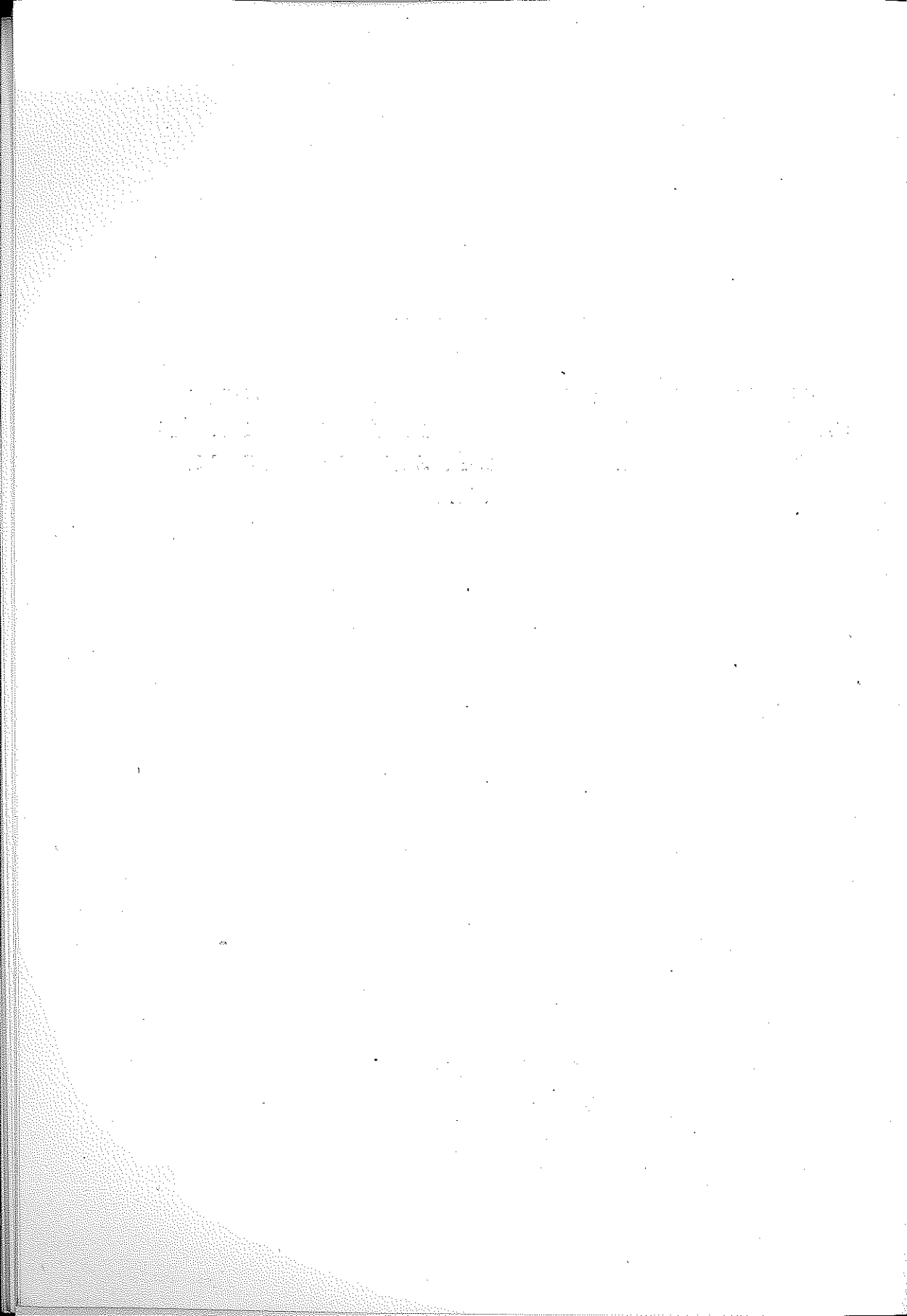


KAZIMIERZ PISZCZEK

WPLYW WIEZÓW GEOMETRYCZNYCH I DYNAMICZNYCH
NA OBSZARY REZONANSOWE W ZAGADNIENIU STATECZNOŚCI
DYNAMICZNEJ PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO O PROFILU
OTWARTYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXVIII



Problem stateczności dynamicznej prostych prętów cienkościennych o profilach otwartych sformułował i rozwiązał w dwu szczególnych przypadkach I. I. Goldienbłat, [3].

W ujęciu liniowym zagadnienie to, w przypadku ogólnym, opisane jest trzema sprzężonymi równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych mających współczynniki zależne od czasu. Z uwagi na trudności matematyczne i, jak mówi autor, «z braku efektywnych metod, które pozwoliłyby doprowadzić rozwiązanie tego zagadnienia do końca» ograniczył się on do rozważenia dwu przypadków szczególnych. Jednym z nich jest rozwiązanie przy założeniu istnienia dwu osi symetrii przekroju i przy sile działającej osiowo (punkt przyłożenia w środku ciężkości przekroju), drugim zaś gdy przekrój posiada jedną oś symetrii, a siła działająca jest przyłożona w środku sił poprzecznych. W przypadku pierwszym otrzymuje się trzy niezależne od siebie równania, które prowadzą do równania zwyczajnego Mathieu lub Hilla. W przypadku drugim Goldienbłat stosuje metodę opracowaną teoretycznie przez N. A. Artiemiewa, [1]. W obydwu przypadkach ogranicza się do warunków brzegowych wolnego podparcia.

Celem niniejszej pracy jest rozwiązanie postawionego zagadnienia w przypadku ogólniejszym przy założeniu istnienia jednej osi symetrii przekroju, mianowicie w przypadku, gdy miejscem przyłożenia siły jest dowolny punkt osi symetrii. Metoda rozwiązania oparta jest na pracy W. W. Bołotina, [2]. Należy dodać, że można tę metodę stosować także w przypadku zupełnie dowolnego przekroju pręta. W porównaniu z metodą stosowaną w pracy [3] sposób rozwiązania użyty w pracy obecnej jest bardziej przejrzysty, a otrzymane wyniki są łatwiejsze w bezpośrednim stosowaniu. Podano na przykładzie zależność obszarów rezonansowych od miejsca przyłożenia siły, co wydaje się mieć ważne znaczenie praktyczne. Wprowadzono pojęcie więzów geometrycznych i dynamicznych oraz podano, w jakim stopniu wpływają one na obszary rezonansowe. Podobne rozważania przeprowadził autor w pracy [6], dotyczącej pręta zakrzywionego.

1. W teorii stateczności statycznej prętów cienkościennych wyprowadza się warunki równowagi statycznej takich elementów w postaci ([5], [7] i [8])

$$(1.1) \quad \begin{cases} EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \left(\frac{d^2 u}{dz^2} + y_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right) - P y_1 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \\ EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \left(\frac{d^2 v}{dz^2} - x_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right) + P x_1 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \\ EI_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GI_z \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + P (r_0^2 + 2\beta_x x_1 + 2\beta_y y_1) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \\ + P y_0 \frac{d^2 u}{dz^2} - P x_0 \frac{d^2 v}{dz^2} - P y_1 \frac{d^2 u}{dz^2} + P x_1 \frac{d^2 v}{dz^2} = 0, \end{cases}$$

gdzie symbole I_x i I_y oznaczają momenty bezwładności przekrojów względem głównych, centralnych osi bezwładności (z nimi wiążemy układ odniesienia x, y), x_0 i y_0 współrzędne środka sił poprzecznych, x_1 i y_1 współrzędne punktu przyłożenia siły, I_ω i I_z inne charakterystyki geometryczne przekroju, F pole poprzecznego przekroju pręta.

Poza tym przyjęliśmy oznaczenia:

$$(1.2) \quad \begin{cases} r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + \frac{I_x + I_y}{F}, \\ \beta_x = \frac{U_y}{2I_y} - x_0, & \beta_y = \frac{U_x}{2I_x} - y_0, \\ U_x = \iint_F y(x^2 + y^2) dF, & U_y = \iint_F x(x^2 + y^2) dF. \end{cases}$$

Wielkości β_x i β_y nazywamy ramionami asymetrii przekroju, zaś U_x i U_y momentami asymetrii przekroju. Litery u i v oznaczają przemieszczenia punktów leżących na osi środków sił poprzecznych odpowiednio w kierunku osi x i y , φ kąt skręcenia poprzecznych przekrojów około osi środków sił poprzecznych.

W celu otrzymania związków określających drgania wprowadzimy siły bezwładności wychodząc z postaci całkowitej energii kinetycznej pręta.

Na rysunku 1 przedstawiono część przekroju pręta płaszczyzną prostopadłą do osi pręta z . Element pola przekroju o długości ds ma składowe przemieszczenia w kierunku x i y odpowiednio

$$(1.3) \quad u_s = u + (y_0 - y)\varphi, \quad v_s = v - (x_0 - x)\varphi,$$

gdzie x i y są współrzędnymi elementu ds . Jego przemieszczenie w kierunku osi z , pochodzące tylko od obrotu, wynosi

$$(1.4) \quad w_s = \frac{du}{dz} x + \frac{dv}{dz} y + \frac{d\varphi}{dz} \bar{\omega}.$$

Dwa pierwsze składniki oznaczają przemieszczenie od obrotu wokół osi y i x , a trzeci przemieszczenie przy skręcaniu.

Energia kinetyczna elementu masy $dm = \gamma dF dz = \gamma h ds dz$ (h stała grubość) wynosi

$$(1.5) \quad dE = \frac{1}{2} (\dot{u}_s^2 + \dot{v}_s^2 + \dot{w}_s^2) dm.$$

Całkując powyższą funkcję wzdłuż całej długości linii środkowej pręta i po całym polu przekroju otrzymamy całkowitą energię kinetyczną

$$(1.6) \quad E = \frac{1}{2} \int_0^l [(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + 2\dot{u}\dot{\varphi}y_0 - 2\dot{v}\dot{\varphi}x_0 + \dot{\varphi}^2 r_0^2) \gamma F + (I_y \dot{u}'^2 + I_x \dot{v}'^2 + I_\omega \dot{\varphi}'^2) \gamma] dz,$$

gdź z uwagi na przyjęty układ odniesienia mamy

$$(1.7) \quad \begin{cases} \int_s x h ds = \int_s y h ds = \int_s x y h ds = \int_s x \bar{\omega} h ds = \int_s y \bar{\omega} h ds = 0, \\ \int_s y^2 h ds = I_x, \quad \int_s x^2 h ds = I_y, \quad \int_s \bar{\omega}^2 h ds = I_\omega, \quad \int_s h ds = F. \end{cases}$$

Jeśli $\Phi(\dot{u}, \dot{v}, \dot{\varphi}, \dot{u}', \dot{v}', \dot{\varphi}')$ oznacza wyrażenie pod całką we wzorze (1.6), to siły bezwładności na jednostkę długości pręta w kierunku x i y i dla obrotu φ są odpowiednio równe

$$(1.8) \quad \begin{cases} -[\Phi]_u = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\dot{u}} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \Phi_{\dot{u}'} = (\ddot{u} + \ddot{\varphi} y_0) \gamma F - \ddot{u}'' I_y \gamma, \\ -[\Phi]_v = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\dot{v}} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \Phi_{\dot{v}'} = (\ddot{v} - \ddot{\varphi} x_0) \gamma F - \ddot{v}'' I_x \gamma, \\ -[\Phi]_\varphi = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\dot{\varphi}} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \Phi_{\dot{\varphi}'} = (\ddot{u} y_0 - \ddot{v} x_0 + \ddot{\varphi} r_0^2) \gamma F - \ddot{\varphi}'' \gamma I_\omega, \end{cases}$$

gdzie kreska oznacza różniczkowanie względem zmiennej z , zaś kropka względem czasu. Dodając w równaniach (1.1) otrzymane siły bezwładności (1.8) otrzymujemy równania różniczkowe ruchu

$$(1.9) \begin{cases} EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + P \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + P(y_0 - y_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \gamma F - \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} I_y \gamma = 0, \\ EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - P(x_0 - x_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \gamma F - \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} I_x \gamma = 0, \\ EI_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + P(r_0^2 + 2\beta_x x_1 + 2\beta_y y_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - P(x_0 - x_1) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \\ + P(y_0 - y_1) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} y_0 - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} x_0 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} r_0^2 \right) \gamma F - \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2} I_\omega \gamma = 0. \end{cases}$$

Dla układu tego należy jeszcze sformułować pewne warunki brzegowe, na przykład:

(a) obydwie końce utwierdzone przegubowo z możliwością deplanacji

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = v = \varphi = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \end{array} \right\} \text{ dla } z = 0 \text{ oraz } z = l,$$

(b) obydwie końce utwierdzone zupełnie bez możliwości deplanacji

$$(1.11) \quad u = v = \varphi = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z = 0, \quad z = l,$$

(c) obydwie końce utwierdzone z możliwością deplanacji

$$(1.12) \quad u = v = \varphi = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dla } z = 0, \quad z = l$$

lub ich kombinacje. Możliwe są i inne warunki, których nie podajemy. W pracy ograniczymy się jedynie do utwierdzenia przegubowego. Przy innych warunkach można stosować metodę przedstawioną w pracy [6].

Układ równań (1.9), chociaż możliwy jest do rozwiązania sposobem podanym w pracy, uprościmy przyjmując, że przekrój rozważanego pręta posiada oś symetrii. Niech nią będzie oś x . Jest wtedy $y_0 = 0$, a z uwagi na założenie zrobione wyżej odnośnie punktu działania siły mamy również $y_1 = 0$.

Przy powyższych założeniach pierwsze z równań układu (1.9) staje się niezależne od innych, a dwa pozostałe przyjmują postać

$$(1.13) \begin{cases} EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - P(x_0 - x_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \gamma F - \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} I_x \gamma = 0, \\ EI_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + P(r_0^2 + 2\beta_x x_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - P(x_0 - x_1) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \\ + \left(r_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \gamma F - \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2} I_\omega \gamma = 0. \end{cases}$$

W układzie tym wyróżnimy kilka przypadków szczególnych w zależności od istniejących więzów (rodzaju sprzężenia). Występują dwójakiego rodzaju sprzężenia: geometryczne związane z geometrią pola przekroju i dynamiczne związane z miejscem przyłożenia siły. Przy przejściu od układu (1.9) do (1.13) usunięto częściowo więzy geometryczne i dynamiczne.

Jeśli założymy, że pole przekroju posiada dwie osie symetrii, tzn. usuniemy całkowicie więzy geometryczne, to układ będzie nadal sprzężony ($x_1 \neq 0$). Dopiero po usunięciu więzów dynamicznych, co jest możliwe przy sile działającej w środku ciężkości przekroju, równania (1.13) będą rozdzielone.

Przy istnieniu więzów geometrycznych ($x_1 \neq 0$) więzy dynamiczne można usunąć przyjmując, że siła działa w środku sił poprzecznych ($x_1 = x_0$).

Widać stąd, że układ (1.13) nasuwa kilka możliwych przypadków, których rozwiązanie w niniejszej pracy można przedstawić za pomocą jednego związku ogólnego. Różnorodność możliwych warunków brzegowych czyni zagadnienie bardziej złożonym. W pracy ograniczymy się do warunków (1.10). Trzeba dodać, że autor pracy [3] rozważył jedynie dwa przypadki: (a) zupełny brak więzów geometrycznych i dynamicznych i (b) przy występujących tylko więzach geometrycznych. Dla każdego z nich stosował inną metodę.

2. Pręt obustronnie wolnopodparty z możliwością deplanacji

Warunki brzegowe w tym przypadku będą spełnione, jeśli przyjmiemy

$$(2.1) \quad \begin{cases} v(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m(t) \sin \frac{m \pi z}{l}, \\ \varphi(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t) \sin \frac{m \pi z}{l}. \end{cases}$$

Po wstawieniu powyższych funkcji do układu (1.13) i dokonaniu zmiany zmiennej $\omega t = \tau$ otrzymamy układ równań, który zapiszemy w postaci wektorowo-macierzowej

$$(2.2) \quad C_1 \ddot{T} + [A_1 - B_1 P(\tau)] T = 0,$$

gdzie

$$(2.3) \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \\ a & \beta \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \omega_v^2 & 0 \\ a & \omega_\varphi^2 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} d & c \\ c & e \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} y_m \\ \varphi_m \end{bmatrix}$$

oraz

$$(2.4) \quad \begin{cases} \alpha = \gamma \left(\frac{F \gamma_0^2 l^2}{m^2 \pi^2} + I_\omega \right), & \beta = \gamma \left(\frac{F l^2}{m^2 \pi^2} + I_x \right), \\ a = -\frac{\gamma F x_0 l^2}{\alpha \beta m^2 \pi^2}, & c = \frac{x_1 - x_0}{\alpha \beta}, & d = \frac{1}{\alpha \beta}, & e = \frac{r_0^2 + 2 \beta_x x_1}{\alpha \beta}, \\ \omega_v^2 = \frac{E I_x m^2 \pi^2}{l^2 \beta}, & \omega_\varphi^2 = \frac{E I_\omega \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + G I_z}{a}. \end{cases}$$

W oznaczeniach powyższych pominięto znaczki m oznaczające rząd harmonicznej. Również (2.2) ma miejsce dla każdej harmonicznej z osobna.

2.1. Uzasadnienie stosowanej metody rozwiązania. Równanie (2.2) można przedstawić również w postaci:

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} \frac{\omega^2}{a} \ddot{y} + a \omega^2 \ddot{\varphi} + \left[\frac{\omega_v^2}{a} - d P(\tau) \right] y - c P(\tau) \varphi = 0, \\ a \omega^2 \ddot{y} + \frac{\omega^2}{\beta} \ddot{\varphi} - c P(\tau) y + \left[\frac{\omega_\varphi^2}{\beta} - e P(\tau) \right] \varphi = 0. \end{cases}$$

Oznaczmy

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} q_1 = \frac{\omega^2}{a} \dot{y} + a \omega^2 \dot{\varphi}, & p_1 = y, \\ q_2 = a \omega^2 \dot{y} + \frac{\omega^2}{\beta} \dot{\varphi}, & p_2 = \varphi. \end{cases}$$

Na tej podstawie układ (2.1.1) jest równoważny układowi czterech równań pierwszego rzędu

$$(2.1.3) \quad \begin{cases} \dot{q}_1 = \left[d P(\tau) - \frac{\omega_v^2}{a} \right] p_1 + c P(\tau) p_2, \\ \dot{q}_2 = c P(\tau) p_1 + \left[e P(\tau) - \frac{\omega_\varphi^2}{\beta} \right] p_2, \\ \dot{p}_1 = \frac{a \beta}{\omega^2 (1 - a \beta a^2)} \left(\frac{1}{\beta} q_1 - a q_2 \right), \\ \dot{p}_2 = \frac{-a \beta}{\omega^2 (1 - a \beta a^2)} \left(a q_1 - \frac{1}{a} q_2 \right), \end{cases}$$

gdzie dwa ostatnie otrzymano z rozwiązania (2.1.2). Zawsze jest $1 - a \beta a^2 > 0$.

Dla układu (2.1.3) istnieje funkcja Hamiltona

$$(2.1.4) \quad H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega_v^2}{\alpha} - dP(\tau) \right] p_1^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\omega_\varphi^2}{\beta} - eP(\tau) \right] p_2^2 - \\ - cP(\tau) p_1 p_2 + \frac{\alpha\beta}{\omega^2(1 - \alpha\beta a^2)} \left(\frac{1}{2\beta} q_1^2 + \frac{1}{2\alpha} q_2^2 - a q_1 q_2 \right),$$

za pomocą której układ (2.1.3) można zapisać w postaci

$$(2.1.5) \quad \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = -\frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (k = 1, 2).$$

Z istnienia dla układu (2.1.3) funkcji Hamiltona wynika, że teoria W. W. Bołotina oparta na twierdzeniu A. M. Lapunowa może być stosowana w rozważanym przez nas przypadku bez względu na postać okresowo zmiennej siły $P(\tau)$.

Jeśli w szczególności — co będziemy w dalszym ciągu zakładali — siła $P(t)$ ma postać

$$P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t,$$

to zamiast równania (2.2) mieć będziemy

$$(2.1.6) \quad C \ddot{T} + (A - B \cos \tau) T = 0.$$

W tym przypadku macierze (2.3) mają postać

$$(2.1.7) \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & a \\ a & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \omega^2, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\omega_v^2}{\alpha} & b \\ b & \frac{\omega_\varphi^2}{\beta} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} d & c \\ c & e \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(2.1.8) \quad \begin{cases} \alpha = \gamma \left(\frac{F r_0^2 l^2}{m^2 \pi^2} + I_\omega \right), & \beta = \gamma \left(\frac{F l^2}{m^2 \pi^2} + I_x \right), \\ a = -\frac{\gamma F x_0 l^2}{\alpha \beta m^2 \pi^2}, & b = \frac{P_0(x_0 - x_1)}{\alpha \beta}, \\ c = \frac{P_1(x_1 - x_0)}{\alpha \beta}, & d = \frac{P_1}{\alpha \beta}, \quad e = \frac{P_1(r_0^2 + 2\beta_x x_1)}{\alpha \beta}, \\ \omega_v^2 = \frac{E I_x \frac{m^2 \pi^2}{l^2} - P_0}{\beta}, & \omega_\varphi^2 = \frac{E I_\omega \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + G I_z - P_0(r_0^2 + 2\beta_x x_1)}{\alpha}. \end{cases}$$

Jeśli wyznacznik macierzy A przyrównamy do zera, to otrzymamy warunek dla wyznaczenia obciążenia krytycznego. Zagadnienie to zostało dość obszernie omówione w pracy [7]. Dla wyznaczenia częstości drgań własnych należy w (2.1.6) macierz B przyjąć za zerową.

2.2. Wyznaczenie obszarów rezonansowych w przypadku ogólnym. Wróćmy do równania (2.1.6). Sposób otrzymania obszarów rezonansowych sprowadza się do określenia warunków, przy których spełnieniu równanie (2.1.6) posiada rozwiązania okresowe o okresach 2π i 4π .

Rozwiązania te przyjmujemy w postaci

$$(2.2.1) \quad T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau)$$

oraz

$$(2.2.2) \quad T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau + b_n \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right],$$

gdzie a_n i b_n są nie znanymi wektorami. Po wstawieniu powyższych funkcji do równania (2.1.6) otrzymamy warunki w postaci wyznaczników:

dla rozwiązania (2.2.1)

$$(2.2.3) \quad \begin{vmatrix} A & -\frac{1}{2}B & 0 & 0 & \dots \\ -B & A-C & -\frac{1}{2}B & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{2}B & A-4C & -\frac{1}{2}B & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}B & A-16C & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

oraz

$$(2.2.4) \quad \begin{vmatrix} A-C & -\frac{1}{2}B & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2}B & A-4C & -\frac{1}{2}B & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{2}B & A-16C & -\frac{1}{2}B & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}B & A-36C & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

zaś dla równania (2.2.2)

$$(2.2.5) \quad \begin{vmatrix} A \pm \frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C & -\frac{1}{2}B & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2}B & A - \frac{9}{4}C & -\frac{1}{2}B & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{2}B & A - \frac{25}{4}C & -\frac{1}{2}B & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}B & A - \frac{49}{4}C & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Zajmiemy się podstawowym obszarem rezonansowym. Granice tego obszaru można otrzymać w przybliżeniu uwzględniając w warunku (2.2.5) tylko pierwszy górny wyraz

$$(2.2.6) \quad \left| A \pm \frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C \right| = 0.$$

Obliczając wyznacznik przy uwzględnieniu oznaczeń (2.1.7) i (2.1.8) i przyjmując

$$(2.2.7) \quad \mu = \pm \frac{1}{2},$$

znajdziemy

$$(2.2.8) \quad (1 - a^2 \alpha \beta) \omega^4 - 4[\omega_v^2 + \omega_\varphi^2 - 2\alpha\beta ab + \mu(e\beta + ad - 2\alpha\beta ac)] \omega^2 + + 16[\omega_v^2 \omega_\varphi^2 - \alpha\beta b^2 + \mu(\omega_\varphi^2 ad + \omega_v^2 \beta e - 2\alpha\beta bc) + \mu^2(\alpha\beta ed - \alpha\beta c^2)] = 0.$$

Oznaczmy przez

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

gdzie

$$(2.2.9) \quad \begin{cases} \Delta_1 = 4[\omega_v^2 - \omega_\varphi^2 + \mu(ad - \beta e)]^2, \\ \Delta_2 = 16\alpha\beta[\mu(\omega_v^2 a - b)(\beta ae - c) + \mu(\omega_\varphi^2 a - b)(\alpha ad - c) - \\ - ab(\omega_v^2 + \omega_\varphi^2) + b^2 - \mu^2 a(\beta ce + acd - \alpha\beta aed) + (\alpha^2 \omega_v^2 \omega_\varphi^2 + \mu^2 c^2)]. \end{cases}$$

Rozwiązaniem równania (2.2.8) są liczby

$$(2.2.10) \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{2[\omega_v^2 + \omega_\varphi^2 - 2\alpha\beta ab + \mu(\beta e + ad - 2\alpha\beta ac)] \pm \sqrt{\Delta}}{1 - a^2 \alpha \beta}.$$

Mianownik jest zawsze dodatni, co stwierdzono już przy układzie (2.1.3). Znak plus we wzorze (2.2.10) odpowiada częstotści ω_v , zaś minus częstotści ω_φ , tzn. odpowiednio dominującym drganiom giętnym i skrętnym.

2.3. **Przypadki szczególne.** Ze wzoru w postaci (2.2.10) wyprowadzimy kilka przypadków szczególnych.

(a) Pole przekroju posiada dwie osie symetrii i siła działa w środku ciężkości pola przekroju ($x_0 = x_1 = 0$). Przybliżone granice obszaru rezonansowego dla drgań giętnych są określone równaniem

$$(2.3.1) \quad \frac{\omega_v^2}{\omega^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \mu \frac{P_1}{P_k - P_0} \right),$$

gdzie

$$P_k = EI_x \frac{m^2 \pi^2}{l^2}$$

oraz gdzie przyjęto

$$\left(\mu \frac{P_1}{P_k - P_0} \right)^2 \ll 1.$$

Dla drgań skrętnych zaś przyjmujemy

$$(2.3.2) \quad \frac{\omega_\varphi^2}{\omega^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \mu \frac{P_1}{P_k - P_0} \right),$$

gdzie

$$P_k = \frac{EI_\omega \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + GI_z}{r_0^2}$$

oraz gdzie przyjęto również założenie jak dla (2.3.1).

Wzory (2.3.1) oraz (2.3.2) odpowiadają wzorom (2.2) pracy [3] z tym zastrzeżeniem, że w tych ostatnich nie uwzględniono obrotów przekroju i mylnie podano k_{ux} .

(b) Pole przekroju posiada dwie osie symetrii, a siła działająca przyłożona jest w dowolnym punkcie tej osi symetrii ($x_0 = 0$, a x_1 jest dowolne).

Wobec oznaczeń (2.1.8) $a = 0$ otrzymujemy

$$(2.3.3) \quad \omega_{1,2}^2 = 2[\omega_v^2 + \omega_\varphi^2 + \mu(\beta e + ad)] \pm \sqrt{\Delta},$$

gdzie

$$\Delta = 4[\omega_v^2 - \omega_\varphi^2 + \mu(ad - \beta e)]^2 + 16\alpha\beta(b + \mu c)^2.$$

Z przedstawienia tego widać, że we wzorze (2.3.3) x_1 wystąpi w kwadracie, co istotnie powinno mieć miejsce ze względu na symetrię. W oznaczeniach (2.1.8) należy przyjąć $\beta_x = 0$.

Jeśli

$$(2.3.4) \quad \varepsilon = \frac{4\alpha\beta(b + \mu c)^2}{[\omega_v^2 - \omega_\varphi^2 + \mu(ad - \beta e)]^2}$$

i jeśli wielkość tę uważać będziemy za małą w porównaniu z jednością, to związek (2.3.3) przyjmie postać

$$(2.3.5) \quad \omega_{1,2}^2 = 2 \{ (\omega_v^2 \pm \omega_\varphi^2) + (\omega_\varphi^2 \mp \omega_v^2) + \mu [\beta(e \mp e) + a(d \pm d)] \pm \frac{e}{2} [(\omega_v^2 - \omega_\varphi^2) + \mu(ad - \beta e)] \},$$

przy czym znaki górne odnoszą się do wskaźnika 1, a dolne do 2. Wpływ wartości (2.3.4) na obszary rezonansowe będzie tym większy, im mniej ω_v^2 będzie się różnić od ω_φ^2 . Jeśli liczbę (2.3.4) można pominąć wobec jedności, to ze wzoru (2.3.5) widać, że punkt przyłożenia siły ma wpływ tylko na stateczność drgań skrętnych.

(c) Pole przekroju posiada jedną oś symetrii i siła działa w środku sił poprzecznych ($x_0 = x_1$). Ze wzorów (2.1.8) mamy $b = c = 0$, a ze wzoru (2.2.10) otrzymujemy

$$(2.3.6) \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{2 [\omega_v^2 + \omega_\varphi^2 + \mu(\beta e + ad)] \pm \sqrt{\Delta}}{1 - a^2 \alpha \beta},$$

gdzie $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, przy czym Δ_1 podane jest przez (2.2.9), zaś

$$(2.3.7) \quad \Delta_2 = 16 \alpha \beta a^2 [\omega_v^2 \omega_\varphi^2 + \mu(\omega_v^2 e \beta + \omega_\varphi^2 a d) + \mu^2 \alpha \beta e d].$$

Ten ostatni przypadek wskazuje na dogodną postać otrzymanych wyników w porównaniu z przedstawionymi w pracy [3].

2.4. Drgania giętne w kierunku osi x . Dla drgań giętnych w kierunku osi x obszary rezonansowe otrzymamy ze związku (2.3.1), jeśli zamiast ω_v^2 podstawimy

$$(2.4.1) \quad \omega_a^2 = \frac{E I_y \frac{m^2 \pi^2}{l^2} - P_0}{\gamma \left(\frac{F l^2}{m^2 \pi^2} + I_y \right)}.$$

Mamy więc

$$(2.4.2) \quad \frac{\omega_a^2}{\omega^3} = \frac{1}{4} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_k - P_0} \right),$$

gdzie

$$P_k = E I_y \frac{m^2 \pi^2}{l^2}.$$

Na zakończenie rozważań warto dodać, że drgania prętów cienkościennych o profilu otwartym są obszernie opracowane w pracy [4].

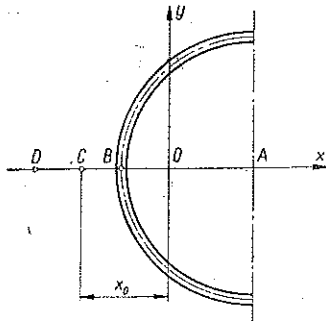
3. Przykład

Dla zilustrowania otrzymanych wyników i wyciągnięcia wniosków przytoczymy przykład.

Przyjmijmy pręt o długości $l = 200$ cm o stałym przekroju w kształcie półkola grubości $\delta = 0,2$ cm, którego linia środkowa ma promień $r = 5$ cm.

Niech $G = 8 \cdot 10^5$ kG/cm², $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm², $\gamma = 7,7 \cdot 10^{-6}$ kG sek²/cm⁴.

Dla układu osi jak na rys. 2 mamy



Rys. 2

$$\begin{aligned} J_x &= 1,5708 r^3 \delta \text{ cm}^4, & J_y &= 0,2976 r^3 \delta \text{ cm}^4, \\ J_\omega &= 0,037378 r^3 \delta \text{ cm}^6, & J_z &= 1,0472 r \delta^3 \text{ cm}^4, \\ \beta_x &= 1,2732 r \text{ cm}, & r_0^2 &= 25 \text{ cm}^2, \\ x_0 &= -2 r / \pi \text{ cm}. \end{aligned}$$

Przyjmijmy również $P_0 = 300$ kG. Pole przekroju poprzecznego wynosi $F = r \pi \delta = 1415$ cm². Przyjmować będziemy punkty przyłożenia siły $x_1 = 2r/\pi, 0, 0, 2r/\pi - r, -2r/\pi, -5$ cm.

Ze wzoru (2.1.8) otrzymujemy ($n=1$) $\alpha = 2,4192, \beta = 0,09706, a = 1,3117, \omega_v^2 = 199206,6$.

Parametrem, w zależności od którego wyznaczymy granice obszarów rezonansowych, będzie $\nu = P_1 / a \beta$. Pozostałe wielkości (2.1.8) zależą od x_1 . Nie podajemy tutaj dokładnych obliczeń, a jedynie zestawiamy wyniki w tablicach 1, 2, 3, 4 i 5 przytaczając zależności $1/\omega_{1,2}^2$ od ν oraz x_1 [wyliczone ze wzoru (2.2.10)].

Tablica 1. $10^8 / {}_1\omega_1^2$

$x_1 \backslash \nu$	0	500	1000
3,18	70,961	70,945	70,928
0,0	71,297	71,215	71,133
-1,81	71,489	71,369	71,257
-3,18	71,633	71,485	71,336
-5	71,824	71,638	71,453

Tablica 2. $10^8 / {}_2\omega_1^2$

$x_1 \backslash \nu$	0	500	1000
3,18	70,961	70,975	70,991
0,0	71,297	71,379	71,462
-1,81	71,489	71,609	71,731
-3,18	71,633	71,782	71,931
-5	71,824	72,011	72,198

Jeśli zdefiniujemy szerokość obszarów rezonansowych przez

$$\Delta \omega_i^2 = \left| \frac{1}{{}_1\omega_i^2} - \frac{1}{{}_2\omega_i^2} \right| \quad (i = 1, 2),$$

to na podstawie danych tablicy 1 i 2 oraz 3 i 4 można sporządzić wykresy charakteryzujące tę szerokość, co podają odpowiednio rys. 14 i 8.

Przykład rozwiązano dla pierwszej harmonicznej drgań skrętno-giętnych. Każdej harmonicznej odpowiadają dwie częstotliwości drgań. W naszym przykładzie wskaźniki przy ω^2 z prawej strony u dołu odpowiadają pierwszej lub drugiej częstotliwości drgań skrętno-giętnych.

Tablica 3. $10^6/\omega_1^2$

$x_1 \backslash \nu$	0	500	1000
3,18	20,755	18,923	17,389
0,0	15,711	15,323	14,947
-1,81	13,801	13,821	13,805
-3,18	12,653	12,877	13,112
-5	11,393	11,806	12,252

Tablica 4. $10^6/\omega_2^2$

$x_1 \backslash \nu$	0	500	1000
3,18	20,755	22,971	25,738
0,0	15,711	16,124	16,558
-1,81	13,801	13,798	13,773
-3,18	12,653	12,439	12,230
-5	11,393	11,010	10,652

Na podstawie sporządzonych tablic i wykresów można wypowiedzieć następujące wnioski.

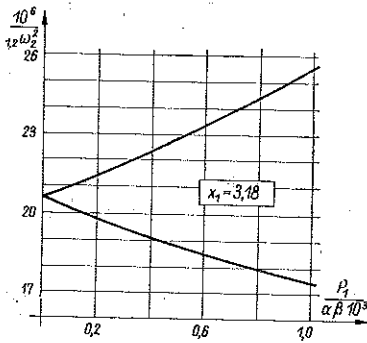
(1) Każdej harmonicznej odpowiadają dwa podstawowe obszary rezonansowe. Jeden występuje przy niższych częstotliwościach kątowych siły wymuszającej ω , drugi przy wyższych. Tablice 1 i 2 podają granice wyższych (dalszych) obszarów rezonansowych, zaś tablice 3 i 4 — niższych (bliższych).

(2) Wraz z przesunięciem punktu x_1 przyłożenia siły w stronę środka sił poprzecznych wartości ω , w otoczeniu których $P_1 = 0$ wystąpi rezonans parametryczny, dla wyższych częstotliwości maleją, zaś dla niższych wzrastają.

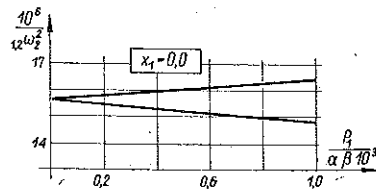
(3) Spośród niższych obszarów rezonansowych najszerszy jest ten, który odpowiada sile działającej w punk-

Tablica 5

ν	0,0	500	1000
$\frac{10^6}{\omega_1^2}$	7,0787	7,2002	7,3218
$\frac{10^6}{\omega_2^2}$	7,0787	6,9572	6,8356

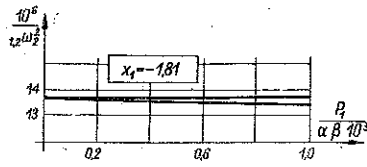


Rys. 3

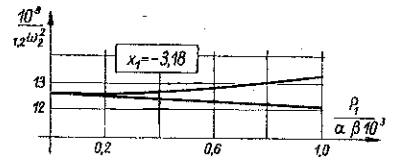


Rys. 4

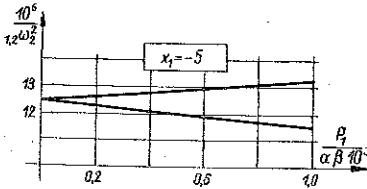
cie A ($x_1 = 2r/\pi$), a najwęższy ten, który odpowiada sile działającej w punkcie B ($x_1 = 2r/\pi - r$) (rys. 2).



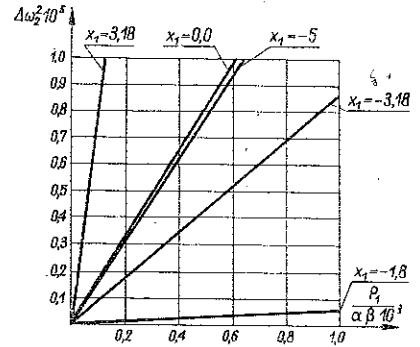
Rys. 5



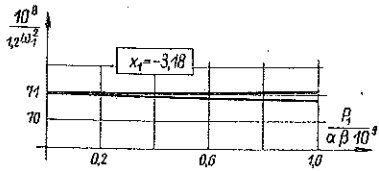
Rys. 6



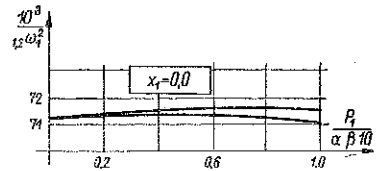
Rys. 7



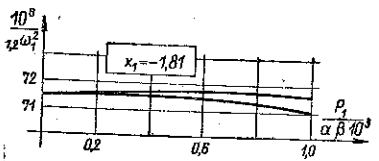
Rys. 8



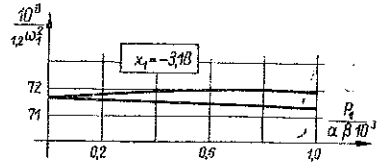
Rys. 9



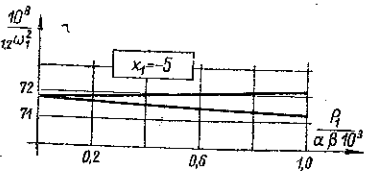
Rys. 10



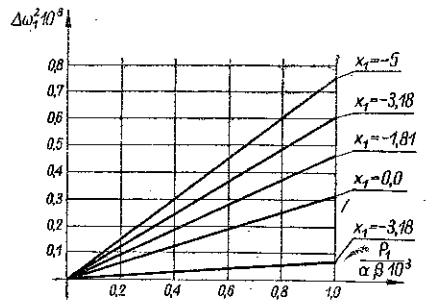
Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

(4) Ze wzrostem siły P_1 szerokość obszarów rezonansowych wzrasta liniowo, co podano na rys. 8 i 14.

(5) Rysunek 14 wskazuje, że w miarę przesuwania punktu przyłożenia siły w stronę środka sił poprzecznych szerokość wyższych obszarów rezonansowych wzrasta.

(6) W ogólności niższe obszary rezonansowe są szersze od wyższych.

Zajmiemy się bliżej trzecim wnioskiem. Okazuje się bowiem, że gdy siła działa w punkcie B, to wielkość

$$(3.1) \quad A_2 = r_0^2 + 2\beta_x x_1 - (x_0 - x_1)^2$$

jest równa zero, gdyż w naszym przykładzie

$$r_0^2 = r^2, \quad x_0 = -\frac{2r}{\pi}, \quad U_y = 2\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)r^4 \delta,$$

$$I_y = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right)r^3 \delta, \quad x_1 = \frac{2r}{\pi} - r.$$

Wiadomo, [7], że statyczną siłę krytyczną oblicza się z równania

$$(3.2) \quad A_2 P^2 - A_1 P + A_0 = 0,$$

gdzie A_2 podane jest przez (3.1), zaś

$$A_1 = \frac{E I_x \pi^2}{l^2} (r_0^2 + 2\beta_x x_1) + \frac{E I_\omega \pi^2}{l^2} + G I_z,$$

$$A_0 = \frac{E I_x \pi^2}{l^2} \left(\frac{E I_\omega \pi^2}{l^2} + G I_z \right).$$

Przy warunku $A_2 = 0$ (brak sprzężenia) z równania (3.2) otrzymujemy tylko jedną wartość dla siły krytycznej (jedno rozwiązanie).

Równanie $A_2 = 0$, które wiąże ze sobą więzy geometryczne i dynamiczne, można uważać za warunek istnienia najwęższego obszaru rezonansowego spośród wszystkich niższych obszarów. Podobny wniosek został stwierdzony przez autora w pracy [6].

Jeśli chodzi o drgania giętne w kierunku osi x , to ze wzoru (2.4.1) mamy ($m = 1$), $\omega_u^2 = 35317,1$, $P_k = 3718,3$ kG.

Ze wzoru (2.4.2) mamy

$$\frac{10^6}{\omega^2} = 7,0787 \left(1 \pm \frac{P_1}{6837,4} \right).$$

Tablica 5 podaje wartości powyższej funkcji dla $\nu = 0,0, 500$ i 1000 , co odpowiada $P_1 = 0,0, 117,4$ oraz $234,8$ kG.

Porównując wyniki w tablicach 3, 4 i 5 stwierdzamy, że rezonans dla drgań czysto giętnych zachodzi przy wyższych częstościach kątowych siły wymuszającej ω niż w przypadku niższej postaci drgań skrętno-giętnych.

Literatura cytowana w tekście

- [1] N. A. Artiemiew, *Mietod opriedielenja characteristiczeskich pokazatelej i priloženja jewo k dwom zadaczam niebiesnoj miechaniki*, Izw. AN SSSR, Ser. mat., 1944.
- [2] W. W. Bołotin, *O paramietriczeskom wozbuźdienji popieriecznych kolebanij. Popieriecznyje kolebanja i kriticzeskije skorosti*, Sborn. wtoroj, 1953.
- [3] I. I. Goldienbłat, *Dinamiczeskij prodolnyj izgib tonkostiennych stierżnjej*, Inż. Sborn., t. 5, 1 (1948).
- [4] R. Hielig, *Torsions und Biegeschwingungen von dünnwandigen Trägern mit beliebiger offener Profilform mit Vorlasten*, Ing. Archiv, t. 19, 1951.
- [5] J. Naleszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, WK, Warszawa 1953.
- [6] K. Piszczek, *Wpływ krzywizny w stanie naturalnym na obszary rezonansowe płaskiej postaci zginania*, Arch. Mech. Stos. 2 (1957).
- [7] S. D. Ponomariew i inni, *Osnowy sowriemionnych mietodow rasczota na procznost' w maszynostrojenji*, Moskwa 1952.
- [8] J. A. Pratuszewicz, *Wariacjonnyje mietody w stroitielnoj miechanike*, Moskwa-Leningrad 1948.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ НА РЕЗОНАНСНЫЕ ЗОНЫ В ВОПРОСАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Целью работы является определить влияние связей на динамическую устойчивость прямого тонкостенного стержня, при краевых условиях шарнирного защемления.

Вопрос решается при предположении наличия одной оси симметрии сечения, причем место приложения силы возможно в произвольной точке оси. Метод решения основан на статье [2], относительно которого доказана возможность использования в данной задаче. Этот метод, по сравнению с методом в [3], является более ясным, причем учитывается также влияние поворота сечения.

Вводится понятие геометрических и динамических связей. Геометрическую связь понимаем как сопряжение, связанное с геометрией сечения, а динамическая связь обозначает сопряжение, связанное с точкой приложения силы.

Оказывается, что условием существования наиболее узкой резонансной зоны является $A_2 = 0$, где A_2 обозначает выражение (3.1).

Summary

INFLUENCE OF GEOMETRICAL AND DYNAMICAL CONSTRAINTS ON RESONANCE REGIONS IN THE PROBLEM OF DYNAMICAL STABILITY OF A THIN-WALLED BAR WITH OPEN CROSS-SECTION

This paper seeks to determine the influence of the constraints referred to in the title on the dynamical stability of a straight thin-walled bar with hinged support end conditions.

The problem is solved on the assumption of existence of a single symmetry axis of the cross-section, the force acting at an arbitrary point of that axis. The method of solution is based on Ref. [2] which is shown to be applicable to this problem. However, the method used in the present paper, seems to be more clear than that of Ref. [3]. The influence of rotation of the cross-sections is also taken into consideration.

The notion of the geometrical and dynamical constraint is introduced. By geometrical constraint, we understand a conjugation concerning the geometry of the cross-section, the dynamical constraint being connected with the attachment point of the force.

It is shown that the condition of existence of the most narrow resonance region is $A_2 = 0$ where A_2 denotes the expression (3.1).

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 kwietnia 1956 r.