zdolne są przyjmować obciążenia bez powstawania odkształceń plastycznych wykazując własności sprężyste, jednak górna granica obciążeń nie wywołujących poślizgów, tj. granica sprężystości jest bardzo mała i wynosi zaledwie kilka kilogramów na centymetr kwadratowy. Monokrystality są bardzo «plastyczne»; poddane obciążeniu mogą doznać przemieszczeń przekraczających nieraz początkowe wymiary próbki bez widocznych uszkodzeń. Odnosi się to zwłaszcza do metali, których zachowanie się stanowi przedmiot niniejszej pracy. Metale i ich stopy jako materiały konstrukcyjne nie mają struktury monokrystalicznej, lecz polikrystaliczną. W przypadku gdy ich struktura nie przejawia wyraźnej tekstury, poszczególne dendryty usytuowane są względem siebie w sposób nieuporządkowany. Powoduje to trudność ustalenia się uprzywilejowanych płaszczyzn i kierunków poślizgu, toteż polikrystality są niejako «skrepowane» pod względem możliwości powstawania odkształceń plastycznych. Budowa polikrystaliczna wykazuje tak odmienne cechy w stosunku do monokrystalitów tego samego metalu, że do tej pory stanowiska metaloznawców i mechaników względem mechanizmu odkształceń plastycznych nie są ściśle skonkretyzowane, a nieraz bardzo różne.

O ile można sobie wytłumaczyć mniejsze możliwości odkształcenia plastycznego polikrystalitów w porównaniu z monokrystalitami (różne

¹ Wyraz «niejednorodność» został uzupełniony przymiotnikiem «regularna» w tym celu, aby podkreślić ciągłość funkcji miejsca określających wielkości właściwe (gęstościowe), charakteryzujące cechy fizyczne materiału; funkcje te są ciągłe w dostatecznie dużych obszarach i można je określić jako funkcje punktu P , np. $E(P)$, $\sigma_p(P)$ itp.

plaszczyny i kierunki poślizgu w ziarnach dendrytycznych), o tyle trudno jest wyjaśnić fakt, że granica sprężystości polikryształitów jest kilkadziesiąt czy kilkaset razy większa od granicy sprężystości monokryształu tego samego metalu. W dodatku granica sprężystości monokryształu zależy tylko od temperatury; granicę sprężystości próbki polikryсталicznej (na którą ogromny wpływ ma również temperatura) możemy natomiast podwyższyć stosując zaprawę (trenowanie), czego nie można oczekiwać od monokryształu.

Skoro właściwości strukturalne wpływają w tak zasadniczy sposób na charakter i warunki powstawania odkształceń plastycznych, to nie wolno szukać wyjaśnienia «mechanizmu» tego zjawiska zaniehbując właściwości struktury materiału konstrukcyjnego i jej zmian w procesie obciążenia. Zmiany strukturalne materiału poddanego obciążeniu mają niejednokrotnie taki sam przebieg i skutki, jak zmiany strukturalne w procesie obróbki termicznej. Wniosek ten, swego czasu rewolucyjny, wysnuty został dwadzieścia kilka lat temu przez uczonych radzieckich A. A. Boczwarą i W. N. Swiecznikowa, [1]. Opierając się na tym spostrzeżeniu poświęcimy nieco miejsca omówieniu istoty zmian strukturalnych w metalach i ich stopach o budowie polikryсталicznej oraz klasyfikacji tych zmian.

2. Omawiając zmiany strukturalne materiałów sięgniemy w głąb materiału tylko tak daleko, aby uchwycić zmiany submikroskopowe, do których zaliczymy reakcje chemiczne i przemiany alotropowe. W ujęciu mikroskopowym zmiany strukturalne będą nosiły charakter dyfuzyjny; będą one spowodowane przez absorpcję lub desorpcję faz. Do zmian mikroskopowych zaliczymy również zjawisko powstawania lub też zaniku tekstury. Zmiany makroskopowe (w naszej klasyfikacji) będą polegały na rozroście lub fragmentacji ziarna.

Dla zbadania wpływu struktury istotne jest zajęcie stanowiska, które z wymienionych zjawisk mają charakter pierwotny, a które wtórny, i wreszcie czy można zmiany należące do poszczególnych grup traktować niezależnie.

Rozpatrzmy najpierw reakcje chemiczne mogące zachodzić w stopie (gdyż tylko ze stopami mamy do czynienia w praktyce) pod wpływem zmian temperatury. Doprowadzenie ciepła aktywacji powodujące zmianę temperatury i zakłócenie równowagi chemicznej wywołuje tworzenie się związku chemicznego lub jego rozpad (dysocjacje). Zasady termodynamiki chemicznej pozwalają na określenie wzajemnego stosunku koncentracji substratów i produktów reakcji w określonych warunkach (przy określonej temperaturze). Kinetyka reakcji jest przy tym zobrazowana równaniem

$$(2.1) \quad \frac{dc}{dt} = k_n \prod_{i=1}^n c_i,$$

gdzie c oznacza koncentrację rozpatrywanego składnika, c_i koncentrację innych składników, t czas, n rząd reakcji oraz k_n stałą reakcji chemicznej n -tego rzędu. W szczególnym przypadku dysocjacji mamy do czynienia zazwyczaj z reakcją odwracalną (w sensie chemicznym, lecz, oczywiście, nie termodynamicznym) monomolekularną, toteż równanie (2.1) upraszcza się:

$$(2.2) \quad -\frac{dc}{dt} = kc;$$

tutaj c oznacza koncentrację substratu.

Zależność stałej reakcji chemicznej od temperatury wyznacza się z zasad kinetycznej teorii materii.

Kinetyka przemian alotropowych (tj. zmian fazowych typu kryształ \rightarrow kryształ) wykazuje zupełną analogię z kinetyką reakcji chemicznej. Ze statystycznej teorii zmian fazowych można bowiem wyznaczyć prawdopodobieństwo statystyczne (tj. ułamek całkowitego czasu obserwacji, podczas którego egzystuje rozpatrywany stan) pojawienia się zarodka nowego kryształu, równające się iloczynowi średniego okresu «życia» zarodka i częstości, z jaką zarodek nowego kryształu pojawia się w jednostce czasu. Prawdopodobieństwo to jest proporcjonalne do ilości «starej» fazy, zaś częstość — do ubytku starej fazy w jednostce czasu. Oznaczając koncentrację starej fazy symbolem c otrzymujemy równanie kinetyczne przemiany fazowej w postaci (2.2), a więc identycznej z równaniem kinetycznym reakcji chemicznej.

Nadmieniamy, że zarówno reakcje chemiczne, jak i przemiany alotropowe mogą mieć charakter egzotermiczny lub też endotermiczny, jeśli tylko mają charakter odwracalny (podkreślamy, że chodzi o odwracalność chemiczną, odnoszącą się do reakcji, których prędkości w obu kierunkach są tego samego rzędu).

Wymienione zmiany strukturalne typu «submikroskopowego» są skutkiem zmian temperatury i doprowadzenia (lub odprowadzenia) ciepła. Są one jednocześnie przyczyną zjawisk typu «mikroskopowego» tj. dyfuzji.

Zmiany strukturalne mikroskopowe o charakterze dyfuzyjnym (tworzenia tekstury nie będziemy uwzględniali uważając strukturę za niewykazującą tekstury) mają zatem charakter wtórny. Zmian tych nie można już rozpatrywać «globalnie» jak zmiany submikroskopowe; konieczne jest tu wzięcie pod uwagę struktury początkowej.

Rozpatrzmy przypadek struktury w postaci ziarn dendrytycznych kryształów granicznego roztworu stałego, ujednorodnionego. Ziarna te oddzielone są od siebie «spoiwem» interkrystalicznym, posiadającym charakter mieszaniny eutektycznej².

² Substancja interkrystaliczna zawiera zanieczyszczenia i wszelkiego rodzaju zbyteczne fazy. Niektórzy autorzy twierdzą, że znajdują się tam przestrzenie wypełnione gazem («puste» przestrzenie).

Tego rodzaju struktura może być traktowana ogólnie biorąc jako jednorodna i izotropowa; w ujęciu mikroskopowym wykazuje jednak wybitną niejednorodność nieregularną, tym większą, im większe są różnice we właściwościach fizycznych kryształów oraz spoiwa. Niejednorodność własności fizycznych takich jak ciepło właściwe, współczynnik przewodzenia ciepła, gęstość powoduje niejednorodny rozkład temperatury przy jej zmianach.

Niejednorodność pod względem stereomechanicznym powoduje również niejednorodny stan naprężeń i odkształceń, a po ustaniu obciążenia jest przyczyną powstawania tzw. naprężeń resztkowych drugiego rodzaju (por. [2]).

Jeżeli w materiale następują zmiany strukturalne typu «submikroskopowego» związane z efektem cieplnym, to wskutek niejednorodnego rozkładu temperatury istnieją w materiale miejscowe duże gradienty temperatury, umożliwiające samodyfuzję; nadmiar wydzielonej fazy w jednym miejscu powoduje prócz tego dyfuzję tej fazy w kierunku gradientu koncentracji.

Praktyka wykazuje, że faza wydzielona w ziarnach dendrytycznych wskutek przemian typu submikroskopowego dyfunduje do przestrzeni interkrystalicznych. Zjawisko to może iść w kierunku powiększania «szerokości» przestrzeni interkrystalicznych bądź też w kierunku powiększania ich «długości». To ostatnie zjawisko związane jest z fragmentacją ziarna. Odwrotnie, jeśli zmiany typu submikroskopowego wymagają doprowadzania substratów z przestrzeni interkrystalicznych, to mamy do czynienia ze zmniejszaniem się szerokości przestrzeni bądź też z ich «skróceniem» tj. z rozrostem ziarna. Oczywiście w ogólnym przypadku mogą istnieć obok siebie oddzielone spoiwem ziarna dendrytyczne różnych faz lub roztworów. Przypadek taki stanowi uogólnienie przypadku poprzednio opisanego.

Jeśli założymy, że szerokość przestrzeni wypełnionych spoiwem jest mniej więcej stała, to wtórnym zjawiskiem względem zmian strukturalnych mikroskopowych będą zmiany ziarnistości, tj. zmiany strukturalne makroskopowe (w naszym ujęciu). Przyjmując materiał o tak opisanej strukturze za model rozpatrzmy zachowanie się próbki z tego materiału, posiadającej dostatecznie duże rozmiary, poddanej jednokierunkowym obciążeniom. Będziemy przy tym posługiwali się metodą dynamicznej teorii plastyczności, [10].

3. Jak wiadomo, drobnoziarnistość stopów, w szczególności stali, korzystnie wpływa na ich własności wytrzymałościowe. Między innymi zaprawa (trenowanie) materiału powoduje wzrost wytrzymałości zmęczeniowej; zjawisko to wytłumaczymy właśnie fragmentacją ziarna.

Wyobraźmy sobie jednostkę objętości (w postaci graniastosłupa o wysokości jednostkowej) materiału o strukturze złożonej z ziarn dendrytycz-

nych konglomeratu (a) o wymiarach niewspółmiernie małych w porównaniu z jednostką długości oraz ze spoiwa interkrystalicznego (b).

Opisana struktura niechaj nie wykazuje tekstury (taki materiał można uważać za quasi-izotropowy); prócz tego założmy, że możliwe są odwracalne przemiany submikroskopowe typu

$$(3.1) \quad (a) \rightleftharpoons (b),$$

związane z efektem cieplnym γq kcal/m³ (γ oznacza ciężar właściwy). Dla prostoty założymy, że przemiana (3.1) nie jest związana z tzw. kontrakcją chemiczną, tzn. $\gamma = \gamma_a = \gamma_b = \text{const}$. Założenie to pociąga za sobą następnie: nie będziemy uwzględniali wpływu naprężeń resztkowych wyższych rzędów.

Z punktu widzenia dynamicznej teorii plastyczności właściwości stereomechaniczne określają dwie pary funkcji materiałowych ³ (E, σ_E) i (Θ, η_z), z których pierwsza odnosi się do stanów sprężystych, druga zaś do plastycznych; dwie prawe funkcje określają przy tym zakres stanów sprężystych σ_E i plastycznych η_z . Doświadczenie wskazuje, że spoiwo interkrystaliczne (b) wykazuje wyższe własności sprężyste niż kryształki dendrytyczne. W szczególności wyższa będzie granica sprężystości spoiwa w porównaniu z dendrytami.

Będziemy operowali pojęciem prawdziwej granicy sprężystości, tj. taką wartością naprężeń, powyżej której wydziela się ciepło tarcia poślizgów plastycznych.

Oznaczmy prawdziwe granice sprężystości rozpatrywanych konglomeratów (a) i (b) przez σ_{Ea} i σ_{Eb} ; będzie zatem $\sigma_{Eb} > \sigma_{Ea}$. Założmy, także $E_b \geq E_a$. Co do funkcji określających stan plastyczny, to należy oczekiwać, że $\Theta_b > \Theta_a$ (Θ oznacza czas wiotczenia izotermicznego).

Graniczne drogi poślizgu dla obu substancji η_{za} i η_{zb} zmieniają się częstokroć pod wpływem temperatury w różny sposób; np. dla stali w niskiej temperaturze $\eta_{zb} > \eta_{za}$, zaś w temperaturze wysokiej $\eta_{zb} < \eta_{za}$.

Strukturę opisanego materiału można sobie wyobrazić jako plaster miodu, w którym rolę wosku spełnia konglomerat (b), zaś rolę miodu — konglomerat (a) z tym, że «miód» jest w stanie rozpuszczać lub wydziełać «wosk».

Jeżeli w takim «plastrze miodu» wywołamy quasi-jednokierunkowy stan obciążenia, to jest wysoce prawdopodobne, że większość obciążenia

³ Pominięto jeszcze jeden moduł uważany za niezależny, tj. moduł Kirchhoffa. Zamiast niego podaje się też liczbę Poissona jako wielkość niezależną. Pominięcie ν jako stałej niezależnej uzasadnia się teorią Poissona, z której wynika, że dla stanów sprężystych $\nu = 1/4$. Ostatnie badania, [13], nad zjawiskiem wiotczenia (relaksacji) potwierdzają jeszcze raz teorię Poissona: dla odkształceń sprężystych $\nu = 1/4$, dla plastycznych $\nu = 1/2$. Wobec stałości ν dla stanów sprężystych własności sprężyste (sztywność) określa tylko jeden moduł, np. E .

zostanie przejęta przez ścianki wosku równoległe do kierunku działania siły zewnętrznej.

Przecinając plaster płaszczyzną prostopadłą do kierunku działania siły zewnętrznej naliczymy na 1 cm² przekroju b cm² zajętych przez materiał (b).

Wielkość b jest w zasadzie zmienną losową; w rachunkach poniższych utożsamiamy ją jednak z jej wartością oczekiwaną. W praktyce wielkość b uznamy za funkcję materiałową wyliczoną na podstawie eksperymentu.

Będziemy uważali wielkość b za przekrój pionowych ścianek pracujących, zaś wielkość βb za objętość wypełnioną przez konglomerat (b) w 1 cm³ «plastra». Przy takich założeniach równanie równowagi ma postać następującą:

$$(3.2) \quad \sigma = (1 - b) \sigma_a + b \sigma_b,$$

gdzie σ jest siłą zewnętrzną przypadającą na 1 cm² powierzchni przekroju plastra, σ_a naprężeniem (średnim) w materiale (a), σ_b naprężeniem (średnim) w materiale (b).

Założmy, że $\sigma_{Ea} < \sigma < \sigma_{Eb}$. W takim przypadku zasady dynamicznej teorii plastyczności, [10], dostarczają następujących równań (przy pominięciu energii mechanicznej kinetycznej i potencjalnej):

$$(3.3) \quad \dot{\epsilon}_a = \frac{\dot{\sigma}_a}{E_a} + \frac{\sigma_a - \sigma_{Ea}}{E_a \Theta_a},$$

$$(3.4) \quad \dot{\epsilon}_b = \frac{\dot{\sigma}_b}{E_b}.$$

Dla zachowania spójności materiału musi być $\dot{\epsilon}_a = \dot{\epsilon}_b$.

Stąd

$$(3.5) \quad \frac{\dot{\sigma}_b}{E_b} - \frac{\dot{\sigma}_a}{E_a} = \frac{\sigma_a - \sigma_{Ea}}{E_a \Theta_a}.$$

Podczas poślizgów w materiale (a) wydziela się ciepło tarcia \dot{Q} kcal/cm³s:

$$(3.6) \quad \dot{Q} = \frac{A \sigma_a (\sigma_a - \sigma_{Ea})}{E_a \Theta_a} (1 - \beta b) = \frac{A \sigma_a (\sigma_a - \sigma_{Ea})}{E_a \Theta_a} \alpha a,$$

przy czym $\alpha a = 1 - \beta b$, $\alpha = (1 - \beta b)/(1 - b) = \text{const}$ (założenie upraszczające).

Wydzielone ciepło służy częściowo do zamiany fazy (a) na fazę (b) (ciepło \dot{Q}_f) zgodnie z równaniem

$$(3.7) \quad \dot{Q}_f = -q \gamma a \frac{da}{dt}$$

Następnie wydzielone ciepło powoduje częściowo wzrost temperatury próbki (\dot{Q}_t), w końcu zaś wymienione jest z otoczeniem (\dot{Q}_0). Oczywiście $\dot{Q}_0 > 0$, jeżeli $\dot{Q}_t > 0$. Dla $\dot{Q}_t = 0$ musi być $\dot{Q}_0 = 0$; wtedy zjawisko ma charakter izotermiczny.

Ogólnie biorąc mamy

$$(3.8) \quad \dot{Q} = \dot{Q}_t + \dot{Q}_t + \dot{Q}_0.$$

Jeśli $\dot{Q}_t = \dot{Q}_0 = 0$, to obciążenie przebiega izotermicznie; zatem, mimo przekroczenia granicy sprężystości materiału (a), nie zaobserwuje się wzrostu temperatury. Określając jako prawdziwą granicę sprężystości materiału σ_E taką siłą zewnętrzną, przypadającą na jednostkę powierzchni przekroju, po której przekroczeniu można zauważyć wzrost temperatury próbki (Dinnik, Stromeyer, Buchner), możemy stwierdzić, że mimo wydzielania się ciepła tarcia wskutek poślizgów w materiale (a) prawdziwa granica sprężystości dla całego materiału nie została osiągnięta. Stan równowagi termicznej próbki zostanie naruszony dopiero wtedy, gdy ciepło tarcia \dot{Q} stanie się na tyle duże, aby móc «produkować» więcej materiału fazy (b), aniżeli wynika to z kinetycznego równania tej reakcji:

$$(3.9) \quad -\frac{da}{dt} = ka.$$

Rozpatrzmy przypadek izotermiczny: $\dot{Q}_t = \dot{Q}_0 = 0$. Dla uproszczenia założymy dodatkowo, że $E_b = E_a = E$ oraz $\sigma_{Ea} = 0$ (granica sprężystości dendrytów jest w istocie nader mała). W takim przypadku uzyskamy do rozwiązania układ trzech równań o niewiadomych σ_a , σ_b i a :

$$(3.10.1) \quad \sigma = a\sigma_a + (1-a)\sigma_b,$$

$$(3.10.2) \quad \dot{\sigma}_b - \dot{\sigma}_a = \frac{\sigma_a}{\Theta_a},$$

$$(3.10.3) \quad \frac{A\sigma_a^2}{E\Theta_a} a = -q\gamma\dot{a}.$$

Wprowadzając czas homologiczny substancji (a) $t_H \equiv t_{Ha} = t/\Theta_a$ oraz nową zmienną $X = \sigma_b - \sigma_a$ sprowadzamy układ (3.10) do jednego równania różniczkowego:

$$(3.11) \quad \sigma = \frac{dX}{dt_H} + X \left[1 - a_0 \exp \left(-\frac{A}{q\gamma E} \int_0^{t_H} \left(\frac{dX}{dt_H} \right)^2 dt_H \right) \right],$$

przy czym a_0 oznacza wartość a w chwili $t = 0$.

Interesujące nas wielkości wyznaczamy ze wzorów:

$$(3.12.1) \quad \sigma_a = \frac{dX}{dt_H},$$

$$(3.12.2) \quad \sigma_b = \frac{dX}{dt_H} + X,$$

$$(3.12.3) \quad a = a_0 \exp \left[-\frac{A}{q\gamma E} \int_0^{t_H} \left(\frac{dX}{dt_H} \right)^2 dt_H \right].$$

Warunki początkowe równania (3.11) ustalamy każdorazowo indywidualnie; np. dla $\sigma = 0$ i stanu neutralnego (nie ma naprężeń reszkowych) w chwili $t_H = 0$ mamy $X = 0$ oraz $dX/dt_H = 0$.

Wielkość

$$(3.13) \quad \frac{A}{q\gamma E} = \mu > 0$$

jest zazwyczaj bardzo mała.

Przyjmując (dla przykładu) $q = 6$ kcal/kg, $\gamma = 7,8$ kg/dm³, $E = 2 \cdot 10^6$ at, $A = 2,34 \cdot 10^{-5}$ kcal/at cm³, otrzymamy

$$\mu = 2,54 \cdot 10^{-10} \text{ at}^{-2}.$$

Z tej przyczyny w rozwinięciu

$$(3.12.3.1) \quad \exp \left[-\mu \int_0^{t_H} \left(\frac{dX}{dt_H} \right)^2 dt_H \right] = 1 - \mu \int_0^{t_H} \left(\frac{dX}{dt_H} \right)^2 dt_H + \\ + \frac{\mu^2}{2} \left[\int_0^{t_H} \left(\frac{dX}{dt_H} \right)^2 dt_H \right]^2 - \frac{\mu^3}{6} \left[\int_0^{t_H} \left(\frac{dX}{dt_H} \right)^2 dt_H \right]^3 + \dots,$$

pominiemy wyrazy w potęgach począwszy od drugiej. W związku z tym równanie (3.11) przybierze postać

$$(3.14) \quad \sigma = \frac{dX}{dt_H} + b_0 X + \mu X \int_0^{t_H} \left(\frac{dX}{dt_H} \right)^2 dt_H.$$

W równaniu tym funkcja $\sigma(t_H)$ ma być dana z góry, zaś wielkości b_0 oraz μ są tzw. małymi parametrami ($b_0 = 1 - a_0$).

4. Postaramy się uzyskać przybliżone rozwiązanie równania (3.14) przy ogólnej postaci funkcji σ :

$$(4.1) \quad \sigma = \sigma_0 + \frac{\sigma_m}{T_H} t_H$$

oraz przy warunkach początkowych

$$(4.2) \quad t_H = 0, \quad X = X_0.$$

Będziemy poszukiwali rozwiązania metodą rozwinięcia na szereg potęg małych parametrów b_0 oraz μ w postaci

$$(4.3) \quad X = X_0 + \sigma_0 t_H + \frac{\sigma_m}{2 T_H} t_H^2 - b_0 \xi_1 - \mu \xi_2 + b_0^2 \xi_{11} + b_0 \mu \xi_{12} + \mu^2 \xi_{22} + \dots$$

Wartości funkcji ξ łatwo jest wyznaczyć; otrzymamy

$$(4.3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = X_0 t_H + \frac{1}{2} \sigma_0 t_H^2 + \frac{1}{6} \frac{\sigma_m}{T_H} t_H^3, \\ \xi_2 = \frac{1}{2} X_0 \sigma_0^2 t_H^2 + \frac{1}{3} \left(X_0 \sigma_0 \frac{\sigma_m}{T_H} + \sigma_0^3 \right) t_H^3 + \frac{1}{12} \left[X_0 \left(\frac{\sigma_m}{T_H} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{9}{2} \sigma_0^2 \frac{\sigma_m}{T_H} \right] t_H^4 + \frac{4}{15} \sigma_0 \left(\frac{\sigma_m}{T_H} \right)^2 t_H^5 + \frac{1}{36} \left(\frac{\sigma_m}{T_H} \right)^3 t_H^6, \\ \xi_{11} = \frac{1}{2} X_0 t_H^2 + \frac{1}{6} \sigma_0 t_H^3 + \frac{1}{24} \frac{\sigma_m}{T_H} t_H^4, \\ \xi_{12} = 2 X_0 \sigma_0^2 t_H + \left(\frac{9}{2} \sigma_0^2 X_0 + X_0^2 \frac{\sigma_m}{T_H} \right) t_H^2 + \\ + \frac{1}{3} \left(16 X_0 \sigma_0 \frac{\sigma_m}{T_H} + \frac{11}{2} \sigma_0^3 \right) t_H^3 + \frac{1}{12} \left[14 X_0 \left(\frac{\sigma_m}{T_H} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{151}{6} \sigma_0^2 \frac{\sigma_m}{T_H} \right] t_H^4 + \frac{27}{20} \sigma_0 \left(\frac{\sigma_m}{T_H} \right)^2 t_H^5 + \frac{5}{24} \left(\frac{\sigma_m}{T_H} \right)^3 t_H^6 \text{ itd.} \end{array} \right.$$

W oparciu o podane rozwiązanie zbadamy przypadek liniowo wzrastającego (od zera) obciążenia ($\sigma_0 = 0$), przy czym w chwili początkowej uważamy stan materiału za neutralny ($X_0 = 0$); dla lepszego zbadania charakteru zjawiska celowo wyolbrzymimy wartości małych parametrów przyjmując przy $E = 2 \cdot 10^6$ at

$$b_0 = 0,1, \quad \mu = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ at}^{-2} (\gamma q = 0,937 \cdot 10^{-6} \text{ kcal/cm}^3),$$

Dla $\sigma_m = 600$ at, $T_H = 0,2 = t_H$ otrzymaliśmy

$$X = 59,58 \text{ at} = X_m, \quad \sigma_a = 593,5 \text{ at}, \quad \sigma_b = 653,1 \text{ at},$$

$$b = 0,131 = b_m, \quad \alpha = 0,869 = \alpha_m, \quad \varepsilon = 3,27 \cdot 10^{-4}.$$

(Pominięcie wyrazów zawierających małe parametry w potęgach począwszy od kwadratu daje błędy wynoszące około — 0,6%, a więc bardzo nieznaczne).

Po osiągnięciu takiego stanu liniowo wzrastającego obciążenia będziemy zmniejszali obciążenie stosownie do prawa

$$(4.4) \quad \sigma = \sigma_m - \frac{\sigma_m}{T_H} t_H',$$

przy czym

$$t_H' = t_H - T_H.$$

W materiale następuje odprężenie, odkształcenia sprężyste «wyzwalają się», przebieg linii σ_b i σ_a będzie równoległy do linii σ (rys. 1) aż do chwili, w której naprężenia w materiale (a) spadną do zera, $\sigma_a = 0$. W chwili tej będzie $X = X_m = \sigma_b$, a stąd siła zewnętrzna wyniesie (z racji niedostarczenia ciepła tarcia będzie $b = b_m$)

$$\sigma = b_m X_m = 7,8 \text{ at.}$$

Odpowiada to chwili

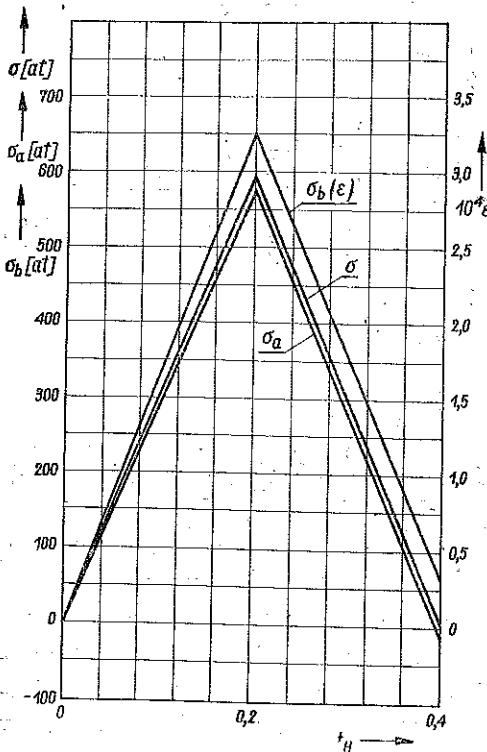
$$t'_{H0} = T'_H \left(1 - \frac{b_m X_m}{\sigma_m} \right) = 0,1974,$$

przy

$$T'_H = T_H = 0,2.$$

Dalsze odciążanie próbki będzie związane ze zmniejszaniem się naprężeń σ_b połączonym z powstawaniem naprężeń resztkowych ścisnąjących w materiale (a). Wobec $\sigma_{Ea} = 0$ procesowi temu towarzyszyć będą poślizgi kryształów (a) i wywiązywanie się ciepła tarcia, a co za tym idzie, dalszy wzrost substancji (b). Jeżeli chwilę t'_H obierzemy za początkową, tak, aby $t''_H = t'_H - t'_{H0}$, to prawo spadku naprężeń będzie następujące:

$$(4.5) \quad \sigma = b_m X_m - \frac{\sigma_m}{T'_H} t''_H.$$



Rys. 1

Dla $\sigma = 0$, tj. $t''_H = T'_H b_m X_m / \sigma_m$, otrzymamy

$$X = 60,35 \text{ at,} \quad \sigma_a = -6,75 \text{ at,} \quad \sigma_b = 53,60 \text{ at,}$$

$$b \approx b_m = 0,131, \quad a \approx a_m = 0,869, \quad \epsilon = 0,27 \cdot 10^{-4}.$$

Ten stan nie jest już neutralny, w materiale istnieją bowiem naprężenia resztkowe, przy czym naprężenia te zaliczamy do drugiego rodzaju (naprężenia na granicach ziaren). Naprężenia te przedstawiają wartości średnie. Ze względu na nieuniknione spiętrzenia otrzymany obraz jest znacznie uproszczony. Należy także zauważyć, że materiał mimo jego obciążenia poniżej naprężeń wywołujących wzrost temperatury uległ zgniotowi, ($\epsilon > 0$).

5. Zbadamy warunki, jakie mają być spełnione, aby opisane wyżej zjawisko miało charakter izotermiczny. Aby tak było, musi reakcja che-

miczna (lub zmiana fazowa) przebiegać szybciej lub co najmniej równie szybko, jak zjawisko wydzielania ciepła. Musi być zatem

$$\dot{Q}_f = \dot{Q}.$$

W skrajnym przypadku równanie (3.10.3) musi być równoznaczne z równaniem (3.9). Rugując z tych równań wielkość a otrzymamy

$$(5.1) \quad k = \frac{A \sigma_a^2}{E \Theta_a q \gamma} = \frac{\mu}{\Theta_a} \sigma_a^2.$$

Traktując wielkości k, μ oraz Θ_a jako funkcje temperatury otrzymamy (wobec stałości tej ostatniej) warunek izotermiczności:

$$(5.2) \quad |\sigma_a| \leq \sqrt{\frac{\Theta_a k}{\mu}} = (\sigma_a)_{GR}.$$

Wartość naprężenia pozornego σ_E , odpowiadającego $(\sigma_a)_{GR}$ jest zatem prawdziwą granicą sprężystości materiału jako całości. Dla materiału będącego nietrwałym konglomeratem faz prawdziwa granica sprężystości nie jest zatem wielkością stałą nawet przy stałej temperaturze. W okresie zaprawy (której podlegać mogą tylko nietrwałe konglomeraty faz) zawartość twardszego składnika rośnie — rośnie zatem granica sprężystości tak długo, dopóki równowaga między składnikami się nie utrwali. Wtedy otrzymamy ostateczną wartość σ_E , którą można wykorzystywać w obliczeniach wytrzymałościowych (por. [3], [10], [11] i [12]).

Przy zaprawie polegającej na liniowym wzroście sił zewnętrznych (naprężeń pozornych σ) otrzymamy tym większą wartość σ_E im większe jest b_0 . Z drugiej strony b_0 wzrasta w miarę wzrostu ilości cykli obciążenia zmiennego (tętniącego lub wahającego). Można w przybliżeniu zbadać zależność $\sigma_E(b_0)$ zakładając, że w chwili początkowej $\sigma = 0$ oraz że mamy stan neutralny materiału ($X_0 = 0$). Wtedy bowiem

$$(5.3) \quad \sigma = \frac{\sigma_m}{T_H} t_H, \quad t_H = \frac{\sigma}{\sigma_m} T_H.$$

Posiłkując się wzorami (3.12.1) oraz (4.3), pomijając przy tym wyrazy wyższych rzędów otrzymamy:

$$(5.4) \quad (\sigma_a)_{GR} = \frac{\sigma_m}{T_H} (t_H)_{GR} - \frac{b_0}{3} \frac{\sigma_m}{T_H} (t_H)_{GR}^2 - \frac{\mu}{6} \left(\frac{\sigma_m}{T_H}\right)^3 (t_H)_{GR}^5 = \sqrt{\frac{\Theta_a k}{\mu}}.$$

Następnie wykorzystując związek [oparty na (5.3)]

$$(5.5) \quad (t_H)_{GR} = \sigma_E \frac{T_H}{\sigma_m},$$

otrzymamy równanie

$$(5.6) \quad \sqrt{\frac{\Theta_a k}{\mu}} = \sigma_E - \frac{b_0}{3} \frac{T_H}{\sigma_m} \sigma_E^2 - \frac{\mu}{6} \left(\frac{T_H}{\sigma_m}\right)^2 \sigma_E^5.$$

Dla przykładu obliczymy (rachunki przeprowadzono drogą okrężną) wartości σ_E dla prędkości narastania naprężeń:

$$\frac{\sigma_m}{T_H} = 100 \text{ at}$$

oraz przyjętych parametrów

$$\mu = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ at}^{-2}, \quad \sqrt{\frac{\Theta_a k}{\mu}} = 618.$$

Otrzymamy

$$\text{dla } b_0 = 0,05, \quad \sigma_E = 700 \text{ at},$$

$$\text{dla } b_0 = 0,094, \quad \sigma_E = 2000 \text{ at}.$$

Na wartość osiąganą podczas pewnej próby prawdziwej granicy sprężystości ma również wpływ prędkość narastania naprężeń. Im większa prędkość, tym niższe wypada σ_E i tym niższa również jest końcowa wartość zawartości substancji «twardszej» w materiale.

6. Rozpatrzmy przypadek obciążenia rozciągającego próbkę, liniowo wzrastającego z czasem aż do chwili, w której

$$(6.1) \quad \sigma = \sigma_m, \quad X = X_m, \quad \sigma_a = \sigma_{am}, \quad \sigma_b = \sigma_{bm} = X_m + \sigma_{am}, \quad b = b_m.$$

W chwili tej, od której będziemy liczyli czas, raptownie odciążamy próbkę pozostawiając ją samej sobie; zatem $\sigma = 0$. Następuje teraz skurczenie się próbki powodujące zanik odkształceń sprężystych, przy czym naprężenia (siły wewnętrzne) równoważą siły bezwładności ($-\gamma L^2/g$) $\ddot{\epsilon}$. Zjawisko «wyzwalania» odkształceń sprężystych nie wpływa na skład faz; zatem $b = b_m = \text{const}$. Równanie równowagi sił ma postać następującą:

$$(6.2) \quad \sigma_b b_m + \sigma_a (1 - b_m) = -\frac{\gamma L^2}{g} \ddot{\epsilon}.$$

Z równania (3.3) mamy

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}_b}{E}.$$

Z racji odkształceń sprężystych jest spełniony związek

$$(6.3) \quad \sigma_a = \sigma_b - X_m,$$

a zatem

$$(6.4) \quad \ddot{\epsilon} = \frac{\ddot{\sigma}_b}{E} = \frac{\ddot{\sigma}_a}{E}.$$

Rugując z równań (6.2), (6.3) i (6.4) wielkości ϵ i σ_b oraz wprowadzając pomocnicze oznaczenie

$$(6.5) \quad \gamma^* = \frac{\gamma L^2}{Eg}$$

dochodzimy do równania różniczkowego

$$(6.6) \quad \gamma^* \ddot{\sigma}_a + \sigma_a + b_m X_m = 0,$$

które należy rozwiązać przy następujących warunkach początkowych:

$$(6.7) \quad t = 0, \quad \sigma_a = \sigma_{am}, \quad \dot{\varepsilon} = 0, \quad \dot{\sigma}_a = 0.$$

Ostatni warunek jest przybliżony, pomija się bowiem przy tym poprzedni ruch cząstek materiału. Otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$(6.8) \quad \sigma_a = -b_m X_m + (\sigma_{am} + b_m X_m) \cos \frac{t}{\sqrt{\gamma^*}}.$$

Chwilę, w której osiągnie się $\sigma_a = 0$ (odciążenie dendrytów), określa wzór

$$(6.9) \quad t_0 = \sqrt{\gamma^*} \arccos \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{am}}{b_m X_m}}.$$

W chwili tej prędkość odkształceń wynosi

$$(6.10) \quad \dot{\varepsilon}_0 = \left[\frac{\dot{\sigma}_a}{E} \right]_{t=t_0} = -\frac{\sigma_{am}}{E \sqrt{\gamma^*}} \sqrt{1 + \frac{2b_m X_m}{\sigma_{am}}}.$$

Począwszy od chwili t_0 (od której teraz będziemy liczyli czas) nastąpi dalszy spadek naprężeń σ_b , których początkowa wartość zgodnie ze wzorem (6.3) wynosi X_m . Spadkowi σ_b towarzyszyć będzie powstawanie naprężeń o przeciwnym znaku niż dotychczas. To obciążenie dendrytów wobec $\sigma_{Ea} = 0$ wywoła poślizgi wewnątrz-kryształiczne, co spowoduje wzrost wartości b . Wzrost b ponad wartość początkową b_m będzie jednak nieznaczny ze względu na małe wartości naprężeń. Z tej przyczyny a także dla uproszczenia zadania założymy, że $b = b_m = \text{const}$.

W rozpatrywanym procesie zachowamy równanie (6.2), zaś równanie (6.4) zastąpimy przez następujące, wypływające z równań (3.3) i (3.4):

$$(6.11) \quad \ddot{\varepsilon} = \frac{\ddot{\sigma}_b}{E} = \frac{\ddot{\sigma}_a}{E} + \frac{\dot{\sigma}_a}{E \Theta_a}.$$

Z równań (6.2) i (6.11) wyrugujemy wielkości σ_a i ε ; otrzymamy równanie

$$(6.12) \quad \ddot{\sigma}_b + \frac{1}{\Theta_a} \dot{\sigma}_b + \frac{1}{\gamma^*} \dot{\sigma}_b + \frac{b_m}{\gamma^* \Theta_a} \sigma_b = 0$$

równoważne równaniu

$$(6.12.1) \quad \ddot{\varepsilon} + \frac{1}{\Theta_a} \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\gamma^*} \dot{\varepsilon} + \frac{b_m}{\gamma^* \Theta_a} \varepsilon = 0.$$

Równanie (6.12) wypada rozwiązać przy następujących warunkach początkowych:

$$(6.13) \quad t=0, \quad \sigma_b = X_m, \quad \dot{\sigma}_b = E \dot{\varepsilon}_0, \quad \ddot{\sigma}_b = -\frac{b_m X_m}{\gamma^*}$$

[por. wzór (6.10)].

Ostatni związek wynika z równania (6.2) dla $\sigma_a = 0$, $\ddot{\varepsilon} = \ddot{\sigma}_b/E$. Poszukując rozwiązania w postaci

$$(6.14) \quad \sigma_b = \sum_i c_i e^{\zeta_i t_H} \quad (i=1, 2, 3, t_H = t/\Theta_a),$$

wyznamy pierwiastki ζ_i z równania charakterystycznego

$$(6.15) \quad \zeta^3 + \zeta^2 + \delta \zeta + b_m \delta = 0.$$

Wprowadzono tu pomocnicze oznaczenie

$$(6.15.1) \quad \delta = \frac{\Theta_a^2}{\gamma^*}.$$

Na pierwiastki ζ_i uzyskujemy następujące wzory (są to wzory przybliżone):

$$(6.16) \quad \begin{cases} \zeta_1 = \frac{b_m - 1}{2} + i\sqrt{\delta}, \\ \zeta_2 = \frac{b_m - 1}{2} - i\sqrt{\delta}, \\ \zeta_3 = -b_m, \quad i = \sqrt{-1}. \end{cases}$$

Zatem rozwiązanie równania (6.12) jest następujące:

$$(6.17) \quad \sigma_b = c_3 e^{-b_m t_H} + e^{-\frac{1-b_m}{2} t_H} (c_1 \sin \sqrt{\delta} t_H + c_2 \cos \sqrt{\delta} t_H),$$

przy czym stałe wyrażają się następującymi wzorami (we wzorach dokonano uproszczeń polegających na pominięciu wyrazów niewspółmiernie małych wobec wielkości δ , której rząd jest co najmniej 10^{10}):

$$(6.18) \quad \begin{aligned} c_1 &\approx \frac{1}{2\sqrt{\delta}} [b_m X_m (1 - 3b_m) + 2E\Theta_a \dot{\varepsilon}_0] \approx \frac{E\Theta_a \dot{\varepsilon}_0}{\sqrt{\delta}} = E \dot{\varepsilon}_0 \sqrt{\gamma^*}, \\ c_2 &\approx -b_m X_m, \quad c_3 \approx \frac{1 - 2b_m + 3b_m^2}{1 - 3b_m} X_m. \end{aligned}$$

Znając σ_b wyznaczymy natychmiast ε według wzoru $\varepsilon = \sigma_b/E$. Zatem wykresy $\sigma_b(t_H)$ i $\varepsilon(t_H)$ różnią się tylko skalą. Ze wzoru (6.17) widać wyraźnie, że rozpatrywany materiał bisubstancjalny wykazuje tzw. opóźnienie sprężyste. Odkształcenia materiału odciążonego maleją stopniowo aż do

zera. Oczywiście, część odkształceń (sprężystych) «wyzwoliła się» bardzo prędko, prawie że natychmiast po odciążeniu. Pozostała część wyzwała się z pewnym opóźnieniem, wywołanym oporem «miękkich» dendrytów. Im większa jest zawartość «twardej» substancji (b) (substancji interkryształicznej), tym krócej trwa okres sprężystego opóźnienia.

Można zauważyć badając formułę (6.17), że wokół zasadniczej linii opóźnienia sprężystego, wyrażającej się równaniem

$$\tilde{\sigma}_b = c_3 e^{-b_m t_H},$$

odbywają się tłumione drgania z bardzo wysoką częstotliwością ($\omega = \sqrt{\delta}$ jest rzędu 10^5 i wyższego). Drgania te zostają stłumione w sposób bardziej intensywny niż przebiega spadek wydłużeń (oraz naprężeń $\tilde{\sigma}_b$), gdyż $[(1 - b_m)/2] > b_m$ przy małych wartościach b_m , jakich w praktyce należy oczekiwać. Na przykład, przyjmując

$$\begin{aligned} X_m &= 60 \text{ at}, & \sigma_{am} &= 600 \text{ at}, & b_m &= 0,02, \\ \gamma^* &= 4 \cdot 10^{-8} \text{ s}^2, & \Theta_a &= 50 \text{ s}, & E &= 2 \cdot 10^9 \text{ at} \end{aligned}$$

otrzymamy

$$\sqrt{\delta} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}, \quad t_0 \approx 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ s}, \quad \dot{\epsilon}_0 \approx -1,5 \text{ s}^{-1},$$

zaś formuła (6.17) przybierze postać

$$\sigma_b = 61,3 e^{-0,02 t_H} - e^{-0,49 t_H} (600 \sin 2,5 \cdot 10^5 t_H + 1,2 \cos 2,5 \cdot 10^5 t_H).$$

Okres czasu homologicznego, po którym naprężenia $\tilde{\sigma}_b$ (i odpowiednie wydłużenia) spadną do połowy, wynosi około 35,0. Po tym okresie amplituda drgań spadnie około $2,75 \cdot 10^7$ razy, można będzie zatem uważać, że drgania praktycznie zanikły. Poglądowy wykres funkcji $\sigma_b(t_H)$ przedstawiony jest na rys. 2. Na rysunku tym wykreślono również wykres naprężeń $\sigma_a(t_H)$, wyznaczonych z równania $\dot{\sigma}_b = \dot{\sigma}_a + \sigma_a/\Theta_a$. Naprężenia te wyrażają się za pomocą następującej formuły:

$$(6.19) \quad \sigma_a = -\frac{b_m}{1-b_m} c_3 e^{-b_m t_H} + \left(\frac{b_m}{1-b_m} c_3 - c'_2 \right) e^{-t_H} + e^{-\frac{1-b_m}{2} t_H} (c'_1 \sin \sqrt{\delta} t_H + c'_2 \cos \sqrt{\delta} t_H),$$

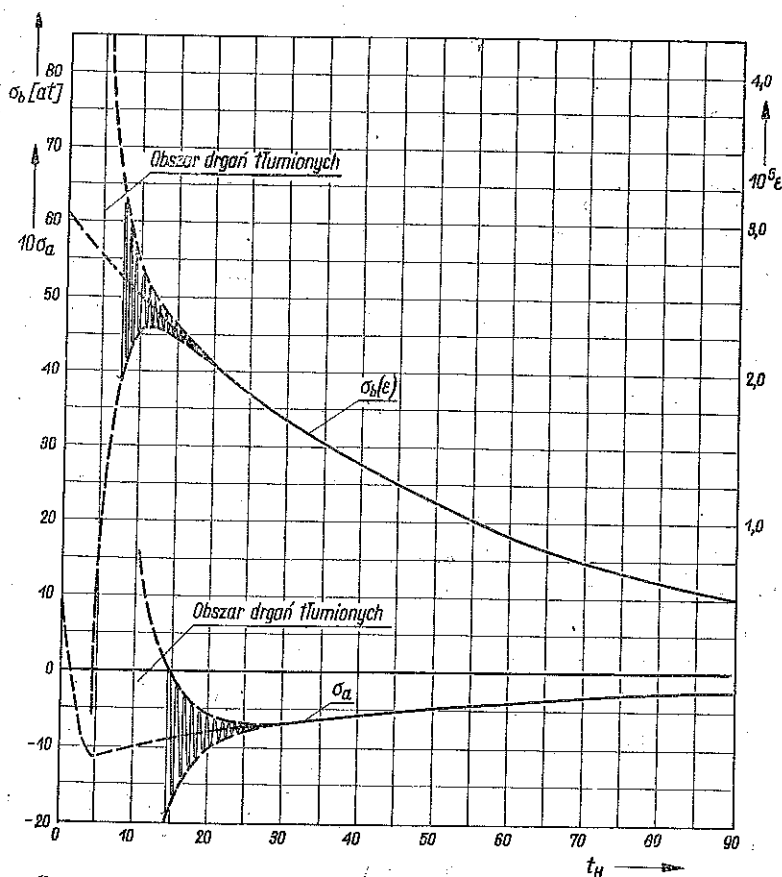
przy czym

$$(6.20) \quad \begin{cases} c'_1 = \frac{c_1 \left(\delta - \frac{1-b_m^2}{4} \right) - c_2 \sqrt{\delta}}{\delta + \left(\frac{1+b_m}{2} \right)^2} \approx c_1 - \frac{c_2}{\sqrt{\delta}}, \\ c'_2 = \frac{c_1 \sqrt{\delta} + c_2 \left(\delta - \frac{1-b_m^2}{4} \right)}{\delta + \left(\frac{1+b_m}{2} \right)^2} \approx c_2 + \frac{c_1}{\sqrt{\delta}}. \end{cases}$$

Jeżeli w równaniu (6.19) pominiemy wyrazy oscylujące, to otrzymamy wzór

$$(6.21) \quad \tilde{\sigma}_a = -\frac{b_m}{1-b_m} c_3 e^{-b_m t_H} + \left(\frac{b_m}{1-b_m} c_3 - c_2' \right) e^{-t_H}.$$

Funkcja ta posiada minimum, które dla danych z poprzedniego przykładu zachodzi przy $t_H = 4,69$ i wynosi wtedy $\tilde{\sigma}_a = -1,115$ at. Po przekroczeniu minimum funkcja $\tilde{\sigma}_a$ (tak jak funkcja $\tilde{\sigma}_b$) zmierza ku zeru: materiał dąży do osiągnięcia stanu neutralnego.



Rys. 2

W powyższych rachunkach poważną rolę odgrywa czas wiotczenia izotermicznego Θ_a dla konglomeratu (a), a więc dla ziaren dendrytycznych. Czas ten można by wyznaczyć z krzywych samowzmocnienia (konsolidacji naprężeń) dla monokrystalitów. Niestety, w przypadku żelaza i stali w literaturze (por. np. [4]) brak jest danych doświadczalnych na ten temat.

Należy jednak podejrzewać, że wielkość ta jest dość mała (wynosić może kilkadziesiąt do kilkuset sekund) w porównaniu z czasem wiotczenia materiału polikrystalicznego jako całości.

7. W praktyce laboratoryjnej stosuje się zaprawę materiału przez podanie go obciążeniom wahającym. Załóżmy, że obciążenia te sprowadzają się do rozciągania i ściskania stosownie do wzoru

$$(7.1) \quad \sigma = \sigma_m \sin \omega t = \sigma_m \sin \omega_H t_H,$$

przy czym $\omega = 2\pi/T$ oraz $\omega_H = \omega \Theta_a = 2\pi/T_H$.

W procesie zaprawy wzrasta ziarnistość materiału, rośnie zatem wielkość b . Zbadamy, w jakim stopniu wpływa opisane powyżej obciążenie wahające na wzrost wielkości b , której wartość początkowa niechaj wynosi b_0 , przy czym jest to liczba bardzo mała, wynosząca, założmy, kilka procent. Dla zbadania tego zjawiska musimy wziąć pod uwagę równanie (3.14), w którym obok b_0 występuje drugi mały parametr μ , zazwyczaj kilkaset tysięcy razy mniejszy od b_0 . Jeżeli zauważymy jeszcze, że wielkość X zmienia się w czasie homologicznym dosyć wolno, to spostrzeżenie to pozwoli pominąć całkowicie wyraz

$$\mu X \int_0^{t_H} \left(\frac{dX}{dt_H} \right)^2 dt_H.$$

Otrzymamy równanie

$$(7.2) \quad \frac{dX}{dt_H} + b_0 X = \sigma = \sigma_m \sin \omega_H t_H.$$

Dla wyznaczenia całki szczególnej ustalamy warunki początkowe przyjmując stan wyjściowy jako neutralny ($X=0$ dla $t_H=0$).

Uzyskujemy rozwiązanie

$$(7.3) \quad X = \frac{\sigma_m}{b_0^2 + \omega_H^2} (b_0 \sin \omega_H t_H - \omega_H \cos \omega_H t_H + \omega_H e^{-b_0 t_H}).$$

Po ćwierćkresie ($t_H = T_H/4$) otrzymamy największą wartość

$$(7.4) \quad X = X_m = \frac{\sigma_m}{b_0^2 + \omega_H^2} (b_0 + \omega_H e^{-\frac{b_0 T_H}{4}}).$$

Zakładając małą wartość b_0 i szybko zmieniające się obciążenie zauważymy, że możliwe jest przybliżenie X_m z dostateczną dokładnością za pomocą wzoru

$$(7.4.1) \quad X_m \approx \frac{\sigma_m}{\omega_H}.$$

W następnym ćwierćkresie nastąpi początkowo odciążenie próbki, a zatem $X = X_m$ nie ulegnie zmianie. Dopiero na chwilę przed zakończeniem

półokresu wielkość ta nieznacznie się zmieni. Zmianę tę pominiemy. A zatem dla $t_H = T_H/2$

$$X = X_m \approx \frac{\sigma_m}{\omega_H}.$$

W chwili tej $\sigma = 0$ zgodnie ze wzorem (7.1). A zatem na podstawie (3.10.1) mamy

$$(1 - b)\sigma_a + b\sigma_b = \sigma_a + bX_m = 0.$$

Stąd

$$(7.5) \quad \sigma_a = -bX_m = -b_m X_m.$$

Symbol b_m oznacza wartość b w chwili $t_H = T_H/4$ równą w przybliżeniu wartości b w chwili $t_H = T_H/2$.

A zatem

$$(7.6) \quad \sigma_b = X_m(1 - b_m).$$

Wartość b_m wyznaczamy ze wzoru (3.12.3) wykorzystując rozwinięcie (3.12.3.1) i stosując przybliżenie w równaniu (7.2) polegające na pominięciu wyrazu $b_0 X$. Otrzymamy

$$(7.7) \quad b_m \approx b_0 + (1 - b_0) \frac{\mu \sigma_m^2}{\omega_H} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \right) = b_0 + (1 - b_0) m,$$

gdzie

$$(7.7.1) \quad m = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \right) \frac{\mu \sigma_m^2}{\omega_H} = 1,821 \frac{\mu \sigma_m^2}{\omega_H}.$$

Możemy zatem wyliczyć wszystkie interesujące nas wielkości. Śledząc dalej przebieg obciążenia, zmienimy chwilę odniesienia dla czasu wprowadzając nową zmienną

$$t'_H = t_H - \frac{1}{2} T_H.$$

W związku z tym równanie (7.1) ulegnie następującej zmianie:

$$(7.8) \quad \sigma = -\sigma_m \sin \omega_H t'_H.$$

Będziemy w dalszym ciągu rozwiązywać równanie (7.2) tym razem przy warunku początkowym dla chwili $t'_H = 0$ określającym $X = X_m$. Otrzymamy całą tego równania w następującej postaci:

$$(7.9) \quad X = X_m e^{-b_m t'_H} - \frac{\sigma_m}{b_m^2 + \omega_H^2} (b_m \sin \omega_H t'_H - \omega_H \cos \omega_H t'_H + \omega_H e^{-b_m t'_H}).$$

Dla chwili $t'_H = T_H/4$, tj. $t_H = 3T_H/4$ otrzymamy

$$(7.10) \quad X'_m = X_m e^{-\frac{b_m T_H}{4}} - \frac{\sigma_m}{b_m^2 + \omega_H^2} (b_m + \omega_H e^{-\frac{b_m T_H}{4}}) \approx X_m - \frac{\sigma_m}{\omega_H} = 0.$$

Dla chwili $t'_H = T_H/2$, tj. $t_H = T_H$ można przyjąć ten sam stan, tj. $X = 0$.

Jak widać, przy bardzo małych wartościach b oraz μ , którym towarzyszą dość duże wartości ω_H , po przejściu całkowitego cyklu obciążenia materiał powróci do stanu nie różniącego się praktycznie od neutralnego. W stanie tym $X = 0$, ale wielkość b powiększyła się w porównaniu ze stanem wyjściowym: $b = b'_m > b_m > b_0$. Jest to skutek zaprawy.

Wartość b'_m wyznacza się w sposób podobny jak poprzednio b_m . Otrzymujemy

$$(7.11) \quad b'_m \approx b_m + (1 - b_m)m.$$

Wzór ten ma taką samą budowę jak wzór (7.7). Świadczy to, że na wzrost b wpływa nie liczba cykli, lecz półcykli. Oznaczając liczbę półcykli przez n i wprowadzając wielkość b_n jako wartość b po ukończeniu n -go półcyklu wypiszemy wzory (7.7) i (7.11) w sposób ogólny. Otrzymamy wzór rekurencyjny

$$(7.12) \quad b_{n+1} = m + b_n(1 - m).$$

Wzór ten przedstawia równanie różnic skończonych drugiego rodzaju o rozwiązaniu ogólnym

$$(7.13) \quad b_n = C(1 - m)^{n+1} + 1,$$

gdzie C jest stałą sumowania, wyznaczaną z warunku początkowego: $b = b_0$ dla $n = 0$.

Ostatecznie otrzymujemy

$$(7.14) \quad b_n = 1 - (1 - b_0)(1 - m)^{n+1}.$$

Oznaczając przez N liczbę cykli mamy $N = 2n$; stąd

$$(7.15) \quad b_N = 1 - (1 - b_0)(1 - m)^{N+1}.$$

Przy bardzo wielkiej liczbie cykli, idącej w setki tysięcy i miliony, jedynkę w wykładniku można pominąć. Korzystając z tego przybliżenia wyznaczymy wzór dla liczby cykli, potrzebnej do podwyższenia zawartości b od wartości b_0 do b_N :

$$(7.16) \quad N = -\frac{1}{\ln(1 - m)} \ln \frac{1 - b_0}{1 - b_N}.$$

Ponieważ m jest liczbą bardzo małą (rzędu 10^{-8} i mniejszego), więc z powodzeniem można skorzystać z przybliżenia

$$(7.16.1) \quad \ln(1 - m) \approx -m.$$

Stąd

$$(7.17) \quad N = \frac{1}{m} \ln \frac{1 - b_0}{1 - b_N} = 0,549 \frac{\omega_H}{\mu \sigma_m^2} \ln \frac{1 - b_0}{1 - b_N}.$$

Dla przykładu zbadajmy, ile cykli zaprawy wymaga zwiększenie zawartości b od $b_0 = 0,05$ do $b_N = 0,094$ (dla wartości tych wyliczono w końcu p. 5 prawdziwe granice sprężystości przy założeniu $\mu = 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ at}^{-2}$), jeśli amplituda obciążenia wynosi $\sigma_m = 600 \text{ at.}$, zaś $\omega_H = 5 \cdot 10^3$. Wartość m

wynosi tu $m = 3,14 \cdot 10^{-8}$. Stosując wzór (7.17) otrzymamy $N = 1,54 \cdot 10^6$ cykli. A zatem wzrost σ_E od 700 at do 2000 at wymaga w tym przypadku przeszło półtora miliona cykli zaprawy. Zaznaczmy, że wzrost amplitudy przyspiesza zaprawę, jak to widać ze wzorów (7.7.1) i (7.15).

8. W rozważaniach powyższych przyjmowano, że substancja (a) w całości występuje jako faza nietrwała przy doprowadzeniu ciepła w stałej temperaturze. Jest rzeczą jasną, że w przypadku odwracalnej reakcji chemicznej $(a) \rightleftharpoons (b)$ może istnieć w określonych warunkach stan równowagi między ilościami poszczególnych składników a i b. Stan ten określa stała równowagi chemicznej, będąca funkcją temperatury i dająca się obliczyć na podstawie znajomości aktywności czynników (a) i (b). Załóżmy, że stan równowagi trwałe w pewnej temperaturze określa para liczb a_R i b_R ($b_R = 1 - a_R$). Jeśli skutek doprowadzenia ciepła tarcia następuje reakcja $(a) \rightarrow (b)$, to proces trwa tak długo, dopóki nie osiągnie się $b = b_R$. Innymi słowy, czynna część substratów zmniejsza się, bowiem w reakcji weźmie udział przeznaczona do tego część substancji (a) wynosząca $a^* = a - a_R$.

W efekcie zaprawy możemy osiągnąć powiększenie się zawartości «twardego» konglomeratu najwyżej do b_R . Związana z tą wartością, prawdziwa granica sprężystości (dla pewnej prędkości narastania obciążeń) nie może być zatem przekroczona. Jak widać zatem, w punktach poprzednich zostały rozpatrzone najbardziej proste przypadki z przedstawionej teorii. Mimo elementarności tych przykładów znajduje się w nich wytłumaczenie pewnych zjawisk w obciążonych próbkach metalowych. Wytłumaczenie to mogło zostać przeprowadzone tylko przy przyjęciu modelu materiału jako konglomeratu różnych faz. Rozpatrzono przypadek dwufazowy, który w miarę potrzeby można uogólnić na przypadki wielofazowe.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. D. Sadowski, K. A. Małyszew, B. G. Sagonow, *Priewraszczenja pri nagriewie stali*, Metallurgizdat, Swierdłowski-Moskwa 1954.
- [2] J. P. Szczapow, *Wlijanje chotodnoj prawki na procznost' stalnych dietalej*, Transzeldorizdat, Moskwa 1953.
- [3] H. Buchner, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, t. 9, 1 (1938), s. 14.
- [4] A. Kochendoerfer, *Plastische Eigenschaften von Kristallen und metallischen Werkstoffen*, Berlin 1941.
- [5] I. W. Kudriawcew, *Wnutriennyje napriazienja kak riezieru procznosti w maszynostrojenji*, Maszgiz, Moskwa 1951.
- [6] W. Z. Bugakow, *Diffuzja w mietallach i spławach*, GITL, Moskwa 1949.
- [7] M. M. Sawierin, *Drobiestrujnyj naklep*, Maszgiz, Moskwa 1955.
- [8] R. Houwink, W. G. Burgers, *Elastizität, Plastizität und Struktur der Materie*, Drezno-Lipsk 1938.
- [9] M. Volmer, *Kinetik der Phasenbildung*, Drezno-Lipsk 1939.

[10] J. Madejski, *Pewne podstawowe zagadnienia dynamicznej teorii plastyczności*, praca nieopubl.

[11] J. Madejski, *O pełzaniu i pełzarce*, Rozpr. Inżyn. 1 (1956).

[12] J. Madejski, *Wyboczenie pręta pryzmatycznego jako zagadnienie dynamicznej teorii plastyczności*, Rozpr. Inżyn. 3 (1956).

[13] B. M. Rowiński, W. G. Lutcau, *Izw. AN. SSSR, OTN*, 10 (1953), s. 1471.

Резюме

ТРЕНИРОВКА, УПРУГОЕ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ И ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В предыдущих работах автора по «динамической теории пластичности» применялась модель однородного материального континуума. В настоящей работе анализируется неоднородная модель, построенная на подобие медовых сотов. При этом положено, что оба вещества представляют собой растворы, способные выделять или поглощать в соответствующих условиях некоторые компоненты раствора. Принято, что кинетика этого явления описывается уравнением мономолекулярной химической реакции (2.2). Термический эффект, связанный с этой реакцией, может быть результатом подведения теплоты снаружи или теплоты внутреннего трения. В последнем случае возможны изотермические и необратимые превращения твердого тела.

Пользуясь принципами «динамической теории пластичности» отдельно для каждого компонента установлено, что анализируемая модель подвергается тренировке (т.е. повышению предела упругости в смысле Динника - Штроейера - Бухнера) и проявляет упругое последствие, наклеп и остаточные напряжения.

Физическая интерпретация модели медовых сотов такова.

Действительные металлы являются на практике сплавами кристаллического строения. Если структура не проявляет отчетливой текстуры, то материал можно считать квази-изотропным.

Рассматривая структуру материала, как дендритные зерна, разделенные в форме мозаики связывающим «твердым» интеркристаллическим веществом, можно зерна считать «медом», а интеркристаллическое вещество — «воском».

Оба эти вещества следует считать растворами. В таком случае возможна диффузия некоторых компонентов одного раствора в другой и наоборот, что будет связано с изменениями пропорции «воска» и «меда» во всем конгломерате.

Принимая гипотезу, что увеличение количества «воска» влияет, прежде всего, не на утолщение слоев связывающего интеркристаллического вещества, но на их удлинение, приходим к заключению, что такое явление вызовет фрагментацию зерна, т.е. мелкозернистость. Это структурное свойство проявляется именно в результате

тренировки. Следует отметить, что приведенным рассуждениям отнюдь не препятствует исчезновение действительного предела упругости монокристалла (зерна).

Summary

WORK HARDENING, ELASTIC AFTER-EFFECT AND RESIDUAL STRESSES IN ASPECT OF THE DYNAMICAL THEORY OF PLASTICITY

In the author's previous papers on the «dynamical theory of plasticity» the model taken as a basis was that of a homogeneous continuum.

In the present paper, a non-homogeneous «honeycomb» model is analyzed. It is assumed that both substances are solutions capable, under certain circumstances, of separating or absorbing some components of the solution. It is further assumed that the kinetics of this phenomenon determines the equation of monomolecular chemical reaction (2.2). The corresponding thermal effect may be result of heat transfer from the outside or of internal friction. In the latter case, isothermal and irreversible changes of state of a solid are possible. By application of the principles of the «dynamical theory of plasticity» for each component separately, it is found that the model considered is subjected to work hardening (i.e. an increase of the elastic limit in the sense of Dinnik-Stromeyer-Buchner) and reveals elastic after-effect, deformation due to cold working and residual stresses.

The physical interpretation of the «honeycomb» model is as follows. Real metals are in practice alloys of polycrystalline structure. If the structure shows no distinct texture the material may be considered to be macroscopically quasi-isotropic.

Considering the structure of the material as mosaic patterned (dendritic grains divided by «hard» intercrystalline substance) the grains can be treated as «honey» and the intercrystalline substance as «wax».

Both substances should be considered as solutions. In this case diffusion of certain components from one solution to the other and vice versa is possible. This is connected with changes of the proportions of «wax» and «honey» in the aggregate as a whole.

Assuming that an increase of the quantity of «wax» results in an extension of the layers of intercrystalline matter, and much less in a growth of their thickness, it may be concluded that such a phenomenon will provoke fragmentation of the grains, i.e. fine-granulation. This structural property is a result of work hardening.

It should be emphasized that the above considerations remain unaffected even in the case of zero value of the true elastic limit of single crystallites.

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lipca 1956 r.