

ANDRZEJ BRANDT, JAN KOSMOWSKI, ZBIGNIEW WASIUTYŃSKI

O KSZTAŁTOWANIU KRATOWNIC
NA MINIMUM POTENCJAŁU PRZEZ PRZESUWANIE
NIEOBCIĄŻONYCH WĘZŁÓW ŁĄCZĄCYCH TRZY PRĘTY

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXVII

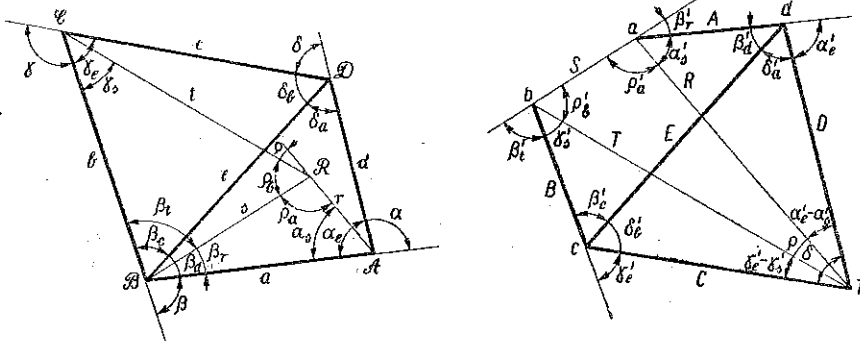
SPIS TREŚCI

	Str.
1. Cel i sposób rozwiązania zagadnienia oraz wyniki	159
2. Oznaczenia i wstępny opis rozpatrywanego układu	161
3. Wyprowadzenie wzorów na pochodną potencjału względem długości prętów c i d	163
4. Analiza warunków występowania zerowych wartości pochodnych $\partial\Delta/\partial d$ i $\partial\Delta/\partial c$	166
4.1. Dyskusja trójmianu $\pm b \pm c_b \pm e_b$	166
4.2. Dyskusja trójmianu $\pm D \pm C_D \pm E_D$	170
4.3. Zależność zerowych wartości pochodnej $\partial\Delta/\partial d$ od wartości trójmianów $\pm b \pm c_b \pm e_b$ oraz $\pm D \pm C_D \pm E_D$	175
4.4. Dyskusja zestawień trójmianów $\pm b \pm c_b \pm e_b$ oraz $\pm D \pm C_D \pm E_D$ w równaniu $\partial\Delta/\partial d = 0$	177
4.5. Zależności między kątami kratownicy wynikające z równania $\partial\Delta/\partial d = 0$	180
4.6. Sprawdzenie możliwości spełnienia warunków wynikających z równania $\partial\Delta/\partial d = 0$	181
4.7. Wniosek o występowaniu zerowych wartości pochodnej potencjału układu pięciu prętów względem długości pręta d	182
4.8. Warunki występowania zerowych wartości pochodnej $\partial\Delta/\partial d$	183
5. Wyznaczenie przypadków ekstremum potencjału	187
5.1. Łączenie warunków zerowych wartości pochodnych $\partial\Delta/\partial c$ i $\partial\Delta/\partial d$	187
5.2. Zestawienie warunków zerowych wartości pochodnych $\partial\Delta/\partial c$ i $\partial\Delta/\partial d$ w przypadkach zależności (B) i (B')	187
5.3. Zestawienie warunków zerowych wartości pochodnych $\partial\Delta/\partial c$ i $\partial\Delta/\partial d$ w przypadkach zależności (A) i (A')	191
6. Zmienność potencjału rozpatrywanego układu w zależności od położenia nieobciążonego węzła \mathcal{D}	193
6.1. Zmienność potencjału dokoła trójkątnego obszaru minimum Λ	194
6.2. Zmienność potencjału dokoła punktu odpowiadającego minimum Λ	195
7. Przykłady kształtowania kratownicy na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów łączących trzy pręty	197

1. Cel i sposób rozwiązania zagadnienia oraz wyniki

Przeprowadzona analiza ma na celu wyznaczenie warunków określających takie położenie nieobciążonego węzła łączącego trzy pręty kratownicy równej wytrzymałości, przy którym potencjał tej kratownicy ma wartość najmniejszą.

Ponieważ przesunięcia węzła łączącego trzy pręty w kratownicach izostatycznych wpływają na długości i na siły prętów tylko dwóch trójkątnych pól kratownicy, złączonych przesuwanym węzłem, przeto w zagadnieniu tym należy rozpatrzyć tylko pięć prętów kratownicy łączących cztery węzły (rys. 1).



Rys. 1

Poszukiwane położenie węzła nieobciążonego może być określone przez długości dwóch spośród trzech złączonych nim prętów. Warunkiem określającym to położenie mogą być przeto zerowe wartości pochodnych potencjału kratownicy względem długości dwóch prętów zbiegających się w tym węzle.

Przedstawione rozwiązanie obejmuje:

- (1) oznaczenia oraz opis wstępny analizowanego układu,
- (2) wyprowadzenie wzorów na pochodną potencjału względem przesunięć wzdłuż dwóch prętów zewnętrznych,
- (3) analizę warunków występowania zerowych wartości potencjału przy przesuwaniu węzła wzdłuż dwóch prętów,

(4) wyznaczenie przypadków, w których zachodzi ekstremum potencjału,

(5) analizę zmienności potencjału układu pięciu prętów w otoczeniu położenia ekstremalnych węzła nieobciążonego.

Rozważania te dają następujące wyniki.

Należy odróżnić dwa rodzaje układów pięciu prętów równej odkształcalności, związanych w dwa pola trójkątne i ukształtowanych na zasadzie minimum potencjału: pierwszy, w którym wszystkie pręty doznają odkształceń tego samego znaku, i drugi, w którym pręty doznają odkształceń różnych znaków.

Układy pierwszego rodzaju mają następujące własności.

Wartość potencjału tych układów nie zmienia się przy takim przesunięciu nieobciążonego węzła, przy którym znaki odkształceń prętów nie ulegają zmianie. Przesunięcie nieobciążonego węzła, wywołujące zmianę znaku odkształceń niektórych prętów, wywołuje wzrost potencjału.

Układy te zachowują cechę układów gromadzących najmniejszy potencjał przy zmianie układu sił przyłożonych w trzech węzłach, o ile zmiany tych sił nie zmieniają znaków odkształceń niektórych prętów i o ile wraz z siłami zewnętrznymi zmieniają się pola przekrojów prętów tak, aby pręty te zachowywały równą odkształcalność.

Własności te dają się łatwo wyjaśnić na rysunku. Pierwsza z nich oznacza, że w układzie przedstawionym np. na rys. 53 potencjał zachowuje wartość minimalną, gdy węzeł \mathcal{D} zajmuje dowolne położenie wewnątrz trójkąta ABC lub na jego obwodzie. Druga własność oznacza, że układ zachowuje cechę gromadzenia minimum potencjału, gdy punkt \mathcal{B} zmienia położenie w ten sposób, że węzeł \mathcal{D} pozostaje wewnątrz trójkąta ABC lub na jego obwodzie.

Układy drugiego rodzaju mają następujące własności.

Minimum potencjału tych układów występuje przy takim położeniu węzła nieobciążonego, przy którym trójkąty ich są podobne, a kąty oznaczone na rys. 63 - 65 przez β_c i β_d oraz α_e i γ_e są równe. Przesunięcie nieobciążonego węzła z tego położenia wywołuje wzrost potencjału.

Podobnie jak układy pierwszego rodzaju, tak też układy drugiego rodzaju zachowują cechę gromadzenia najmniejszego potencjału przy zmianie układu sił przyłożonych w trzech węzłach obciążonych.

W twierdzeniu tym należy podkreślić dwie szczególne cechy obu rodzajów układów posiadających najmniejszy potencjał.

Po pierwsze, układy te są niezmiennie przy zmianie obciążeń. Jeżeli dany układ o prętach różnej odkształcalności gromadzi minimum potencjału pod danym obciążeniem, to będzie też gromadził minimum potencjału pod dowolnym obciążeniem przyłożonym w tych samych węzłach co poprzednio, o ile przekroje prętów dostosujemy do równej odkształ-

calności. Wraz ze zmianą obciążeń kratownicy minimalne zmieniają przekroje, ale nie zmieniają układów. Układy prętów o różnych znakach odkształceń są więc niezmiennikami ze względu na minimum potencjału. Ta cecha podkreśla celowość wyznaczania i stosowania układów kratownic minimalnych.

Po drugie, wszystkie układy równej odkształcalności pierwszego rodzaju (o tym samym znaku odkształceń we wszystkich prętach) gromadzą minimum potencjału. Własność ta daje szczególne znaczenie tym układom, pozwala bowiem ograniczyć ich kształtowanie do wyznaczenia przekrojów prętów pozostawiając znaczną dowolność w wyborze ich układu. Zapewne dzięki tej własności układy pierwszego rodzaju w postaci układów mostów wiszących i łukowych są od tak dawna rozpowszechnione w budownictwie.

2. Oznaczenia i wstępny opis rozpatrywanego układu

Rozpatrzmy dwa trójkątne pola kratownicy równej wytrzymałości utworzone z pięciu prętów a, b, c, d, e . Zakładamy, że pola te nie zachodzą na siebie ani częściowo, ani w całości.

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

A, B, C, D	węzły kratownicy i odpowiadające im trójkąty wieloboku sił; węzły A, B, C są obciążone, a węzeł D jest nieobciążony,
R	wspólny punkt prostych działania sił zewnętrznych,
a, b, c, d, e	długości prętów,
r, s, t	długości odcinków AR, BR, CR ,
A, B, C, D, E	bezwzględne wartości sił w prętach,
R, S, T	bezwzględne wartości sił zewnętrznych,
ϵ_0	bezwzględna wartość odkształcenia równej wytrzymałości,
a, b, c, d, r	wierzchołki wieloboku sił lub odpowiadającego im pola kratownicy,
V	objętość kratownicy,
Δ	potencjał kratownicy,
$\left. \begin{array}{l} \alpha, \alpha_e, \alpha_s, \beta, \beta_c, \beta_d, \beta_r, \beta_t \\ \gamma, \gamma_e, \gamma_s, \delta, \delta_a, \delta_b, \end{array} \right\}$	kąty zawarte między prętami kratownicy lub między przedłużeniami ich osi,
$\left. \begin{array}{l} \varrho, \varrho_a, \varrho_b \end{array} \right\}$	kąty zawarte między prostymi działania sił zewnętrznych,
$\left. \begin{array}{l} \alpha', \alpha'_e, \alpha'_s, \beta', \beta'_c, \beta'_d \\ \beta'_r, \beta'_t, \gamma', \gamma'_e, \gamma'_s, \delta' \\ \delta'_a, \delta'_b, \varrho', \varrho'_a, \varrho'_b \end{array} \right\}$	kąty zawarte między bokami wieloboku sił lub między przedłużeniami tych boków.

Kąty oznaczone są takimi samymi literami, jak węzły, oraz wskaźnikami oznaczającymi przeciwległe pręty. Kąty bez wskaźników oznaczają kąty dopełniające sumę kątów ze wskaźnikami w danym wierzchołku do kąta półpełnego. Kąty wieloboku sił odróżniono przecinkami.

Kąty $\alpha_e, \beta_c, \beta_d, \gamma_e, \delta_a, \delta_b, \rho_a, \rho_b$ mierzymy jako nie zachodzące na siebie kąty wewnętrzne trójkątnych pól kratownicy dopełnionej odcinkami prostych działania sił zewnętrznych.

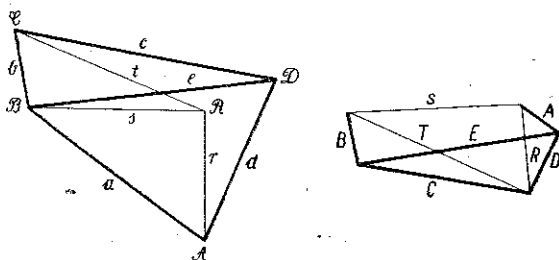
Kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho$ mierzymy jako kąty zewnętrzne tychże pól trójkątnych, położone pomiędzy jednym z boków a przedłużeniem drugiego i dopełniające kąty wewnętrzne tego samego węzła do kąta półpełnego, jeżeli obwód kratownicy jest w tym węźle wypukły, lub do kąta pełnego, jeżeli obwód ten jest wklęsły.

Kąty $\alpha', \alpha'_e, \beta', \beta'_c, \beta'_d, \gamma', \gamma'_e, \delta', \delta'_a, \delta'_b, \rho', \rho'_a, \rho'_b$ mierzymy jako kąty wewnętrzne lub zewnętrzne wieloboku sił, nie zachodzące na siebie, dopełniające się we wspólnych wierzchołkach do π , równe odpowiednim kątom kratownicy lub ich dopełnieniom do π .

Tym wszystkim kątom nie przypisujemy znaków ani zwrotów.

Oznaczenia kątowe mają zasadnicze znaczenie w analizie postawionego zagadnienia.

Jeżeli odcinki r, s i t będziemy traktowali jako pręty uzupełniające rozpatrywane dwa pola kratownicy, to otrzymamy jednokrotnie hyperstatyczny układ ośmiu prętów łączących pięć węzłów. Odpowiadający mu wielobok sił może być też uważany za jednokrotnie hyperstatyczny układ ośmiu prętów łączących pięć węzłów, którego wielobokiem sił jest rozpatrywana kratownica. W obu tych układach prętów nie mamy sił zewnętrznych. Występujące w nich siły mogą być wywołane przez nadanie właściwej długości jednemu z prętów. Naprężając w ten sposób rozpatrywany układ możemy nadać siedmiu prętom przekroje równej wytrzymałości. Ósmy pręt ma odkształcenia jednostkowe



Rys. 2

równej wytrzymałości tylko w przypadku, gdy odkształcenia wszystkich prętów mają ten sam znak.

Układy te mają następujące cechy geometryczne.

Każdy z nich składa się z czterech trójkątów i z jednego czworoboku oraz każdy z nich ma cztery węzły łączące po trzy pręty i jeden węzeł łączący cztery pręty.

Jeżeli węzeł R leży wewnątrz pola kratownicy, a bok e przecina bok r lub t , to bok E przecina bok R lub T (rys. 2).

Jeżeli węzeł R leży zewnątrz pola kratownicy, a bok s przecina bok c lub d , to bok S przecina bok C lub D (rys. 3).

Jeżeli węzeł R leży zewnątrz pola kratownicy, a bok s nie przecina żadnego z boków kratownicy, to w wieloboku sił nie ma przecinających się boków (rys. 4).

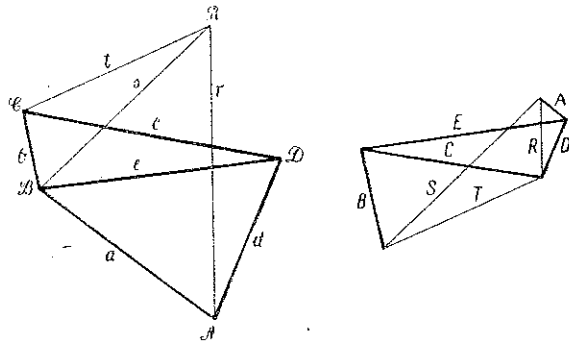
Przy przesuwaniu węzła D w rozpatrywanym układzie i w odpowiadającym mu wieloboku sił wyróżniają się trzy grupy prętów i trzy grupy sił.

Do pierwszej grupy zaliczymy pręty r, s, t zbiegające się w węźle R i odpowiadające im trzy siły tworzące trójkąt RST .

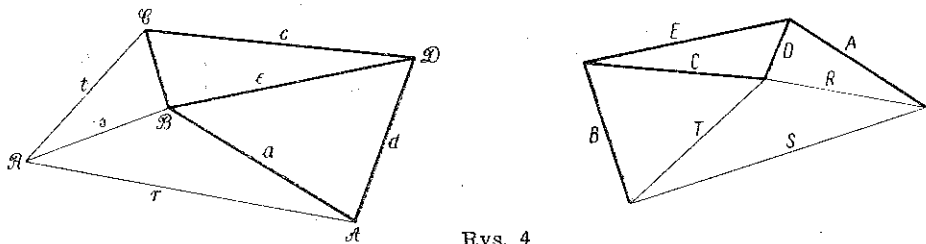
Do drugiej grupy zaliczymy pręty c, d, e zbiegające się w węźle D i odpowiednie trzy siły tworzące trójkąt CDE .

Do trzeciej grupy zaliczymy pręty a, b i odpowiadające im siły A, B .

Przy przesuwaniu węzła D pręty i siły zaliczone do pierwszej grupy nie zmieniają ani swej wielkości, ani położenia; pręty zaliczone do drugiej grupy zmieniają swoje położenie i długości obracając się dokoła stałych węzłów A, B, C , a trójkąt sił tej grupy zmienia poło-



Rys. 3



Rys. 4

żenie i długości boków obracając się dokoła wierzchołka r ; w trzeciej grupie pręty a, b nie zmieniają ani swych długości, ani swego położenia, natomiast odpowiadające im wektory sił zmieniają i wielkość, i położenie.

3. Wyprowadzenie wzorów na pochodną potencjału względem długości prętów c i d

W rozpatrywanym zadaniu nie ma znaczenia ani skala kratownicy, ani skala sił. Dlatego jako wielkości określające kształt kratownicy i stosunki sił w jej prętach można przyjąć sześć spośród siedmiu stosunków boków i siedmiu stosunków sił:

$$\frac{a}{e}, \frac{b}{e}, \frac{c}{e}, \frac{d}{e}, \frac{r}{e}, \frac{s}{e}, \frac{t}{e},$$

$$\frac{A}{E}, \frac{B}{E}, \frac{C}{E}, \frac{D}{E}, \frac{R}{E}, \frac{S}{E}, \frac{T}{E}$$

lub też sześć niezależnych kątów zawartych między prętami.

Wprowadzone zmienne są związane trzema następującymi grupami zależności:

(1) zależności pomiędzy długościami prętów i kątami:

$$\frac{a}{\sin \delta_a} = \frac{d}{\sin \beta_d} = \frac{e}{\sin \alpha_e}, \quad \frac{b}{\sin \delta_b} = \frac{c}{\sin \beta_c} = \frac{e}{\sin \gamma_e},$$

$$\frac{a}{\sin \varrho_a} = \frac{r}{\sin \beta_r} = \frac{s}{\sin \alpha_s}, \quad \frac{b}{\sin \varrho_b} = \frac{s}{\sin \gamma_s} = \frac{t}{\sin \beta_t};$$

(2) zależności pomiędzy wielkościami sił i kątami:

$$\frac{A}{\sin (\alpha_e - \alpha_s)} = \frac{D}{\sin \alpha_s} = \frac{R}{\sin \alpha_e}, \quad \frac{B}{\sin (\gamma_e - \gamma_s)} = \frac{C}{\sin \gamma_s} = \frac{T}{\sin \gamma_e},$$

$$\frac{C}{\sin \delta_a} = \frac{D}{\sin \delta_b} = \frac{E}{\sin \delta}, \quad \frac{R}{\sin \varrho_b} = \frac{S}{\sin \varrho} = \frac{T}{\sin \varrho_a};$$

(3) zależności pomiędzy kątami:

$$\alpha_e + \beta_d + \delta_a = \pi; \quad \beta_c + \gamma_e + \delta_b = \pi, \quad \alpha_s + \beta_r + \varrho_a = \pi, \quad \beta_t + \gamma_s + \varrho_b = \pi,$$

$$\delta' = \delta, \quad \delta'_a = \delta_a, \quad \delta'_b = \delta_b$$

lub

$$\delta' = \pi - \delta, \quad \delta'_a = \pi - \delta_a, \quad \delta'_b = \pi - \delta_b.$$

Z tych zależności wyznaczamy długości boków przez długość boku e oraz wielkości sił przez siłę E :

$$a = e \frac{\sin \delta_a}{\sin \alpha_e}, \quad b = e \frac{\sin \delta_b}{\sin \gamma_e}, \quad c = e \frac{\sin \beta_c}{\sin \gamma_e}, \quad d = e \frac{\sin \beta_d}{\sin \alpha_e},$$

$$r = e \frac{\sin \delta_a \sin \beta_r}{\sin \alpha_e \sin \varrho_a}, \quad s = e \frac{\sin \delta_a \sin \alpha_s}{\sin \alpha_e \sin \varrho_a}, \quad t = e \frac{\sin \delta_b \sin \beta_t}{\sin \gamma_e \sin \varrho_b},$$

$$A = E \frac{\sin \delta_b \sin (\alpha_e - \alpha_s)}{\sin \delta \sin \alpha_s}, \quad B = E \frac{\sin \delta_a \sin (\gamma_e - \gamma_s)}{\sin \delta \sin \gamma_s},$$

$$C = E \frac{\sin \delta_a}{\sin \delta}, \quad D = E \frac{\sin \delta_b}{\sin \delta}, \quad R = E \frac{\sin \delta_b \sin \alpha_e}{\sin \delta \sin \alpha_s},$$

$$S = E \frac{\sin \delta_b \sin \alpha_e \sin \varrho}{\sin \delta \sin \alpha_s \sin \varrho_b}, \quad T = E \frac{\sin \delta_a \sin \gamma_e}{\sin \delta \sin \gamma_s}.$$

Przesunięcia węzła \mathcal{D} wzdłuż boku d o Δd przy zachowaniu położenia węzłów \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} wywołuje następujące zmiany w rozpatrywanej części kratownicy.

Długości trzech prętów c , d , e doznają następujących przyrostów:
 $\Delta c = -\Delta d \cos \delta$, Δd , $\Delta e = \Delta d \cos \delta_a$.

Dwa kąty γ_e i β_d doznają przyrostów:

$$\Delta \gamma_e = \frac{\Delta d}{c} \sin \delta, \quad \Delta \beta_d = \frac{\Delta d}{e} \sin \delta_a.$$

Wartości bezwzględne sił w trzech prętach b , c , e doznają przyrostów:

$$\Delta B = E \frac{\sin \Delta \beta_d}{\sin \beta_c} = \frac{E}{e} \frac{\sin \delta_a}{\sin \beta_c} \Delta d,$$

$$\Delta C = \Delta B \cos (\beta_c + \delta_b) = -\frac{E}{e} \cos \gamma_e \frac{\sin \delta_a}{\sin \beta_c} \Delta d,$$

$$\Delta E = E \Delta \beta_d \operatorname{ctg} \beta_c = \frac{E}{e} \sin \delta_a \operatorname{ctg} \beta_c \Delta d.$$

Potencjał prętów a , b , c , d , e przed przesunięciem wynosi

$$\frac{2}{\varepsilon_0} \Lambda = A a + B b + C c + D d + E e;$$

po przesunięciu węzła \mathcal{D} o Δd potencjał ten doznaje przyrostu

$$\frac{2}{\varepsilon_0} \Delta \Lambda = \pm b \Delta B \pm c \Delta C \pm e \Delta E \pm C \Delta c \pm D \Delta d \pm E \Delta e.$$

W tym wyrażeniu zależnie od kształtu rozpatrywanego układu prętów przyrosty ΔB , ΔC , ΔE , Δc , Δe mogą mieć różne znaki. Podstawiając do tego wyrażenia poprzednio wyznaczone wartości przyrostów znajdujemy, że

$$\begin{aligned} \frac{2}{\varepsilon_0} \frac{\Delta \Lambda}{\Delta d} = & (\pm b \pm c \cos \gamma_e \pm e \cos \beta_c) \frac{E}{e} \frac{\sin \delta_a}{\sin \beta_c} + \\ & + [\pm C \cos (\delta_a + \delta_b) \pm D \pm E \cos \delta_a]. \end{aligned}$$

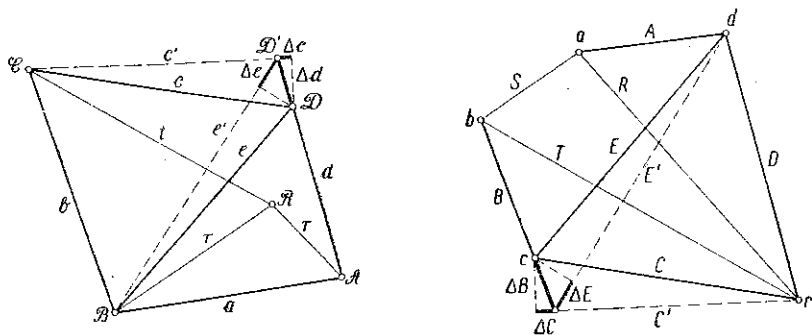
Jest to wzór na iloraz różnicowy potencjału względem przesunięcia Δd . W pierwszym nawiasie występuje długość boku b i rzuty boków c i e na b . W drugim nawiasie występuje siła D i rzuty sił C i E na D . Oznaczając $c \cos \gamma_e = c_b$, $e \cos \gamma_b = e_b$, $C \cos (\delta_a + \delta_b) = C_D$, $E \cos \delta_a = E_D$, i przechodząc do granicy znajdujemy

$$\frac{2}{\varepsilon_0} \frac{\partial \Lambda}{\partial d} = (\pm b \pm c_b \pm e_b) \frac{E}{e} \frac{\sin \delta_a}{\sin \beta_c} + (\pm D \pm C_D \pm E_D).$$

Przesunięcie węzła D wzdłuż pręta c daje

$$\frac{2}{e_0} \frac{\partial \Delta}{\partial c} = (\pm a \pm d_a \pm e_a) \frac{E}{e} \frac{\sin \delta_b}{\sin \beta_d} + (\pm C \pm D_c \pm E_c).$$

Zerowe wartości obu tych pochodnych stanowią układ warunków koniecznych ekstremum potencjału zależnego od położenia węzła D .



Rys. 5

Składniki pierwszego nawiasu mają znaki przyrostów ΔB , ΔC i ΔE . Składniki drugiego nawiasu mają znaki przyrostów Δc , Δd , Δe .

4. Analiza warunków występowania zerowych wartości pochodnych $\frac{\partial \Delta}{\partial d}$ i $\frac{\partial \Delta}{\partial c}$

4.1. Dyskusja trójmianu $\pm b \pm c_b \pm e_b$. Wartość pierwszego nawiasu występującego we wzorze na pochodną potencjału względem długości boku d zależy od długości boków b , c i e oraz od znaków przyrostów ΔB , ΔC i ΔD występujących przy długości boku b i przy rzutach boków c i e .

Rozpatrujemy najpierw znaki przyrostów ΔB , ΔC i ΔE .

Jeżeli przyrost ΔB jest dodatni, to przyrosty ΔC i ΔE mogą mieć cztery różne układy znaków. Oznaczmy je symbolami 1, 2, 3, 4 i zestawimy w tablicy 1.

Tablica 1

Oznaczenie	Położenie wektorów w półpłaszczyznach wyznaczonych przez prostopadłą do B		Znaki przyrostów		
	C	E	ΔB	ΔC	ΔE
1	\mathcal{P}_B	\mathcal{P}_B	+	+	+
2	\mathcal{P}'_B	\mathcal{P}_B	+	-	+
3	\mathcal{P}_B	\mathcal{P}'_B	+	+	-
4	\mathcal{P}'_B	\mathcal{P}'_B	+	-	-

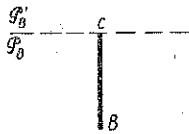
Jeżeli przyrost ΔB jest ujemny, to przyrosty ΔC i ΔE zmieniają tak samo swe znaki na odwrotne. Odnośne zestawienia znaków oznaczymy symbolami 1', 2', 3', 4' (tablica 2).

Tablica 2

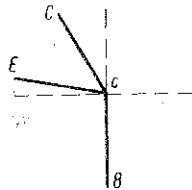
Oznaczenie	Położenie wektorów w półpłaszczyznach wyznaczonych przez prostą do B		Znaki przyrostów		
	C	E	ΔB	ΔC	ΔE
1'	\mathcal{P}_B	\mathcal{P}_B	—	—	—
2'	\mathcal{P}'_B	\mathcal{P}_B	—	+	—
3'	\mathcal{P}_B	\mathcal{P}'_B	—	—	+
4'	\mathcal{P}'_B	\mathcal{P}'_B	—	+	+

Znaki przyrostów ΔC i ΔE przy dodatnim przyroście ΔB zależą od położenia wektorów C i E względem wektora B w punkcie c . Aby tę zależność rozpatrzyć, prowadzimy w punkcie c prostą do wektora B . Prosta ta wyznacza dwie półpłaszczyzny \mathcal{P}_B i \mathcal{P}'_B (rys. 6).

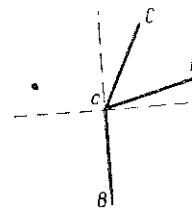
Jeżeli wektory C i E leżą w jednej półpłaszczyźnie z wektorem B , tj. w półpłaszczyźnie \mathcal{P}_B , to przyrosty ich mają znaki dodatnie jednocześnie z dodatnim przyrostem ΔB , a jeżeli wektory te leżą w przeciwległej półpłaszczyźnie \mathcal{P}'_B , to przyrosty ich mają znaki przeciwne do przyrostu wektora B .



Rys. 6



Rys. 7

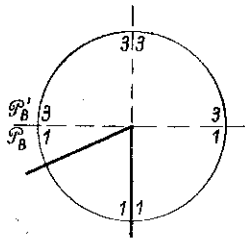


Rys. 8

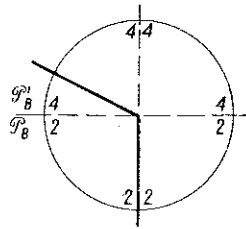
Do przedyskutowania układów znaków ΔB , ΔC i ΔE nie ma potrzeby odróżniania przypadków, w których układ wektorów B , C i E stanowi lustrzane odbicie względem prostej B innego układu tych wektorów, gdyż w rzeczywistości oba takie układy są tym samym układem oglądanym z różnych stron (rys. 7 i 8).

Biorąc powyższe pod uwagę widzimy, że do określenia układu znaków ΔB , ΔC i ΔE wystarczy odróżnić dwa położenia wektora C , umieszczając go w pierwszym lub w drugim narożu prostokątnym wyznaczonym przez wektor B , przedłużenie wektora B i prostą do tego wektora w punk-

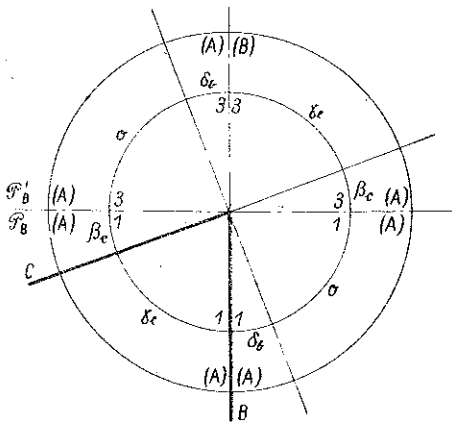
cie c . Na rysunkach 9 i 10 wypisano symbole oznaczające układy znaków ΔB , ΔC i ΔE w narożach mieszczących wektor E .



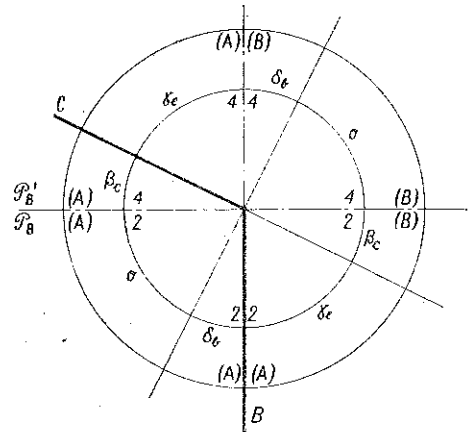
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

$$2(A) \equiv (\beta_c + \delta_b) \text{ rozw.} + (\beta_c) \text{ ostre} \equiv (\gamma_c) + (\beta_c) \text{ ostre}$$

$$2(B) \equiv (\beta_c + \delta_b) \text{ rozw.} + (\delta'_b) \text{ rozw.} + (\beta'_c) \text{ ostre}$$

Rozpatrujemy teraz wartość $\pm b \pm c_b \pm e_b$ w zależności od długości prętów b , c i e . Ponieważ pręty te tworzą trójkąt, przeto suma rzutów c_b i e_b jest równa b . Zależnie od długości prętów b , c i e i od znaków przyrostów ΔB , ΔC i ΔE wartość $\pm b \pm c_b \pm e_b$ jest równa $\pm 2b \pm 2c_b \pm 2e_b$ lub 0. Do stwierdzenia, która z tych wartości występuje w danym przypadku, należy mieć dwie grupy danych: po pierwsze znaki przyrostów ΔB , ΔC i ΔE i po drugie kształt trójkąta pozwalający na rozpoznanie, która z wielkości b , c_b lub e_b jest największa. Znaki przyrostów rozpoznajemy według schematów wykreślonych na rysunkach 9 i 10. Do rozpoznania, która z wielkości b , c_b lub e_b jest największa, wystarcza stwierdzenie ostrości lub rozwartości kątów β_c , γ_c i δ_b w trójkącie bce . Przedziały,

w których kąty β_c , γ_e i δ_b są ostre lub rozwarte, rozgraniczają proste działania sił B i C oraz prostopadłe do nich poprowadzone w punkcie c (rys. 11 i 12). Proste te tworzą osiem naroży ostrokątnych. Dowolnemu położeniu siły E wewnątrz każdego z tych naroży odpowiadają te same cechy ostrości lub rozwartości kątów β_c , γ_e i δ_b stanowiące o tym, która z wielkości b , c_b lub e_b jest największa. Cechy te oznaczono na rysunkach schematycznych 11 i 12 symbolami β_c , γ_e , δ_b wskazującymi, że odpowiednie kąty są rozwarte lub że trójkąt bce jest ostrokątny.

Boki b , c i e w trójkącie BCD zachowują kolejność z góry przyjętą w rozpatrywanym układzie prętów.

Schematy przedstawione na rys. 11 i 12 wskazują wszystkie możliwe zestawienia kształtów trójkąta bce z układami znaków przyrostów ΔB , ΔC i ΔE . Zestawień tych jest dwanaście. Są one przedstawione na rysunkach 13-24 i umieszczone w tablicy 3.

Tablica 3

Oznaczenie przypadku	Położenie wektorów C i E w półpłaszczyznach wyznaczonych przez prostopadłą do wektora B		Znaki przyrostów ΔB ΔC ΔE występujące przy			Wartości $\pm b \pm c_b \pm e_b$ występujące w przypadkach β_c γ_e δ_b o największy rzut boku a , b , c , e ,			
	C	E	b	c_b	e_b	c_b	e_b	b	o
1	\mathcal{I}_B	\mathcal{I}_B	+	+	+	$+2c_b$ (A)	$+2e_b$ (A)	$+2b$ (A)	
2	\mathcal{I}'_B	\mathcal{I}_B	+	-	+	0 (B)	$+2b$ (A)	$+2e_b$ (A)	
3	\mathcal{I}_B	\mathcal{I}'_B	+	+	-	$+2b$ (A)	0 (B)	$+2c_b$ (A)	
4	\mathcal{I}'_B	\mathcal{I}'_B	+	-	-	$-2e_b$ (A)	$-2c_b$ (A)	0 (B)	

W zestawieniach tych zachodzą pomiędzy kątami β_c , γ_e , δ_b i o oraz kątami β'_c , γ'_e , δ'_b i o' dwie grupy zależności, które oznaczymy symbolami (A) i (B):

zależności (A)

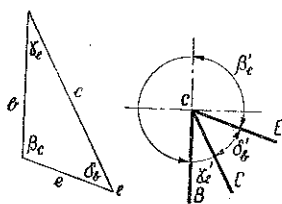
$$\beta'_c = \beta_c, \quad \gamma'_e = \gamma_e, \quad \delta'_b = \delta_b, \quad o' = o, \quad \beta_c + \gamma_e + \delta_b = \pi, \quad \beta'_c + \gamma'_e + \delta'_b = \pi,$$

zależności (B)

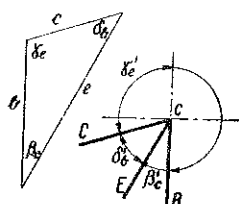
$$\beta'_c = \pi - \beta_c, \quad \gamma'_e = \pi - \gamma_e, \quad \delta'_b = \pi - \delta_b, \quad o' = \pi - o, \quad \beta_c + \gamma_e + \delta_b = \pi,$$

$$\beta'_c + \gamma'_e + \delta'_b = 2\pi.$$

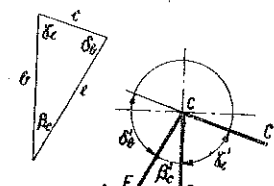
Zależności (B) występują w zestawieniach 2, β_c ; 3, γ_e ; 4, δ_b , o. Są to zestawienia, w których trójmian $\pm b \pm c_b \pm e_b$ jest zerem. W pozostałych zestawieniach występują zależności (A).



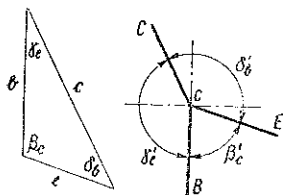
Rys. 13
Zestawienie 1, β_c (A)



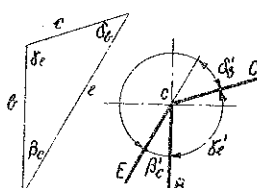
Rys. 14
Zestawienie 1, γ_e (A)



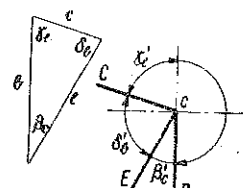
Rys. 15
Zestawienie 1, δ_b , o (A)



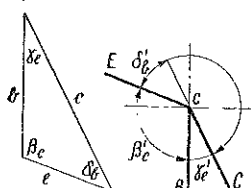
Rys. 16
Zestawienie 2, β_c (B)



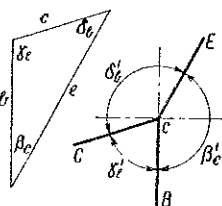
Rys. 17
Zestawienie 2, γ_e (A)



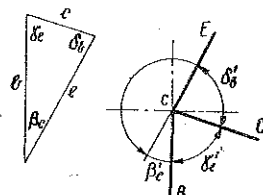
Rys. 18
Zestawienie 2, δ_b , o (A)



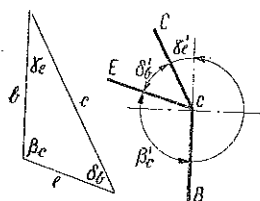
Rys. 19
Zestawienie 3, β_c (A)



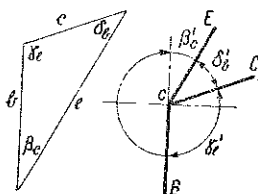
Rys. 20
Zestawienie 3, γ_e (B)



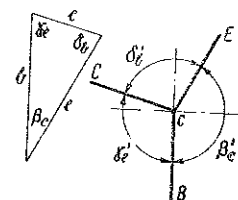
Rys. 21
Zestawienie 3, δ_b , o (A)



Rys. 22
Zestawienie 4, β_c (A)



Rys. 23
Zestawienie 4, γ_e (A)



Rys. 24
Zestawienie 4, δ_b , o (B)

4.2. Dyskusja trójmianu $\pm D \pm C_D \pm E_D$. Wartość drugiego nawiasu występującego we wzorze na pochodną potencjału względem długości boku d zależy od wielkości sił C , D i E oraz od znaków przyrostów Δd , Δc i Δe występujących przy tych siłach i przy ich rzutach.

Rozpatrzmy najpierw znaki przyrostów Δd , Δc i Δe .

Jeżeli przyrost Δd jest dodatni, to przyrosty Δc i Δe mogą mieć cztery różne układy znaków.

Oznaczmy je symbolami I, II, III i IV jak to przedstawiono w tablicy 4.

Tablica 4

Oznaczenie	Położenie boków c, e w półpłaszczyznach wyznaczonych przez prostopadłą do d		Znaki przyrostów		
	c	e	Δd	Δc	Δe
I	\mathcal{P}_d	\mathcal{P}_d	+	+	+
II	\mathcal{P}'_d	\mathcal{P}_d	+	-	+
III	\mathcal{P}_d	\mathcal{P}'_d	+	+	-
IV	\mathcal{P}'_d	\mathcal{P}'_d	+	-	-

Jeżeli przyrost Δd zmienia znak, to i przyrosty Δc i Δe zmieniają tak samo znaki na odwrotne.

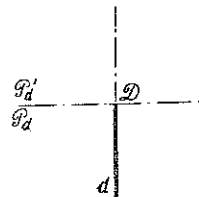
Zestawienia znaków oznaczmy symbolami I', II', III', IV' (tablica 5).

Tablica 5

Oznaczenie	Położenie boków c, e w półpłaszczyznach wyznaczonych przez prostopadłą do d		Znaki przyrostów		
	c	e	Δd	Δc	Δe
I'	\mathcal{P}_d	\mathcal{P}_d	-	-	-
II'	\mathcal{P}'_d	\mathcal{P}_d	-	+	-
III'	\mathcal{P}_d	\mathcal{P}'_d	-	-	+
IV'	\mathcal{P}'_d	\mathcal{P}'_d	-	+	+

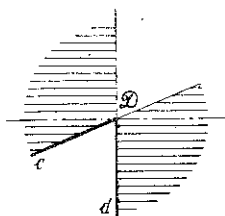
Znaki przyrostów Δc i Δe przy dodatnim przyroście Δd zależą od położenia prętów c i e względem pręta d w węźle \mathcal{D} . Aby tę zależność rozpatrzeć poprowadzimy w punkcie \mathcal{D} prostopadłą do d . Prostopadła ta wyznacza dwie półpłaszczyzny \mathcal{P}_d i \mathcal{P}'_d (rys. 25).

Jeżeli pręty c i e leżą w płaszczyźnie \mathcal{P}_d , to przyrosty ich mają znaki dodatnie, a jeżeli pręty te leżą w półpłaszczyźnie \mathcal{P}'_d , to przyrosty długości tych prętów są ujemne.

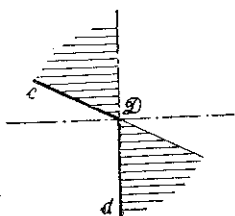


Rys. 25

Wobec założenia, że rozpatrywane dwa pola trójkątne nie zachodzą na siebie, położenie prętów c , d i e nie może być dowolne. Pręt e może leżeć tylko w narożu między prętami c i d lub w narożu między przedłużeniami tych prętów (rys. 26 i 27).



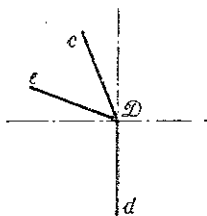
Rys. 26



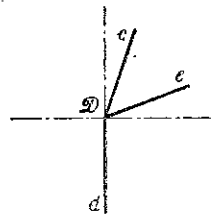
Rys. 27

Dla prześledzenia układów znaków Δc , Δd i Δe nie ma potrzeby odróżniania przypadków, w których układ prętów c , d , i e stanowi lustrzane odbicie względem prostej d innego układu tych prętów, gdyż w rzeczywistości oba takie układy są tym samym układem oglądanym z różnych stron (rys. 28 i 29).

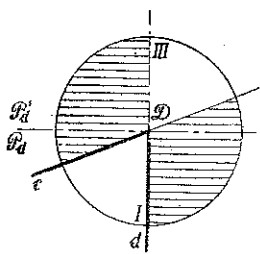
Biorąc powyższe pod uwagę stwierdzamy, że do określenia układu znaków Δd , Δc i Δe wystarcza odróżnić dwa położenia pręta c układając ten pręt w pierwszym lub w drugim narożu prostokątnym, wyznaczonym przez prostą d i przez prostopadłą do niej w punkcie D . Na rysunkach 30 i 31 wypisano symbole oznaczające układy znaków Δc , Δd i Δe w narożach mieszczących pręt e .



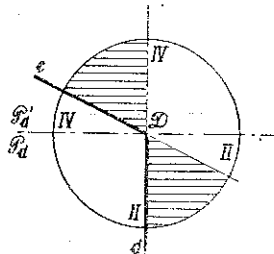
Rys. 28



Rys. 29



Rys. 30



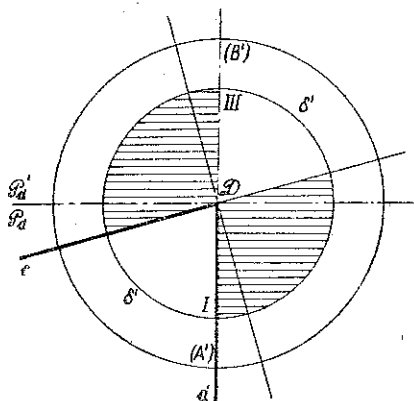
Rys. 31

Zajmiemy się teraz rozpatrzeniem wartości $\pm D \pm C_D \pm E_D$ w zależności od wielkości C , D i E .

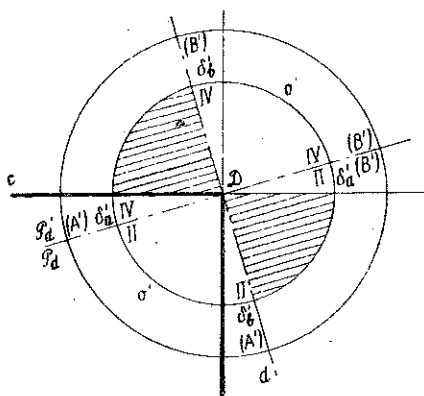
Ponieważ wektory tych sił tworzą trójkąt, przeto suma rzutów C_D i E_D jest równa D . Zależnie od wielkości sił

C , D i E oraz od przyrostów Δc , Δd i Δe wartość $\pm D \pm C_D \pm E_D$ jest równa odpowiednio $\pm 2D$, $\pm 2C_D$, $\pm 2E_D$ lub 0 . Do stwierdzenia, która z tych wartości występuje w danym przypadku, należy mieć dwie grupy danych: po pierwsze znaki przyrostów Δc , Δd i Δe i po drugie kształt trójkąta pozwalający na rozpoznanie, która z wielkości D , C_D i E_D jest największa. Znaki przyrostów rozpoznajemy według schematów wykreślonych na rysunkach 30 i 31. Do rozpoznania, która z wielkości D , C_D lub E_D jest największa, wystarcza stwierdzenie czy poszczególne kąty trójkąta CDE , oznaczone przez δ' , δ'_a i δ'_b , są ostre, czy też rozwarte.

W tym celu uzupełniamy schematy kierunków prętów c , d i e prostopadłymi do prostej c . Otrzymujemy w ten sposób drugi układ naroży wyznaczonych przez pręt c , który wraz z poprzednim, wyznaczonym przez pręt d , daje osiem naroży ostrych (rys. 32 i 33).

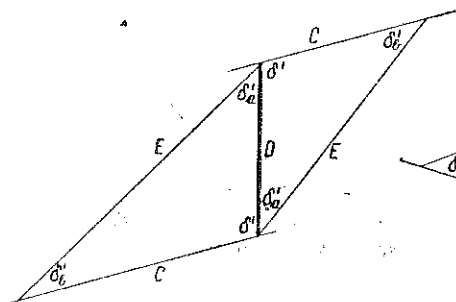


Rys. 32

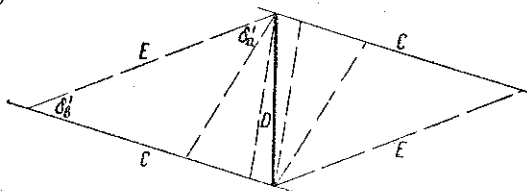


Rys. 33

Dowolnemu położeniu pręta e wewnątrz każdego z tych naroży odpowiadają te same cechy ostrości lub rozwartości kątów δ' , δ'_a , δ'_b , stano-



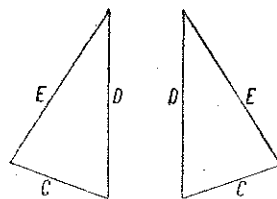
Rys. 34



Rys. 35

wiące o tym, która z wielkości D , C_D lub E_D jest największa. Cechy te oznaczono na rysunkach schematycznych symbolami δ' , δ'_a , δ'_b i σ' wskazującymi, że odpowiednie kąty są rozwarte lub że trójkąt sił DCE jest ostrokątny.

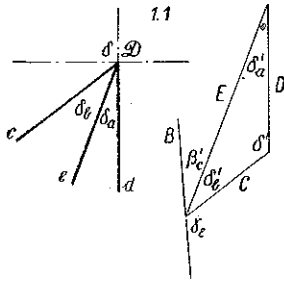
Zmiana kolejności następstwa boków w trójkącie C, D, E nie jest istotna, gdyż występuje przy odwróceniu płaszczyzny rysunku bez zmiany kształtu kratownicy i układu sił na nią działających (rys. 36).



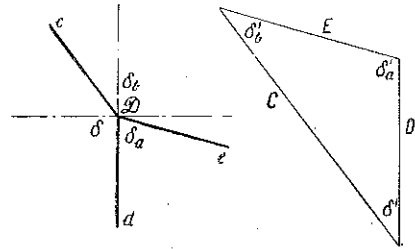
Rys. 36

Nie ma też potrzeby oddzielnego rozpatrywania obu trójkątów CDE stanowiących dopełnienia do równoległoboku i różniących się zwrotami boków (przy czytaniu ich w tym samym po-

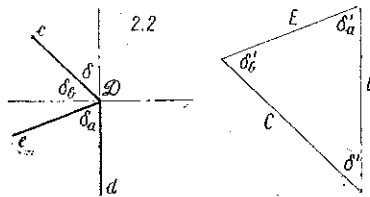
rządku, rys. 34), gdyż przyjęcie jednego lub drugiego trójkąta nie wpływa na wartość $\pm D \pm C_D \pm E_D$.



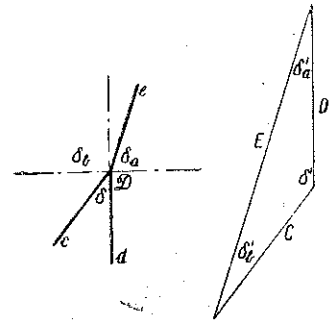
Rys. 37
Zestawienie I, δ' (A')



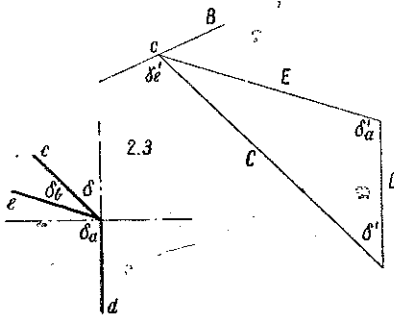
Ryc. 38
Zestawienie II, δ'_a (B')



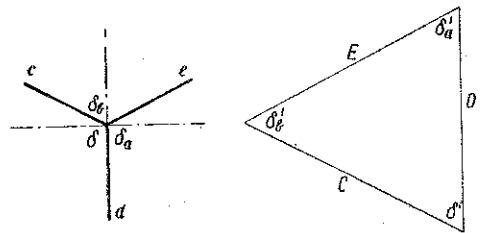
Rys. 39
Zestawienie II, δ'_b, o (A')



Rys. 40
Zestawienie III, δ' (B)



Rys. 41
Zestawienie IV, δ'_a (A')



Rys. 42
Zestawienie IV, δ'_b, o (B')

Schematy na rysunkach 32 i 33, 34 i 35 wskazują wszystkie możliwe zestawienia kształtów trójkąta DCE z układami znaków przyrostów Δc , Δd i Δe .

Zestawień tych jest sześć. Są one przedstawione na rysunkach 37-42. Zestawienia te można ująć w tabelicę 6.

Tablica 6

Oznaczenie przy- padku	Polożenie boków c, e w półpłaszczyznach wyznaczonych przez prostokątą do boku d		Znaki przyrostów Δd Δc Δe występujące przy			Wartości $\pm D \pm C_D \pm E_D$ występujące w przypadku δ'_a δ' δ'_b o' oraz największy rzut boku trójkąta DCE		
	c	e	D	C_D	E_D	C_D	E_D	D
I	\mathcal{F}_d	\mathcal{P}_d	+	+	+	-	$+2E_D$	-
II	\mathcal{P}_d	\mathcal{F}_d	+	-	+	0	-	$+2E_D$
III	\mathcal{F}_d	\mathcal{P}'_d	+	+	-	-	0	-
IV	\mathcal{P}'_d	\mathcal{F}'_d	+	-	-	$-2E_D$	-	0

Sześć pozostałych przedziałów tablicy odpowiada zestawieniom nieprzydatnym w rozpatrywanym zagadnieniu wobec założenia, że trójkątne pola kratownicy nie zachodzą na siebie. W tych zestawieniach pręt e leżałby w polach zakreskowanych schematów przedstawionych na rysunkach 32 i 33.

Zestawieniom wypisanym w tablicy 6 odpowiadają dwie grupy zależności między kątami δ, δ_a i δ_b oraz kątami δ', δ'_a i δ'_b .

Oznaczmy je symbolami (A') i (B').

Zależności (A') są następujące:

$$\delta' = \delta, \quad \delta'_a = \delta_a, \quad \delta'_b = \delta_b, \quad o' = 0, \quad \delta + \delta_a + \delta_b = \pi, \quad \delta' + \delta'_a + \delta'_b = \pi,$$

a zależności (B')

$$\begin{aligned} \delta' &= \pi - \delta, & \delta'_a &= \pi - \delta_a, & \delta'_b &= \pi - \delta_b, \\ o' &= \pi - r, & \delta + \delta_a + \delta_b &= 2\pi, & \delta' + \delta'_a + \delta'_b &= 2\pi. \end{aligned}$$

Zależności (B') występują w trzech zestawieniach, w których trójmian $\pm D \pm C_D + E_D$ jest zerem. Zależności (A') występują w trzech pozostałych zestawieniach, w których ten trójmian jest równy $\pm 2E_D$.

4.3. Zależność zerowych wartości pochodnej $\partial A / \partial d$ od wartości trójmianów $\pm b \pm c_b \pm e_b$ oraz $\pm D \pm C_D \pm E_D$. Zależnie od kształtu rozpatrywanego układu prętów przyrost Δd może wywoływać dodatni lub ujemny przyrost ΔB . Jeżeli przyrosty ΔB i Δd są tego samego znaku, to istnieje możliwość, że jednocześnie wystąpią znaki przyrostów $\Delta C, \Delta E, \Delta c$ oraz Δe zestawione w tablicy 7.

Tablica 7

Fragment tablicy 3						Fragment tablicy 6							
Oznaczenie przypadku	Znaki przyrostów $\Delta B \ \Delta C \ \Delta E$ występujące przy			Wartości trójmianu $\pm b \pm c_b \pm e_b$ w przypadkach gdy $\beta_c \ \gamma_e \ \delta_b \ 0$ oraz największego rzutu			Oznaczenie przypadku	Znaki przyrostów $\Delta d \ \Delta c \ \Delta e$ występujące przy			Wartości trójmianu $\pm D \pm C_D \pm E_D$ w przypadkach gdy $\delta'_a \ \delta' \ \delta'_b \ 0$ oraz największego rzutu		
	b	c_b	e_b	c_b	e_b	b		D	C_D	E_D	C_D	E_D	D
	1	+	+	+	$+2c_b$	$+2e_b$		$+2b$	I	+	+	+	-
2	+	-	+	0	$+2b$	$+2e_b$	II	+	-	+	0	-	$+2E_D$
3	+	+	-	$+2b$	0	$+2c_b$	III	+	+	-	-	0	-
4	+	-	-	$-2e_b$	$-2c_b$	0	IV	+	-	-	$-2E_D$	-	0

Jeżeli przyrosty ΔB i Δd są przeciwnych znaków, to istnieje możliwość jednoczesnego wystąpienia znaków przyrostów $\Delta C, \Delta E, \Delta c, \Delta e$ zestawionych w tablicy 8.

Tablica 8

Fragment tablicy 3						Fragment tablicy 6							
Oznaczenie przypadku	Znaki przyrostów $\Delta B \ \Delta C \ \Delta E$ występujące przy			Wartości trójmianu $\pm b \pm c_b \pm e_b$ w przypadkach gdy $\beta_c \ \gamma_e \ \delta_b \ 0$ oraz największego rzutu			Oznaczenie przypadku	Znaki przyrostów $\Delta d \ \Delta c \ \Delta e$ występujące przy			Wartości trójmianu $\pm D \pm C_D \pm E_D$ w przypadkach gdy $\delta'_a \ \delta' \ \delta'_b \ 0$ oraz największego rzutu		
	b	c_b	e_b	c_b	e_b	b		D	C_D	E_D	C_D	E_D	D
	1'	-	-	-	$-2c_b$	$-2e_b$		$-2b$	I	+	+	+	-
2'	-	+	-	0	$-2b$	$-2e_b$	II	+	-	+	0	-	$+2E_D$
3'	-	-	+	$-2b$	0	$-2c_b$	III	+	+	-	-	0	-
4'	-	+	+	$+2e_b$	$+2c_b$	0	IV	+	-	-	$-2E_D$	-	0

Pochodna potencjału jest zerem bądź wtedy, jeżeli wartości obu nawiasów kwadratowych są zerami, bądź też jeżeli wartości tych nawiasów mają przeciwne znaki, a ich wartości bezwzględne wynikają z przyrównania do zera pochodnej potencjału.

Najpierw zestawiamy przypadki zerowe wypisane w lewej części tablicy 7 i 8 z przypadkami zerowymi podanymi w tablicy 6, które są umieszczone powtórnie z prawej strony tych tablic. Zestawienie to poka-

zано w tablicy 9. Następnie zestawiamy przypadki, w których wartości $\pm b \pm c_b + e_b$, $\pm D \pm C_D \pm E_D$ mają przeciwne znaki. Zestawienia tego rodzaju podane zostały w tablicach 10 i 11. W tablicy 10 łączono dodatnie wartości $\pm b \pm c_b \pm e_b$ z ujemnymi wartościami $\pm D \pm C_D \pm E_D$. W tablicy 11 łączono ujemne wartości pierwszego trójmianu z dodatnimi wartościami drugiego. Zestawienia te zostały zgrupowane według jednakowych wartości obu trójmianów. Pierwszy trójmian może mieć dodatnie wartości równe $+2b$, $+2c_b$, $+2e_b$ oraz ujemne $-2b$, $-2c_b$, $-2e_b$. Drugi trójmian może mieć tylko wartości $\pm 2E_D$.

4.4. Dyskusja zestawień trójmianów $\pm b \pm c_b \pm e_b$ oraz $\pm D \pm C_D \pm E_D$ w równaniu $\partial \Delta / \partial d = 0$. Wartości obu nawiasów występujących w wyrażeniu na pochodną potencjału zestawiono w tablicach 9-11. Zajmiemy się teraz sprawdzeniem możliwości wystąpienia tych zestawień.

Tablica 9

Przypadki tablicy 6	II, δ'_a	III, δ^t	IV, δ'_b	IV _o
Przypadki tablicy 7 i 8	(B)			
$2, \beta_c$ $3, \gamma_e$ $4, \delta_b$ $4, o$ $2', \beta_e$ $3', \gamma_e$ $4', \delta_b$ $4', o$				
(B)			*	
			*	
	*	*		*
			*	

Tablica 9 obejmuje wszystkie zestawienia wartości zerowych obu nawiasów.

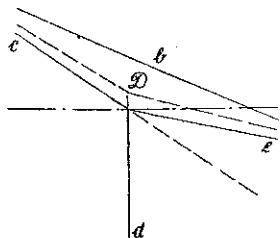
Zestawienie 2+II. Przypadek 2 wymaga, aby w trójkącie bce kąt β_c był rozwarty, a kąt δ_b ostry. Przypadek II wymaga, aby w węźle \mathcal{D} kąt δ_a był ostry, a kąt δ_b rozwarty. Zestawienie zerowych wartości nawiasów w przypadkach 2+II jest więc sprzeczne.

Podobnie można stwierdzić niemożliwość wystąpienia zestawień zerowych wartości obu nawiasów w przypadkach:

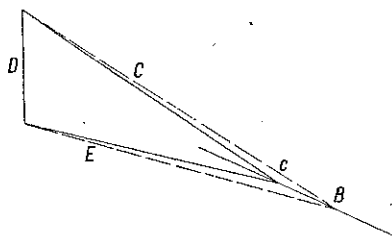
$$2 + \text{III}, \quad 3 + \text{II}, \quad 3 + \text{III}, \quad 2' + \text{II}, \quad 2' + \text{III}, \quad 3' + \text{II}, \quad 3' + \text{III}.$$

Zestawienie 4+II. W przypadku 4 przyrosty sił B, C i E mają znaki $+\Delta B, -\Delta C, -\Delta E$. W przypadku II przyrosty długości prętów d, c i e mają znaki $+\Delta d, -\Delta c, +\Delta e$, a w wynikającym stąd układzie

prętów d , c i e dodatni przyrost Δd daje dodatnie przyrosty sił C , E i ujemny przyrost siły B daje układ znaków przyrostów $-\Delta B$, $+\Delta C$, $+\Delta E$. Zestawienie 4 + II nie może przeto występować, natomiast możliwe jest zestawienie $4', \delta_b + II \delta'_a$. Dotyczy to jednak tylko przypadków, w których kąt δ_b jest rozwarty. Jeżeli kąt δ_b jest ostry, to kąt δ'_b jest rozwarty, a więc ani δ'_a , ani δ' nie mogą być rozwarte tak, jak tego wymagają przypadki II i III.



Rys. 43



Rys. 44

Podobnie można stwierdzić niemożliwość wystąpienia wartości zerowych obu nawiasów w przypadkach

$$4 + III, \quad 4 + IV, \quad 2 + IV, \quad 3 + IV$$

oraz możliwość wystąpienia przypadków

$$4', \delta_b + III \delta', \quad 4', \delta_b + IV, \delta'_b, \quad 4', \delta_b + IV \delta'_b, \quad 2', \beta_c + IV, \delta'_b, \quad 3', \gamma_e + IV, \delta'_b$$

Istnieje przeto tylko sześć niesprzecznych zestawień wartości zerowych trójmianów $\pm b \pm c_b \pm e_b$ i $\pm D \pm C_D \pm E_D$; są to zestawienia

$$\begin{array}{llll} 2', \beta_c + IV, \delta'_b, & 3', \gamma_e + IV, \delta'_b, & 4', \delta_b + II, \delta', & 4', \delta_b + III, \delta', \\ 4', \delta_b + IV, \delta'_b, & 4', \delta_b + IV, \delta'_b, & & \end{array}$$

Pożycje odpowiadające tym zestawieniom w tablicy 9 oznaczono gwiazdkami.

Tablica 10 obejmuje wszystkie zestawienia dodatnich wartości pierwszego trójmianu z ujemnymi wartościami drugiego, a tablica 11 obejmuje zestawienia wartości tych trójmianów o przeciwnych znakach.

Z tablic tych eliminujemy jako sprzeczne wszystkie zestawienia przypadków, z których jeden warunkuje rozwartość kąta $\delta_b = \delta'_b$, a drugi ostrość tego kąta bądź przez warunek ostrości wszystkich trzech kątów δ' , δ'_a i δ'_b , bądź przez warunek rozwartości kątów δ' i δ'_a , bądź wreszcie

Tablica 10

Przypadki tablicy 6		IV, δ'_a
Przypadki tablicy 7 i 8	Wartość $\pm D \pm C_D \pm E_D$	$-2 E_D$
	Wartość $\pm b \pm c_b \pm e_b$	(A')
1, β_c	+ 2 c_b	
1, γ_e	+ 2 e_b	(*)
1, δ_b	+ 2 b	
1, o	+ 2 b	
2, γ_e	+ 2 b	
2, δ_b	+ 2 e_b	(*)
, o	+ 2 e_b	
3, β_c	+ 2 b	
3, δ_b	+ 2 c_b	
3, o	+ 2 e_b	
4', β_c	+ 2 e_b	
4', γ_e	+ 2 c_b	*

Tablica 11

Przypadki tablicy 6		I, δ'	II, δ'_b	II, o
Przypadki tablicy 7 i 8	Wartość $\pm D \pm C_D \pm E$	+ 2 E_D		
	Wartość $\pm b \pm c_b \pm e_b$	(A')		
1', β_c	- 2 c_b	*		(*)
1', γ_e	- 2 e_b			
1', δ_b	- 2 b			
1', o	- 2 b			
2', γ_e	- 2 b			
2', δ_b	- 2 e_b			
2', o	- 2 e_b			
3', β_c	- 2 b			
3', δ_b	- 2 c_b		*	
3', o	- 2 c_b	(*)		*
4', β_c	- 2 e_b	(*)		(*)
4', γ_e	- 2 c_b			

przez warunek rozwartości kątów β_c, γ_e . W ten sposób eliminujemy zestawienia:

$$\begin{array}{lll}
 1, \delta_b + IV, \delta'_a, & 2, \delta_b + IV, \delta'_a, & 3, \delta_b + IV, \delta'_a, \\
 1', \delta_b + I, \delta', & 1', \delta_b + II, \delta', & 1', o + I, \delta'_b, \\
 2', \delta_b + I, \delta', & 2', \delta_b + II, \delta', & 2', o + II, \delta'_b, \quad 3', \beta_c + II, \delta'_b, \\
 3', \delta_b + I, \delta', & 3', \delta_b + II, \delta', & 3', o + II, \delta'_b, \quad 4, \beta_c + II, \delta'_b, \\
 1', \beta_c + II, \delta'_b, & 1', \gamma_e + II, \delta'_b, & 2', \gamma_e + II, \delta'_b, \quad 4, \gamma_e + II, \delta'_b.
 \end{array}$$

Następne zestawienia eliminujemy jako sprzeczne, porównując układy trójkąta CDE w obu przypadkach łączonych w tym zestawieniu. Posługujemy się przy tym schematami wykreślonymi na rysunkach 13-24 i 37-42. W niesprzecznych zestawieniach kąty δ'_b są w obu zestawianych przypadkach kątami zewnętrznymi lub kątami wewnętrznymi trójkąta CDE. W ten sposób eliminujemy następujące zestawienia:

$$\begin{array}{lll}
 1, o + IV, \delta'_a, & 2, \gamma_e + IV, \delta'_a, & 3, \beta_c + IV, \delta'_a, \\
 1', o + I, \delta', & 2, \gamma'_e + I, \delta', & 3, \beta_c + I, \delta', \\
 1', \delta_b + II, \delta'_b, & 1, o + II, \delta', & 2', \gamma_e + II, \delta', \quad 3' \beta_c + II, \delta'.
 \end{array}$$

Dalsze zestawienia eliminujemy przez sprawdzenie możliwości jednoczesnego wystąpienia takich znaków przyrostów Δd i ΔB , przy których trójmiany $\pm b \pm c_b \pm e_b$, $\pm D \pm C_D \pm E_D$ mają wartości o przeciwnych znakach. Zestawiając schematy wykreślone na rysunkach 8-19 ze schematami przedstawionymi na rysunkach 32-37 wyznaczamy na tych ostatnich położenie wektora B względem trójkąta CDE . Następnie dając dodatni przyrost Δd określamy zmianę pochylenia jednego z prętów c, e i równoległych do nich sił C, E . Zmianę pochylenia tych ostatnich określa znak przyrostu ΔB . Zestawieniom tablicy 10 odpowiadają dodatnie znaki obu przyrostów ΔB i Δd . Zestawieniom objętym tablicą 11 odpowiadają ujemne znaki przyrostu ΔB przy dodatnich przyrostach Δd .

W ten sposób eliminujemy zestawienia:

$$\begin{array}{lll} 1, \beta_c + IV, \delta'_a, & 3, o + IV, \delta'_a, & 4', \beta_c + IV, \delta'_a, \\ 1', \gamma_e + I, \delta', & 1', \gamma_e + II, o', & \\ 2', \delta_b + II, \delta'_b, & 2', o + I, \delta', & 2', o + II, o'. \\ 4, \gamma_e + I, \delta', & 4, \gamma_e + II, o', & \end{array}$$

Następnie sprawdzamy niesprzeczność pozostałych dziesięciu zestawień

$$\begin{array}{llll} 1, \gamma_e + IV, \delta'_a, & 1', \beta_c + I, \delta', & 1', \beta_c + II, o, & \\ 2, o + IV, \delta'_a, & 3', \delta_b + II, \delta'_b, & 3', o + I, \delta', & 3', o + II, o. \\ 4, \beta_c + IV, \delta'_a, & 4, \beta_c + I, \delta', & 4, \beta_c + II, o, & \end{array}$$

Na tablicach 10 i 11 oznaczono je gwiazdkami.

4.5. Zależności między kątami kratownicy wynikające z równania $\partial \Delta / \partial d = 0$. Z dotychczasowych rozważań wynika, że pochodna potencjału kratownicy względem przyrostu długości pręta d może być zerem jedynie przy następujących szczególnych wartościach trójmianów

$$\pm b \pm c_b \pm e_b, \quad \pm D \pm C_D \pm E_D:$$

- (1) albo gdy oba trójmiany mają wartości zerowe,
- (2) albo gdy $\pm b \pm c_b \pm e_b = \pm 2e_b$, $\pm D \pm C_D \pm E_D = \mp 2E_D$,
- (3) albo gdy $\pm b \pm c_b \pm e_b = \pm 2c_b$, $\pm D \pm C_D \pm E_D = \mp 2E_D$.

W pierwszym przypadku warunek zerowego przyrostu potencjału spełnia się tożsamościowo, gdyż oba składniki wyrażenia na pochodną są zerami. W przypadku tym nie ma dodatkowych zależności między kątami kratownicy. Zerowe wartości obu trójmianów są uwarunkowane położeniem prętów kratownicy w pewnych przedziałach kątowych oraz rozwarością pewnych kątów. Dopóki te warunki związane z położeniem węzła \mathcal{D}

są spełnione, dopóty oba trójkąty zachowują wartości zerowe. Pochodna potencjału jest zerem, gdy węzeł \mathcal{D} leży we właściwym obszarze. W tych przypadkach występuje ekstremum rozciągle.

W drugim przypadku warunek zerowej wartości pochodnej potencjału sprowadza się do równania

$$2e_b \frac{E}{e} \frac{\sin \delta_a}{\sin \beta_c} - 2E_D = 0,$$

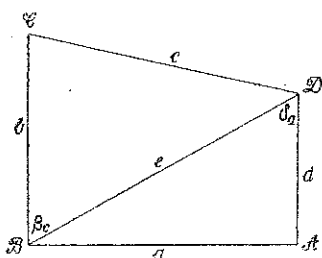
które daje zależność $\sin(\delta_a - \beta_c) = 0$.

Ponieważ $0 < \beta_c < \pi$, $0 < \delta_a < \pi$, przeto warunek ten jest spełniony, jeżeli $\delta_a = \beta_c$ (rys. 45).

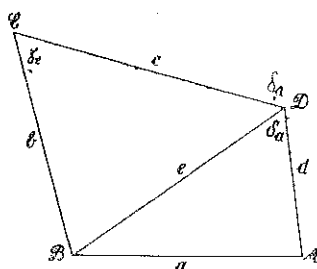
W trzecim przypadku warunek zerowej wartości pochodnej potencjału daje równanie

$$2C_b \frac{E}{e} \frac{\sin \delta_a}{\sin \beta_c} - 2E_D = 0,$$

które sprowadza się do zależności $\sin(\delta_a - \gamma_e) = 0$. Ponieważ $0 < \delta_a < \pi$, $0 < \gamma_e < \pi$, przeto zależność ta jest spełniona, jeżeli $\delta_a = \gamma_e$ (rys. 46).



Rys. 45



Rys. 46

4.6. Sprawdzenie możliwości spełnienia warunków wynikających z równania $\partial \Lambda / \partial d = 0$. Warunek $\delta_a = \beta_c$ powinien być spełniony w zestawieniach, w których pierwszy trójmian ma wartość $\pm 2e_b$, a drugi $\mp 2E_D$. Zestawienia te odczytujemy z tablic 10 i 11. Są to następujące cztery zestawienia:

$$1, \gamma_e + IV, \delta'_a, \quad 2, o + IV, \delta'_a, \quad 4, \beta_c + I, \delta', \quad 4, \beta_c + I, o.$$

Mamy $\beta_c + \gamma_e + \delta_b = \pi$.

W zestawieniu 1, $\gamma_e + IV, \delta'_a$ jest $\gamma_e > \pi/2$, $\delta_a > \pi/2$, a wobec $\delta_a = \beta_c$ powinno być $\beta_c > \pi/2$. Warunek ten nie może być spełniony jednocześnie z warunkiem $\gamma_e > \pi/2$.

W zestawieniu 2, $o + IV, \delta'_a$ jest $\beta_c < \pi/2$, $\gamma_e < \pi/2$ oraz $\delta_a > \pi/2$, przeto warunek zerowej wartości pochodnej potencjału wyrażający się równością $\delta_a = \beta_c$ nie może być spełniony.

W zestawieniach $4, \beta_c + I, \delta'$, $4\beta_c + II, o'$ powinno być $\beta_c > \pi/2$, $\delta_a < \pi/2$, przeto warunek $\delta_a = \beta_c$ nie może być spełniony. Warunek $\delta_a = \beta_c$ nie jest spełniony w żadnym przypadku. Oznaczono to nawiasami dokoła gwiazdek w tablicy 10 i 11. Warunek $\delta_a = \gamma_e$ powinien być spełniony w zestawieniach, w których pierwszy trójmian ma wartość $\pm 2c_b$, drugi $\mp 2E_D$. Są to następujące zestawienia wypisane w tablicy 10 i 11:

$$\begin{array}{lll} 4', \gamma_e + IV, \delta'_a, & 1', \beta_c + I, \delta', & 1', \beta_c + II, o', \\ 3', \delta_b + II, \delta'_b, & 3', o + I, \delta', & 3', o + II, o'. \end{array}$$

W zestawieniu $4', \gamma_e + IV, \delta'_a$ powinno być $\gamma_e > \pi/2$, $\delta_a > \pi/2$. Równość tych dwóch kątów jest przeto możliwa i warunek zerowej wartości potencjału może być przez to zestawienie spełniony.

Zestawienie $1', \beta_c + II, o'$ jest sprzeczne, gdyż wobec równości $\delta_a = \gamma_e$ zachodzi równość $\beta_c = \delta = \delta'$. Stąd β_c nie może być rozwarty, skoro δ' jest ostry. Podobnie stwierdzamy sprzeczność zestawienia $3', o + I, \delta'$.

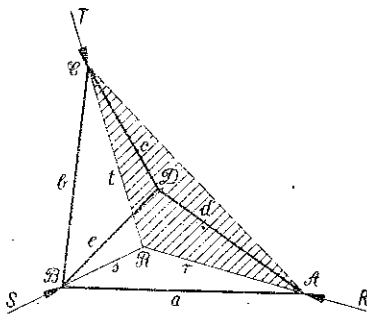
W pozostałych trzech zestawieniach powinno być $\gamma_e < \pi/2$, $\delta_a < \pi/2$. Równość tych kątów jest przeto możliwa i warunek zerowej wartości pochodnej potencjału może być spełniony.

4.7. Wniosek o występowaniu zerowych wartości pochodnej potencjału układu pięciu prętów względem długości pręta d . Wartość zerowa pochodnej potencjału rozpatrywanego układu prętów względem długości pręta d występuje w dziesięciu zestawieniach układów prętów i wieloboków sił oznaczonych w tablicach 9-11.

Sześć pierwszych zestawień wypisanych na tablicy 9 obejmuje układy, w których pochodna potencjału jest zerem bez względu na długość pręta d , o ile kąty między prętami kratownicy spełniają właściwe warunki ostrości lub rozwartości (rys. 47). W zestawieniach tych mają miejsce związki między kątami δ , δ_a i δ_b oraz kątami δ' , δ'_a i δ'_b oznaczone symbolem (B).

W tych warunkach oba składniki wyrażenia dla pochodnej są równe zeru tożsamościowo, a między kątami występującymi w tych składnikach nie wynika żaden warunek równości.

Pozostałe cztery zestawienia wypisane w tablicy 10 i 11 różnią się tym od poprzednich, że do wystąpienia zerowego przyrostu potencjału oprócz zachowania warunków ostrości lub rozwartości kątów β_c , γ_e , δ_b , δ' i δ'_b powinna być jeszcze spełniona równość $\gamma_e = \delta_a$. W zestawieniach tych zachowane być muszą związki $\delta' = \delta$, $\delta'_a = \delta_a$, $\delta'_b = \delta_b$ oznaczone symbolem (A).



Rys. 47

Na rys. 48 wyznaczono wykreślnie przykład krzywej stanowiącej miejsce geometryczne położenia węzła \mathcal{D} , spełniających tę równość.

Tablica 12

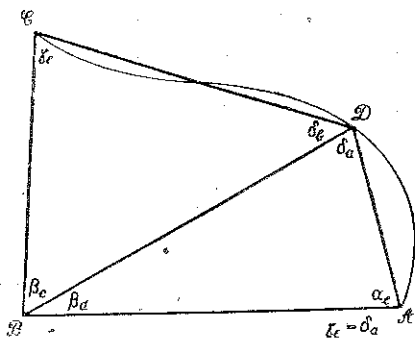
Oznaczenie przypadku	Znaki przyrostów $\Delta A \Delta D \Delta E$ występujące przy			Wartości trójkątnu $\pm a \pm d_a \pm e_a$ w przypadkach gdy $\beta_d \alpha_e \delta_{a'} o$ oraz największego rzutu			Oznaczenie przypadku	Znaki przyrostów $\Delta c \Delta d \Delta e$ występujące przy			Wartości trójkątnu $\pm C \pm D_C \pm E_C$ w przypadkach gdy $\delta'_b \delta'_i \delta'_{a'} o$ oraz największego rzutu		
	a	d_a	e_a	d_a	e_a	a		C	D_C	E_C	D_C	E_C	C
5	+	+	+	$+2d_a$	$+2e_a$	$+2a$	V	+	+	+	$+2E_C$		
6	+	-	+	0	$+2a$	$+2e_a$	VI	+	-	+	0		$+2E_C$
7	+	+	-	$+2a$	0	$+2d_a$	VII	+	+	-	0		
8	+	-	-	$-2e_a$	$-2d_a$	0	VIII	+	-	-	$-2E_C$		0

Tablica 13

Oznaczenie przypadku	Znaki przyrostów $\Delta A \Delta D \Delta E$ występujące przy			Wartości trójkątnu $\pm a \pm d_a \pm e_a$ w przypadkach gdy $\beta_d \alpha_e \delta_{a'} o$ oraz największego rzutu			Oznaczenie przypadku	Znaki przyrostów $\Delta c \Delta d \Delta e$ występujące przy			Wartości trójkątnu $\pm C \pm D_C \pm E_C$ w przypadkach gdy $\delta'_b \delta'_i \delta'_{a'} o$ oraz największego rzutu		
	a	d_a	e_a	d_a	e_a	a		C	D_C	E_C	D_C	E_C	C
5'	-	-	-	$-2d_a$	$-2e_a$	$-2a$	V	+	+	+	$+2E_C$		
6'	-	+	-	0	$-2a$	$-2e_a$	VI	+	-	+	0		$+2E_C$
7'	-	-	+	$-2a$	0	$-2d_a$	VII	+	+	-	0		
8'	-	+	+	$+2e_a$	$+2d_a$	0	VIII	+	-	-	$-2E_C$		0

4.8. Warunki występowania zerowych wartości pochodnej $\partial A/\partial d$. Wartość pochodnej potencjału $\partial A/\partial d$ zależy od kształtu rozpatrywanego układu pięciu prętów, od układu sił utrzymujących te pręty w równowadze i od zależności między parametrami określającymi kształt, to jest między kątami lub długościami boków. Zależność potencjału od kształtu kratownicy jest przedstawiona przez schematy wykreślone na rysunkach 32 i 33. Zależność potencjału od układu sił działających na kratownicę jest przedstawiona przez schematy wykreślone na rysunkach 11 i 12. Wszystkie te

dane dotyczące kształtu kratownicy, układu sił i zależności między parametrami kształtu wyodrębniono dla określenia wartości pochodnej potencjału względem długości pręta d . Stanowią one charakterystykę układu kratownicy i sił na nią działających ze względu na pręt d .



Rys. 48

Opierając się na charakterystyce układu ze względu na przesunięcia wzdłuż pręta d wyznaczamy charakterystykę tegoż układu ze względu na przesunięcia wzdłuż pręta c .

Zestawieniom wartości trójkątów $\pm b \pm c_b \pm e_b$ i $\pm D \pm C_D \pm E_D$, wypisanym w tablicach 7 i 8, odpowiadają przy przesunięciach węzła D wzdłuż pręta c zestawienia wartości trójkątów $\pm a \pm d_a \pm c_a$ i $\pm C \pm D_c \pm E_c$, wypisane w tablicach 12 i 13.

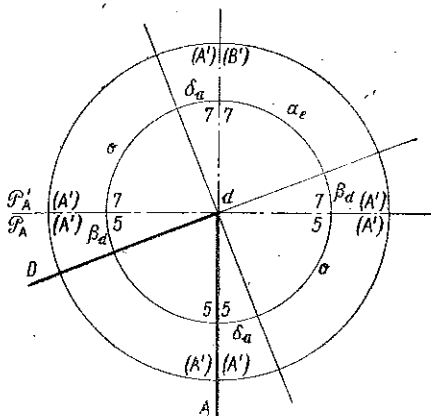
Zestawienia znaków przyrostów ΔA , ΔD i ΔE wypisane w lewych częściach tablic 12 i 13, obrazują schematy wykreślone na rysunkach 49 i 50, a zestawienia znaków przyrostów Δc , Δd i Δe wypisane w prawych częściach tych tablic obrazują schematy wykreślone na rysunkach 51 i 52. Schematy te są odpowiednikami schematów przedstawionych na rysunkach 11, 12 i 32, 33.

Tablica 14

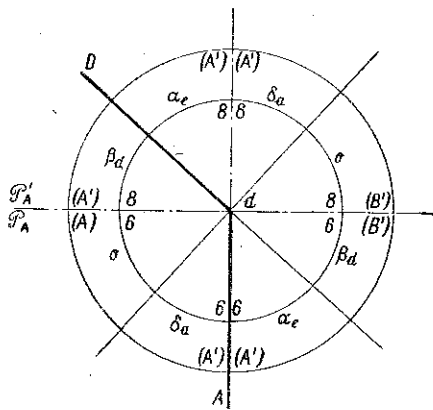
Przypadki tablicy 12 i 13 część lewa	VI, δ'_b	VII, δ'	VIII, δ'_a	VIII, o
Przypadki tablicy 12 i 13 część lewa	(B')			
6, β_d				
7, α_e				
8, δ_a				
8, o				
6', β_d			*	
7', α_e			*	
8', δ_a	*	*		*
8', o			*	

Według tablic 12 i 13, podobnie jak poprzednio w tablicach 9-11, zestawiono w tablicach 14-16 warunki wartości zerowych pochodnej potencjału względem długości pręta c . Tablica 14 natomiast obejmuje przypadki, w których pochodna $\partial \Delta / \partial c$ jest zerem przy wartościach zero-

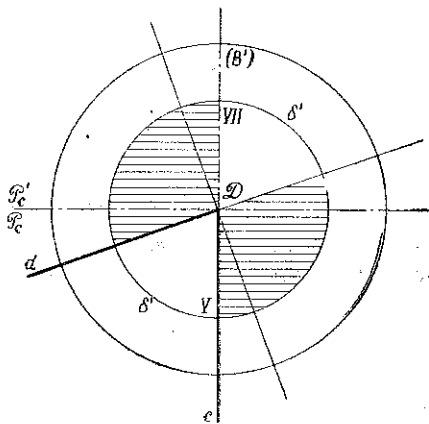
wych obu trójmianów $\pm a \pm d_a \pm c_a$ i $\pm C \pm D_C \pm E_C$. Przypadkom tym odpowiadają związki $\delta' = \pi - \delta$, $\delta'_a = \pi - \delta_a$ i $\delta'_b = \pi - \delta_b$, oznaczone poprzednio symbolem (B') oraz związki $\alpha'_e = \pi - \alpha_e$, $\beta'_d = \pi - \beta_d$ oraz $\delta'_a = \pi - \delta_a$, oznaczone symbolem (B).



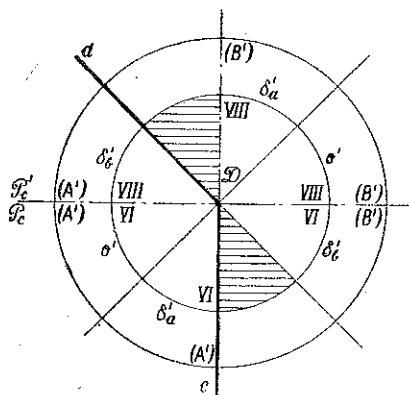
Rys. 49



Rys. 50



Rys. 51



Rys. 52

Tablica 15 obejmuje przypadki, w których trójmian $\pm a \pm d_a \pm c_a$ ma wartości dodatnie $+2a$, $+2d_a$ oraz $+2c_a$, a trójmian $\pm C \pm D_C \pm E_C$ ma wartość ujemną $-2E_C$. Tablica 16 obejmuje przypadki, w których wartości tych trójmianów mają znaki odwrotne. Wszystkim tym przypadkom odpowiadają związki $\delta' = \delta$, $\delta'_a = \delta_a$, $\delta'_b = \delta_b$, oznaczone symbolem (A'), oraz związki $\alpha'_e = \alpha_e$, $\beta'_d = \beta_d$, $\delta'_a = \delta_a$, oznaczone symbolem (A). Po wyeliminowaniu zestawień sprzecznych w tablicy 14 pozostaje sześć zestawień niesprzecznych oznaczonych gwiazdkami. Eliminacja sprzecz-

ných zestawień wypisanych w tablicach 15 i 16 prowadzi początkowo do dziesięciu zestawień, w których trójmiany wyrażenia na pochodną $\partial A/\partial c$ mają wartości $\pm 2d_a$, $\mp 2E_C$ lub $\pm 2e_a$, $\mp 2E_C$.

Tablica 15

Przypadki tablic 12 i 13 część prawa		VIII, δ'_b
Przypadki tablic 12 i 13 część lewa (A)	Wartość $\pm C \pm D_C \pm E_C$	$-2E_C$
	Wartość $\pm a \pm d_a \pm e_a$	(A')
$5, \beta_d$	$+2d_a$	
$5, \alpha_e$	$+2e_a$	(*)
$5, \delta_a$	$+2a$	
$5, o$	$+2a$	
$6, \alpha_e$	$+2a$	
$6, \delta_a$	$+2e_a$	
$6, o$	$+2e_a$	(*)
$7, \beta_d$	$+2a$	
$7, \delta_a$	$+2d_a$	
$7, o$	$+2d_a$	
$8', \beta_d$	$+2e_a$	
$8', \alpha_e$	$+2d_a$	*

Tablica 16

Przypadki tabl. 12 i 13 część prawa		V, δ'	VI, δ'_a	VIo'
Przypadki tablic 12 i 13 część lewa (A)	Wartość $\pm C \pm D_C \pm E_C$	$+2E_C$		
	Wartość $\pm a \pm d_a \pm e_a$	(A')		
$5', \beta_d$	$-2d_a$	*		(*)
$5', \alpha_e$	$-2e_a$			
$5', \delta_a$	$-2a$			
$5', o$	$-2a$			
$6', \alpha_e$	$-2a$			
$6', \delta_a$	$-2e_a$			
$6', o$	$-2e_a$			
$7', \beta_d$	$-2a$			
$7', \delta_a$	$-2d_a$		*	
$7', o$	$-2d_a$	(*)		*
$8, \beta_d$	$-2e_a$	(*)		(*)
$8, \alpha_e$	$-2d_a$			

Warunek wartości zerowej pochodnej prowadzi w pierwszym przypadku do równania

$$2d_a \frac{E}{e} \frac{\sin \delta_b}{\sin \beta_d} - 2E_C = 0,$$

które daje zależność $\delta_b = \alpha_e$, a w drugim przypadku do równania

$$2e_a \frac{E}{e} \frac{\sin \delta_b}{\sin \beta_d} - 2E_C = 0,$$

które daje zależność $\delta_b = \beta_d$. Zależności te prowadzą do wyrugowania dalszych czterech zestawień oznaczonych w tablicach 15 i 16 gwiazdkami w nawiasach. W pozostałych przypadkach zachodzi jedynie zależność $\delta_b = \alpha_e$. Zależność $\delta_b = \beta_d$ nie występuje w żadnym przypadku.

W wyniku analizy możliwości wystąpienia wartości zerowych pochodnej $\partial A/\partial c$ otrzymujemy sześć przypadków zestawionych w tablicy 14

oraz cztery przypadki zestawione w tablicach 15 i 16. Przy występowaniu pierwszych obowiązują zależności (B) i (B'), a przy występowaniu drugich zależności (A) i (A'). Wszystkie te przypadki są odpowiednikami przypadków występowania wartości zerowych pochodnej $\partial\Delta/\partial d$, zestawionych w tablicach 9 oraz 10 i 11.

5. Wyznaczenie przypadków ekstremum potencjału

5.1. Łączenie warunków zerowych wartości pochodnych $\partial\Delta/\partial c$ i $\partial\Delta/\partial d$. Dowolne przesunięcie węzła \mathcal{D} określamy jednoznacznie przez przyrosty długości spośród trzech prętów zbiegających się w tym węźle. Zerowe wartości pochodnych $\partial\Delta/\partial c$ i $\partial\Delta/\partial d$ dają przeto układ warunków koniecznych dla ekstremum potencjału. Warunki rozdzielnego występowania wartości zerowych tych pochodnych zostały podane w tablicach 9 - 11 oraz w tablicach 14-16. Aby znaleźć warunki sprowadzające łącznie obie pochodne do zera, należy zestawić warunki z tych tablic. Możliwość zestawienia tych warunków jest ograniczona przez to, że w przypadkach wypisanych w tablicach 9 i 14 powinny mieć miejsce zależności $\beta'_c = \pi - \beta_c$, $\gamma'_e = \pi - \gamma_e$, $\delta' = \pi - \delta$, $\delta'_a = \pi - \delta_a$, $\delta'_b = \pi - \delta_b$ oraz zależności $\alpha'_e = \pi - \alpha_e$, $\beta'_d = \pi - \beta_d$, oznaczone symbolami (B) i (B'). Natomiast w przypadkach wypisanych w tablicach 10, 11 i 15, 16 powinny być spełnione zależności $\beta'_c = \beta_c$, $\gamma'_e = \gamma_e$, $\delta' = \delta$, $\delta'_a = \delta_a$, $\delta'_b = \delta_b$ oraz zależności $\alpha'_e = \alpha_e$, $\beta'_d = \beta_d$, oznaczone symbolami (A) i (A'). Możliwe są przeto tylko zestawienia przypadków wypisanych w tablicy 9 z przypadkami podanymi w tablicy 14 oraz przypadków objętych tablicami 10 i 11 z przypadkami wymienionymi w tablicach 15 i 16. Natomiast zestawienia przypadków, w których spełnione są zależności (B), (B') z przypadkami, w których mają miejsce zależności (A) i (A'), są sprzeczne.

5.2. Zestawienie warunków zerowych wartości pochodnych $\partial\Delta/\partial c$ i $\partial\Delta/\partial d$ w przypadkach zależności (B) i (B').

Tablica 17 obejmuje zestawienia przypadków wypisanych w tablicach 9 i 14. W tablicy tej sprzeczne są wszystkie zestawienia przypadków, w których występują dwa różne kąty rozwarte spośród trzech kątów δ'_a , δ'_b , δ' . Sprzeczne jest np. zestawienie $6', \beta_d + VIII$, $\delta'_a + 2'$, $\beta_c + IV$, δ'_b .

Niesprzeczne są natomiast zestawienia przypadków, w których w oznaczeniach wypisanych pionowo i poziomo występuje ten sam z trzech kątów δ'_a , δ'_b , δ' . Rzeczywiście, oprócz kątów δ'_a , δ'_b , δ należących do tego samego trójkąta, w oznaczeniach zestawianych przypadków występują pionowo kąty α_c , β_d , δ_a , należące do trójkąta \mathcal{ABD} , a poziomo kąty β_c , γ_e i δ_b , należące do trójkąta \mathcal{BCD} . Kąty rozwarte tych trójkątów mogą być dowolnie zestawiane z wyjątkiem kątów δ_a i δ_b . Tablica obejmuje osiem niesprzecznych przypadków oznaczonych gwiazdkami.

Przypadki te mogą być różnie grupowane. Na przykład można je grupować według rozwartości lub ostrości kątów δ' , δ'_a i δ'_b albo kątów α_e , β_d i δ_a oraz β_c , γ_e i δ_b . Na rysunkach 53 - 61 przedstawiono ten drugi sposób grupowania.

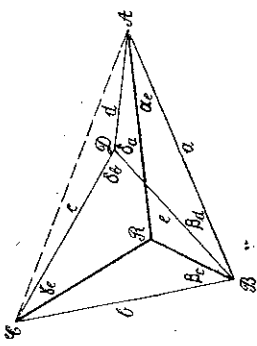
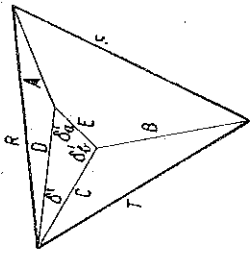
Tablica 17

Przypadek $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = 0(B)$ według tablicy 9	$2', \beta_c$	$3', \gamma_e$	$4', \delta_b$	$4', \delta_b$	$4', \delta_b$	$4', o$
	+	+	+	+	+	+
Przypadek $\frac{\partial \Delta}{\partial C} = 0$ według tablicy 14 (B)	IV, δ'_b	IV, δ'_b	II, δ'_a	III, δ'	IV, o'	IV, δ'_b
$6', \beta_d + VIII, \delta'_a$			* (b)			
$7', \alpha_e + VIII, \delta'_a$			*			
$8', \delta_a + VI, \delta'_a$	* (b)	*				* (a)
$8', \delta_a + VII, \delta'$				*		
$8', \delta_a + VIII, o'$						* (a)
$8', o + VIII, \delta'_a$						* (a)

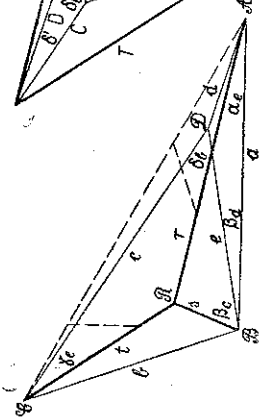
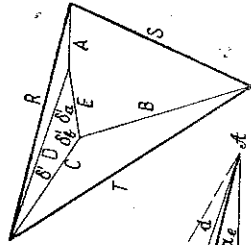
Trzy pierwsze rysunki obejmują przypadki oznaczone w tablicy 17 symbolem (a). Różnią się one tylko położeniem wężła \mathcal{D} wewnątrz trójkąta ABC . Na rysunku 53 węzeł \mathcal{D} leży wewnątrz obu półokręgów zakreślonych na bokach a i b , przeto kąty δ_a i δ_b są rozwarte. Na rysunkach 54 i 55 węzeł \mathcal{D} leży wewnątrz tylko jednego z tych półokręgów, przeto tylko jeden z tych kątów jest rozwarty: albo δ_a , albo δ_b . Przypadki te łączą się w jeden.

Podobnie dwa następne przypadki oznaczone w tablicy 17 symbolem (b) różnią się między sobą ostrością lub rozwartością kątów β_c i β_d . Przypadek, w którym oba te kąty są ostre, pokrywa się z jednym z przypadków poprzedniej grupy. Położenia wężła \mathcal{D} w polu trójkąta ABC są w tych przypadkach rozgraniczone prostopadłymi do boków a i b , wystawionymi z wężła \mathcal{B} .

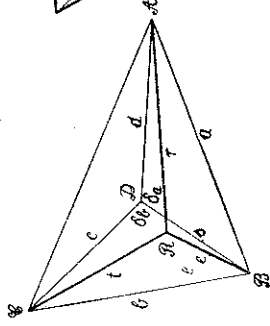
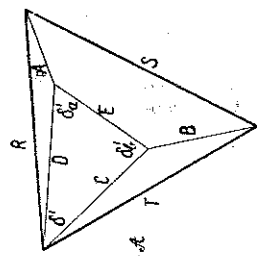
Pozostałe trzy przypadki przedstawione na rysunkach 59, 60 i 61 nie dają się złączyć w jeden. Różnią się one ostrością i rozwartością kątów α_e i γ_e . W pierwszym przypadku oba te kąty są ostre, w drugim i trzecim kolejno kąt γ_e i α_e są rozwarte. W dwóch ostatnich przypadkach kształt kratownicy jest właściwie taki sam, a różnice w rysunku pochodzą stąd, że kratownica jest wyrysowana z innej strony.



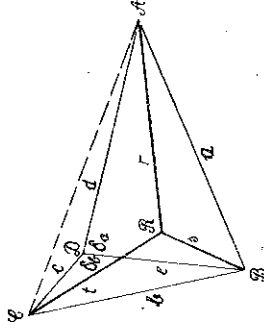
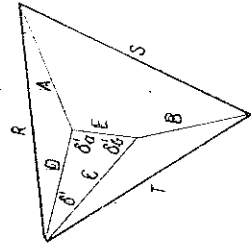
Rys. 54



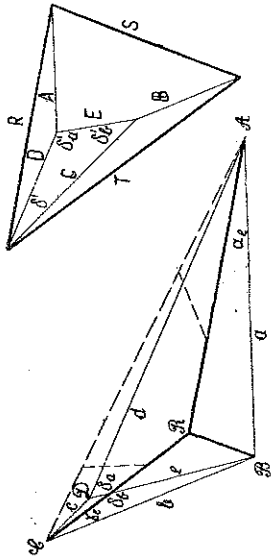
Rys. 56



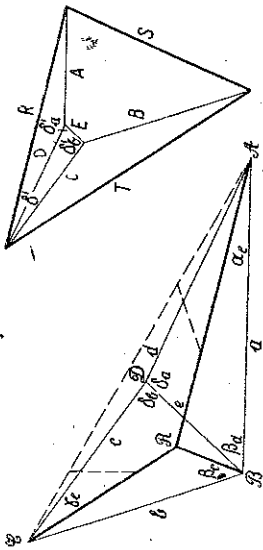
Rys. 53



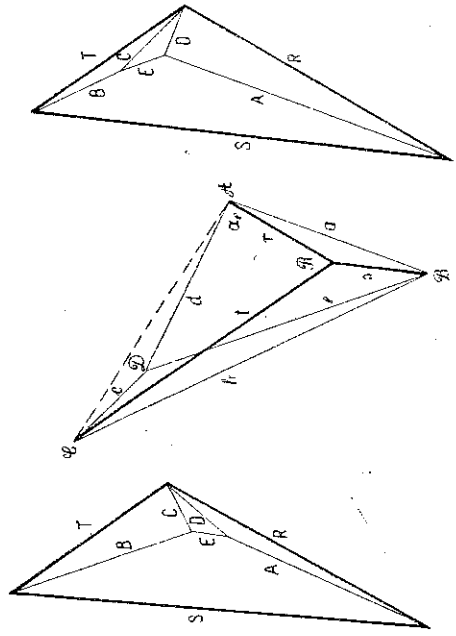
Rys. 55



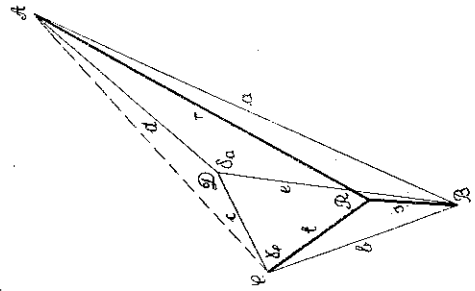
Rys. 58



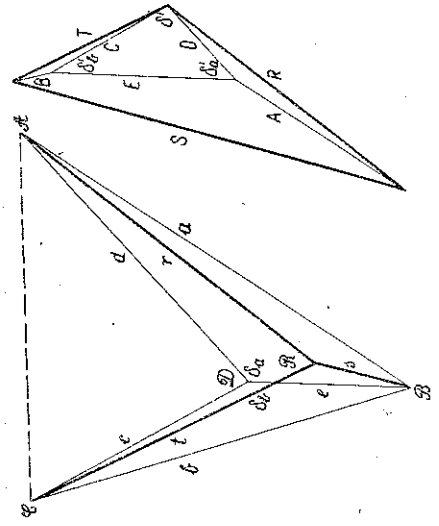
Rys. 57



Rys. 61



Rys. 60



Rys. 59

W przypadkach tych spełnione powinny być zależności (B) i (B'), a siły we wszystkich pięciu prętach układu są tego samego znaku. Ponieważ wszystkie pręty są równej wytrzymałości, przeto układ odkształca się pod działaniem sił zewnętrznych na układ geometrycznie podobny rozszerzając się lub kurcząc. Praca sił zewnętrznych przyłożonych w węzłach A, B i C jest równa połowie sumy iloczynów tych sił pomnożonych przez odkształcenia odległości r, s i t :

$$L = \frac{1}{2} (Rr + Ss + Tt) \varepsilon_0.$$

Praca ta jest równa potencjałowi sił wewnętrznych. Wartość potencjału nie zmienia się przy przesunięciach węzła D , zawartych wewnątrz trójkąta ABC . Dopóki bowiem węzeł D leży wewnątrz tego trójkąta, dopóty siły we wszystkich prętach są tego samego znaku. Jeżeli węzeł D leży na obwodzie tego trójkąta, to przynajmniej w jednym pręcie siła jest równa zero. Potencjał wszystkich tych układów równej wytrzymałości ma wartość minimalną, jak to wynika z przeprowadzonej analizy. Zresztą, gdyby układ tych prętów miał mniejszą wartość potencjału, to odkształcenia jednostkowe jego prętów musiałyby być mniejsze od odkształceń równej wytrzymałości, co przeczyłoby założeniu. Przypadki te wyczerpują wszystkie możliwe kształty obu trójkątów.

W przypadkach odpowiadających omawianym zestawieniom minimum potencjału występuje, gdy węzeł D leży w polu na obwodzie trójkąta ABC .

5.3. Zestawienia warunków zerowych wartości pochodnych $\partial A/\partial c$ i $\partial A/\partial d$ w przypadkach zależności (A) i (A'). Tablica 18 obejmuje zestawienia przypadków wypisanych w tablicach 10, 11 i 15, 16. W tablicy tej sprzeczne są wszystkie zestawienia przypadków, w których występują dwa różne kąty rozwarte spośród trzech kątów δ' , δ'_a i δ'_b . Niesprzeczne są natomiast zestawienia przypadków, w których w oznaczeniach wypisanych pionowo i poziomo występuje ten sam z trzech kątów δ' , δ'_a i δ'_b . Istotnie bowiem kąty α_e, β_d i δ_a , występujące w oznaczeniach kolumny pionowej, należą do trójkąta ABD , a kąty β_c, γ_e i δ_b , występujące w oznaczeniach wiersza poziomego, należą do trójkąta BCD . Kąty rozwarte lub ostre obu tych trójkątów mogą być dowolnie zestawiane bez napotkania na sprzeczność. Oprócz tego zestawienia znaków przyrostów $\Delta d, \Delta c$ i Δe , występujące przy przesunięciach węzła D wzdłuż pręta d i oznaczone symbolami I, II i IV ze znakami przyrostów $\Delta c, \Delta d$ i Δe , występującymi przy przesunięciach węzła D wzdłuż pręta c i oznaczonymi symbolami V, VI, VIII, nie prowadzą do sprzeczności, jak to można sprawdzić za pomocą schematów wykreślonych na rysunkach 32, 33 i 51, 52.

Zgodnie z wnioskami z p. 4.7. wartość zerowa pochodnej $\partial A/\partial d$ występuje, gdy węzeł D leży na krzywej wyznaczonej przez równość $\gamma_e = \delta_a$.

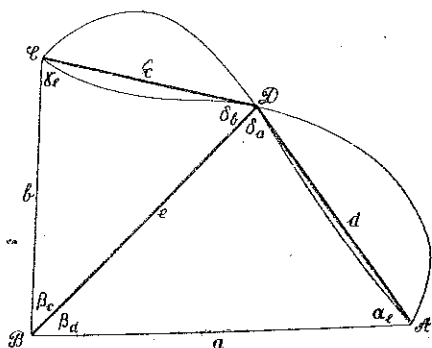
Wartość zerowa pochodnej $\partial A/\partial c$ występuje, gdy węzeł \mathcal{D} leży na krzywej wyznaczonej przez równanie $\alpha_e = \delta_b$. Ekstremum potencjału występuje, gdy punkt \mathcal{D} leży w przecięciu obu krzywych. W punkcie tym $\beta_c = \beta_a$, a więc ekstremum potencjału zachodzi, gdy pręt e leży wzdłuż dwusiecznej kąta zawartego między prętami a i b , a trójkąty ABD i $CB\mathcal{D}$ są podobne.

Tablica 18

Przypadek $\frac{\partial \Delta}{\partial c} = 0$ według tablic 15 i 16 (A)	Przypadek $\frac{\partial \Delta}{\partial d} = 0(A)$ według tablic 10 i 11	$4', \gamma_e$	$1', \beta_c$	$3', \delta_b$	$3', o$
		+	+	+	+
		IV, δ'_a	IV, δ'	II, δ'_b	II, o'
	$8', \alpha_e + VIII, \delta'_b$			*	
	$5', \beta_d + V, \delta'$		*		
	$7', \delta_a + VI, \delta'_a$	*			
	$7', o + VI, o'$				*

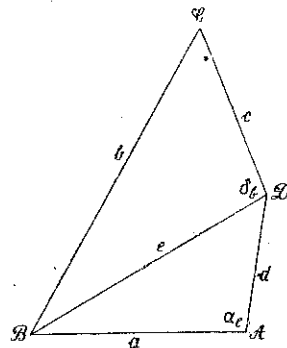
Na rysunku 62 wykreślono krzywe wyznaczone przez równania $\gamma_e = \delta_a$ i $\alpha_e = \delta_b$ oraz układ ekstremalny prętów a, b, c, d i e .

Tablica 18 obejmuje cztery niesprzeczne przypadki. Przedstawiono je na rysunkach 63 - 65. Przypadki te różnią się jedynie rozwartością kątów $\alpha_e = \delta_b, \beta_d = \beta_c$ i $\gamma_e = \delta_a$.



Rys. 62

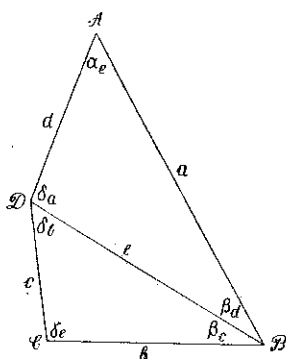
$$\begin{aligned} \beta_c &= \beta_d \\ \delta_e &= \delta_a \\ \alpha_e &= \delta_b \end{aligned}$$



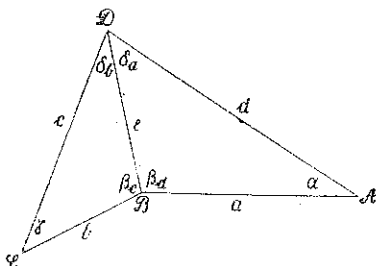
Rys. 63

Kształt kratownicy w przypadku, w którym kąty $\alpha_e = \delta_b$ są rozwarte, nie różni się od kształtu kratownicy w przypadku, w którym kąty $\gamma_e = \delta_a$ są rozwarte. Wykazują to rysunki 63 - 65. Natomiast w przypadku, w któ-

rym kąty $\beta_c = \beta_d$ są rozwarte, kratownica ma inny kształt. Jest rzeczą widoczną, że kształty rozpatrywanego układu, dające minimum potencjału, różnią się jedynie wielkością kątów $\beta_c = \beta_d$. Cztery niesprzeczne przypadki tablicy 18 obejmują wszystkie możliwe kształty trójkątów o kątach $\alpha_c = \delta_b$, $\beta_d = \beta_c$ i $\gamma_e = \delta_a$. Jedynym przeto warunkiem wystąpienia minimum potencjału jest podobieństwo trójkątnych pól kratownicy.



Rys. 64



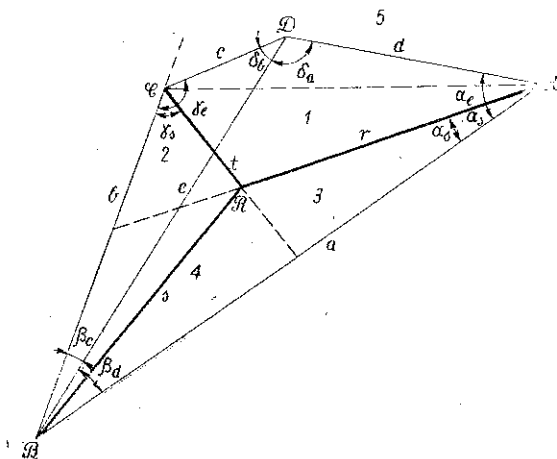
Rys. 65

W przypadkach podanych w tablicy 18 kształt układu ekstremalnego nie zależy od sił zewnętrznych, o ile tylko siły te nie wywołują jednako- wych znaków odkształceń we wszystkich prętach. Wówczas bowiem wy- stępują przypadki zestawione w tablicy 18, a kształt układu może się zmieniać. Wnioskujemy stąd, że układ prętów równej wytrzymałości, da- jący minimum potencjału pod danym obciążeniem, pozostaje układem o najmniejszym potencjale pod innymi obciążeniami, o ile obciążenia te nie wywołują sił jednego znaku w prętach rozpatrywanych dwóch pól trójkątnych i o ile wszystkie te pręty mają równą odkształcalność. Ten wniosek stwierdza, że układom prętów dającym minimum potencjału przysługuje w pewnych granicach cecha niezmienności względem obcią- żeń.

6. Zmienność potencjału rozpatrywanego układu prętów w zależności od położenia nieobciążonego węzła \mathcal{D}

Dla sprawdzenia zmienności potencjału dokoła tych położenia węzła \mathcal{D} , którym odpowiada ekstremum potencjału, wyznaczono w obu rodza- jach ekstremum — rozciągłym i punktowym — równania linii stałych wartości potencjału i wykreslono te linie obierając położenia węzłów \mathcal{A} , \mathcal{B} i \mathcal{C} oraz kierunki działania sił zewnętrznych R , S i T .

6.1. Zmienność potencjału dokoła trójkątnego obszaru minimum Λ . W przypadku ekstremum rozciągniętego obrano układ przedstawiony na rys. 66, odpowiadających przypadkowi oznaczonemu w tabelicy 17 symbolem $3' \gamma_e \text{ IV } \delta'_b + 8' \delta'_a \text{ VI } \delta'_b$. Węzeł \mathcal{D} może przyjmować dowolne położenia wewnątrz naroża ABE . Nie rozpatrywaliśmy położenia węzła \mathcal{D} w narożu wierzchołkowo przeciwnym. Położenia w narożach przyległych zostały poprzednio wyłączone przez założenie, że trójkąty ABD , BCE nie nakładają się na siebie. Naroże ABE podzieliliśmy na pięć obszarów oznaczonych na rysunkach cyframi 1, 2, 3, 4 i 5. Obszar 1 jest trójkątem, którego punktem odpowiada stała wartość potencjału. Do



Rys. 66

$= Aa + Bb + Cc + Dd + Ee$ podstawiamy wyrażenia na siły i na długości prętów wyznaczone w p. 3.

W obszarze 1 dla $a_e > a_s$, $\gamma_e > \gamma_s$, $a_e + \gamma_e \leq \pi - (\beta_c + \beta_d)$ znajdujemy

$$\frac{\Lambda}{R a} = \frac{\sin(a_s + \gamma_s)}{\sin \gamma_s} = \text{const.}$$

W obszarze 2 dla $a_e > a_s$, $0 < \gamma_e < \gamma_s$, $a_e + \gamma_e \leq \pi - (\beta_c + \beta_d)$ mamy

$$\frac{\Lambda}{R a} = -\frac{\sin(a_s - \gamma_s)}{\sin \gamma_s} + 2 \sin a_s \text{ctg } \gamma_e,$$

a więc potencjał zmienia się liniowo względem $\text{ctg } \gamma_e$; potencjał jest stały, gdy węzeł \mathcal{D} zajmuje położenia wzdłuż prostych c , pochyłonych pod kątem γ_e .

W obszarze 3 przy $0 < a_e < a_s$, $\gamma_e > \gamma_s$, $a_e + \gamma_e < \pi - (\beta_c + \beta_d)$ jest

$$\frac{\Lambda}{R a} = \frac{\sin(a_s - \gamma_s)}{\sin \gamma_s} + 2 \sin a_s \text{ctg } a_e,$$

a więc potencjał zmienia się liniowo względem $\text{ctg } a_e$; potencjał ma wartości stałe, gdy węzeł \mathcal{D} leży na prostych d pochyłonych pod kątem a_e .

W obszarze 4 przy $0 < a_e < a_s$, $0 < \gamma_e < \gamma_s$

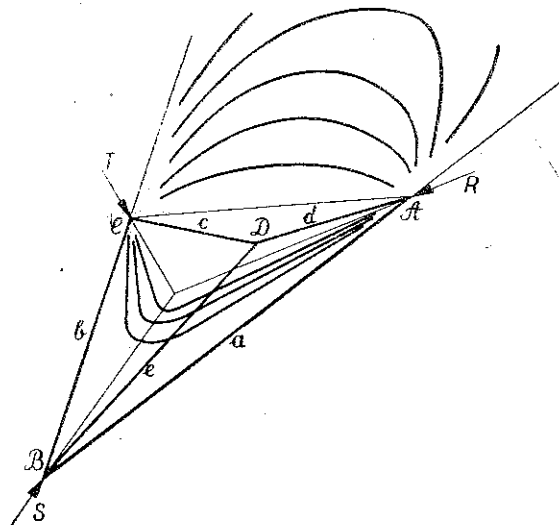
$$\frac{\Lambda}{R a} = -\frac{\sin(a_s + \gamma_s)}{\sin \gamma_s} + 2 \sin a_s (\text{ctg } a_e + \text{ctg } \gamma_e)$$

potencjał zachowuje stałe wartości wzdłuż linii, dla których suma kotangensów kątów α_e i γ_e jest stała.

W obszarze 5 dla $\alpha_e + \gamma_e > \pi - (\beta_c + \beta_d)$, $\alpha_e < \pi$, $\gamma_e < \pi$

$$\frac{A}{R_a} = \frac{\sin(\alpha_s + \gamma_s)}{\sin \gamma_s} + 2 \sin \alpha_s (\text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_b)$$

potencjał zachowuje stałe wartości wzdłuż linii, dla których suma kotangensów kątów δ_a i δ_b jest stała.



Rys. 67

Na rysunku 67 wykreślono linie oznaczające położenia węzła \mathcal{D} , w których potencjał ma jednakowe wartości. Wszystkie te linie zbiegają się w punktach \mathcal{A} i \mathcal{E} . Położeniom węzła \mathcal{D} wzdłuż prostych a i b odpowiadają nieograniczenie wielkie potencjały. Z wykresu widać, że powierzchnia, której rzędne mierzą wartości potencjału, ma płaskie dno w postaci trójkąta $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{E}$.

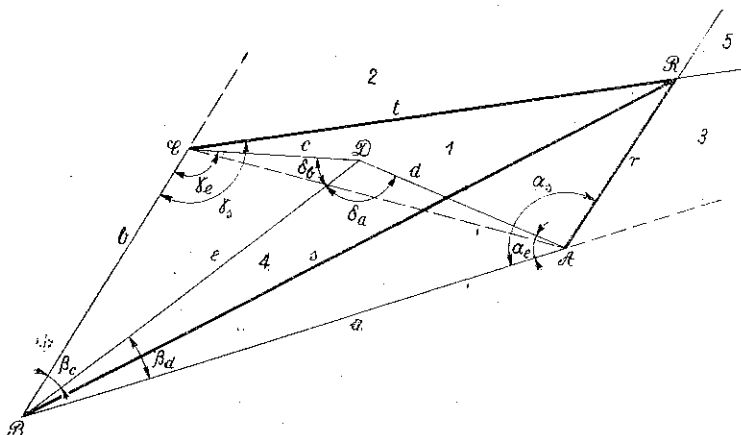
6.2. Zmienność potencjału dokoła punktu odpowiadającego minimum Δ . W przypadku ekstremum punktowego obrano układ przedstawiony na rys. 68, odpowiadający jednemu z przypadków tablicy 18.

Węzeł \mathcal{D} może zajmować dowolne położenia wewnątrz naroża $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{E}$. Podobnie jak w poprzednim przypadku nie rozpatrywaliśmy położenia węzła \mathcal{D} w narożu wierzchołkowo przeciwległym. Położenia węzła \mathcal{D} w narożach przyległych zostały wyłączone. Naroże $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{E}$ podzielono na pięć obszarów oznaczonych cyframi od 1 do 5.

W obszarze 1 wyznaczonym przez nierówności $\alpha_e < \alpha_s$, $\gamma_e < \gamma_s$, $\alpha_e + \gamma_e > \pi - (\beta_c + \beta_d)$ potencjał wyraża się wzorem

$$\frac{A}{R a} = -\frac{\sin(\alpha_s + \gamma_s)}{\sin \gamma_s} + 2 \sin \alpha_s (\operatorname{ctg} \alpha_e + \operatorname{ctg} \gamma_e + \operatorname{ctg} \delta_a + \operatorname{ctg} \delta_b),$$

a więc zachowuje stałą wartość wzdłuż linii, wzdłuż których suma czterech kotangensów wypisanych w tym wzorze jest stała.



Rys. 68

W obszarze 2 wyznaczonym przez przedziały zmienności kątów $\gamma_s < \gamma_e < \pi$, $\alpha_e < \alpha_s$ jest

$$\frac{A}{R a} = \frac{\sin(\alpha_s - \gamma_s)}{\sin \gamma_s} + 2 \sin \alpha_s (\operatorname{ctg} \alpha_e + \operatorname{ctg} \delta_a + \operatorname{ctg} \delta_b),$$

a wartość potencjału zmienia się wraz z kotangensami kątów α_e , δ_a i δ_b .

W obszarze 3 wyznaczonym przez nierówności $\alpha_e < \alpha_s < \pi$, $\gamma_e < \gamma_s$,

$$\frac{A}{R a} = -\frac{\sin(\alpha_s - \gamma_s)}{\sin \gamma_s} + 2 \sin \alpha_s (\operatorname{ctg} \gamma_e + \operatorname{ctg} \delta_a + \operatorname{ctg} \delta_b).$$

W obszarze 4 wyznaczonym przez nierówności $\alpha_e > 0$, $\gamma_e > 0$, $\alpha_e + \gamma_e < \pi - (\beta_c + \beta_d)$

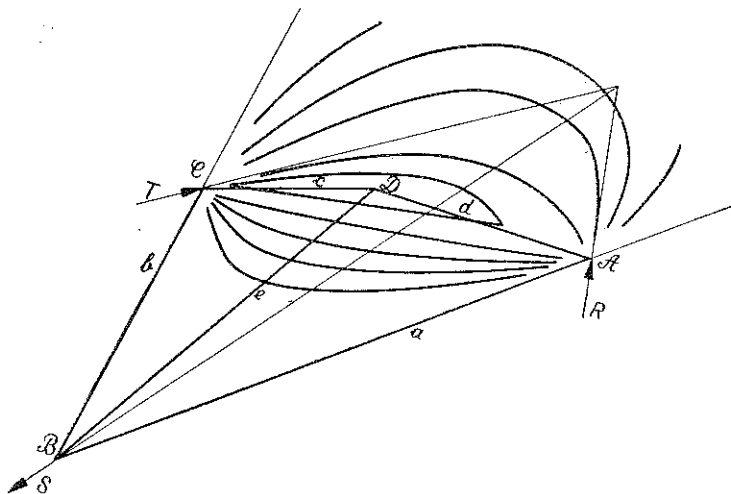
$$\frac{A}{R a} = -\frac{\sin(\alpha_s + \gamma_s)}{\sin \gamma_s} + 2 \sin \alpha_s (\operatorname{ctg} \alpha_e + \operatorname{ctg} \gamma_e).$$

W obszarze 5 wyznaczonym przez nierówności $\alpha_s < \alpha_e < \pi$, $\gamma_s < \gamma_e < \pi$

$$\frac{A}{R a} = \frac{\sin(\alpha_s + \gamma_s)}{\sin \gamma_s} + 2 \sin \alpha_s (\operatorname{ctg} \delta_a + \operatorname{ctg} \delta_b).$$

Wzory te wskazują, że we wszystkich pięciu obszarach wartość potencjału zmienia się krzywoliniowo wraz z położeniem węzła Q.

Na rysunku 69 wykreślono linie oznaczające położenia węzła \mathcal{D} , odpowiadające równym wartościom potencjału. W przeciwstawieniu do poprzedniego przypadku w tym przykładzie linie te nie zbiegają się



Rys. 69

w punktach \mathcal{A} i \mathcal{E} . Z rysunku widać, że powierzchnia, której rzędne mierzą wartości potencjału, jest łagodność wygięta w otoczeniu punktu dającego minimum potencjału i że powierzchnia ta ma wygiętą bruzdę wzdłuż linii \mathcal{AE} . Wzdłuż prostych a i b wartości potencjału wzrastają nieograniczenie.

7. Przykłady kształtowania kratownicy na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów łączących trzy pręty

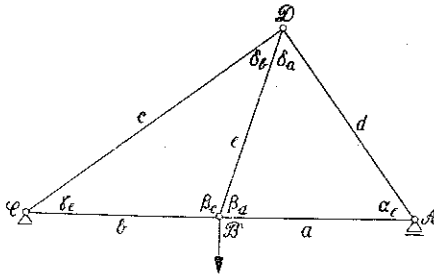
Przykład 1. Rozpatrzmy układ o jednym węźle obciążonym w pasie dolnym, jednym węźle nieobciążonym w pasie górnym i o dwóch węzłach podporowych.

Jeżeli węzeł obciążony leży na jednej prostej z węzłami podporowymi, a przedziały między tymi węzłami są równe (rys. 70), to z warunku podobieństwa trójkątów \mathcal{ABD} i \mathcal{BED} otrzymamy $\beta_e = \beta_d$, a więc pręt e w układzie o najmniejszym potencjale jest pionowy i stanowi oś symetrii kratownicy; oprócz tego równości $a_e = \delta_b$ oraz $\gamma_e = \delta_a$ stwierdzają, że trójkąty obu pól są równoramienne i że wysokość kratownicy minimalnej jest równa połowie rozpiętości (rys. 71).

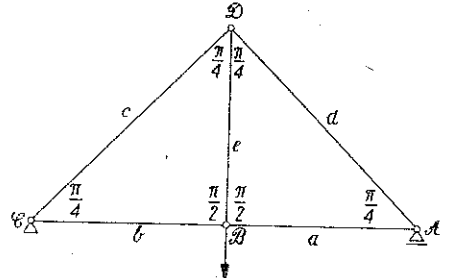
Zmieńmy w poprzednim przykładzie położenie węzła obciążonego \mathcal{B} przesuwając go ku dołowi (rys. 72).

Warunek podobieństwa trójkątów obu pól wskazuje jak poprzednio, że węzeł \mathcal{D} leży nad \mathcal{B} oraz że $\alpha_e = \delta_b = \delta_a = \gamma_e$, to jest że $e = a$ (rys. 73).

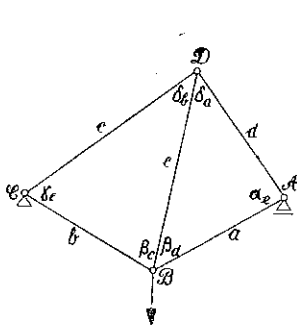
Jeżeli węzeł \mathcal{B} leży nad prostą $\mathcal{A}\mathcal{E}$ to otrzymujemy takie same równości boków i kątów, ale inny rysunek kratownicy (rys. 74).



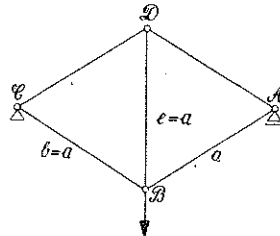
Rys. 70



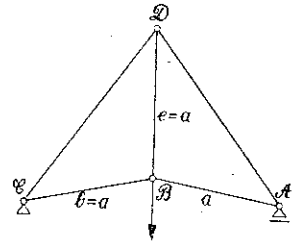
Rys. 71



Rys. 72



Rys. 73



Rys. 74

Jeżeli węzeł obciążony \mathcal{B} leży dowolnie, a nie w równych odległościach od węzłów podporowych \mathcal{A} i \mathcal{E} (rys. 75), to położenie węzła \mathcal{D} jest niesymetryczne.

Do wyznaczenia niewiadomych $c, d, e, \alpha_e, \gamma_e, \delta_a$ i δ_b przez wiadome $a, b, (\beta_c + \beta_d)$ mamy równania:

$$\frac{\sin \alpha_e}{e} = \frac{\sin \delta_a}{a} = \frac{\sin \beta_d}{d}, \quad \frac{\sin \gamma_e}{e} = \frac{\sin \delta_b}{b} = \frac{\sin \beta_c}{c},$$

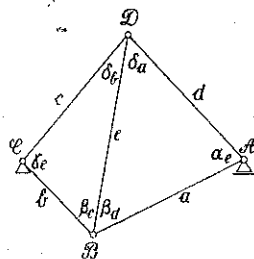
$$\beta_c = \beta_d, \quad \alpha_e = \delta_b, \quad \delta_a = \gamma_e,$$

z których znajdujemy

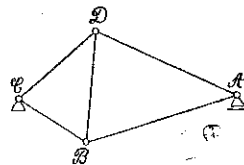
$$e = a \frac{\sin \alpha_e}{\sin \delta_a} = b \frac{\sin \delta_a}{\sin \alpha_e},$$

$$d = a \frac{\sin \beta_d}{\sin \delta_a},$$

$$c = b \frac{\sin \beta_d}{\sin \alpha_e}.$$



Rys. 75



Rys. 76

Pierwsze z tych równań daje

$$a \sin^2 \alpha_e = b \sin^2 \delta_a = b \sin^2 (\alpha_e + \beta_d)$$

lub

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha_e + 2 \operatorname{ctg} \alpha_e \operatorname{ctg} \beta_d + \operatorname{ctg}^2 \beta_d - \frac{a}{b} \operatorname{cosec}^2 \beta_d = 0.$$

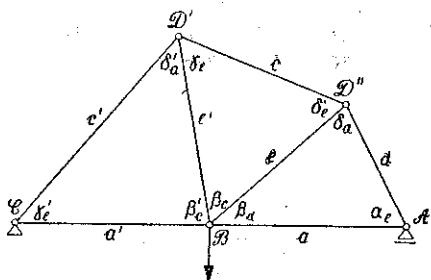
Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha_e &= -\operatorname{ctg} \beta_d + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta_d + \frac{a}{b} \frac{1}{\sin^2 \beta_d}} = \\ &= -\frac{1}{\sin^2 \beta_d} \left(\cos \beta_d - \sqrt{\cos^2 \beta_d + \frac{a}{b}} \right). \end{aligned}$$

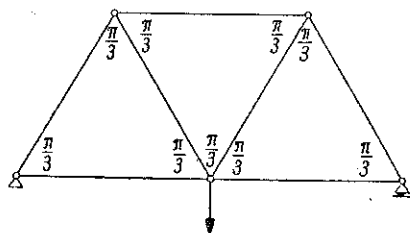
Pozostałe niewiadome wyznaczamy z poprzednio wypisanych równań.

Przykład 2. Rozpatrzmy układ o jednym węźle obciążonym w pasie dolnym, dwóch węzłach podporowych i dwóch węzłach w pasie górnym.

Jeżeli węzeł obciążony leży na jednej prostej z węzłami podporowymi, a przedziały między tymi węzłami są równe (rys. 77), to stosując twierdzenie o przesuwaniu węzłów nieobciążonych dwukrotnie, raz do układu $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{D}'\mathcal{D}''$, a drugi raz do układu $\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}'\mathcal{D}''$ widzimy, że trzy kąty zawarte między prętami zbiegającymi się w węźle \mathcal{B} powinny być sobie równe. Stąd każdy z nich równy jest $\pi/3$. Oprócz tego zachodzą równości: $\alpha_e = \delta_e = \delta'_a$, $\delta_a = \gamma_e = \gamma'_e$, a wobec symetrii układu wszystkie te kąty są sobie równe; ponieważ zaś pozostałe kąty w tych trójkątach są równe $\pi/3$, przeto wszystkie te trójkąty są równoboczne. Kształt układu o minimalnym potencjale przedstawia rys. 78.



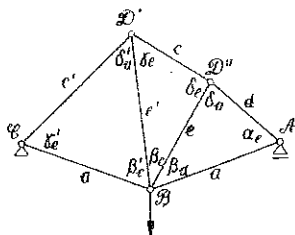
Rys. 77



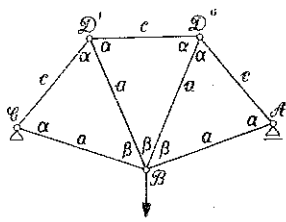
Rys. 78

Jeżeli węzeł obciążony nie leży na jednej prostej z węzłami podporowymi, a przedziały między tymi węzłami są równe (rys. 79), to stosując twierdzenie o przesuwaniu węzłów nieobciążonych raz do układu $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{D}'\mathcal{D}''$, a drugi raz do układu $\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}'\mathcal{D}''$, otrzymamy: $\beta_c = \beta_d$, $\alpha_e = \delta_e$, $\delta_a = \gamma_e$ oraz $\beta'_c = \beta_c$, $\delta'_a = \delta_e$, $\gamma'_e = \gamma_e$, czyli $\beta_c = \beta_d = \beta'_c$, $\alpha_e = \delta_e = \delta'_a$, $\delta_a = \gamma_e = \gamma'_e$, a wobec symetrii układu $\alpha_e = \delta_a = \delta_e = \gamma_e = \delta'_a = \gamma'_e = a$.

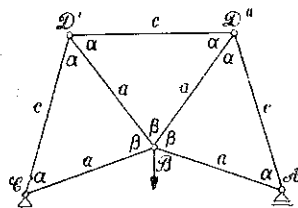
W obu przypadkach położenia węzła B węzły A, C, D', D'' leżą na okręgu zakreślonym z punktu B bez względu na to, czy węzeł B leży nad prostą AC , czy też pod tą prostą (rys. 80 i 81).



Rys. 79



Rys. 80



Rys. 81

Jeżeli w układzie o jednym węźle obciążonym w pasie dolnym, dwóch węzłach podporowych i dwóch węzłach w pasie górnym węzeł obciążony leży dowolnie, a nie w równych odstępach od węzłów podporowych (rys. 82), to układ jest niesymetryczny. Z twierdzenia o przesuwniu węzłów nieobciążonych otrzymujemy $\beta_c = \beta_a = \beta'_c$, $\alpha_e = \delta_e = \delta'_a$, $\delta_a = \gamma_e = \gamma'_e$. Do wyznaczenia niewiadomych długości boków i kątów przez a i b oraz $\beta_c + \beta_a + \beta'_c$ mamy równania

$$\frac{\sin \alpha_e}{e} = \frac{\sin \gamma_a}{a} = \frac{\sin \beta_d}{d}, \quad \frac{\sin \delta_e}{e'} = \frac{\sin \gamma_e}{e} = \frac{\sin \beta_c}{c},$$

$$\frac{\sin \delta'_a}{b} = \frac{\sin \gamma'_e}{e'} = \frac{\sin \beta'_c}{c'},$$

z których znajdujemy:

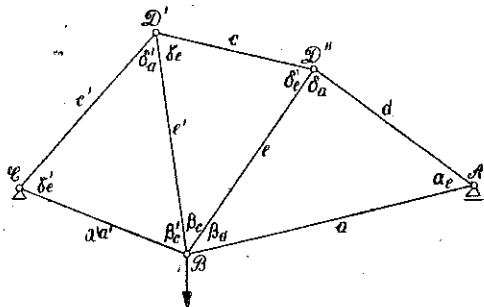
$$e = a \frac{\sin \alpha_e}{\sin \delta_a}, \quad e = e' \frac{\sin \delta_a}{\sin \alpha_e} = b \frac{\sin^2 \delta_a}{\sin^2 \alpha_e},$$

a stąd

$$a \sin^3 \alpha_e = b \sin^3 (\alpha_e + \beta_d)$$

lub

$$\operatorname{ctg}^3 \alpha_e + 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha_e \operatorname{ctg} \beta_d + 3 \operatorname{ctg} \alpha_e \operatorname{ctg}^2 \beta_d + \operatorname{ctg}^3 \beta_d - \frac{a}{b} \operatorname{cosec}^3 \beta_d = 0.$$



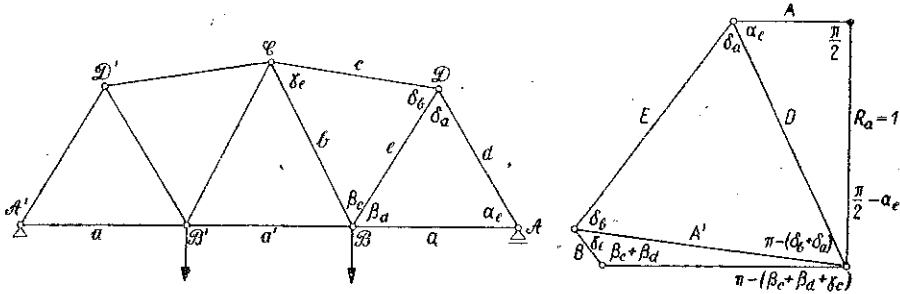
Rys. 82

Z tego równania wyznaczamy α_e przez daną wielkość β_d , następnie z poprzednio wypisanych zależności wyznaczamy pozostałe niewiadome γ'_e , δ'_a , γ_e , δ_e i δ_a .

Przykład 3. Ropatrmy kratownicę o czterech równoległych węzłach na prostym pasie dolnym i o trzech węzłach na pasie górnym, obciążoną w węzłach pasa dolnego (rys. 83).

Ze względu na symetrię położenia węzłów pasa dolnego względem prostej przechodzącej przez jego środek kratownica minimalna jest też symetryczna względem tej prostej. Wystarczy przeto znaleźć kształt dwóch jej pól trójkątnych położonych z jednej strony osi symetrii np. pól $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{D}$ i $\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}$. Ponieważ odkształcenia prętów tych pól mają różne znaki, przeto trójkąty tych pól powinny być podobne, a więc:

$$\gamma_e = \delta_a, \quad \beta_d = \beta_c, \quad \delta_b = \alpha_e.$$



Rys. 83

Długość pręta b daje się wyrazić przez długość pręta a z zależności

$$b = a \frac{\sin \alpha_e}{\sin \delta_a} = a \frac{\sin^2 \alpha_e}{\sin^2 \delta_a}.$$

Aby węzeł \mathcal{C} leżał na osi symetrii kratownicy, powinno być

$$\frac{a}{2} = b \cos [\pi - (\beta_c + \beta_d)] = -b \cos 2(\alpha_e + \delta_a).$$

Podstawiając do tego równania wartość b z poprzedniego wzoru znajdujemy

$$\sin^2 \delta_a + 2 \sin^2 \alpha_e \cos 2(\alpha_e + \delta_a) = 0.$$

Jest to zależność między kątami α_e i δ_a wynikająca z warunku minimum potencjału względem położenia węzła \mathcal{D} . Do wyznaczenia układu minimalnego należy wyznaczyć te wartości kątów, które odpowiadają minimum potencjału ze względu na położenie węzła \mathcal{C} :

$$b = a \frac{\sin^2 \alpha_e}{\sin^2 \delta_a}, \quad c = a \frac{\sin \alpha_e \sin \beta_d}{\sin^2 \delta_a}, \quad d = a \frac{\sin \beta_d}{\sin \delta_a}, \quad e = a \frac{\sin \alpha_e}{\sin \delta_a},$$

Z wieloboku sił znajdujemy bezwzględne wartości sił w prętach pod obciążeniem jednostkowym w węzłach \mathcal{B} i \mathcal{B}' :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos \alpha_e}{\sin \alpha_e}, & A' &= \frac{\sin^2 \delta_a}{\sin^2 \alpha_e \sin 2\beta_d}, & B &= \frac{\sin \delta_a \sin (2\beta_d + \delta_a)}{\sin^2 \alpha_e \sin 2\beta_d}, \\ C &= \frac{\sin \delta_a}{\sin^2 \alpha_e}, & D &= \frac{1}{\sin \alpha_e}, & E &= \frac{\sin (\alpha_e + \delta_a)}{\sin^2 \alpha_e}. \end{aligned}$$

Potencjał kratownicy wyraża się wzorem

$$\frac{2A}{\varepsilon_0} = 2Aa + 2Bb + 2Cc + 2Dd + 2Ee + A'a',$$

$$\frac{2A}{a\varepsilon_0} = \frac{2\cos\alpha_e}{\sin\alpha_e} + \frac{2\sin(2\beta_d + \delta_a)}{\sin\delta_a \sin 2\beta_d} + \frac{4\sin\beta_d}{\sin\delta_a \sin\alpha_e} + \frac{2\sin(\delta_a + \alpha_e)}{\sin\delta_a \sin\alpha_e} +$$

$$+ \frac{\sin^2\delta_a}{\sin^2\alpha_e \sin 2\beta_d} = 8\operatorname{ctg}\alpha_e + 6\operatorname{ctg}\delta_a + \frac{2\sin(2\beta_d + \delta_a)}{\sin\delta_a \sin 2\beta_d} +$$

$$+ \frac{\sin^2\delta_a}{\sin^2\alpha_e \sin 2\beta_d} = 8\operatorname{ctg}\alpha_e + 8\operatorname{ctg}\delta_a.$$

Warunek wiążący zmienne α_e i δ_a :

$$\sin^2\delta_a + 2\sin^2\alpha_e \cos 2(\alpha_e + \delta_a) = 0.$$

Funkcja pomocnicza

$$F(\alpha_e, \delta_a) = 8\operatorname{ctg}\alpha_e + 8\operatorname{ctg}\delta_a + \lambda[\sin^2\delta_a + 2\sin^2\alpha_e \cos 2(\alpha_e + \delta_a)] = 0.$$

Warunki konieczne ekstremum:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_e} = -\frac{8}{\sin^2\alpha_e} + \lambda[4\sin\alpha_e \cos\alpha_e \cos 2(\alpha_e + \delta_a) - 4\sin^2\alpha_e \sin 2(\alpha_e + \delta_a)] = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \delta_a} = -\frac{8}{\sin^2\delta_a} + \lambda[2\sin\delta_a \cos\delta_a - 4\sin^2\alpha_e \sin 2(\alpha_e + \delta_a)] = 0,$$

a po wyrugowaniu λ z tych równań otrzymamy:

$$\sin^2\delta_a(\sin\alpha_e \cos\alpha_e - \sin\delta_a \cos\delta_a) + \sqrt{4\sin^4\alpha_e - \sin^4\delta_a}(\sin^2\delta_a - \sin^2\alpha_e) = 0.$$

Równanie warunkowe $\sin^2\delta_a + 2\sin^2\alpha_e \cos 2(\alpha_e + \delta_a) = 0$ spełniają następujące wartości α_e i δ_a :

α_e	1,250,	1,260,	1,265,	1,270,	1,280,
δ_a	0,92533,	0,91835,	0,91490,	0,91145,	0,90451.

Wartościom tym odpowiadają następujące wartości potencjału zgodnie z równaniem $A/4a\varepsilon_0 = \operatorname{ctg}\alpha_e + \operatorname{ctg}\delta_a$:

1,085347,	1,085275,	1,085250,	1,085266,	1,085511.
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Najmniejszą wartość potencjału wyznacza równanie $A/4a\varepsilon_0 = 1,085248$ przy $\alpha_e = 1,2660$, $\beta_d = 0,96138$, $\delta_a = 0,91421$.

Literatura cytowana w tekście

[1] P. S. Girard, *Traité analytique de la résistance des solides et des solides d'égalé résistance*, 1798.

[2] M. Lévy, *La Statique Graphique*, Vol. 4, note I, Paryż 1907.

[3] Z. Wasiutyński, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, cz. 1-3, Akad. Nauk Techn., Warszawa 1939.

[4] Z. Wasiutyński, *O przekształcaniu kratownic przez wprowadzenie nowych prętów*, Inżyn. i Budow., 11 (1950).

[5] Z. Wasiutyński, *O przekształcaniu kratownic przez wprowadzenie nowych węzłów*, Księga Jubil. dla uczczenia zasług naukowych prof. M. T. Hubera, Gdańsk 1950.

Резюме

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФЕРМ ПУТЕМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ НЕНАГРУЖЕННОГО УЗЛА СОЕДИНЯЮЩЕГО ТРИ СТЕРЖНЯ

Целью рассмотренных преобразований ферм являются поиски таких стержневых систем, которые отвечали бы условию минимума потенциала при постоянном объеме материала.

В случае одноосного напряженного состояния и равномерного распределения напряжений в сечениях стержней, подверженных действию осевых сил, оформление для минимума потенциала, при постоянном объеме материала, эквивалентно оформлению для одинаковой прочности всех стержней (если пренебречь «коэффициентами системы» этих стержней, предполагая, что все они равняются единице). Кроме того, это оформление эквивалентно оформлению для наибольшей жесткости и оформлению для наименьшего количества материала при данном потенциале.

Разработанное преобразование является одним из трех основных преобразований, позволяющих заменить данную ферму любой другой фермой. Два остальных преобразования касаются замены стержней и введения новых узлов.

Рассмотрена изостатическая ферма, состоящая из стержней, обладающих одинаковой прочностью.

Проведенный анализ показал, что перемещение ненагруженного узла, соединяющего три стержня, вызывает снижение потенциала только пяти стержней, образующих два прилегающих треугольных поля.

Следует различать два рода систем этих стержней, отвечающих минимуму потенциала фермы. В первом из них, все стержни подвергаются деформациям одного и того же знака, а в другом — стержни подвергаются деформациям различных знаков.

В системах первого рода значение потенциала не изменяется при таком перемещении ненагруженного узла, при котором знаки деформации остаются одинаковыми. Определяется зона, внутри которой все

положения ненагруженных узлов удовлетворяют условию минимума потенциала. Перемещение узла за эту зону вызывает рост потенциала фермы.

В системах второго рода, минимум потенциала выступает при таком положении ненагруженного узла, при котором оба треугольных поля подобны между собой. Перемещение ненагруженного узла из этого положения вызывает рост потенциала фермы.

В заключение приводятся примеры оформления простых ферм, согласно указаниям, вытекающим из проведенного анализа.

Summary

ON THE TRANSFORMATION OF TRUSSES BY THE DISPLACEMENT OF A NON-LOADED NODE WITH THREE BARS

The object of the transformation under review is to obtain lattice systems satisfying the condition of minimum potential energy for constant material volume.

In the case of simple state of stress and uniform stress distribution in cross-sections of bars, subjected to axial forces, the design for minimum potential energy with constant material volume is equivalent to that for equal strength of all members (if the «structural coefficients» of bars are neglected, assuming that all of them are equal to unity), that for maximum rigidity and that for minimum material volume for a given potential energy.

The suggested transformation is one of the three fundamental transformations permitting to replace a given truss by another one. The two remaining transformations concern the exchange of bars and the introduction of new node points.

In this paper an isostatic truss composed of bars of equal strength is considered.

An analysis showed that displacements of a non-loaded node point, in which three members meet, causes potential energy changes in five bars only. These are bars which form two adjacent triangles.

Two kinds of structures corresponding to the minimum potential energy should be distinguished. In the first case the deformations of all bars are of the same sign while in the second cases they are of different signs.

In structures of the first kind the value of the potential energy does not vary if a non-loaded node point is shifted in such a manner that the signs of deformations of the bars remain the same. The region, in which all positions of the non-loaded node point satisfy the minimum potential energy condition, is determined.

If the node point is moved to a point outside this region, the potential energy increases.

In systems of the second kind the minimum value of the potential energy is reached in the position of the non-loaded node point in which the two triangles are similar. If the node point is moved from this position, the potential energy of the truss increases.

In conclusion some examples of design of simple trusses are given, according to the rules of this investigations.

ZARŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH
PRACOWNIA KSZTAŁTOWANIA WYTRZYMAŁOŚCIOWEGO
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 września 1955 r.