

MICHAŁ ŻYCKOWSKI

NOŚNOŚĆ GRANICZNA NIEJEDNORODNYCH  
WIRUJĄCYCH TARCZ KOŁOWYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
LXIII

## SPIS TREŚCI

	Str.
Wykaz ważniejszych oznaczeń	51
1. Uwagi ogólne	52
2. Równania podstawowe	55
3. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia w oparciu o hipotezę największych naprężeń stycznych	58
4. Sformułowanie zagadnienia w oparciu o hipotezę energii odkształcenia postaciowego	67
5. Zastosowanie metody «założenia rozwiązania ścisłego» do przypadku bezpośredniego rugowania	68
6. Przedstawianie naprężeń w postaci trygonometrycznej w przypadku ośrodków plastycznie niejednorodnych	78
7. Zastosowanie metody założenia rozwiązania ścisłego do przypadku przedstawienia naprężeń w postaci trygonometrycznej	81
8. Nośność graniczna wirującej tarczy plastycznie jednorodnej	83
9. Obliczenie odkształceń tarcz wirujących	87
10. Uwagi końcowe	92

### Wykaz ważniejszych oznaczeń

- $B$  średnie odchylenie kwadratowe funkcji,  
 $K$  moduł ściśliwości,  
 $N$  jednostkowe siły podłużne w tarczy (z odpowiednimi wskaźnikami),  
 $Q$  granica plastyczności materiału tarczy,  
 $Q'$  granica plastyczności przy ściskaniu (materiału kruchego),  
 $R$  promień zewnętrzny tarczy,  
 $f^{(n)}$  wartość średnia funkcji  $f(x)$  w przedziale  $(0,1)$ , obliczona z wagą  $p_n(x)$ , (3.14),  
 $g$  przyspieszenie ziemskie,  
 $h$  grubość tarczy,  
 $k = Q/Q_0$  bezwymiarowa granica plastyczności,  
 $r$  promień, współrzędna walcowa,  
 $s = \sigma/Q_0$  } bezwymiarowe naprężenia (z odpowiednimi wskaźnikami),  
 $s = \tau\sqrt{3}/Q_0$  }  
 $u$  przemieszczenie promieniowe,  
 $w$  bezwymiarowa wielkość, proporcjonalna do kwadratu granicznej prędkości kątowej  $\omega$ ,  
 $a_i, a, \beta, a, b$  parametry początkowo nieoznaczone,  
 $\gamma$  ciężar właściwy materiału tarczy,  
 $\gamma$  odkształcenia kątowe (z odpowiednimi wskaźnikami),  
 $\delta$  kąt odchylenia wektora intensywności naprężeń stycznych,  
 $\varepsilon$  odkształcenia liniowe (z odpowiednimi wskaźnikami),  
 $\Theta$  kąt, współrzędna walcowa,  
 $\alpha = \gamma/\gamma_0$  bezwymiarowy ciężar właściwy,

- $\lambda$  bezwymiarowa wielkość proporcjonalna do  $w$ ,
- $\nu$  współczynnik Poissona,
- $\varrho = r/R$  bezwymiarowy promień,
- $\varrho^*$  bezwymiarowy promień graniczny oddzielający strefy różnych sformułowań matematycznych warunku plastyczności,
- $\sigma$  naprężenia normalne (z odpowiednimi wskaźnikami),
- $\sigma_m$  średnie naprężenie normalne,
- $\tau$  naprężenia styczne (z odpowiednimi wskaźnikami),
- $\varphi$  funkcja charakteryzująca zaawansowanie odkształceń plastycznych,
- $\xi, \eta$  zmienne całkowania,
- $\omega$  graniczna prędkość kątowna.

Wskaźnikami 0 i 1 oznaczono wielkości mierzone odpowiednio w środku i na brzegu tarczy,  $\varrho = 0$  i  $\varrho = 1$ .

#### 1. Uwagi ogólne \*

Szeroko rozwijająca się ostatnio teoria niejednorodności plastycznej posiada poważne znaczenie praktyczne. Niejednorodność taką, charakteryzującą się przede wszystkim zależnością granicy plastyczności materiału  $Q$  od położenia punktu  $P = P(x, y, z)$  ciała, wykazują bowiem z reguły elementy poddane obróbce cieplnej (hartowaniu, a zwłaszcza nawęglaniu i hartowaniu powierzchniowemu), a także elementy wykonywane na drodze obróbki plastycznej oraz większość elementów wykonywanych za pomocą obróbki skrawaniem.

W pracy niniejszej zajmiemy się obliczaniem nośności granicznej kołowych tarcz jednostajnie wirujących, wykonanych z materiału plastycznie niejednorodnego. Będziemy więc poszukiwali prędkości kątovej  $\omega$ , przy której nastąpi uplastycznienie całej tarczy. Założymy przy tym, że materiał jest idealnie plastyczny, czyli pominiemy wpływ wzmocnienia plastycznego. Typ niejednorodności ograniczymy do przypadku kołowo symetrycznego, występującego najczęściej w praktyce. Założymy więc, że we współrzędnych biegunowych płaskich  $r, \theta$  granica plastyczności jest funkcją jedynie promienia  $Q = Q(r)$ . Zastosowanie praktyczne znajdują zarówno tarcze, dla których funkcja  $Q = Q(r)$  jest funkcją rosnącą

\* Praca przedstawiona na konferencji naukowej Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Karpaczu w sierpniu 1955 r.

(do tego typu należy zaliczyć tarcze o hartowanym brzegu), jak również i tarcze, dla których funkcja ta jest funkcją malejącą — tarcze w stanie naturalnym plastycznie jednorodne, poddane działaniu temperatury większej na brzegu tarczy niż w środku<sup>1</sup> (turbiny parowe i spalinowe).

Niejednorodność tarczy w przypadku ogólnym będziemy charakteryzowali również kołowo symetryczną zmiennością ciężaru właściwego materiału tarczy,  $\gamma = \gamma(r)$ . Nie będziemy się natomiast interesowali zmiennością modułów sprężystych materiału — modułu Younga  $E$  i współczynnika Poissona  $\nu$  — ponieważ wielkości te nie wpływają na nośność tarczy.

Wypada tu zaznaczyć, że ciężaru właściwego  $\gamma$  nie można uważać ani za moduł sprężysty, ani plastyczny.

W przypadku ogólnym na rozkład naprężeń i odkształceń wpływają — oprócz modułów sprężystych i plastycznych — również inne stałe materiałowe, jak np. ciężar właściwy materiału (moduł «masowy»), współczynnik rozszerzalności cieplnej lub nawet współczynnik przewodnictwa cieplnego (moduły «cieplne»). Dla celów klasyfikacji ośrodków niejednorodnych wielkości tego typu można by nazwać — z punktu widzenia teorii sprężystości i plastyczności — modułami «ubocznymi». Podaną przez W. Olszaka w pracy [13] klasyfikację ośrodków sprężysto-plastycznych niejednorodnych można by więc rozszerzyć przez wprowadzenie możliwości zmiany modułów «ubocznych» od punktu do punktu rozpatrywanego ciała; zmiana ta może być bądź sprzężona ze zmianą modułów sprężystych lub plastycznych, bądź też od niej niezależna.

W naszych rozważaniach będziemy przyjmowali, że granica plastyczności  $Q$  i ciężar właściwy  $\gamma$  materiału tarczy zmieniają się wzdłuż promienia niezależnie od siebie.

Przy rozpatrywaniu nośności granicznej tarcz wirujących mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia w płaszczyźnie  $r, \theta$ .

W przypadku tarcz o grubości zmiennej  $h = h(r)$  mamy do czynienia ze stanem naprężenia, zwanym przez niektórych autorów quasi-płaskim, bowiem w rzeczywistości istnieją wtedy (niewielkie) naprężenia  $\tau_{rz}$  o wielkości rzędu pochodnej  $dh/dr$  i  $\sigma_z$  [rzędu  $(dh/dr)^2$ ].

Wpływ tych naprężeń będziemy pomijali.

Przyjmujemy, że tarcza posiada płaszczyznę symetrii prostopadłą do swej osi, co pozwoli założyć równomierność rozkładu naprężeń na grubości tarczy. W przeciwieństwie do przypadku płaskiego stanu odkształcenia — gdzie formułowanie warunku plastyczności w oparciu o obie najczęściej stosowane hipotezy wytężeniowe, mianowicie hipotezę energii

<sup>1</sup> Szczególny przykład obliczenia takiej tarczy podaje A. D. Kowalenko, [6], przy założeniu, że nierównomierny rozkład temperatury wpływa jedynie na zmianę granicy plastyczności, natomiast nie powoduje dodatkowych obciążeń cieplnych.

odkształcenia postaciowego Hubera-Misesa-Hencky'ego i hipotezę największych naprężeń stycznych Tresca-Guesta, nie powoduje istotnych różnic — w przypadku płaskiego stanu naprężenia różnice te są istotne.

Większość spotykanych w literaturze rozwiązań problemu nośności granicznej wirującej tarczy plastycznie jednorodnej korzysta z warunku plastyczności, opartego o hipotezę największych naprężeń stycznych. Otrzymuje się bowiem wtedy tak dalekie uproszczenie rozwiązań (wobec  $0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta$ ), że hipotezą tą posługują się nie tylko ci autorzy, którzy skłonni są przyznać jej pierwszeństwo przed hipotezą energii odkształcenia postaciowego, lecz również ci, którzy uważają hipotezę największych naprężeń stycznych jedynie za pewne przybliżenie hipotezy energii odkształcenia postaciowego.

Niektórzy autorzy, np. A. Nádai, [11], dla zmniejszenia różnic między wspomnianymi hipotezami przyjmują warunek plastyczności nie w postaci

$$(1.1) \quad \sigma_\theta = Q$$

(słusznej w myśl hipotezy największych naprężeń stycznych przy założeniu  $0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta$ ), lecz w postaci

$$(1.2) \quad \sigma_\theta = 1,077 Q,$$

gdzie 1,077 jest średnią arytmetyczną między 1 i  $2/\sqrt{3}$ . (O warunku tym wspomina również W. W. Sokołowski, [22]). Wiadomo bowiem, że przy założeniu warunku plastyczności w postaci Hubera-Misesa-Hencky'ego i przy spełnianiu nierówności  $0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta$  naprężenie  $\sigma_\theta$  musi być zawarte w przedziale  $Q \leq \sigma_\theta \leq 2Q/\sqrt{3}$ .

Warunek (1.2) wygodny, lecz pozbawiony interpretacji fizycznej, będziemy nazywali zmodyfikowanym warunkiem stałości największych naprężeń stycznych. Jak zobaczymy, w przypadku tarcz wirujących wyniki obliczeń, opartych o zmodyfikowaną hipotezę największych naprężeń stycznych, zazwyczaj bardzo nieznacznie odbiegają od wyników uzyskanych w oparciu o hipotezę energii odkształcenia postaciowego.

W pracy niniejszej podamy przede wszystkim metodę sprowadzania obliczeń nośności granicznej tarcz o zmiennej grubości do obliczeń tarcz o grubości stałej przy odpowiednio zmienionej niejednorodności materiału tarczy. Nośność tę obliczymy najpierw w oparciu o hipotezę największych naprężeń stycznych. Wskażemy następnie na pewne ograniczenia stosowalności uzyskanego rozwiązania i, w drugiej fazie, oprzemy się na warunku plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego. Warunek ten będziemy wykorzystywali bądź bezpośrednio, bądź też przez przedsta-

wienie naprężeń w postaci trygonometrycznej. Zajmiemy się wreszcie obliczaniem odkształceń plastycznych tarcz jednostajnie wirujących opierając się przy tym na teorii plastyczności Hencky'ego-Iljuszina.

## 2. Równania podstawowe

Kompletne rozwiązanie postawionego problemu będzie polegało na znalezieniu dwóch składowych stanu naprężenia  $\sigma_r$  i  $\sigma_\theta$  (bowiem łatwo przewidzieć, że — wobec założenia jednostajnego ruchu wirowego tarczy — naprężenie styczne  $\tau_{r\theta} = 0$ ), trzech składowych stanu odkształcenia  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  i  $\varepsilon_z$ , funkcji  $\varphi$  charakteryzującej zaawansowanie odkształceń plastycznych, wreszcie granicznej prędkości kątowej  $\omega$ . Do obliczania tych siedmiu niewiadomych dysponujemy zasadniczo tylko sześciu równaniami. Są to: równanie równowagi wewnętrznej, które w przypadku tarczy o stałej grubości posiada postać

$$(2.1) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r = 0,$$

warunek plastyczności w postaci ogólnej

$$(2.2) \quad f(\sigma_r, \sigma_\theta) = Q,$$

dwa spośród trzech równań Hencky'ego-Iljuszina zmiany postaci (jak wiadomo, te trzy równania wiążące naprężenia normalne  $\sigma$  i wydłużenia względne  $\varepsilon$  nie są niezależne)

$$(2.3) \quad \varepsilon_r - \varepsilon_z = \varphi \sigma_r, \quad \varepsilon_\theta - \varepsilon_z = \varphi \sigma_\theta;$$

prawo zmiany objętości, przyjmowane przez wszystkie teorie plastyczności w postaci

$$(2.4) \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{1}{3K} (\sigma_r + \sigma_\theta)$$

(gdzie  $K$  oznacza moduł ściśliwości), oraz równanie nierozdzielności

$$(2.5) \quad \varepsilon_r = \frac{d}{dr} (r \varepsilon_\theta).$$

Prawo zmiany objętości przyjmuje, że ściśliwość ośrodka ma charakter liniowo-sprężysty; przez przyjęcie  $K = \infty$  możemy stąd otrzymać szczególny, znacznie zazwyczaj prostszy do ujęcia matematycznego, przypadek ośrodka nieściśliwego.

Obliczenie siódmej niewiadomej jest możliwe dzięki temu, że do powyższego układu sześciu równań, wymagającego dwóch warunków brze-

gowych, dołączone są trzy warunki. Są to, zazwyczaj, dwa warunki dla naprężeń — mianowicie, w przypadku tarcz pełnych bez otworu wewnętrznego (jakimi wyłącznie będziemy się zajmować)

$$(2.6) \quad \begin{cases} \sigma_r = \sigma_\theta & \text{dla } r = 0, \\ \sigma_r = 0 & \text{dla } r = R, \end{cases}$$

gdzie  $R$  oznacza promień zewnętrzny, oraz jeden warunek dla przemieszczeń (lub odkształceń), konieczny dla określenia odkształceń w całkowicie uplastycznionej tarczy, w której mamy do czynienia z «niewstrzymywanym płynięciem plastycznym», na przykład

$$(2.7) \quad u = u_1 \quad \text{dla } r = R,$$

gdzie  $u$  oznacza przemieszczenie promieniowe. Jeden z powyższych warunków możemy więc traktować jako brakujące siódme równanie, zezwalające na obliczenie siódmej niewiadomej — granicznej prędkości kątowej  $\omega$ .

Uzyskany układ siedmiu równań o siedmiu niewiadomych ma szczególną własność: pierwsze dwa równania (2.1) i (2.2), wymagające tylko jednego warunku brzegowego, wraz z dwoma warunkami brzegowymi (2.6), stanowią właściwie układ trzech równań, który zawiera tylko trzy niewiadome  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  i  $\omega$ , a więc który daje się rozwiązać bez pomocy czterech równań pozostałych. Własność tę nazywa się zazwyczaj «wewnętrzną statyczną wyznaczalnością» układu. Nie można stąd jednak wyciągać wniosku, jakoby pozostałe równania, zwłaszcza równanie nierozdzielności (2.5), nie były potrzebne; muszą one zawsze być spełnione, lecz wykorzystujemy je dopiero przy obliczeniu odkształceń.

Układ dwóch pierwszych równań (2.1) i (2.2) z warunkami brzegowymi (2.6) posiada jeszcze inną, bardzo ważną własność: nie występują w nim równania prawa zmiany postaci, rozróżniające poszczególne teorie plastyczności: Hencky'ego-Iljuszina, Prandtl'a-Reussa, Levy'ego-Misesa i inne. Tak więc rozkład naprężeń i graniczna prędkość kątowa zależą będą jedynie od przyjętego warunku plastyczności, natomiast nie będą zależały od przyjętej teorii plastyczności.

W naszych rozważaniach będziemy przede wszystkim zajmowali się obliczeniem prędkości granicznej i rozkładem naprężeń, poświęcimy jednak również nieco uwagi obliczeniu odkształceń — wykorzystamy wtedy równania (2.3), (2.4) i (2.5) oraz warunek brzegowy (2.7).

Wykażemy teraz, że przy pewnych dość słabych założeniach dotyczących postaci warunku plastyczności obliczenie nośności granicznej tarcz o grubości zmiennej można sprowadzić do obliczenia nośności tarcz o grubości stałej, lecz o odpowiednio zmienionej niejednorodności materiału.



W przypadku tarcz o kołowo symetrycznie zmiennej grubości  $h = h(r)$  należy równanie równowagi wewnętrznej (2.1) zastąpić przez <sup>2</sup>

$$(2.8) \quad \frac{d}{dr} (h \sigma_r) + \frac{h (\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r h = 0.$$

Warunek plastyczności — wobec założenia quasi-płaskiego stanu naprężenia — możemy tu również zapisać w postaci (2.2); warunki brzegowe (2.6) nie ulegną zmianie. Oznaczając jednostkowe siły podłużne przez  $N^3$

$$(2.9) \quad h \sigma_r = N_r, \quad h \sigma_\theta = N_\theta,$$

będziemy mogli zapisać układ równań (2.8) i (2.2) następująco:

$$(2.10) \quad \frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + \frac{\gamma h}{g} \omega^2 r = 0,$$

$$(2.11) \quad f\left(\frac{N_r}{h}, \frac{N_\theta}{h}\right) = Q$$

z warunkami brzegowymi wynikającymi z (2.6):

$$(2.12) \quad \begin{cases} N_r = N_\theta & \text{dla } r = 0, \\ N_r = 0 & \text{dla } r = R. \end{cases}$$

Założymy teraz, że występująca w warunku plastyczności funkcja  $f$  jest funkcją jednorodną pierwszego stopnia jednorodności wszystkich swoich argumentów. Jest to założenie bardzo słabe, bowiem własność tę powinien posiadać każdy warunek plastyczności, a w każdym razie posiadają ją najczęściej stosowane warunki plastyczności, oparte na hipotezach energii odkształcenia postaciowego, największych naprężeń stycznych, niezmienników Burzyńskiego i inne.

Należy tu przy okazji zaznaczyć, że własność ta jest nie zawsze od razu widoczna. Na przykład warunek plastyczności oparty na hipotezie O. Mohra ma postać

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (Q' - Q)(\sigma_1 + \sigma_3) = QQ',$$

gdzie  $Q$  oznacza granicę plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu,  $Q'$  przy jednoosiowym ściskaniu. Wystarczy jednak oznaczyć  $Q'/Q = \Psi$  i zapisać warunek w postaci (2.2), mianowicie

$$\frac{(\Psi - 1)(\sigma_1 + \sigma_3) + \sqrt{(\Psi - 1)^2(\sigma_1 + \sigma_3)^2 + 4\Psi(\sigma_1 - \sigma_3)^2}}{2\Psi} = Q,$$

by wymagana jednorodność była widoczna.

<sup>2</sup> Por. np. S. D. Ponomariew i inni, [18], s. 36.

<sup>3</sup> Oznaczenie takie stosuje np. A. D. Kowalenko, [6].

Jednorodność tę wykazuje również znaczna większość warunków plastyczności omawianych w pracy Filonienki-Borodicza, [2]. Nie wszystkie warunki plastyczności dadzą się jednak przedstawić w postaci (2.2) za pomocą funkcji elementarnych.

W takim razie zamiast (2.11) możemy napisać

$$(2.13) \quad f(N_r, N_\theta) = Qh,$$

co pozwala stwierdzić pełną analogię między układem równań (2.1) i (2.2) z warunkami brzegowymi (2.6), a układem równań (2.10) i (2.13) z warunkami brzegowymi (2.12), w którym rolę  $\gamma$  spełnia iloczyn  $\gamma h$ , a rolę  $Q$  iloczyn  $Qh$ .

W pracy będziemy się więc zajmowali jedynie tarczami o stałej grubości nie ograniczając tym jednak ogólności rozważań.

### 3. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia w oparciu o hipotezę największych naprężeń stycznych

Rozwiązanie zagadnienia nośności granicznej plastycznie niejednorodnych tarcz wirujących, oparte na hipotezie największych naprężeń stycznych, jest zasadniczo znane. Podaje je M. S. Mikieladze, [9], co prawda dla przypadku stałego ciężaru właściwego  $\gamma$ , lecz dla tarcz o zmiennej grubości, co — jak stwierdziliśmy w p. 2 — można uważać za rozwiązanie równoważne. Mikieladze przytacza wzory na rozkład naprężeń, nie podaje jednak efektywnego wzoru na graniczną prędkość kątową, nie omawia również zakresu ważności uzyskanego rozwiązania.

Postaramy się teraz uzupełnić rozwiązanie Mikieladzego i określić zakres stosowalności uzyskanych wzorów. Będziemy przy tym, jak zwykle, zakładali dla uproszczenia, że tarcza ma stałą grubość, a granica plastyczności  $Q$  i ciężar właściwy  $\gamma$  zmieniają się wzdłuż promienia  $r$ , co jednak umożliwi bezpośrednie zastosowanie otrzymanych wzorów do tarcz o grubości zmiennej.

Jak wiadomo, warunek plastyczności oparty na hipotezie największych naprężeń stycznych może posiadać — w przypadku płaskiego stanu naprężenia scharakteryzowanego naprężeniami głównymi  $\sigma_r$  i  $\sigma_\theta$  — sześć różnych postaci:

$$(3.1.1) \quad \sigma_\theta = Q, \quad \text{gdy} \quad 0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta,$$

$$(3.1.2) \quad \sigma_\theta - \sigma_r = Q, \quad \text{gdy} \quad \sigma_r \leq 0 \leq \sigma_\theta,$$

$$(3.1.3) \quad -\sigma_r = Q, \quad \text{gdy} \quad \sigma_r \leq \sigma_\theta \leq 0,$$

$$(3.1.4) \quad \sigma_r = Q, \quad \text{gdy} \quad 0 \leq \sigma_\theta \leq \sigma_r,$$

$$(3.1.5) \quad \sigma_r - \sigma_\theta = Q, \quad \text{gdy} \quad \sigma_\theta \leq 0 \leq \sigma_r,$$

$$(3.1.6) \quad -\sigma_\theta = Q, \quad \text{gdy} \quad \sigma_\theta \leq \sigma_r \leq 0.$$

Rozwiązanie zagadnienia opartego na hipotezie największych naprężeń stycznych jest szczególnie proste w tym przypadku, gdy kierunki główne naprężeń w każdym punkcie ciała pokrywają się z kierunkami przyjętego układu odniesienia, a ponadto, gdy możemy *a priori* przewidzieć, że zastosowanie znajdzie tylko jedna z wymienionych postaci warunku plastyczności. Pierwsza z wymienionych cech stanu naprężenia jest w naszym przypadku oczywiście spełniona. Jeżeli chodzi o drugą cechę, to wiadomo na przykład, że w przypadku wirującej tarczy jednorodnej o stałej grubości w każdym punkcie mamy  $0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta$ , więc warunek plastyczności ma postać (3.1.1). Przyjmijmy najpierw, że również i w przypadku tarczy niejednorodnej założenie to jest spełnione, a następnie zbadamy zakres stosowalności uzyskanego rozwiązania.

Podstawiając (3.1.1) do równania równowagi wewnętrznej (2.1) otrzymujemy do scałkowania liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$(3.2) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - Q}{r} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r = 0.$$

Przed przystąpieniem do całkowania tego równania sprowadzimy je do postaci bezwymiarowej, co pozwoli później znacznie uprościć zapis. Wprowadzimy mianowicie bezwymiarową zmienną

$$(3.3) \quad \varrho = \frac{r}{R},$$

bezwymiarowy ciężar właściwy

$$(3.4) \quad \kappa = \kappa(\varrho) = \frac{\gamma}{\gamma_0},$$

bezwymiarową granicę plastyczności

$$(3.5) \quad k = k(\varrho) = \frac{Q}{Q_0}$$

oraz bezwymiarowe naprężenia

$$(3.6) \quad \frac{\sigma_r}{Q_0} = s_r, \quad \frac{\sigma_\theta}{Q_0} = s_\theta.$$

Ponadto przez  $w$  oznaczymy nową bezwymiarową niewiadomą proporcjonalną do kwadratu granicznej prędkości kątowej  $\omega$ :

$$(3.7) \quad w = \frac{\gamma_0 \omega^2 R^2}{g Q_0}.$$

W powyższych wzorach wskaźnikiem 0 oznaczono wielkości mierzone w środku tarczy ( $\varrho = 0$ ). Współczynnik proporcjonalności we wzorze (3.7) dobrany jest tak, by zachodziła równość  $w = 1$  przy uplastycznieniu wiru-

jącego cienkiego pierścienia kołowego o średnim promieniu  $R$ ; przyjęcie takie ułatwi porównanie nośności tarczy pełnej z nośnością pierścienia.

Równanie (3.2) przybierze teraz postać

$$(3.8) \quad \varrho s_r' + s_r = k - w \varrho^2 \kappa,$$

gdzie przecinkiem u góry oznaczono różniczkowanie względem zmiennej  $\varrho$ . Całką ogólną tego równania jest

$$(3.9) \quad s_r = \frac{1}{\varrho} \int_{\varrho_0}^{\varrho} k(\xi) d\xi - \frac{w}{\varrho} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \kappa(\xi) \xi^2 d\xi,$$

przy czym  $\xi$  jest zmienną całkowania.

Dzięki znajomości dwóch warunków brzegowych będziemy teraz mogli wyznaczyć stałą  $\varrho_0$  i niewiadomą wartość parametru  $w$ . Warunki (2.6) zapiszemy mianowicie w postaci

$$(3.10) \quad \begin{cases} s_r = s_{\varrho} & \text{dla } \varrho = 0, \\ s_r = 0 & \text{dla } \varrho = 1, \end{cases}$$

a wobec przyjętego warunku plastyczności (3.1.1.) i oznaczeń (3.5) i (3.6) możemy napisać jeszcze prościej

$$(3.11) \quad \begin{cases} s_r = 1 & \text{dla } \varrho = 0, \\ s_r = 0 & \text{dla } \varrho = 1. \end{cases}$$

Z pierwszego warunku, wobec oczywistych dzięki oznaczeniom (3.4) i (3.5) związków

$$(3.12) \quad \kappa(0) = 1, \quad k(0) = 1,$$

wynika  $\varrho_0 = 0$ , a podstawienie drugiego warunku brzegowego daje

$$0 = \int_0^1 k(\xi) d\xi - w \int_0^1 \kappa(\xi) \xi^2 d\xi.$$

Ponieważ granice całkowania zostały teraz ustalone, będziemy mogli zamiast zmiennej całkowania  $\xi$  napisać  $\varrho$ . Wzór ogólny określający kwadrat granicznej prędkości kątowej, a więc nośność graniczną tarczy, przybierze postać

$$(3.13) \quad w = \frac{\int_0^1 k(\varrho) d\varrho}{\int_0^1 \kappa(\varrho) \varrho^2 d\varrho}.$$

Przypomnijmy tutaj, że zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w p. 2, w przypadku tarczy o grubości zmiennej wystarczy w powyższym

wzorro zastąpić funkcję  $k(\rho)$  przez iloczyn  $k(\rho)h(\rho)$ , a funkcję  $\kappa(\rho)$  przez iloczyn  $\kappa(\rho)h(\rho)$ .

Wzór (3.13) można zapisać znacznie prościej. W tym celu wprowadzimy pewne nowe oznaczenia. Przez  $\bar{f}_{(n)}$  oznaczymy mianowicie wartość średnią funkcji w przedziale (0,1), obliczoną z wagą

$$(3.14) \quad p_{(n)}(x) = (n+1)x^n,$$

czyli

$$(3.15) \quad \bar{f}_{(n)} = (n+1) \int_0^1 f(x)x^n dx.$$

Współczynnik wagi (3.14) dobrany jest tak, by spełniała ona wymaganą zależność:

$$(3.16) \quad \int_0^1 p_{(n)}(x) dx = 1.$$

Zamiast (3.13) napiszemy zatem

$$(3.17) \quad w = 3 \frac{\bar{k}_{(0)}}{\kappa_{(2)}}.$$

W przypadku jednorodnej tarczy o stałej grubości  $k = 1 = \text{const}$  oraz  $\kappa = 1 = \text{const}$ , więc wartość średnia tych funkcji obliczona z dowolną wagą jest też równa jedności, i ze wzoru (3.17) otrzymujemy  $w = 3$ . Oznacza to, że — przy przyjęciu hipotezy największych naprężeń stycznych — graniczna prędkość kątowna pełnej tarczy kołowej o promieniu zewnętrznym  $R$  przewyższa  $\sqrt{3} = 1,732$  razy graniczną prędkość kątową pierścienia cienkościennego o średnim promieniu  $R$ .

W często spotykanym w praktyce przypadku tarczy o stałej grubości i o stałym ciężarze właściwym, lecz o zmiennej granicy plastyczności, że wzoru (3.17) otrzymujemy

$$(3.18) \quad w = 3 \bar{k}_{(0)}.$$

Średnia  $\bar{k}_{(0)}$  jest zwykłą wartością średnią funkcji  $k(\rho)$  na długości promienia. Wypływa stąd wniosek, że tarcze o tej samej średniej granicy plastyczności (liczonej wzdłuż promienia, a nie po powierzchni tarczy) posiadają tę samą nośność. Wniosek ten jednak nie ma charakteru ogólnego: po pierwsze, jest słuszny jedynie przy hipotezie największych naprężeń stycznych — w przypadku innej hipotezy będzie słuszny, jak zobaczymy, jedynie w przybliżeniu; po drugie, jest słuszny wtedy, gdy oparty na hipotezie największych naprężeń stycznych warunek plastyczności ma postać (3.1.1), a więc gdy w każdym punkcie tarczy spełniona jest nierówność  $0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta$ , co ma miejsce jedynie przy pewnych typach niejednorodności.

Poświęcimy jeszcze chwilę uwagi zmodyfikowanej hipotezie największych naprężeń stycznych, by porównać następnie jej wyniki z wynikami opartymi na hipotezie energii odkształcenia postaciowego. Podstawiając zamiast  $Q$  wartość  $1,077 Q$  otrzymujemy wzór określający nośność graniczną

$$(3.19) \quad w = 3,231 \frac{\bar{k}_{(0)}}{\kappa_{(2)}},$$

z którego wynika, między innymi, że — w myśl tej hipotezy — graniczna prędkość kątowna pełnej tarczy kołowej przewyższa  $\sqrt{3,231} = 1,797$  razy graniczną prędkość odpowiedniego pierścienia cienkościennego.

Podstawą dotychczasowych naszych rozważań było założenie, że spełniona jest nierówność  $0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta$ . Podwójną tę nierówność rozbijemy teraz na dwie pojedyncze zapisując je w postaci bezwymiarowej następująco:

$$(3.20.1) \quad s_r \geq 0,$$

$$(3.20.2) \quad s_r \leq s_\theta$$

i poddamy szczegółowej analizie. Podamy mianowicie pewne warunki konieczne i pewne warunki wystarczające dla spełniania powyższych nierówności ustalając tym samym zakres stosowalności uzyskanego rozwiązania.

Podstawienie (3.13) do (3.9) pozwala określić rozkład naprężeń w tarczy za pomocą wzorów

$$(3.21) \quad \begin{cases} s_r = \frac{1}{\varrho} \int_0^{\varrho} k(\xi) d\xi - \frac{\int_0^1 k(\varrho) d(\varrho)}{\varrho \int_0^{\varrho} \kappa(\varrho) \varrho^2 d\varrho} \int_0^{\varrho} \kappa(\xi) \xi^2 d\xi, \\ s_\theta = k(\varrho). \end{cases}$$

Warunek (3.20.1) możemy teraz zapisać następująco:

$$(3.22) \quad \int_0^1 \kappa(\varrho) \varrho^2 d\varrho \cdot \int_0^{\varrho} k(\xi) d\xi - \int_0^1 k(\varrho) d\varrho \cdot \int_0^{\varrho} \kappa(\xi) \xi^2 d\xi \geq 0.$$

Całki oznaczone w granicach od 0 do 1 rozbijemy teraz według schematu

$$\int_0^1 = \int_0^{\varrho} + \int_{\varrho}^1.$$

Pamiętając, że całka oznaczona nie zależy od zmiennej całkowania, będziemy mogli następnie z występujących czterech składników zredukować dwa i zamiast (3.22) napisać

$$(3.23) \quad \int_{\varrho}^1 \kappa(\eta) \eta^2 d\eta \cdot \int_0^{\varrho} k(\xi) d\xi - \int_{\varrho}^1 k(\eta) d\eta \cdot \int_0^{\varrho} \kappa(\xi) \xi^2 d\xi \geq 0.$$

W nierówności tej  $\eta$  oznaczają drugą zmienną całkowania, bowiem tym razem w każdej całce jedna z granic jest zmienna. Iloczynny całek zamienimy na całkę podwójną po prostokącie w płaszczyźnie  $\xi, \eta$ :

$$\int_{\varrho}^1 d\eta \int_0^{\eta} \{ \kappa(\eta) \eta^2 k(\xi) - k(\eta) \kappa(\xi) \xi^2 \} d\xi \geq 0$$

lub inaczej

$$(3.24) \quad \int_{\varrho}^1 d\eta \int_0^{\eta} \left\{ k(\xi) k(\eta) \left[ \frac{\kappa(\eta) \eta^2}{k(\eta)} - \frac{\kappa(\xi) \xi^2}{k(\xi)} \right] \right\} d\xi \geq 0.$$

Nierówność ta ma być spełniona dla każdej wartości  $\varrho$  z przedziału  $(0, 1)$ . Granice całki podwójnej mają jednak tę własność, że bez względu na dobór  $\varrho$  w każdym punkcie obszaru całkowania  $\eta \geq \xi$ , co umożliwi podanie pewnego warunku wystarczającego dla spełnienia nierówności (3.24), a zatem i nierówności (3.20.1). Wystarczy mianowicie, by funkcja

$$(3.25) \quad f(\varrho) = \frac{\kappa(\varrho) \varrho^2}{k(\varrho)},$$

była funkcją rosnącą. Wtedy funkcja podcałkowa w całce podwójnej nierówności (3.24) posiada w każdym punkcie obszaru całkowania wartość nieujemną i nierówność (3.24) jest spełniona bez względu na dobór  $\varrho$ . Na przykład w przypadku tarczy o stałej grubości i o stałym ciężarze właściwym warunek monotonicznego wzrostu funkcji (3.25) możemy zapisać w postaci

$$(3.26) \quad \frac{k'(\varrho)}{k(\varrho)} \leq \frac{2}{\varrho}.$$

Wniosek tkwiący w nierówności tej orientacyjnie możemy ująć następująco: granica plastyczności nie może zbyt szybko rosnać wzdłuż promienia, jeśli wyprowadzone poprzednio wzory na rozkład naprężeń i graniczną prędkość kątową mają być słuszne. Dla przykładu podamy, że funkcja

$$(3.27) \quad k(\varrho) = 1 + \varrho^2$$

spełnia jeszcze warunek (3.26), natomiast szybciej rosnąca funkcja

$$(3.28) \quad k(\varrho) = 1 + 6\varrho^4$$

nie spełnia go we wszystkich punktach  $\varrho$  przedziału  $(0, 1)$ . Jak zobaczymy zaraz, funkcja (3.28) nie tylko nie spełnia warunku wystarczającego (3.26), lecz również nie spełnia pewnego warunku koniecznego, więc przy takim rozkładzie granicy plastyczności wyprowadzone poprzednio wzory nie będą słuszne.

Pewien warunek konieczny dla spełnienia nierówności (3.20.1) łatwo można podać. Zestawiając mianowicie tę nierówność z drugim warun-

kiem brzegowym (3.11) widzimy, że w punkcie  $\varrho = 1$  (na obwodzie tarczy) musi zachodzić  $s'_r \leq 0$ , skąd wynika warunek konieczny

$$(3.29) \quad k_1 \int_0^1 \kappa(\varrho) \varrho^2 d\varrho - \kappa_1 \int_0^1 k(\varrho) d\varrho \leq 0.$$

W nierówności tej  $k_1$  i  $\kappa_1$  oznaczają wartości funkcyj  $k(\varrho)$  i  $\kappa(\varrho)$  w punkcie  $\varrho = 1$ . W przypadku tarczy o stałej grubości i stałym ciężarze właściwym warunek konieczny (3.29) przybierze prostszą postać

$$(3.30) \quad k_1 \leq 3 \int_0^1 k(\varrho) d\varrho$$

lub po wprowadzeniu oznaczenia (3.15)

$$(3.31) \quad k_1 \leq 3 \bar{k}_{(0)}.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja (3.27) spełnia, a funkcja (3.28) nie spełnia warunku (3.31).

Przejdziemy teraz do analizy warunku (3.20.2). Korzystając ze wzorów (3.21) zapiszemy warunek ten w postaci

$$(3.32) \quad \left[ \int_0^{\varrho} k(\xi) d\xi - \varrho k(\varrho) \right] \int_0^1 \kappa(\varrho) \varrho^2 d\varrho - \int_0^1 k(\varrho) d\varrho \int_0^{\varrho} \kappa(\xi) \xi^2 d\xi \leq 0.$$

Z całkowania przez części wynika

$$(3.33) \quad \int_0^{\varrho} k(\xi) d\xi = \varrho k(\varrho) - \int_0^{\varrho} \xi k'(\xi) d\xi,$$

więc zamiast (3.32) możemy napisać krócej

$$(3.34) \quad - \int_0^{\varrho} \xi k'(\xi) d\xi \cdot \int_0^1 \kappa(\varrho) \varrho^2 d\varrho - \int_0^1 k(\varrho) d\varrho \cdot \int_0^{\varrho} \kappa(\xi) \xi^2 d\xi \leq 0.$$

Oznaczmy lewą stronę tej nierówności przez  $F(\varrho)$ . Funkcja  $F(\varrho)$  ma w punkcie 0 wartość  $F(0) = 0$ , natomiast w punkcie 1 posiada wartość ujemną  $F(1) = -k_1 \bar{\kappa}_{(2)}/3$  [tę ostatnią wartość łatwo obliczyć dzięki związkowi (3.33)]. Warunkiem wystarczającym dla spełnienia nierówności (3.34) w całym przedziale  $(0, 1)$  jest zatem warunek, aby pochodna  $F'(\varrho)$  była niedodatnia w tym przedziale.

Ponieważ

$$F'(\varrho) = -\frac{1}{3} \varrho k'(\varrho) \bar{\kappa}_{(2)} - \varrho^2 \kappa(\varrho) \bar{k}_{(0)},$$

więc warunek wystarczający dla spełnienia nierówności (3.34), czyli nierówności (3.20.2), zapiszemy w postaci

$$(3.35) \quad k'(\varrho) \geq -\frac{3\bar{k}_{(0)}}{\bar{\kappa}_{(2)}} \varrho \kappa(\varrho).$$



W przypadku tarcz o stałej grubości i o stałym ciężarze właściwym będzie to warunek

$$(3.36) \quad k'(\varrho) \geq -3 \varrho \bar{k}(\varrho).$$

Na nierówności tej oparty jest następujący wniosek: granica plastyczności nie może zbyt szybko maleć wzdłuż promienia, by wyprowadzone poprzednio wzory na rozkład naprężeń i graniczną prędkość kątową były słuszne. W szczególności łatwo stwierdzić, że warunkiem koniecznym jest tutaj

$$(3.37) \quad k'(0) \geq 0.$$

Zestawiając nierówności (3.26) i (3.36) dojdziemy do wniosku, że wyprowadzone poprzednio wzory są słuszne w przypadku, gdy rozpatrywana tarcza plastycznie niejednorodna nie odbiega zbyt od tarczy plastycznie jednorodnej. W przeciwnym razie korzystanie z warunku plastyczności (3.1.1) nie jest uzasadnione i najważniejsza zaleta hipotezy największych naprężeń stycznych — prostota rozwiązań — znika. Rozwiązanie oparte na tej hipotezie jest oczywiście nadal możliwe, musimy wtedy w różnych częściach tarczy przyjmować różne warunki plastyczności.

Na zakończenie naszych rozważań opartych na hipotezie największych naprężeń stycznych podamy jeszcze przykład obliczenia tarczy, dla której nie są słuszne wyprowadzone poprzednio wzory, mianowicie dla której nie jest spełniony warunek konieczny (3.31).

Wobec tego, że warunek (3.31) nie jest spełniony, istnieje taki przedział  $\varrho^* \leq \varrho \leq 1$ , w którym  $\sigma_r \leq 0 \leq \sigma_\theta$ . Przyjmijmy, że w całym pozostałym przedziale  $0 \leq \varrho \leq \varrho^*$  zachodzi  $0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta$ . Założenie to będziemy musieli następnie sprawdzić. W przedziale  $0 \leq \varrho \leq \varrho^*$  obowiązuje zatem warunek plastyczności (3.1.1). Podstawienie do równania równowagi wewnętrznej (2.1) daje tu znowu równanie (3.2), czyli równanie (3.8), którego całka ogólna ma postać (3.9). Z pierwszego warunku brzegowego (3.11) wynika podobnie jak poprzednio  $\varrho_0 = 0$ , natomiast drugiego warunku na razie nie możemy jeszcze uwzględnić.

W przedziale  $\varrho^* \leq \varrho \leq 1$  obowiązuje warunek plastyczności (3.1.2). Podstawienie tego warunku równania do (2.1) daje

$$(3.38) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{Q}{r} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r = 0,$$

czyli w postaci bezwymiarowej

$$(3.39) \quad s'_r = \frac{k}{\varrho} - w \varrho z.$$

Uwzględniając drugi z warunków brzegowych (3.11) zapiszemy całkę tego równania następująco:

$$(3.40) \quad s_r = w \int_{\varrho}^1 \kappa(\xi) \xi d\xi - \int_{\varrho}^1 \frac{k(\xi)}{\xi} d\xi.$$

Dla obliczenia pozostałych dwóch niewiadomych  $\varrho^*$  i  $w$  wykorzystamy teraz tak zwane warunki ciągłości; w punkcie  $\varrho = \varrho^*$  musi być równe zeru naprężenie promieniowe, obliczone zarówno ze wzoru (3.9), jak i ze wzoru (3.40). Otrzymujemy układ równań

$$(3.41) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varrho^*} \int_0^{\varrho^*} k(\xi) d\xi - \frac{w}{\varrho^*} \int_0^{\varrho^*} \kappa(\xi) \xi^2 d\xi = 0, \\ w \int_{\varrho^*}^1 \kappa(\xi) \xi d\xi - \int_{\varrho^*}^1 \frac{k(\xi)}{\xi} d\xi = 0. \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika

$$(3.42) \quad w = \frac{\int_0^{\varrho^*} k(\xi) d\xi}{\int_0^{\varrho^*} \kappa(\xi) \xi^2 d\xi},$$

a podstawiając tę wartość do drugiego z równań otrzymujemy równanie o jednej niewiadomej  $\varrho^*$ :

$$(3.43) \quad \int_0^{\varrho^*} k(\xi) d\xi \cdot \int_{\varrho^*}^1 \kappa(\xi) \xi d\xi - \int_0^{\varrho^*} \kappa(\xi) \xi^2 d\xi \cdot \int_{\varrho^*}^1 \frac{k(\xi)}{\xi} d\xi = 0.$$

Wobec tego, że warunek (3.31) z założenia nie był spełniony, równanie to posiada co najmniej jeden pierwiastek  $\varrho^*$  zawarty w przedziale (0, 1). Obliczając wartość tego pierwiastka i podstawiając do (3.42) otrzymujemy wartość granicznej prędkości kątowej, a następnie — z równań (3.9) i (3.40) — określimy rozkład naprężeń.

Gdyby równanie (3.43) miało więcej niż jeden pierwiastek zawarty w przedziale (0, 1), rozwiązanie uległoby dalszej komplikacji, bowiem wtedy należałoby podzielić przedział (0, 1) na większą ilość podprzedziałów, w których obowiązywałyby na zmianę warunki plastyczności (3.1.1) i (3.1.2). Ponadto wewnątrz przedziałów, w których stosujemy warunek (3.1.2), należy sprawdzić, czy spełnione jest założenie  $\sigma_{\theta} \geq 0$ . W przeciwnym razie należy wyodrębnić nowe podprzedziały, w których znajdzie zastosowanie warunek plastyczności (3.1.3).

W przypadku gdy nie jest spełniony warunek (3.37), tok postępowania nie ulega istotnej zmianie. Należy wtedy wyodrębnić podprzedziały, w których obowiązywać będzie warunek plastyczności (3.1.4).

#### 4. Sformułowanie zagadnienia w oparciu o hipotezę energii odkształcenia postaciowego

Jak widać z przeprowadzonych rozważań, korzyści stosowania hipotezy największych naprężeń stycznych przy obliczaniu nośności granicznej wirujących tarcz plastycznie niejednorodnych nie zawsze są tak znaczne, by warto było rezygnować z lepszej zgodności z doświadczeniem, jaką niewątpliwie wykazuje hipoteza energii odkształcenia postaciowego dla większości materiałów sprężysto-plastycznych. Co prawda korzystając z tej hipotezy otrzymamy równanie różniczkowe nieliniowe, jednak warunek plastyczności jest wtedy jednakowy dla całej tarczy bez względu na charakter jej niejednorodności, co uprości obliczenia.

Zajmiemy się na razie tylko obliczeniem granicznej prędkości kątowej i rozkładu naprężeń. Rozkład odkształceń będziemy rozważali później, chociaż, jak zobaczymy, rozkład ten będzie decydował o zakresie stosowalności uzyskanego rozwiązania i nie można go będzie traktować drugorzędnie.

Zagadnienie polegać będzie teraz na rozwiązaniu układu dwóch równań: liniowego równania równowagi wewnętrznej (2.1) i nieliniowego warunku plastyczności

$$(4.1) \quad \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta = Q^2.$$

Pośród kilku znanych metod sprowadzania takich układów do jednego równania o jednej funkcji niewiadomej wymienimy dwie: metodę bezpośredniego rugowania jednej z niewiadomych — przy czym, jak widać z postaci równań (2.1) i (4.1) najłatwiej jest wyrazić  $\sigma_\theta$  z równania (2.1) i wstawić do (4.1) — i metodę przedstawiania naprężeń w postaci trygonometrycznej, spełniającej tożsamościowo warunek plastyczności (4.1). W pracy niniejszej zastosujemy kolejno obie metody.

Trzecia metoda, jaką jest wprowadzenie stosownej funkcji naprężeń, w przypadku obecności sił masowych natrafia zazwyczaj na pewne trudności.

Należy tu wspomnieć o dotychczasowych próbach rozwiązania problemu nośności granicznej tarcz wirujących w oparciu o hipotezę energii odkształcenia postaciowego. We wspomnianej już pracy [6] A. D. K o w a l e n k o rozwiązuje przypadek tarczy o grubości liniowo zmiennej i o liniowo malejącej wraz z promieniem granicy plastyczności, korzystając z trygonometrycznej postaci przedstawiania naprężeń i całkując odpowiednie równanie numerycznie drogą wskazaną przez W. W. S o k o ł o w s k i e g o, [20], [22]. Nieco odmiennie postępuje w swej pracy M. H. L e e W u, [25], proponując do obliczenia nośności tarcz o stałej grubości i stałym ciężarze właściwym, lecz dowolnie zmiennym wzdłuż promienia prawie wzmocnienia plastycznego — własną metodę numerycznego całko-

wania układu nieliniowych równań różniczkowych. Wyprowadzenie tego układu oparte jest jednak również na przedstawieniu naprężeń w postaci trygonometrycznej, zaproponowanej przez A. Nádaia i L. H. Donnella, [10]. Lee Wu posługuje się przy tym teorią «drugiego rzędu» [w równaniu równowagi wewnętrznej przy obliczaniu sił masowych przyjmuje, że punkt o współrzędnej początkowej  $r$  jest oddalony od osi obrotu o  $r + u(r)$ ], co jednak zdaje się nie wprowadzać istotnych różnic.

Należy również wspomnieć o pokrewnych rozwiązaniach problemu układu naprężeń i odkształceń w wirujących tarczach sprężystych, wykonanych z materiału fizykalnie nieliniowego. Zagadnienie to, rozpatrywane już dość dawno przez C. Kruga i H. Schlechtwega, [7], ostatnio w innym ujęciu zostało postawione przez J. Nowińskiego i W. Olszaka, [12].

### 5. Zastosowanie metody «założenia rozwiązania ścisłego» do przypadku bezpośredniego rugowania

Układ równań (2.1) i (4.1) zapiszemy w postaci bezwymiarowej następująco:

$$(5.1) \quad \varrho s'_r + s_r - s_\theta + w \varrho^3 \kappa = 0, \quad s_r^2 + s_\theta^2 - s_r s_\theta = k^2.$$

Podstawiając  $s_\theta$  z pierwszego równania do drugiego otrzymujemy równanie różniczkowe nieliniowe pierwszego rzędu o niewiadomej funkcji  $s_r$ :

$$(5.2) \quad s_r^2 + (\varrho s'_r + s_r + w \varrho^3 \kappa)^2 - s_r (\varrho s'_r + s_r + w \varrho^3 \kappa) - k^2 = 0,$$

gdzie na ogół  $k = k(\varrho)$  oraz  $\kappa = \kappa(\varrho)$ . Równanie to, które daje się rozwijać względem pochodnej  $s'_r$ , mianowicie

$$(5.3) \quad s'_r = \frac{\sqrt{4k^2 - 3s_r^2}}{2\varrho} - \frac{s_r}{2\varrho} - w\varrho\kappa,$$

nie daje się zaszeregować do żadnego z klasycznych typów równań różniczkowych. W przypadku — wydawałoby się najprostszym — tarczy jednorodnej o stałej grubości równanie to można sprowadzić do równania typu Abela

$$(5.4) \quad y' = \left( \frac{3s_r}{\sqrt{4 - 3s_r^2}} - 3 \right) y^2 + 4(\sqrt{4 - 3s_r^2} - s_r) y^3.$$

Można to uzyskać przez potraktowanie zmiennej niezależnej  $\varrho$  jako zmiennej zależnej  $\varrho = \varrho(s_r)$ , a następnie przez wprowadzenie nowej zmiennej zależnej

$$(5.5) \quad \frac{1}{\sqrt{4 - 3s_r^2} - 2w\varrho^2 - s_r} = y(s_r).$$

Jednak i tego równania (5.4) nie można, zdaje się, rozwiązać przy użyciu funkcji elementarnych lub znanych funkcji nieelementarnych.

Przypadek jednorodnej tarczy o stałej grubości jest jednak tylko pozornie przypadkiem najprostszym (z punktu widzenia matematycznego). W rzeczywistości istnieje bardzo wiele takich tarcz niejednorodnych, dla których równanie (5.2) można scałkować za pomocą funkcji elementarnych. By wykryć te przypadki, posłużymy się metodą «założenia rozwiązania ścisłego», zaproponowaną przez autora w pracy [26] i nazwaną tam, mniej ogólnie, metodą «założenia równania ścisłego»<sup>4</sup>.

Równanie (5.2) można mianowicie z łatwością rozwiązać względem funkcji  $k(\varrho)$ . Po pewnych przekształceniach zapiszemy wynik w postaci

$$(5.6) \quad k(\varrho) = \frac{1}{2} \sqrt{3s_r^2 + (s_r + 2\varrho s_r' + 2w\varrho^2 \kappa)^2}.$$

Podstawiając teraz za  $s_r$  dowolne funkcje, jednak spełniające warunki brzegowe (3.11), przyjmując pewien rozkład ciężaru właściwego  $\kappa = \kappa(\varrho)$  oraz dobierając graniczną prędkość kątową, scharakteryzowaną parametrem  $w$ , będziemy mogli z równania (5.6) obliczyć rozkład granicy plastyczności, dla którego założony rozkład naprężeń będzie miał miejsce. O pewnych ograniczeniach dotyczących doboru funkcji  $s_r = s_r(\varrho)$  będzie mowa w p. 9. Uzyskane rozwiązanie jest rozwiązaniem ścisłym, jednak nie dla określonej z góry tarczy, lecz dla pewnej tarczy o innym charakterze niejednorodności. Ale bezpośrednio z równania (5.2) można otrzymać pewne wskazówki co do rozkładu naprężeń w danej tarczy, a jeżeli ponadto założymy równanie rozkładu naprężeń w postaci

$$(5.7) \quad s_r = s_r(\varrho, a_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie  $a_i$  są parametrami o nieoznaczonej dotychczas wartości, będziemy mogli dobrać następnie taką ich wartość, by uzyskany charakter niejednorodności, określony równaniem (5.6) o postaci ogólnej

$$(5.8) \quad k = k(\varrho, a_i),$$

możliwie mało różnił się od rozpatrywanego.

Jak zobaczymy, będzie można również tak dobrać wartość parametrów  $a_i$ , aby w wyniku otrzymać tarcze bardzo nieznacznie różniące się od tarczy jednorodnej, i w ten sposób podejść do rozwiązania problemu nośności granicznej tarczy jednorodnej od strony niejednorodności (tarcze «o małej niejednorodności»). Podejście to będzie tym bardziej uzasadnione, że w praktyce nie spotyka się materiałów idealnie jednorodnych i gdy otrzymana w wyniku niejednorodność nie przekroczy tole-

<sup>4</sup> W pracy [26] zakładano ściśle równanie linii ugięcia pręta niepryzmatycznego przy wyboczeniu.

rancji określonych dla danego materiału, rozwiązanie będzie można nawet uznać za ścisłe z technicznego punktu widzenia. W innych przypadkach uzyskamy rozwiązania przybliżone o łatwym do oceny błędzie przybliżenia. Należy jedynie ocenić różnice między tarczą rozpatrywaną a tarczą otrzymaną w wyniku [to jest tarczą określoną równaniem (5.8) przy optymalnie dobranych wartościach parametrów].

Należy tu wspomnieć o podobnym nieco podejściu A. Helda, [4], do rozwiązywania sprężystych tarcz wirujących o grubości zmiennej. Rozwiązywanie takich tarcz natrafia często na dość poważne trudności matematyczne<sup>5</sup>. A. Held zaproponował, by zastąpić obliczanie tarcz o danym z góry profilu przez profilowanie tarcz o przyjętym rozkładzie naprężeń, co z punktu widzenia obliczeniowego jest oczywiście znacznie łatwiejsze, a z punktu widzenia technologicznego również w wielu przypadkach nie powoduje dodatkowych trudności.

Dla ułatwienia doboru odpowiedniego rozkładu naprężeń w tarczy podamy pewne związki wynikające bezpośrednio z równania (5.2) i warunków brzegowych (3.11). Związki te uzyskamy mianowicie przez kolejne różniczkowanie równania (5.2) i podstawianie odpowiednich wartości w punktach  $\varrho = 0$  i  $\varrho = 1$  (wartości te będziemy oznaczać, jak zwykle, wskaźnikami 0 i 1). Prócz warunków brzegowych (3.11) mamy jeszcze do dyspozycji wynikające z (3.4) i (3.5) związki  $k_0 = \alpha_0 = 1$ .

Podstawiając do równania (5.2)  $\varrho = 0$  i  $s_0 = k_0 = \alpha_0 = 1$ , stwierdzamy, że jest ono tożsamościowo spełnione. Podstawiając natomiast  $\varrho = 1$  i  $s_1 = 0$  otrzymujemy pierwszy z poszukiwanych związków

$$(5.9) \quad s'_{r1} = k_1 - w \alpha_1.$$

Warto zauważyć, że związek ten wynika z samego równania równowagi wewnętrznej, jest więc słuszny bez względu na przyjęty warunek plastyczności.

Po uporządkowaniu i zróżniczkowaniu równania (5.2) otrzymujemy dla punktu  $\varrho = 0$  związek

$$(5.10) \quad s'_{r0} = \frac{2}{3} k'_0,$$

a dla punktu  $\varrho = 1$  związek

$$(5.11) \quad s''_{r1} = -\frac{1}{2} w \alpha_1 - w \alpha'_1 - \frac{3}{2} k_1 + k'_1.$$

<sup>5</sup> Por. np. R. Gran Olsson, [3], A. D. Kowalenko, [6]; ostatnio rozwiązanie o dość ogólnym charakterze podał N. N. Malinin, [8]. W Polsce problemami tego typu przy założeniu dodatkowego obciążenia cieplnego zajmował się E. Tuliszką, [24].

Różniczkując jeszcze raz mamy dla punktu  $\varrho = 0$

$$2 s''_{r,0} + 3 s'^2_{r,0} + w - k'^2_0 - k''_0 = 0,$$

czyli wobec (5.10)

$$(5.12) \quad s''_{r,0} = -\frac{w}{2} - \frac{1}{6} k'^2_0 + \frac{1}{2} k''_0.$$

Wyprowadzone związki, określające na brzegach przedziału  $(0, 1)$  samą funkcję  $s_r$  i pierwsze jej dwie pochodne, ułatwią dobór odpowiedniego rozkładu naprężeń w rozpatrywanej tarczy. Oczywiście, obliczenie tą drogą również i wyższych pochodnych funkcji  $s_r$  nie nastęrcza istotnych trudności.

Metodę «założenia rozwiązania ścisłego» można zastosować również i w inny sposób, z równania (5.3) można mianowicie obliczyć rozkład ciężaru właściwego (przy danym rozkładzie granicy plastyczności i przyjętym rozkładzie naprężeń określonym za pomocą funkcji o kilku nieoznaczonych parametrach)

$$(5.13) \quad \kappa(\varrho) = \frac{1}{2w\varrho^3} (\sqrt{4k^2 - 3s_r^2} - 2\varrho s'_r - s_r),$$

a następnie dobrać wartości parametrów tak, by uzyskany rozkład ciężaru właściwego możliwie mało różnił się od danego. Okazuje się jednak, że postępowanie takie jest mniej praktyczne od opisanego poprzednio. Wynika to z równania (5.12), wiążącego tylko funkcje  $s_r$ ,  $k$  (oraz ich pochodne) i parametr  $w$ : przy danych funkcjach  $s_r = s_r(\varrho)$  i  $k = k(\varrho)$  parametr  $w$  jest w zupełności określony równaniem (5.12) i nie może być dowolny, co zmniejsza możność dopasowania uzyskanego rozwiązania  $\kappa = \kappa(\varrho)$  do danego rozkładu ciężaru właściwego. Analogiczny warunek łączący funkcje  $s_r$ ,  $\kappa$  i parametr  $w$  bez udziału funkcji  $k$  nie istnieje i parametr  $w$  może wtedy (przy obliczaniu granicy plastyczności) służyć jako dodatkowy parametr o wartości chwilowo nieoznaczonej.

Jeszcze jedną wskazówkę co do doboru parametrów dostarczają poprzednie rozważania oparte na hipotezie największych naprężeń stycznych. Przy założeniu  $0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta$  wysnuliśmy wtedy wniosek, że nośność graniczna tarczy zależy jedynie od średniej wartości granicy plastyczności wzdłuż promienia  $\bar{k}_{(2)}$  i od średniej wartości ciężaru właściwego wzdłuż promienia  $\bar{\kappa}_{(2)}$  (obliczonej z wagą  $p_{(2)}(r) = 3r^2$ ). Wyrażające ten wniosek równanie (3.17) napiszemy teraz w postaci (wprowadzając nowy parametr  $\lambda$ )

$$(5.14) \quad \lambda = \frac{\bar{\kappa}_{(2)}}{\bar{k}_{(2)}} w = 3 = \text{const.}$$

W przypadku posługiwania się hipotezą energii odkształcenia postaciowego wniosek powyższy nie jest słuszny i parametr  $\lambda$  jest zmienny.

Można jednak przekonać się przez przeprowadzenie odpowiednich obliczeń, że zmienność ta jest powolna: dość dużym zmianom charakteru niejednorodności odpowiadają nieznaczne zmiany parametru  $\lambda$ . Korzystanie z tej okoliczności również ułatwi dobór optymalnej wartości parametrów przy stosowaniu metody założenia rozwiązania ścisłego.

Przypomnimy, że korzystając z «modyfikowanej hipotezy największych naprężeń stycznych» otrzymalibyśmy — przy założeniu  $0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta$  (a jedynie przy tym założeniu wspomniana «modyfikacja» może posiadać pewne uzasadnienie) — stałą wartość parametru  $\lambda = 3,231$ . Przy przyjęciu hipotezy energii odkształcenia postaciowego zmienny parametr  $\lambda$  jest ograniczony od góry wartością

$$\lambda_{max} = 3 \frac{2}{\sqrt{3}} = 3,464,$$

bowiem wartość ta odpowiada warunkowi plastyczności  $\sigma_\theta = (2/\sqrt{3})Q$ , czyli osiągnięciu przez naprężenie obwodowe największej możliwej wartości, w każdym punkcie tarczy.

Jako przykład zastosowania metody założenia rozwiązania ścisłego obliczymy graniczną prędkość kątową i rozkład naprężeń w tarczy o stałej grubości i stałym ciężarze właściwym, a o liniowo zmiennej granicy plastyczności określonej wzorem

$$(5.15) \quad k = 1 - 0,5 \varrho.$$

Wartość granicy plastyczności na obwodzie tarczy wynosi zatem w rozważanym przypadku połowę wartości na osi tarczy.

Dla dokonania odpowiedniego doboru funkcji rozkładu naprężeń  $s_r$  w tarczy skorzystamy ze wzorów (5.9) - (5.12). Otrzymujemy następujące wartości brzegowe:

$$\begin{array}{ll} \varrho = 0, & \varrho = 1, \\ s_{r0} = 1, & s_{r1} = 0, \\ s'_{r0} = -\frac{1}{3}, & s'_{r1} = -w + \frac{1}{2}, \\ s''_{r0} = -\frac{w}{2} - \frac{1}{24}, & s''_{r1} = -\frac{w}{2} - \frac{5}{4}. \end{array}$$

Zapewnimy zgodność samej funkcji i pierwszej jej pochodnej w punktach  $\varrho = 0$  i  $\varrho = 1$  (cztery warunki) i założymy rozkład naprężeń  $s_r$  w postaci wielomianu trzeciego stopnia<sup>6</sup>, nie zostawiając w nim już żadnego

<sup>6</sup> Gotowe wzory na współczynniki takich wielomianów znaleźć można w pracy [27], p. 9.



parametru o wartości nieoznaczonej prócz poszukiwanej prędkości kąto-  
wej  $w$ . Będzie to wielomian

$$(5.16) \quad s_r = 1 - \frac{1}{3} \varrho + \left( w - \frac{17}{6} \right) \varrho^2 + \left( \frac{13}{6} - w \right) \varrho^3.$$

Średnia wartość granicy plastyczności dla rozpatrywanej tarczy wynosi

$$(5.17) \quad \bar{k}_{(0)} = \int_0^1 (1 - 0,5 \varrho) d\varrho = 0,75.$$

Dobierzemy teraz wartość parametru  $w$  w równaniu (5.16) z warunku, by średnia wartość  $\bar{k}_{(0)}$  funkcji uzyskanej przez podstawienie funkcji (5.16) do wzoru (5.6) wyniosła również 0,75. Sformułowanie tego warunku na drodze analitycznej doprowadziłoby do równania przestępnego, w którym występowałyby całki hipereliptyczne: w funkcji określającej  $k(\varrho)$ , którą należy scałkować, występuje pierwiastek z wielomianu szóstego stopnia. Prościej będzie jednak przeprowadzić rachunki numeryczne metodą kolejnych przybliżeń biorąc pod uwagę, że parametr  $\lambda$  zmienia się nieznacznie.

Przyjmijmy jako pierwsze przybliżenie  $\lambda = 3,2$ , czyli  $w = 0,75 \cdot 3,2 = 2,4$ . Podstawienie (5.16) do wzoru (5.6), obliczenie wartości  $k(\varrho)$  w punktach  $\varrho = 0; 0,1; 0,2; \dots; 1$  i obliczenie wartości średniej  $\bar{k}_{(0)}$  regułą trapezów daje  $\bar{k}_{(0)} = 0,7581$ , a stąd  $\lambda = 2,4/0,7581 = 3,166$ . Przy-  
puszczając, że  $\lambda$  zmienia się nieznacznie, przyjmijmy jako drugie przybliżenie  $w = 0,75 \cdot 3,166 = 2,375$ . Regułą trapezów obliczamy  $\bar{k}_{(0)} = 0,7516$ , skąd  $\lambda = 2,375/0,7516 = 3,159$ . Trzecie przybliżenie  $w = 0,75 \cdot 3,159 = 2,369$  różni się już bardzo nieznacznie od poprzedniego i możemy je przyjąć za ostateczne. Rozkład naprężeń promieniowych w tarczy

określa wzór (5.16) po podstawieniu do niego  $w = 2,369$ . Obliczenie naprężeń obwodowych z równania równowagi wewnętrznej nie przedstawia również żadnych trudności.

Rozkład granicy plastyczności w tarczy danej i otrzymanej podaje tabela 1. Różnice wartości  $k$  nie przekraczają 0,016. Średnie odchylenie kwadratowe obliczone regułą trapezów wynosi

$$B = \sqrt{\int_0^1 [k - (1 - 0,5 \varrho)]^2 d\varrho} = 0,0088,$$

czyli wynosi 1,17% średniej wartości  $k$ .

Tablica 1. Rozkład granicy plastyczności  $k(\varrho)$  w danej tarczy [wzór (5.15)] i otrzymanej [wzór (5.6)].

$\varrho$	$k$	
	dane	otrzymane
0	1,000	1,000
0,1	0,950	0,952
0,2	0,900	0,906
0,3	0,850	0,859
0,4	0,800	0,810
0,5	0,750	0,757
0,6	0,700	0,702
0,7	0,650	0,643
0,8	0,600	0,586
0,9	0,550	0,534
1,0	0,500	0,500

Zazwyczaj dokładność taka jest wystarczająca. Dalsze zwiększenie dokładności nie przedstawia jednak istotnej trudności. Możemy je uzyskać bądź przez pozostawienie w przyjętym rozkładzie naprężeń jeszcze jednego nieoznaczonego parametru (równaniem rozkładu będzie wtedy na przykład wielomian czwartego stopnia) i późniejszy dobór wartości tego parametru z warunku minimum średniego odchylenia kwadratowego, bądź przez wykorzystanie zgodności obliczonych uprzednio drugich pochodnych funkcji  $s_r$  w punktach  $\varrho = 0$  i  $\varrho = 1$  (wielomian co najmniej piątego stopnia).

Istnieje jednak wiele przypadków, w których, przeciwnie, uzyskana dokładność jest nawet zbyt wysoka z tego względu, że zależy nam na skróceniu czasu obliczeń (obliczenie tarczy powyższą metodą trwa kilka godzin). Sposób przeprowadzania takich obliczeń można bardzo łatwo podać dzięki temu, że parametr  $\lambda$  zmienia się nieznacznie.

Ograniczymy się do tarcz o stałej grubości i stałym ciężarze właściwym.

Przyjmijmy, że rozkład naprężeń promieniowych ma postać paraboli drugiego stopnia

$$(5.18) \quad s_r = 1 - (1 - a)\varrho - a\varrho^2.$$

W takim razie rozkład naprężeń obwodowych, jak widać z warunku równowagi wewnętrznej (5.1), będzie również paraboliczny

$$(5.19) \quad s_\varrho = 1 - 2(1 - a)\varrho + (w - 3a)\varrho^2,$$

a z równania (5.6) określimy rozkład granicy plastyczności wzorem

$$(5.20) \quad k^2 = 1 + \beta_1\varrho + \beta_2\varrho^2 + \beta_3\varrho^3 + \beta_4\varrho^4,$$

gdzie wprowadzono dla skrócenia oznaczenia

$$(5.20.1) \quad \begin{cases} \beta_1 = 3(a - 1), & \beta_2 = (a - 3)(3a - 1) + w, \\ \beta_3 = 3(1 - a)(3a - w), & \beta_4 = 7a^2 - 5aw + w^2. \end{cases}$$

Przyjmując różne wartości parametrów  $a$  i  $w$  otrzymamy w wyniku różne rozkłady granicy plastyczności w tarczach. Jak już wspominaliśmy, o pewnych ograniczeniach co do doboru tych parametrów będzie mowa w p. 9. Rozkłady te dla  $a = -1, 0, 1, 2$  podają tablice 2-5 i rysunki 1-4, wraz z obliczonymi wartościami  $\lambda$ . Na wykresach przytoczono ponadto rozkład naprężeń w tarczach. Rozkład naprężeń promieniowych jest dla każdej grupy tarcz przedstawionych na jednym rysunku jednakowy, natomiast rozkład naprężeń obwodowych jest w każdej z tarcz inny. Przez zaszeregowanie danej tarczy do jednej z przytoczonych grup i dobór — przez interpolację — odpowiedniej wartości  $\lambda$  można będzie w przybliżeniu obliczyć nośność danej tarczy.

Tablica 2. Rozkład granicy plastyczności  $k(\varrho)$  w tarczach scharakteryzowanych wartością parametru  $\alpha = -1$

$\varrho \backslash w$	2	3	4
0	1,000	1,000	1,000
0,1	0,743	0,746	0,750
0,2	0,560	0,567	0,577
0,3	0,424	0,435	0,463
0,4	0,312	0,360	0,461
0,5	0,250	0,433	0,661
0,6	0,349	0,694	1,049
0,7	0,610	1,098	1,587
0,8	0,981	1,620	2,260
0,9	1,445	2,255	3,065
1,0	2,000	3,000	4,000
$\bar{k}_{(0)}$	0,7174	1,0209	1,3374
$\lambda$	2,788	2,939	2,991

Tablica 3. Rozkład granicy plastyczności  $k(\varrho)$  w tarczach scharakteryzowanych wartością parametru  $\alpha = 0$

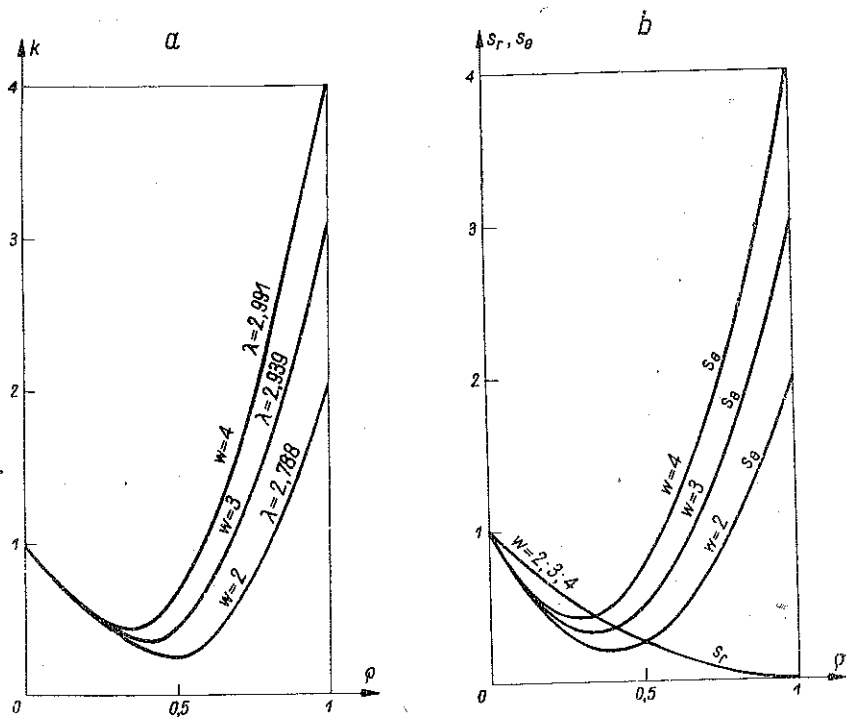
$\varrho \backslash w$	2	3	4	5
0	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	0,863	0,867	0,872	0,876
0,2	0,747	0,763	0,781	0,800
0,3	0,648	0,686	0,732	0,786
0,4	0,564	0,644	0,749	0,872
0,5	0,500	0,661	0,866	1,090
0,6	0,472	0,763	1,096	1,442
0,7	0,502	0,956	1,434	1,918
0,8	0,605	1,232	1,868	2,506
0,9	0,775	1,582	2,392	3,201
1,0	1,000	2,000	3,000	4,000
$\bar{k}_{(0)}$	0,6677	0,9655	1,2789	1,5991
$\lambda$	2,995	3,107	3,123	3,127

Tablica 4. Rozkład granicy plastyczności  $k(\varrho)$  w tarczach scharakteryzowanych wartością parametru  $\alpha = 1$ .

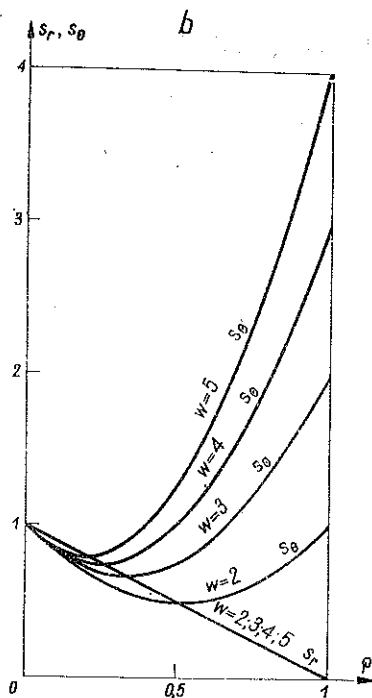
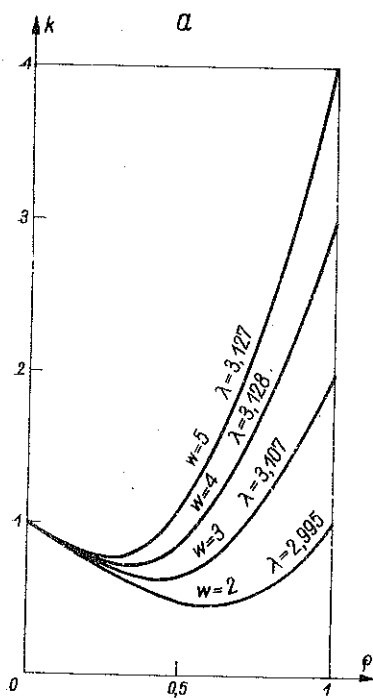
$\varrho \backslash w$	2	3	4	5	6
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	0,990	0,995	1,000	1,005	1,011
0,2	0,960	0,981	1,002	1,025	1,049
0,3	0,910	0,958	1,012	1,071	1,134
0,4	0,840	0,930	1,038	1,157	1,286
0,5	0,750	0,901	1,090	1,299	1,521
0,6	0,640	0,877	1,178	1,506	1,845
0,7	0,510	0,866	1,312	1,781	2,259
0,8	0,360	0,877	1,493	2,123	2,758
0,9	0,190	0,920	1,723	2,530	3,339
1,0	0,000	1,000	2,000	3,000	4,000
$\bar{k}_{(0)}$	0,6667	0,9306	1,2348	1,5497	1,8700
$\lambda$	3,000	3,224	3,239	3,226	3,209

Tablica 5. Rozkład granicy plastyczności  $k(\rho)$  w tarczach scharakteryzowanych wartością parametru  $\alpha = 2$

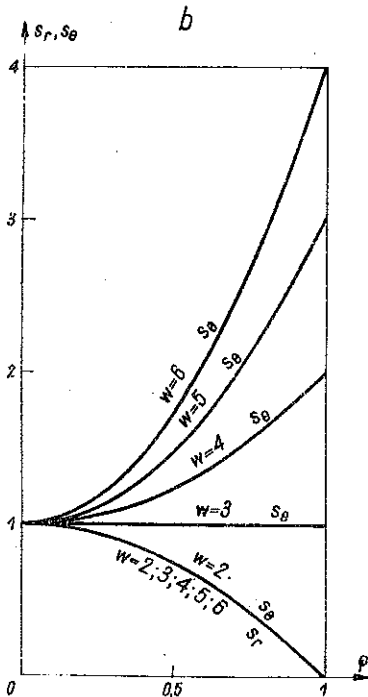
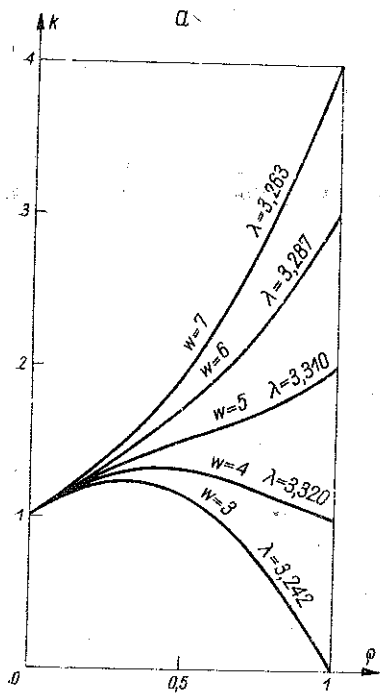
$\rho$	$w$	3	4	5	6	7
0		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1		1,128	1,133	1,139	1,145	1,151
0,2		1,208	1,232	1,257	1,283	1,310
0,3		1,238	1,296	1,358	1,422	1,489
0,4		1,218	1,326	1,444	1,569	1,700
0,5		1,146	1,323	1,521	1,732	1,953
0,6		1,021	1,289	1,594	1,918	2,253
0,7		0,845	1,230	1,671	2,133	2,606
0,8		0,616	1,152	1,759	2,383	3,014
0,9		0,334	1,068	1,866	2,671	3,478
1,0		0,000	1,000	2,000	3,000	4,000
$\bar{k}_{(0)}$		0,9254	1,2049	1,5108	1,8256	2,1453
$\lambda$		3,242	3,320	3,310	3,287	3,263



Rys. 1

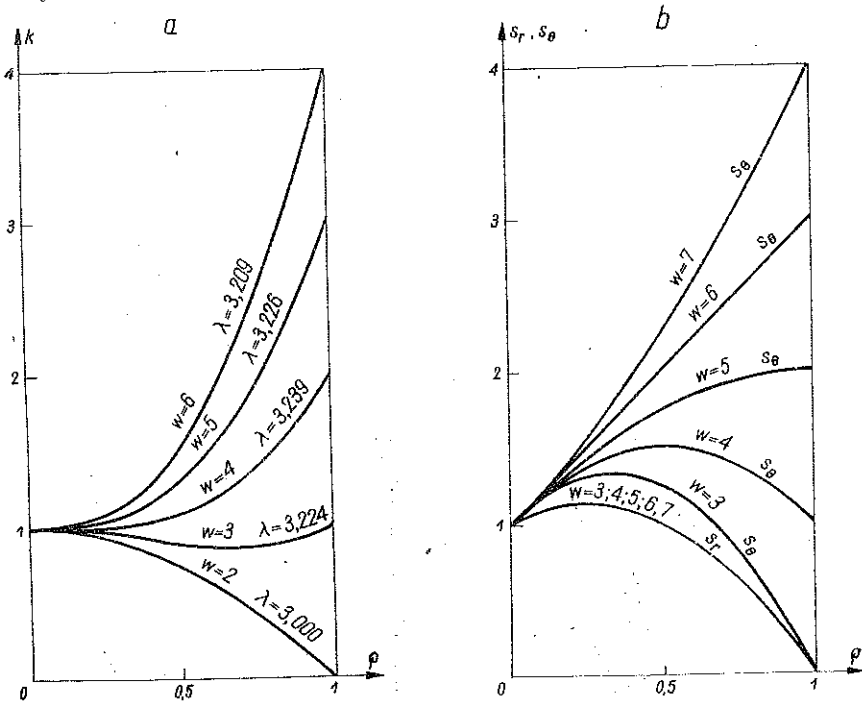


Rys. 2



Rys. 3

Tak, na przykład, tarcza rozpatrywana poprzednio nie wiele odbiega od tarcz scharakteryzowanych wartością parametru  $a = 1$  (tablica 4, rys. 3), można ją mianowicie uważać za tarczę należącą do tej grupy, pośrednią między tarczami  $w = 2$  i  $w = 3$ . Przyjęcie średniej wartości  $w$ , np.  $w = 2,5$ , jest mało dokładne. Ale przyjęcie średniej wartości  $\lambda = 3,1$  daje już dokładność niejednokrotnie wystarczającą, bowiem otrzymujemy wtedy  $w = 0,75 \cdot 3,1 = 2,33$ , czyli wartość różniącą się zaledwie o 2% od obliczonej poprzednio wartości  $w = 2,369$ , którą możemy uważać w pewnym sensie za ścisłą.



Rys. 4

## 6. Przedstawianie naprężeń w postaci trygonometrycznej w przypadku ośrodków plastycznie niejednorodnych

Jak wiadomo, oparty na hipotezie energii odkształcenia postaciowego warunek plastyczności posiadający w przypadku ogólnym postać

$$(6.1) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 = Q^2,$$

(gdzie  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  są naprężeniami głównymi) przedstawia w układzie  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  powierzchnię graniczną w kształcie walca kołowego. Myśl sparametryzowania równania tego walca i wyrugowania tym samym warunku plastyczności przy równoczesnym zmniejszeniu ilości niewiadomych o jedną pod-

jął pierwszy W. W. Sokółowski, [21], chociaż dla uproszczonego przypadku płaskiego stanu naprężenia — gdy przekrojem walca jest elipsa — rugowanie niewiadomych przez parametryzację było już znane dawniej<sup>7</sup>.

Najkorzystniejsza jest parametryzacja równań walca lub elipsy za pomocą funkcji trygonometrycznych przez wprowadzenie pewnego kąta, którego wielkość decyduje o stosunku naprężeń głównych (ściślej dewiacji naprężeń głównych). Parametryzację taką zwiemy przedstawianiem naprężeń w postaci trygonometrycznej.

W inny sposób dochodzi do przedstawiania naprężeń w postaci trygonometrycznej T. Pełczyński, [16], podając ogólne wzory na naprężenia główne, obliczane ze znanego równania sześciennego: wyróżnik tego równania jest ujemny, zatem dla obliczenia pierwiastków należy wprowadzić funkcje trygonometryczne pewnego kąta o charakterze pomocniczym. Łatwo sprawdzić, że kąt, którym posługuje się W. W. Sokółowski, różni się od kąta stosowanego przez T. Pełczyńskiego jedynie o wartość stałą  $\pi/3 = 60^\circ$ .

W przypadku ośrodka plastycznie niejednorodnego granica plastyczności  $Q$  jest funkcją punktu,  $Q = Q(x, y, z)$ , zatem promień walca (powierzchni granicznej), który można zbudować dla dowolnego punktu ośrodka, jest zmienny od punktu do punktu (por. np. W. Olszak, [13]). Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, by i w tym przypadku dokonać zaproponowanej przez W. W. Sokółowskiego parametryzacji. Dochodzimy w ten sposób do równań:

$$(6.2) \quad \begin{cases} \sigma_x = \sigma_m + \frac{2}{3} Q(x, y, z) \left[ l_1^2 \cos\left(\delta - \frac{\pi}{3}\right) + l_2^2 \cos\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right) - l_3^2 \cos \delta \right], \\ \sigma_y = \sigma_m + \frac{2}{3} Q(x, y, z) \left[ m_1^2 \cos\left(\delta - \frac{\pi}{3}\right) + m_2^2 \cos\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right) - m_3^2 \cos \delta \right], \\ \sigma_z = \sigma_m + \frac{2}{3} Q(x, y, z) \left[ n_1^2 \cos\left(\delta - \frac{\pi}{3}\right) + n_2^2 \cos\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right) - n_3^2 \cos \delta \right], \\ \tau_{xy} = \frac{2}{3} Q(x, y, z) \left[ l_1 m_1 \cos\left(\delta - \frac{\pi}{3}\right) + l_2 m_2 \cos\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right) - l_3 m_3 \cos \delta \right], \\ \tau_{yz} = \frac{2}{3} Q(x, y, z) \left[ m_1 n_1 \cos\left(\delta - \frac{\pi}{3}\right) + m_2 n_2 \cos\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right) - m_3 n_3 \cos \delta \right], \\ \tau_{zx} = \frac{2}{3} Q(x, y, z) \left[ n_1 l_1 \cos\left(\delta - \frac{\pi}{3}\right) + n_2 l_2 \cos\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right) - n_3 l_3 \cos \delta \right]. \end{cases}$$

Równania (6.2) parametryzują warunek plastyczności bez wzmocnienia plastycznego. Uwzględnienie wzmocnienia plastycznego nie przedstawiłoby jednak żadnych trudności.

<sup>7</sup> A. Nádai i L. H. Donnell, [10].

W równaniach tych  $l_i$ ,  $m_i$  i  $n_i$  są dostawami kierunkowymi osi głównych 1, 2, 3 względem układu współrzędnych  $x, y, z$ ;  $\sigma_m$  jest średnim naprężeniem normalnym,  $\delta$  pewnym kątem (parametrem). Kąt ten oznacza Sokółowski przez  $\omega$ ; oznaczenie zostało zmienione wobec tradycyjnego już oznaczania przez  $\omega$  prędkości kątowej (na przykład tarczy).

Podstawienie równań (6.2) do podstawowych równań ośrodka plastycznego (równań równowagi wewnętrznej itp.) zmniejsza ilość niewiadomych o jedną: zamiast sześciu składowych stanu naprężenia będą to parametry  $\sigma_m$ ,  $\delta$  oraz trzy kąty Eulera, przez które, jak wskazuje Sokółowski, można zawsze wyrazić dziewięć dostaw kierunkowych  $l_i$ ,  $m_i$  i  $n_i$ . W tym najogólniejszym przypadku należałoby właściwie mówić nie o parametryzacji walca, lecz o parametryzacji pewnego tworzu geometrycznego w sześciowymiarowej przestrzeni składowych stanu naprężenia.

Znacznie częściej w zastosowaniach praktycznych mamy jednak do czynienia z parametryzacją walca w ścisłym sensie, mianowicie wtedy, gdy posługujemy się naprężeniami głównymi. Obowiązujące dla ośrodka niejednorodnego wzory (6.2) uproszczą się wtedy do postaci

$$(6.3) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_m + \frac{2}{3} Q(x, y, z) \cos\left(\delta - \frac{\pi}{3}\right), \\ \sigma_2 = \sigma_m + \frac{2}{3} Q(x, y, z) \cos\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right), \\ \sigma_3 = \sigma_m - \frac{2}{3} Q(x, y, z) \cos \delta. \end{cases}$$

W jeszcze prostszym przypadku płaskiego stanu naprężenia, gdy parametryzacją walca zamienia się na parametryzację elipsy, jeden z parametrów  $\sigma_m$ ,  $\delta$  możemy wyrugować. Gdy np.  $\sigma_3 = 0$ , to

$$(6.4) \quad \sigma_m = \frac{2}{3} Q(x, y, z) \cos \delta$$

oraz, po podstawieniu do dwóch pierwszych równań układu (6.3),

$$(6.5) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} Q(x, y, z) \cos\left(\delta - \frac{\pi}{6}\right), \\ \sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} Q(x, y, z) \cos\left(\delta + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Wykorzystamy teraz wzory (6.5) w celu sprowadzenia układu (5.1) do jednego równania o jednej niewiadomej. Przyjmiemy, że  $\sigma_\theta = \sigma_1$ ,  $\sigma_r = \sigma_2$  i zapiszemy wzory (6.5) w postaci bezwymiarowej następująco:

$$(6.6) \quad s_r = \frac{2}{\sqrt{3}} k \cos\left(\delta + \frac{\pi}{6}\right), \quad s_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} k \cos\left(\delta - \frac{\pi}{6}\right),$$



gdzie na ogół  $k = k(\varrho)$ . Funkcje (6.6) spełniają oczywiście tożsamościowo drugie z równań układu (5.1); podstawiając je do pierwszego równania otrzymujemy (po sprowadzeniu funkcji trygonometrycznych do funkcji jednego tylko kąta  $\delta + \pi/6$ )

$$(6.7) \quad 2\varrho k' \cos\left(\delta + \frac{\pi}{6}\right) - 2\varrho k \delta' \sin\left(\delta + \frac{\pi}{6}\right) + k \cos\left(\delta + \frac{\pi}{6}\right) - \\ - k\sqrt{3} \sin\left(\delta + \frac{\pi}{6}\right) + w e^2 \kappa \sqrt{3} = 0.$$

Jest to nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu o niewiadomej funkcji  $\delta = \delta(\varrho)$ . Dołączone do tego równania warunki brzegowe wynikające z (3.11)

$$(6.8) \quad \delta = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = 0, \quad \delta = \frac{\pi}{3} \quad \text{dla} \quad \varrho = 1$$

pozwoła na określenie stałej całkowania i wyznaczenie niewiadomej wartości parametru  $w$ , a tym samym granicznej prędkości kątowej tarczy.

#### 7. Zastosowanie metody założenia rozwiązania ścisłego do przypadku przedstawienia naprężeń w postaci trygonometrycznej

Rozważania poniższe przytaczamy jedynie w tym celu, aby pełniej naświetlić postawiony problem. Będziemy się jednak starali wykazać, że przedstawianie naprężeń w postaci trygonometrycznej nie przynosi istotnych korzyści w stosunku do bezpośredniego rugowania przynajmniej w rozważanym przez nas przypadku materiału idealnie plastycznego, nie podlegającego wzmocnieniu plastycznemu.

Nieliniowe równanie (6.7) nie daje się na ogół scałkować za pomocą funkcji elementarnych podobnie jak równanie (5.2) lub (5.3). Całkowanie numeryczne wspomnianych równań będzie przebiegać podobnie. Nie ma podstaw do przypuszczania, by całkowanie równania (6.7) miało być prostsze — przeciwnie, w równaniu (5.2) występują tylko działania elementarne (mnożenie i dodawanie), podczas gdy w równaniu (6.7) występują funkcje trygonometryczne.

Rozważymy teraz możliwość rozwiązania równania (6.7) metodą założenia rozwiązania ścisłego. Równanie to daje się łatwo rozwiązać ze względu na funkcję  $\kappa(\varrho)$ , ale postępowanie takie jest mniej korzystne, jak stwierdziliśmy w p. 5. Natomiast ze względu na funkcję  $k(\varrho)$  jest to równanie różniczkowe liniowe, więc łatwiejsze do rozwiązania niż ze względu na funkcję  $\delta(\varrho)$ , ale z drugiej strony jest ono trudniejsze niż rozwiązanie względem  $k(\varrho)$  algebraicznego równania (5.2).

Całkę równania (6.7), rozwiązanego ze względu na funkcję  $k(\varrho)$ , można zapisać w postaci

$$(7.1) \quad k(\varrho) = \frac{\exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{\operatorname{tg}\left(\delta + \frac{\pi}{6}\right)}{\varrho} d\varrho\right]}{\sqrt{\varrho} \cos\left(\delta + \frac{\pi}{6}\right)} \left\{ C - \frac{w\sqrt{3}}{2} \int \kappa \varrho^{3/2} \exp\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int \frac{\operatorname{tg}\left(\delta + \frac{\pi}{6}\right)}{\varrho} d\varrho\right] d\varrho \right\},$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania. Wylania się tutaj dodatkowa trudność; funkcję  $\delta(\varrho)$  należy dobrać nie tylko tak, by w wyniku otrzymać funkcję  $k(\varrho)$  możliwie mało różniącą się od danej, lecz również — ze względów praktycznych — tak, by występujące we wzorze (7.1) całki dały się obliczyć możliwie prosto. Funkcją taką, możliwie najprostszą, o dwóch niezaczynionych parametrach  $n$  i  $p$  jest

$$(7.2) \quad \delta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1 + (n-p)\varrho + p(n+2)\varrho^2}{(1-\varrho)(1+p\varrho)} \right] - \frac{\pi}{6}.$$

Po przeprowadzeniu dość żmudnych całkowań otrzymujemy wzory

$$(7.3) \quad \begin{cases} w = \frac{(n+3)(n+5)(n+7)}{4(n+4p+7)}, \\ k = \frac{2 + a_1\varrho + a_2\varrho^2}{4(1+p\varrho)^2} \sqrt{4 + \beta_1\varrho + \beta_2\varrho^2 + \beta_3\varrho^3 + \beta_4\varrho^4}, \end{cases}$$

gdzie oznaczono dla skrócenia

$$(7.4) \quad \begin{cases} a_1 = n + 3, \\ a_2 = \frac{(n+3)(n+5)p}{n+4p+7}, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = 2(-3 + n + 2p), \\ \beta_2 = 3 - 8p + n^2 + 4p^2, \\ \beta_3 = 2p(3 + 2n - 5p + n^2 - np), \\ \beta_4 = p^2(7 + 4n + n^2). \end{cases}$$

Korzystając z równania (7.3) można również rozwiązać szereg tarcz przez dobór różnych wartości parametrów  $n$  i  $p$ . Obliczenia są jednak znowu bardziej żmudne niż przy stosowaniu równania (5.20), a zakres rozważanych tarcz — jak można się przekonać — mniejszy. Wkład pracy zwiększa się również i wskutek tego, że przy znajomości rozkładu pomocniczego kąta  $\delta$  wzdłuż promienia [określonej równaniem (7.2)] należy jeszcze korzystać ze wzorów (6.6), by obliczyć rozkład naprężeń.

Nie negując poważnego znaczenia teoretycznego, jakie posiada kąt  $\delta$  (będący oczywiście niezmiennikiem stanu naprężenia) oraz w pewnych przypadkach znaczenia praktycznego, należy jednak przeciwstawić się

często spotykanej tendencji posługiwania się tym kątem wszędzie tam, gdzie to jest możliwe. Przy rozwiązywaniu poszczególnych zagadnień teorii plastyczności warto rozważyć, czy korzystniejsze będzie wprowadzenie kąta  $\delta$ , czy też bezpośrednie rugowanie. Często korzyści posługiwania się przedstawianiem naprężeń w postaci trygonometrycznej są połowiczne. Tak na przykład uzyskanie całki ogólnej równania dla płaskiego pierścienia uplastycznionego, podane przez W. W. Sokołowskiego, [22], i A. Nádaia, [11], jest nieco prostsze, a ostateczny zapis jest niewątpliwie znacznie krótszy niż przy bezpośrednim rugowaniu (por. np. [29]). Okazuje się jednak, że uwzględnienie warunków brzegowych i obliczenie zależności między ciśnieniem wewnętrznym i zewnętrznym jest dłuższe i bardziej skomplikowane. W takich przypadkach korzystna jest znajomość rozwiązania zarówno metodą bezpośredniego rugowania jak i metodą przedstawiania naprężeń w postaci trygonometrycznej.

#### 8. Nośność graniczna wirującej tarczy plastycznie jednorodnej

Osobną uwagę poświęcimy obliczeniu nośności tarczy plastycznie jednorodnej o stałej grubości, którą możemy potraktować jako przypadek szczególny tarcz dotychczas rozważanych. Jest to zagadnienie ważne nie tylko z tego względu, że tarcze takie bywają często stosowane w praktyce, lecz również i z tego względu, że istnieje pełna analogia matematyczna między nośnością graniczną takiej tarczy, a nośnością graniczną płyty kołowej o stałej grubości, obciążonej równomiernie na całej powierzchni. Na analogię tę zwrócił uwagę W. W. Sokołowski<sup>8</sup>.

Sokołowski rozwiązuje równanie (6.7) uproszczone w przypadku tarczy jednorodnej ( $k = \kappa = 1$ ,  $k' = 0$ ) do postaci

$$(8.1) \quad 2 \varrho \delta' \sin \left( \delta + \frac{\pi}{6} \right) + 2 \sin \delta - \varrho^2 w \sqrt{3} = 0$$

metodą różnic skończonych i uzyskuje określającą nośność graniczną tarczy wartość parametru  $w = 1,79^2 = 3,204$ . Opierając się na hipotezie największych naprężeń stycznych otrzymujemy  $w = 3$ , natomiast przy zastosowaniu «modyfikacji» hipotezy największych naprężeń stycznych (która w tym przypadku znajduje pewne uzasadnienie)  $w = 3,231$ . Postaramy się obecnie obliczyć nośność takiej tarczy w oparciu o hipotezę energii odkształcenia postaciowego metodą założenia rozwiązania ścisłego i sprawdzić tą drogą wynik Sokołowskiego.

Będziemy zakładali rozkład naprężeń promieniowych  $s_r$ , a następnie ze wzoru (5.6) obliczymy rozkład granicy plastyczności; powinniśmy otrzymać  $k(\varrho) \equiv 1$ . Dla dokonania odpowiedniego doboru funkcji  $s_r$  prze-

<sup>8</sup> W. W. Sokołowski, [22], s. 356.

de wszystkim obliczymy jej pochodne w punktach  $\varrho = 0$  i  $\varrho = 1$ . Różniczkując kolejno uproszczone teraz nieco równanie (5.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varrho = 0, & & \varrho = 1, \\ s_{r0} = 1, & & s_{r1} = 0, \\ s'_{r0} = 0, & & s'_{r1} = -w + 1, \\ s''_{r0} = -\frac{w}{2}, & & s''_{r1} = -\frac{w}{2} - \frac{3}{2}, \\ s'''_{r0} = 0, & & s'''_{r1} = 3 + \frac{3}{4}w - \frac{3}{4}w^2, \\ & & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Wykorzystamy tylko warunki w punkcie  $\varrho = 0$  i będziemy poszukiwali tarczy «o możliwie małej niejednorodności» spośród tarcz, w których

$$(8.2) \quad s_r = 1 - b \varrho^2 - (1 - b) \varrho^4.$$

Jak widać z równania (5.10), w tarczach takich  $k'_0 = 0$ , z czym często można się spotkać; podamy więc najpierw ogólne wzory, które będą mogły znaleźć znacznie szersze zastosowanie niż do obliczania tarcz jednorodnych.

Po podstawieniu funkcji (8.2) do równania (5.6) określimy granicę plastyczności w takich tarczach wzorem

$$(8.3) \quad k^2 = 1 + a_2 \varrho^2 + a_4 \varrho^4 + a_6 \varrho^6 + a_8 \varrho^8,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(8.4) \quad \begin{cases} a_2 = w - 4b, \\ a_4 = -6 + 6b + 7b^2 - 5bw + w^2, \\ a_6 = (24b - 9w)(1 - b), \\ a_8 = 21(1 - b)^2. \end{cases}$$

Granicę plastyczności na obwodzie tarczy łatwiej obliczyć ze wzoru (5.9) niż ze wzoru (8.3); otrzymujemy

$$(8.5) \quad k_1 = 2b - 4 + w.$$

Naprężenia obwodowe podobnie jak i promieniowe będą rozłożone wzdłuż paraboli czwartego stopnia

$$(8.6) \quad s_\varrho = 1 + (w - 3b) \varrho^2 - 5(1 - b) \varrho^4.$$

Przystąpimy do doboru optymalnej wartości parametrów  $b$  i  $w$ . Dobór ten przeprowadzimy wykorzystując warunki zgodności średniej wartości granicy plastyczności ( $k_{(0)} = 1$ ) oraz minimum średniego odchylenia kwadratowego, określonego w naszym przypadku wzorem

$$(8.7) \quad B = \sqrt{\int_0^1 [k(\varrho) - 1]^2 d\varrho}.$$

Punktu, w którym  $B$  osiągnie wartość minimalną, będziemy więc poszukiwali wzdłuż linii  $\bar{k}_{(0)} = 1$  w płaszczyźnie  $bw$ . Ponieważ

$$(8.8) \quad k_{(0)} = \int_0^1 \sqrt{1 + a_2 \varrho^2 + a_4 \varrho^4 + a_6 \varrho^6 + a_8 \varrho^8} d\varrho,$$

więc w równaniu tej linii występowałyby całki hypereliptyczne, co sprawia pewne trudności przy przeprowadzaniu rachunków na drodze analitycznej. Rachunki przeprowadzimy więc numerycznie: ich przebieg jest widoczny z rys. 5. Ostatecznie jako optymalne wartości parametrów przyjmujemy  $b_{opt} = 0,8665$ ,  $w_{opt} = 3,2580$ ; przy tych wartościach parametrów  $\bar{k}_{(0)} = 1$ , a średnie odchylenie kwadratowe wynosi tylko  $B = 0,0061 = 0,61\%$ . Rozkład granicy plastyczności w tarczy podaje tablica 6.

Tablica 6. Tarcza o parametrach  $b = 0,8665$ ,  $w = 3,2580$  (o możliwie małej niejednorodności)

$\varrho$	$k(\varrho)$
0	1,000
0,1	0,999
0,2	0,997
0,3	0,994
0,4	0,993
0,5	0,996
0,6	1,001
0,7	1,007
0,8	1,011
0,9	1,007
1,0	0,991
$\bar{k}_{(0)}$	1,0000
$\lambda$	3,258

Tablica 7. Tarcza o parametrach  $b = 0,8775$ ,  $w = 3,235$

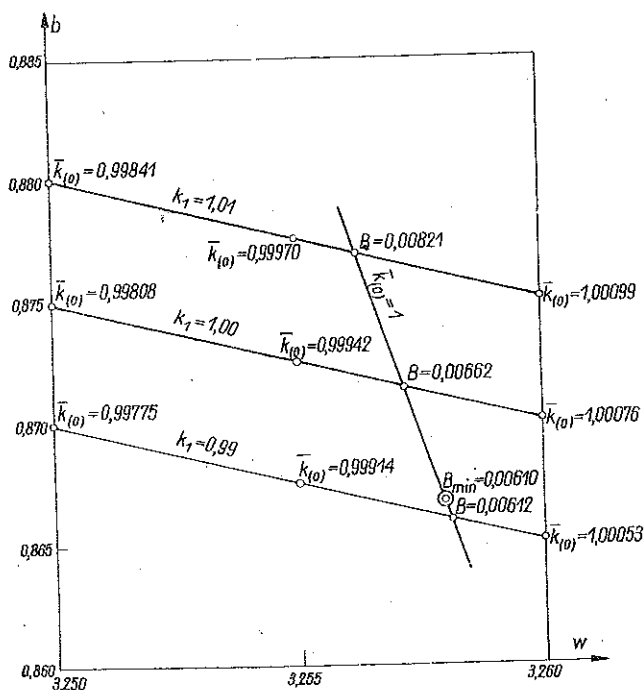
$\varrho$	$k(\varrho)$
0	1,000
0,1	0,999
0,2	0,995
0,3	0,991
0,4	0,988
0,5	0,987
0,6	0,990
0,7	0,995
0,8	0,999
0,9	0,998
1,0	0,990
$\bar{k}_{(0)}$	0,9936
$\lambda$	3,256

Jak widać z tablicy 6, różnice między tarczą jednorodną a otrzymaną tarczą «o możliwie małej niejednorodności» są rzeczywiście bardzo nieznaczne i nawzajem się znoszące. Wydaje się przeto, że podana przez W. W. Sokołowskiego wartość  $w = 1,79^2 = 3,204$  (wartość tę podaje również N. I. Biezuchow, [1]) jest zbyt niska. Podamy dowód, że tak jest w istocie. Przyjmijmy w równaniu (8.3) wartości parametrów  $b = 0,8775$ ,  $w = 3,235$ ; rozkład granicy plastyczności w uzyskanej tarczy podaje tablica 7. Jak widać, w całej tarczy  $k \leq 1$ , co pozwala wnosić, że nośność tej tarczy jest niższa niż nośność tarczy jednorodnej, a tym samym wykazaliśmy, że dla tarczy jednorodnej  $w > 3,235$ . Dla tarczy tej

$\bar{k}_{(0)} = 0,9936$ , przeto  $\lambda = 3,235/0,9936 = 3,256$ , co jeszcze raz potwierdza przeprowadzone poprzednio obliczenia. Mamy zatem podstawy do przyjęcia  $w = 3,258$ , czyli

$$(8.9) \quad \omega = \sqrt{3,258} \sqrt{\frac{gQ}{\gamma R^2}} = 1,805 \sqrt{\frac{gQ}{\gamma R^2}}.$$

Wynik ten można również wykorzystać w teorii nośności granicznej płyt.



Rys. 5

Wspomniemy, że tarczy o możliwie małej niejednorodności można by również poszukiwać wśród rozpatrywanych w p. 7, przy obliczaniu których korzystaliśmy z przedstawienia naprężeń w postaci trygonometrycznej. Optymalne wartości parametrów  $n$  i  $p$  wyniosą  $n_{opt} = -0,0220$ ,  $p_{opt} = 0,2460$ ; wartościom tym odpowiada obliczona ze wzoru (7.3) wartość  $w = 3,248$ , a więc o 0,010 niższa od proponowanej, a o 0,044 wyższa od podanej przez W. W. Sokołowskiego. Obliczenia te są jednak mniej wiarygodne, ponieważ średnie odchylenie kwadratowe dla tarczy optymalnej wynosi tu  $B = 0,0328$ , czyli jest około pięć razy większe niż w przypadku tarczy rozważanej poprzednio. Fakt ten nie posiada charakteru przypadkowego, lecz daje się uzasadnić: przy doborze równania

(8.2) kierowaliśmy się jedynie zgodnością z obliczonymi uprzednio wartościami funkcji i jej pochodnych na brzegach przedziału, natomiast przy doborze równania (7.2) poważny czynnik stanowiła konieczność efektywnego scałkowania funkcji występujących we wzorze (7.1).

### 9. Obliczenie odkształceń tarcz wirujących

W dotychczasowych rozważaniach nie korzystaliśmy z czterech spośród równań podstawowych, przytoczonych w p. 2: dwóch równań prawa zmiany postaci, równania prawa zmiany objętości i równania nierozdzielności. Postępowanie takie kryje w sobie pewne niebezpieczeństwo, nie dostrzeżone, zdaje się, przez wielu autorów: odkształcenia rozpatrywanego ośrodka muszą być geometrycznie możliwe, w przeciwnym razie uzyskane «rozwiązanie w naprężeniach» może nie posiadać fizykalnego sensu. Mamy tu na myśli przede wszystkim funkcję  $\varphi$ , warunkującą zaawansowanie odkształceń plastycznych. Funkcja ta — stosunek intensywności odkształceń postaciowych do intensywności naprężeń stycznych — może przyjmować jedynie wartości dodatnie, co stanowi, jak zobaczymy, dość poważne ograniczenie.

Przeprowadzimy teraz pewne ogólne rozważania nad kołowo symetrycznym stanem naprężenia i odkształcenia ośrodka idealnie plastycznego podlegającego prawom teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych <sup>F</sup>Hencky'ego-Iljuszina. Założymy mianowicie, że znamy składowe płaskiego stanu naprężenia  $\sigma_r = f(r)$ ,  $\sigma_\theta = f(r)$  i  $\tau_{r\theta} = f(r)$ ; będziemy poszukiwali odpowiednich składowych stanu odkształcenia i funkcji  $\varphi$ .

Jest od razu widoczne, że zagadnienie obliczenia kąta odkształcenia postaciowego  $\gamma_{r\theta}$  można wyodrębnić <sup>9</sup>.

Kąt ten jest związany z naprężeniem stycznym równaniem

$$(9.1) \quad \gamma_{r\theta} = 2\varphi\tau_{r\theta}$$

i nie występuje w żadnym z pozostałych równań. Wystarczy znaleźć  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_z$  i  $\varphi$  z równań (2.3), (2.4) i (2.5), a wtedy obliczenie  $\gamma_{r\theta}$  z równania (9.1) nie przedstawi już żadnych trudności.

Rozważymy najpierw odkształcenia ośrodka ściśliwego, w którym obowiązuje prawo zmiany objętości (2.4). Przez podstawienie  $K = \infty$  przejdziemy następnie do znacznie uproszczonych wzorów dla ośrodka nieściśliwego.

<sup>9</sup> Pojęcie «stan kołowo symetryczny» rozumiemy tu zgodnie z definicją podaną w pracy [28]. Niekiedy rozumie się pod tym pojęciem jedynie przypadek  $\tau_{r\theta} = \gamma_{r\theta} = 0$ . Wydaje się jednak, że takie ograniczenie nie jest korzystne i np. stan naprężenia w tarczach kołowych, wirujących ze zmienną prędkością kątową, można również nazwać stanem kołowo symetrycznym.

Rozwiązując układ równań (2.3) i (2.4) względem odkształceń  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  i  $\varepsilon_z$  otrzymujemy

$$(9.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\varphi}{3}(2\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{9K}(\sigma_r + \sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta = \frac{\varphi}{3}(2\sigma_\theta - \sigma_r) + \frac{1}{9K}(\sigma_r + \sigma_\theta), \\ \varepsilon_z = -\frac{\varphi}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{9K}(\sigma_r + \sigma_\theta). \end{cases}$$

Niewiadomą funkcję materiałową  $\varphi$  wyznaczymy teraz z równania nierozdzielności (2.5). Po podstawieniu składowych (2.9) otrzymujemy mianowicie liniowe równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

$$(9.3) \quad r\varphi'(2\sigma_\theta - \sigma_r) + r\varphi(2\sigma'_\theta - \sigma'_r) + 3\varphi(\sigma_\theta - \sigma_r) = r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta) \right].$$

W równaniu tym przecinkiem u góry oznaczono różniczkowanie względem zmiennej niezależnej  $r$ . Po scałkowaniu zapiszemy ostateczne wzory w postaci

$$(9.4) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{1}{2\sigma_\theta - \sigma_r} \exp \left[ -\int \frac{3(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r(2\sigma_\theta - \sigma_r)} dr \right] \left\{ C + \right. \\ \quad \left. + \int \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta) \right] \exp \left[ \int \frac{3(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r(2\sigma_\theta - \sigma_r)} dr \right] dr \right\}, \\ \varepsilon_r = \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{3(2\sigma_\theta - \sigma_r)} \exp \left[ -\int \frac{3(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r(2\sigma_\theta - \sigma_r)} dr \right] \left\{ C + \right. \\ \quad \left. + \int \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta) \right] \exp \left[ \int \frac{3(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r(2\sigma_\theta - \sigma_r)} dr \right] dr \right\} + \frac{1}{9K}(\sigma_r + \sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{3} \exp \left[ -\int \frac{3(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r(2\sigma_\theta - \sigma_r)} dr \right] \left\{ C + \right. \\ \quad \left. + \int \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta) \right] \exp \left[ \int \frac{3(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r(2\sigma_\theta - \sigma_r)} dr \right] dr \right\} + \frac{1}{9K}(\sigma_r + \sigma_\theta), \\ \varepsilon_z = -\frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{3(2\sigma_\theta - \sigma_r)} \exp \left[ -\int \frac{3(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r(2\sigma_\theta - \sigma_r)} dr \right] \left\{ C + \right. \\ \quad \left. + \int \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta) \right] \exp \left[ \int \frac{3(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r(2\sigma_\theta - \sigma_r)} dr \right] dr \right\} + \frac{1}{9K}(\sigma_r + \sigma_\theta), \\ \gamma_{r\theta} = \frac{2\tau_{r\theta}}{2\sigma_\theta - \sigma_r} \exp \left[ -\int \frac{3(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r(2\sigma_\theta - \sigma_r)} dr \right] \left\{ C + \right. \\ \quad \left. + \int \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta) \right] \exp \left[ \int \frac{3(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r(2\sigma_\theta - \sigma_r)} dr \right] dr \right\}. \end{cases}$$



We wzorach tych moduł  $K$  pozostawiono pod znakiem pochodnych i całek uwzględniając niejednorodność ośrodka. Stałą  $C$  należy określić z warunku brzegowego dla odkształceń.

Dla ośrodka nieściśliwego przytoczone wzory upraszczają się znacznie. Podajemy je w postaci bezwymiarowej:

$$(9.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi Q_0 &= \frac{C}{2s_\theta - s_r} \exp \left[ - \int \frac{3(s_\theta - s_r)^{2/3}}{\varrho(2s_\theta - s_r)} d\varrho \right], \\ \varepsilon_r &= \frac{C(2s_r - s_\theta)}{3(2s_\theta - s_r)} \exp \left[ - \int \frac{3(s_\theta - s_r)}{\varrho(2s_\theta - s_r)} d\varrho \right], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{C}{3} \exp \left[ - \int \frac{3(s_\theta - s_r)}{\varrho(2s_\theta - s_r)} d\varrho \right], \\ \varepsilon_z &= - \frac{C(s_r + s_\theta)}{3(2s_\theta - s_r)} \exp \left[ - \int \frac{3(s_\theta - s_r)}{\varrho(2s_\theta - s_r)} d\varrho \right], \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2Cs_{r\theta}}{\sqrt{3}(2s_\theta - s_r)} \exp \left[ - \int \frac{3(s_\theta - s_r)}{\varrho(2s_\theta - s_r)} d\varrho \right]. \end{aligned} \right.$$

Przez  $s_{r\theta}$  oznaczono tu podobnie jak w pracy [28] stosunek naprężenia stycznego  $\tau_{r\theta}$  do odpowiedniej granicy plastyczności  $Q_0/\sqrt{3}$ . W przypadku gdy kierunki promieniowy i obwodowy są kierunkami głównymi, a naprężenia przedstawione zostały w postaci trygonometrycznej, wzory (9.5) przybiorą postać

$$(9.6) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi Q_0 &= \frac{C}{2k \cos\left(\frac{\pi}{3} - \delta\right)} \exp \left[ - \int \frac{\sqrt{3} \sin \delta}{\varrho \cos\left(\frac{\pi}{3} - \delta\right)} d\varrho \right], \\ \varepsilon_r &= \frac{C \cos\left(\frac{\pi}{3} + \delta\right)}{3 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \delta\right)} \exp \left[ - \int \frac{\sqrt{3} \sin \delta}{\varrho \cos\left(\frac{\pi}{3} - \delta\right)} d\varrho \right], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{C}{3} \exp \left[ - \int \frac{\sqrt{3} \sin \delta}{\varrho \cos\left(\frac{\pi}{3} - \delta\right)} d\varrho \right], \\ \varepsilon_z &= - \frac{C \cos \delta}{3 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \delta\right)} \exp \left[ - \int \frac{\sqrt{3} \sin \delta}{\varrho \cos\left(\frac{\pi}{3} - \delta\right)} d\varrho \right]. \end{aligned} \right.$$

Przystąpimy teraz do ustalenia zakresu stosowalności podanych poprzednio rozwiązań. Funkcja  $\varphi$  może przyjmować jedynie wartości dodatnie, a ponieważ dla  $\varrho = 0$ ,  $s_\theta = s_r = 1$ , czyli  $2s_\theta - s_r = 1 > 0$ , więc uzyskujemy stąd warunek

$$(9.7) \quad 2s_\theta - s_r \geq 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq \varrho \leq 1$$

albo

$$(9.7.1) \quad -\frac{\pi}{6} \leq \delta \leq \frac{5}{6}\pi \quad \text{dla} \quad 0 \leq \varrho \leq 1.$$

Weźmy pod uwagę na przykład równanie rozkładu naprężeń promieniowych (5.18) i odpowiadające mu równanie rozkładu naprężeń obwodowych (5.19). Funkcję  $2s_\theta - s_r$  określa wzór

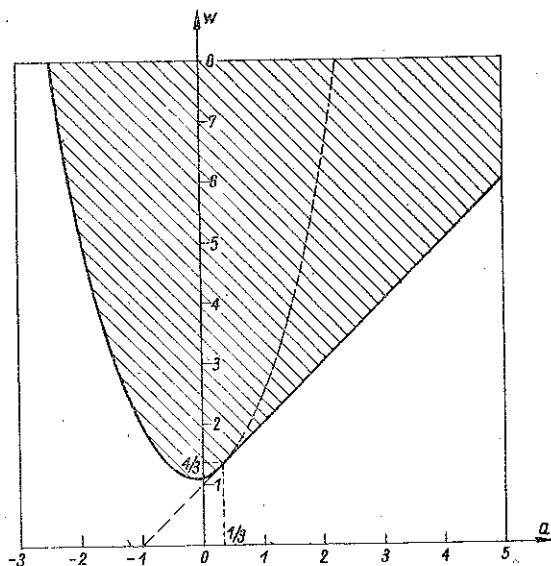
$$(9.8) \quad 2s_\theta - s_r = 1 - 3(1-a)\varrho + (2w - 5a)\varrho^2.$$

Warunek (9.7) będzie spełniony, gdy:

(1)  $2s_\theta - s_r \geq 0$  dla  $\varrho = 1$ , a ponieważ  $s_{r1} = 0$ , więc warunek ten możemy zapisać w postaci  $s_{\theta 1} \geq 0$ , czyli w naszym przypadku  $w \geq 1 + a$ ;

(2) minimum lokalne funkcji  $2s_\theta - s_r$ , o ile istnieje i leży w przedziale  $0 < \varrho < 1$ , musi być dodatnie. Otrzymujemy stąd warunek  $w \geq (9 + 2a + 9a^2)/8$ , lecz tylko dla  $a < 1/3$  (gdy  $a \geq 1/3$ , funkcja  $2s_\theta - s_r$  nie posiada minimum w przedziale  $0 < \varrho < 1$ ).

Zakres doboru parametrów  $a$  i  $w$  podaje rys. 6. Zakres ten został uwzględniony przy sporządzaniu tablic 2-5 i rysunków 1-4.



Rys. 6

Przypadek  $2s_\theta - s_r < 0$  wymaga osobnego naświetlenia. Nie jest on fizycznie możliwy (wobec  $2s_\theta - s_r > 0$  dla  $\varrho = 0$ ); oznacza to, że tarcza ulegnie zniszczeniu wcześniej, zanim nastąpi pełne jej uplastycznienie. Na możliwość tego rodzaju przypadków zwraca uwagę W. W. Sokol-

lowski, [22], przy rozpatrywaniu nośności granicznej wirujących tarcz o grubości skokowo zmiennej.

Podajemy jeszcze przykład obliczenia odkształceń tarczy całkowicie uplastycznionej przyjmując dla uproszczenia nieściśliwość materiału. Przyjmiemy w równaniach (5.18) i (5.19)  $\alpha = 1$ , czyli przyjmujemy rozkład naprężeń

$$(9.9) \quad \sigma_r = 1 - \varrho^2, \quad \sigma_\theta = 1 - (w - 3) \varrho^2.$$

Podstawiając te równania do (9.5) otrzymujemy

$$(9.10) \quad \begin{cases} \varphi Q_0 = C [1 + (2w - 5) \varrho^2]^{-\frac{7w-16}{2(2w-5)}}, \\ \varepsilon_r = \frac{C}{3} [1 - (w-1) \varrho^2] [1 + (2w-5) \varrho^2]^{-\frac{7w-16}{2(2w-5)}}, \\ \varepsilon_\theta = \frac{C}{3} [1 + (2w-5) \varrho^2]^{-\frac{3(w-2)}{2(2w-5)}}, \\ \varepsilon_z = -\frac{C}{3} [2 + (w-4) \varrho^2] [1 + (2w-5) \varrho^2]^{-\frac{7w-16}{2(2w-5)}}. \end{cases}$$

Przemieszczenie promieniowe wyniesie

$$(9.11) \quad u = r \varepsilon_\theta = \frac{C \varrho R}{3} [1 + (2w-5) \varrho^2]^{-\frac{3(w-2)}{2(2w-5)}}.$$

Zwróćmy szczególną uwagę na przypadek  $w = 16/7 = 2,2857$ . Wartość ta odpowiada rozkładowi granicy plastyczności [wzór (5.20)]

$$(9.12) \quad k^2 = 1 - \frac{12}{7} \varrho^2 + \frac{39}{49} \varrho^4.$$

Ze wzorów (9.10) otrzymujemy  $\varphi Q_0 = C$ , co oznacza, że odkształcenia plastyczne we wszystkich punktach tarczy będą jednakowo zaawansowane. Oznacza to między innymi, że przy takim rozkładzie granicy plastyczności uplastycznienie tarczy sprężyste jednorodne nastąpi jednocześnie z pominięciem stadium sprężysto-plastycznego<sup>10</sup>.

W istocie rozkład naprężeń w sprężystej, jednorodnej, wirującej tarczy kołowej określony jest wzorami<sup>11</sup>

$$(9.13) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} \frac{3 + \nu}{8} (1 - \varrho^2), \\ \sigma_\theta = \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} \frac{3 + \nu}{8} \left(1 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} \varrho^2\right), \end{cases}$$

<sup>10</sup> Szczegółową analizę przebiegu uplastycznienia w pokrewnym zagadnieniu walca grubościennego niejednorodnego podają W. Olszak i W. Urbanowski, [15].

<sup>11</sup> Por. np. M. T. Huber, [5], s. 80.

a naprężenie zastępcze, obliczone na podstawie hipotezy energii odkształcenia postaciowego, wyniesie

$$(9.14) \quad \sigma_0^2 = \left( \frac{\gamma \omega^3 R^3}{g} \frac{3 + \nu}{8} \right)^2 \left[ 1 - 4 \frac{1 + \nu}{3 + \nu} \rho^2 + \frac{7 + 2\nu + 7\nu^2}{(3 + \nu)^2} \rho^4 \right].$$

W przypadku materiału nieściśliwego, gdy współczynnik Poissona jest równy  $1/2$ , z (9.14) otrzymujemy

$$(9.15) \quad \sigma_0^2 = \left( \frac{7}{16} \frac{\gamma \omega^3 R^3}{g} \right)^2 \left( 1 - \frac{12}{7} \rho^2 + \frac{39}{49} \rho^4 \right),$$

a porównując ten wzór ze wzorem (9.12) stwierdzamy, że uplastycznienie tarczy nastąpi jednocześnie, gdy parametr  $w$  osiągnie wartość  $16/7$ .

#### 10. Uwagi końcowe

W pracy rozważaliśmy jedynie nośność tarcz pełnych bez otworu środkowego. W przypadku tarcz z otworem swobodnym (co jednak występuje dość rzadko w zastosowaniach) rozważania nie ulegną zasadniczej zmianie. Nieco bardziej skomplikowany będzie przypadek tarczy nasadzonej na wał z wciskiem, którego wielkość z jednej strony wpływa na rozkład naprężeń w tarczy, z drugiej natomiast zależy od prędkości kątowej malejąc ze wzrostem ilości obrotów. Zagadnienie to wymaga, prawdopodobnie, potraktowania odrębnego.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] N. I. Biezuchow, *Teorja uprugosti i plastycznosti*, Gostechizdat, Moskwa 1953.
- [2] M. M. Filonienko - Borodicz, *Ob ustojkach procznosti materialow, obladajuszczich razlicznym soprotiwlenjem rastiżenju i szatju*, Inż. Sborn., 19, Moskwa 1954.
- [3] R. Gran Olsson, *Über einige Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe*, Ing.-Archiv 8 (1937), s. 270-275 i 373-380.
- [4] A. Held, *Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe zu vorgegebenen Spannungsverteilungen*, Ing.-Archiv 10 (1939), s. 339-370.
- [5] M. T. Huber, *Stereomechanika techniczna*, t. 3, PZWS, Warszawa 1951.
- [6] A. D. Kowalenko, *Plastiny i obołoczki w rotorach turbomaszyn*, AN USSR, Kijów 1955.
- [7] C. Krug, H. Schlechtweg, *Über den Spannungszustand in umlaufenden scheibenförmigen Körpern*, Ing.-Archiv 2 (1931), s. 212-221.
- [8] N. N. Malinin, *Raszot wraszczajuszczewosja nierawnomierno nagrietowo diska pieriemiennoj toščziny w obszczem sluczaje osiesimmetricznoj dieformaczi, Raszoty na proczn. w masz. Maszgiz, 46 (1955).*
- [9] M. S. Mikieladze, *Uprugo-plasticeskije dieformaczi w bystro wraszczajuszczichsja diskach*, Inż. Sborn. 15, Moskwa 1953.
- [10] A. Nádai, L. H. Donnell, *Stress Distribution in Rotating Disks After the Yield Point Has Been Reached*, Trans. ASME 1929 (cyt. wg [25]).

- [11] A. Nádai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, tłum. ros. II, Moskwa 1954.
- [12] J. Nowiński i W. Olszak, O podstawach teorii ciał sprężystych fizycznie nieliniowych, Arch. Mech. Stos. 1 (1954).
- [13] W. Olszak, O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych, I, Arch. Mech. Stos. 3 (1954).
- [14] W. Olszak, O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych II, Arch. Mech. Stos. 4 (1954).
- [15] W. Olszak i W. Urbanowski, Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny, Arch. Mech. Stos. 3 (1955).
- [16] T. Pełczyński, Wpływ stanu napięcia na przejście materiału w stan plastyczny, Przegl. Mechan. 10 (1951), s. 175-179 i 204-208.
- [17] W. Prager i P. G. Hodge, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, 1951.
- [18] S. D. Ponomariew i inni, *Osnovy sowremionnykh metodow rasczota na procznost' w maszynostrojenji*, t. 2, Maszgiz, Moskwa 1952.
- [19] S. W. Serensen i inni, *Niesuszczaja sposobnost' i rasczoty dietalej maszin*, Maszgiz, Moskwa 1954.
- [20] W. W. Sokołowski, *Plasticzeskoje napriazionnoje sostojanje wraszczaszczichsja diskow*, Prikl. Mat. Miec. 1 (1948).
- [21] W. W. Sokołowski, *Ob odnoj formie predstavlenja komponient napriazienja w teorji plasticznosti*, Dokl. AN SSSR, 12 (1948).
- [22] W. W. Sokołowski, *Teorja plasticznosti*, Gostechizdat, Moskwa 1950.
- [23] N. D. Tarabasow, *Rasczoty na procznost' nieodnorodnych sostawnykh diskow i trub s ucetom iniercionnykh sil*, Inż. Sborn. 10, Moskwa 1951.
- [24] E. Tuliszka, *Wytrzymałościowe obliczanie wirujących tarcz maszyn cieplnych wirnikowych*, Arch. Bud. Maszyn. 3 (1955).
- [25] M. H. Lee Wu, *A Simple Method of Determining Plastic Stresses and Strains in Rotating Disks with Non-uniform Metal Properties*, Journ. App. Mechanics, 19 (1952), s. 489-495.
- [26] M. Życzkowski, *Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów niepryzmatycznych*, Rozpr. Inż. 2 (1954).
- [27] M. Życzkowski, *Obliczanie sił krytycznych dla sprężystych prętów niepryzmatycznych metodą interpolacji częściowej*, Rozpr. Inż. 3 (1956).
- [28] M. Życzkowski, *The Limit Load of a Thick-Walled Tube in a General Circularly Symmetrical Case*, Arch. Mech. Stos. 2 (1956).
- [29] W. Krzyś i M. Życzkowski, *Wybór zadań i przykładów z podstaw teorii sprężystości i plastyczności*, PWN, Kraków-Lódź 1955.

#### Резюме

### НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ КРУГОВЫХ ДИСКОВ

В работе приводится решение задачи, при предположении условия пластичности в двух, чаще всего применяемых видах, основывающихся на гипотезе энергии формоизменения и на гипотезе максимальных касательных напряжений.

В пкт. 2 доказывається, що при деяких дуже слабих припущеннях, касаючихся виду умови пластичності, питання несущої

способности вращающихся дисков переменной толщины всегда можно свести к соответственной задаче для диска постоянной толщины, но с измененной неоднородностью. Эта последняя характеризуется — в кругово-симметричном случае — зависимостью предела текучести  $Q$  и удельного веса  $\gamma$  от радиуса (координаты)  $r$ .

В случае пластически однородного диска решение на основе гипотезы максимальных касательных напряжений является особенно простым, ибо тогда во всем диске  $0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta$  и обвязывает линейное условие пластичности (3.1.1).

В пкт. 3 приводятся некоторые необходимые и некоторые достаточные условия для того, чтобы — в случае пластического неоднородного диска — можно было также использовать условие (3.1.1). Получена очень простая формула (3.13), определяющая предельную угловую скорость диска; эта формула имеет ограниченную применимость, так как она основана на упомянутом условии пластичности [следует удовлетворить необходимым условиям (3.29) и (3.37)]. Приводится также пример совместного использования уравнений типа (3.1), определяющих условие пластичности на основании гипотезы максимальных касательных напряжений.

В пкт. 4 формулируется, а в пкт. 5 решается задача несущей способности вращающегося диска, на основании гипотезы энергии формоизменения. При решении применялся приближенный метод «предположения точного решения», являющийся обобщением приводимого автором в работе [26], метода «предположения точного уравнения». Приводится пример применения этого метода в случае, когда распределение предела пластичности определено уравнением (5.15).

В пкт. 6, в случае пластически неоднородных сред, вводится представление напряжений в тригонометрической форме, а в пкт. 7 этот способ применяется к рассматриваемой задаче. Из проведенных рассуждений следует, что представление напряжений в тригонометрической форме не дает здесь существенных выгод.

В пкт. 8 обращается особое внимание на пластически однородный диск, для которого предельную угловую скорость определил В. В. Соколовский методом конечных разностей. Доказывается, что приведенная этим автором несущая способность занижена, а именно, что цифру 1,79 следует заменить 1,805.

В рассуждениях, проводимых выше, определена только предельная угловая скорость и распределение напряжений; они сохраняют свое значение в теории малых упруго-пластических деформаций Генки-Ильюшина, равно как и в теориях пластического течения Прандтля - Рейсса и Леви - Мизеса.

В пкт. 9, при использовании теории Генки - Ильюшина, рассматриваются деформации диска. Выводятся, сначала, общие формулы деформации в кругово-симметричном случае, при известном распределении напряжений. Эти формулы (9.4), справедливые для неоднородной сжимаемой среды, значительно упрощаются при предположении несжимаемости. Это будут, записанные в безразмерном виде, формулы (9.5), или же, при представлении напряжений в тригонометрической форме, формулы (9.6). Из этих формул следует, что функция  $2\sigma_\theta - \sigma_r$  должна быть неотрицательна, во всем интервале  $0 \leq r \leq R$  что составляет некоторое ограничение области применимости проведенных ранее рассуждений. Если упомянутое условие не удовлетворялось бы, это обозначало бы, что диск разрушится перед достижением полной пластичности.

В работе рассматривается несущая способность сплошных дисков; однако, в случае свободного центрального отверстия, рассуждения изменятся незначительно.

#### Summary

##### LIMIT STATE OF NON-HOMOGENEOUS ROTATING DISCS

The problem is solved using the two yield conditions most commonly used — energy-of-distortion condition, and maximum shear stress.

It is shown in Art. 2 that, subject to some very weak assumptions concerning the form of the yield condition, the solution of the problem of limit state of rotating discs of varying thickness can always be reduced to the problem of a disc of constant thickness with modified non-homogeneity, characterized, in the circularly symmetrical case, by the dependence of the yield point  $Q$  and the specific weight  $\gamma$  on the radius  $r$ .

In the case of a plastically non-homogeneous disc, the solution is particularly simple if the theory of maximum shear stress is used. This is because we have  $0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta$  throughout the entire disc, and the yield condition (3.1.1) is linear. In Art. 3 necessary and sufficient conditions are established enabling the condition (3.1.1) to be used also in the case of plastically non-homogeneous discs. The simple equation (3.13), which is obtained by determining the limit angular velocity of the disc, is of limited applicability, as being based on the yield condition mentioned above [the necessary conditions (3.29) and (3.37) should be satisfied]. An example is given in which use is made of several simultaneous equations of the type (3.1), determining the yield condition based on the maximum shear stress theory.

The problem of limit state of a rotating disc using the energy-of-distortion theory is stated in Art. 4 and solved in Art. 5. The (approximate)

method of «assumption of accurate solution» constituting a generalization of the author's method of «assumption of accurate equation», [26], is employed, and example is given of the application of this method when the distribution of the yield point is determined by the Eq. (5.15).

In Art. 6, the stresses are expressed in trigonometric form in the case of plastically non-homogeneous bodies. In Art. 7, this method is used for the purpose of solving the problem under consideration. It is concluded that representation of the stresses in trigonometric form does not here present any essential advantage.

In Art. 8 special consideration is given to the problem of a plastically non-homogeneous disc, of which the limit state has been calculated by V. V. Sokolovsky by means of the finite difference method. It is shown that the value obtained by that author is somewhat too low, and that the figure 1.79 should be replaced by 1.805.

The above considerations are confined to the determination of the limit angular velocity and the stress distribution. They retain their validity both in the Hencky-Iliushin theory of small elastic-plastic deformations, and in the Prandtl-Reuss and Levy-Mises theory of plastic flow. Disc deformation is considered in Art. 9, the Hencky-Iliushin theory being used. First, general equations for strain in the circularly symmetrical case are derived for a known stress distribution. These equations (9.4), which are valid for a non-homogeneous compressible medium, are considerably simplified if incompressibility is assumed. They are the Eqs. (9.5) expressed in the dimensionless form or, if the trigonometric form is used, the Eqs. (9.6). From these equations, it follows that the function  $2\sigma_\theta - \sigma_r$  must be non-negative over the entire interval  $0 \leq r \leq R$ . This involves some limitation of the range of applicability of the previous considerations. If this condition is not satisfied, it means that the disc will suffer destruction before it passes entirely into the plastic state.

The limit state of full discs is considered in this paper. The difference for discs with axial borings free from load is not, however, serious.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 lutego 1956 r.*