

PIOTR WILDE

STATYKA MOSTU O PRZEKROJU OTWARTYM W ŁUKU

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXI

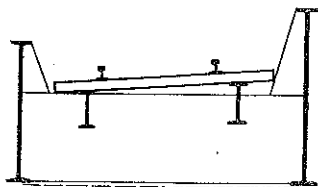
SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	15
2. Wyprowadzenie wzorów dla mostu o dźwigarach pełnościennych	18
3. Wyprowadzenie wzorów przybliżonych	25

1. Wstęp

Szybki rozwój komunikacji w dwudziestym wieku wysunął szereg nowych problemów w budownictwie mostowym. Rozbudowa dotychczasowej sieci komunikacyjnej — spowodowana poważnym rozwojem przemysłu — stwarza niejednokrotnie warunki, które uniemożliwiają zastosowanie tradycyjnego systemu mostu prostego, przekraczającego przeszkodę pod kątem prostym. Z drugiej strony o jego wyglądzie coraz częściej decydują względy estetyczne, które podporządkowują most drodze i odrzucają sztuczne, nie wynikające z ukształtowania terenu objazdy, konieczne do zaprojektowania mostu prostego.

Gdy zachodzi konieczność zmiany kierunku jazdy na moście, projektanci najczęściej konstruują część dojazdową — o przęsłach niedużej rozpiętości — w łuku, a przęsła główne wykonują proste. Można co prawda uniknąć wyginania dźwigarów głównych przez poszerzenie mostu i poprowadzenia w łuku tylko torów, ale przy dużej krzywiźnie prowadzi to do wzrostu ciężaru mostu, a poza tym (co jest najważniejsze) uniemożliwia skonstruowanie belki ciągłej.

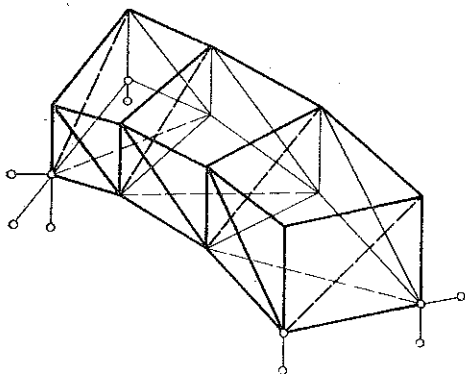


Rys. 1

Dla niedużych rozpiętości najekonomiczniejszy jest most o przekroju przedstawionym na rys. 1. Oba dźwigary (wewnętrzny i zewnętrzny) są wygięte w planie. Stężenia poziome znajdują się w dolnej płaszczyźnie. Poprzecznice wraz z nóżkami tworzą ramy poprzeczne. Powstaje pytanie, jak pracuje taki most i jak należy go obliczać.

Zagadnieniem tym zajmowali się Gottfeld i Umanski, [1], [2], [3] i [4]. Scharakteryzujemy po krótku tok postępowania stosowany przez wyżej wymienionych autorów. Obaj wychodzą z analizy kratownicy przestrzennej (rys. 2). Przyjęcie schematu kratowego nie jest przypadkowe. Nie decydowała tutaj oczywiście przydatność modelu dla praktyki, ponieważ (pomijając już trudności skonstruowania kratownicy wygiętej w planie) przy tak dużej wysokości dźwigara, kiedy stosujemy kratownice, zawsze bardziej ekonomiczny jest przekrój zamknięty. Jak łatwo się przekonać, kratownica na rys. 2 jest statycznie wyznaczalna. Mimo że

obliczenie sił w prętach nie jest proste (ponieważ nie potrafimy obliczyć siedmiu reakcji mając do dyspozycji sześć równań równowagi), możemy napisać po trzy równania równowagi dla każdego węzła i z tych równań

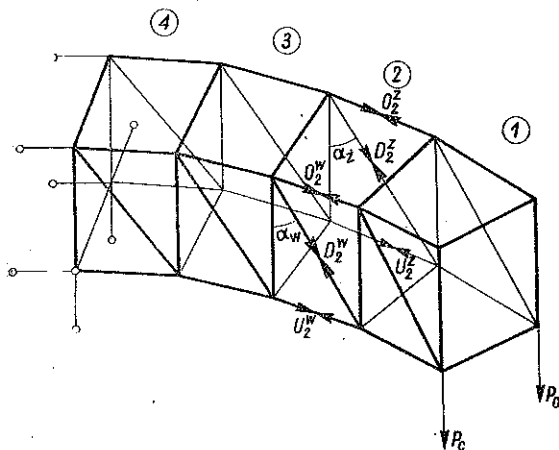


Rys. 2

wyznaczyć siły we wszystkich prętach. Stąd zasadniczy schemat rozwiązania jest prosty i powstaje tylko problem, jak najszybciej dojść do wzorów na siły, w poszczególnych prętach przy dowolnym położeniu siły jednostkowej na moście.

Gottfeld wydzieli 4 węzły leżące w jednej płaszczyźnie poprzecznej mostu. Otrzymuje 12 równań, w których występuje 19 nieznanych sił. Pozostałe zależności Gottfeld wyprowadza w postaci równań rekurencyjnych,

uzależniających siły w poszczególnych prętach wzdłuż całego mostu. W ten sposób po żmudnych i mało przejrzystych przekształceniach dochodzi do wzorów na linie wpływowe sił w prętach.



Rys. 3

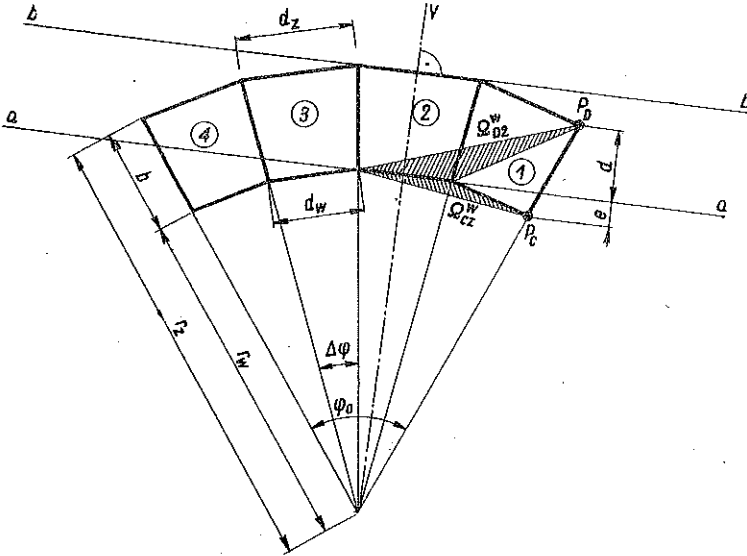
Ciekawsze i bardziej oryginalne rozwiązanie podaje U m a n s k i ([4], s. 41-58). Ustrojem wyjściowym jest tutaj kratownica wspornikowa, obciążona na końcu siłami skupionymi P_C i P_D (rys. 3). Z warunku równowagi momentów względem prostych $a-a$ i $b-b$ można wyznaczyć siły w krzyżulcach D_i^z i D_i^w kratownic głównych (rys. 4). W symbolach tych indeksy oznaczają: i numer pola, z kratownicę zewnętrzną, w kratownicę wewnętrzną.

Na przykład mamy

$$(1.1) \quad \sum M_{aa} = 0, \quad P_D d - D_2^z b \cos \alpha_z - P_C e = 0.$$

U m a n s k i oznacza przez Ω podwojone powierzchnie przedstawione na rys. 4. Przy oznaczeniach tego rysunku można zapisać

$$(1.2) \quad d = \frac{\Omega_{D_2}^w}{d_w}, \quad e = \frac{\Omega_{C_2}^w}{d_w}.$$



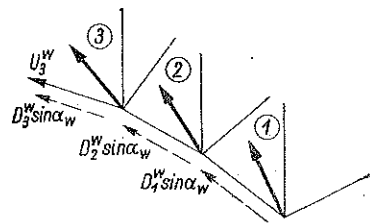
Rys. 4

Po uwzględnieniu (1.2) otrzymamy z równań (1.1) dla krzyżulca w polu 2

$$(1.3) \quad D_2^z = \frac{1}{b d_w \cos \alpha_z} (\Omega_{D_2}^w P_D - \Omega_{C_2}^w P_C).$$

Siłę w pewnym przecię pasu można znaleźć wycinając ten pas (rys. 5). Z warunku $\sum M = 0$ względem środka krzywizny otrzymamy np. dla pręta w polu 3

$$(1.4) \quad U_3^w = - \sum_{i=1}^3 D_i^w \sin \alpha_w,$$

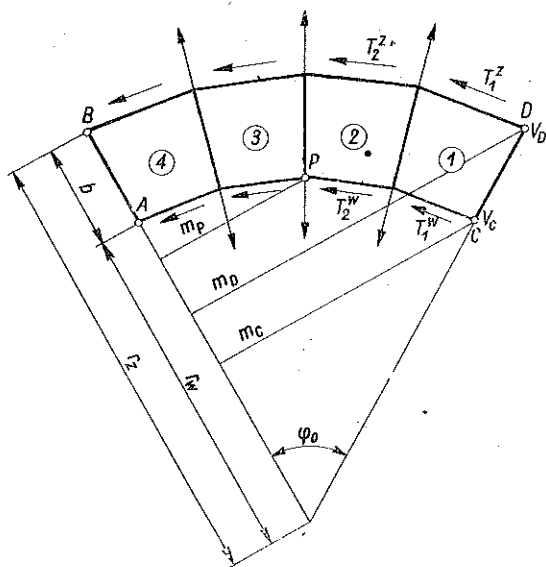


Rys. 5

a po podstawieniu D_i^w ze wzorów analogicznych do wzoru (1.3) otrzymamy

$$(1.5) \quad U_3^w = - \frac{\operatorname{tg} \alpha_w}{b d_z} \left(P_C \sum_1^3 \Omega_{C_i}^z + P_D \sum_1^3 \Omega_{D_i}^z \right).$$

Analogicznie otrzymuje się wzory na siły we wszystkich prętach. W przypadku belki wolnopodpartej U m a n s k i poszukuje najpierw reakcji V_C i V_D . Jedno równanie możemy napisać natychmiast (rys. 6). Przy przyjętych oznaczeniach mamy



Rys. 6

$$(1.6) V_C m_C + V_D m_D = P m_p$$

Drugie równanie otrzymamy wycinając kratownicę dolnego stężenia. Uważając V_C i V_D oraz P za znane, możemy napisać wzory na siły w krzyżulcach D_i . Kratownica dolna będzie obciążona w płaszczyźnie rzutami sił w krzyżulcach $T_i = D_i \sin \alpha_i$ oraz siłami radialnymi. Suma momentów względem

środką krzywizny musi być równa zero. Uwzględniając oba pasy otrzymujemy

$$(1.7) r_w \sum T_i^w + r_z \sum T_i^z = 0$$

W ten sposób U m a n s k i otrzymuje drugie równanie wiążące V_C , V_D i P . Rozwiązując układ dwóch równań otrzymuje się linie wpływowe reakcji. Pozornie wszystko w przedstawieniu U m a n s k i e g o jest bardzo proste, ale obliczenie linii wpływowych jest żmudne.

2. Wyprowadzenie wzorów dla mostu o dźwigarach pełnościennych

Dla mostu o dźwigarach pełnościennych (rys. 7) moment skręcający może być przenoszony przez

- moment swobodnego skręcania według Saint-Venanta,
- parę sił poziomych w pasach obu dźwigarów głównych,
- parę sił pionowych w środkach dźwigarów głównych.

Wpływ momentów skręcających typu a i b jest bardzo mały. Załóżmy, że cały moment skręcający przenosi się jako para sił na dźwigary główne. Można więc tutaj zastosować analogiczne zależności do tych, które wynikają z teorii profili cienkościennych dla przypadku, gdy sztyw-

ność na skręcanie swobodne jest równa zero. Dla ułatwienia czytania pracy przypomnijmy zasadnicze zależności tej teorii, podane przez U m a n s k i e g o w książce [4], s. 155-164.

U m a n s k i przyjmuje, że dla skręcanego dwuteownika moment skręcający przenoszony jest całkowicie jako para sił poziomych tnących w półkach (rys. 8). Z tego założenia mamy

$$(2.1) \quad M^S = Q^S h,$$

gdzie M^S oznacza moment skręcający, działający w przekroju, Q^S siłę poziomą tnącą w półce dwuteownika, h odległość między środkami ciężkości półek.

Równym i przeciwnie skierowanym siłom tnącym Q w półce górnej i dolnej towarzyszą równe i przeciwnie skierowane momenty zginające M^B , działające odpowiednio w płaszczyznach górnej i dolnej półki. Momenty te tworzą parę momentów, którą nazywamy bimomentem; stąd bimoment wyraża się wzorem

$$(2.2) \quad B = M^B h.$$

Półka pracuje jak belka pozioma; stąd pochodna momentu w półce równa się sile tnącej, a uwzględniając zależności (2.1) pochodna bimomentu równa się momentowi skręcającemu

$$(2.3) \quad \frac{dB(s)}{ds} = M^S(s).$$

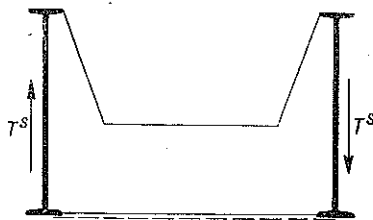
Całkując równanie (2.3) otrzymamy wzór na bimoment:

$$(2.4) \quad B(s_1) = B(0) + \int_0^{s_1} M^S(s) ds.$$

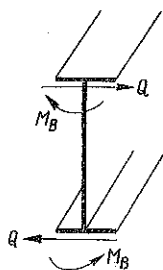
U m a n s k i podaje bardzo prostą metodę obliczania bimomentów, którą objaśnimy na przykładzie (rys. 9). W przekroju n moment skręcający w przypadku wspornika obciążonego siłą skupioną wynosi

$M^S = P\eta$. Bimoment w punkcie m wynosi $B = P \int_0^{s_m} \eta ds$, ale ηds równa

się podwojonej powierzchni zakreskowanego trójkąta na rys. 9. Całka w granicach od zera do s_m będzie się równała sumie elementarnych trójkątów, czyli podwojonej powierzchni zawartej między cięciwą łączącą



Rys. 7



Rys. 8

punkty k i m , a osią pręta. Oznaczając jak poprzednio podwojone pole przez Ω otrzymamy

$$(2.5) \quad B = P \Omega.$$

Przy obliczaniu reakcji bardzo dogodnie jest korzystanie z prostych bimomentu zerowego ([4], s. 160).

Rozpatrzmy belkę zakrzywioną z dodatkowym ramieniem BD , zamocowaną w punkcie D (rys. 10), obciążoną siłami P_A i P_B odpowiednio w punkcie A i B . Bimoment sił P_A i P_B względem punktu D wyraża się zgodnie ze wzorem (2.5) zależnością

$$(2.6) \quad B = P_A \Omega_A + P_B \Omega_B.$$

Powierzchnia Ω_B równa się zero. Powierzchnia Ω_A równa się różnicy między podwojoną powierzchnią Ω_{AB} zawartą między prostą AB i krzywą AB a podwojoną powierzchnią trójkąta ABD :

$$(2.7) \quad \Omega_A = \Omega_{AB} - 2 \Delta ABD.$$

Bimoment sił P_A i P_B względem punktu D będzie równy zero, jeżeli Ω_A będzie się równać zero. Stąd odległość punktu D od prostej AB z równania (2.7) wynosi

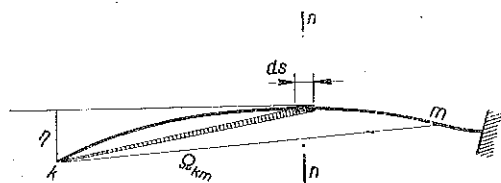
$$(2.8) \quad e_{AB} = \frac{\Omega_{AB}}{a_{AB}}.$$

Miejscem geometrycznym punktów, dla których bimoment sił P_A i P_B jest równy zero, jest prosta równoległa do prostej łączącej punkty A i B . Odstęp między prostymi równa się e_{AB} . Tę prostą nazywamy za U m a n s k i m prostą zerowego bimomentu i oznaczmy symbolicznie $A-B$.

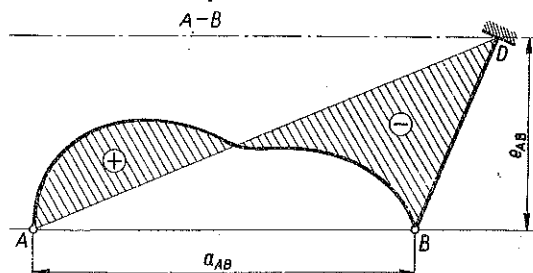
W naszym przypadku moment skręcający przenoszony jest nie przez parę sił poziomych, ale przez parę sił tnących pionowych w środkach dźwigarów głównych (rys. 7). Stąd

$$(2.9) \quad M^S = T^S b,$$

gdzie T^S oznacza siłę tnącą w dźwigarze głównym, pochodzącą od momentu skręcającego, b rozstaw dźwigarów. Oczywiście w tym przypadku nie występuje wielkość statyczna odpowiadająca dokładnie bimomentowi; nie można zachować jednocześnie zależności (2.2) i (2.4). Nazwijmy



Rys. 9

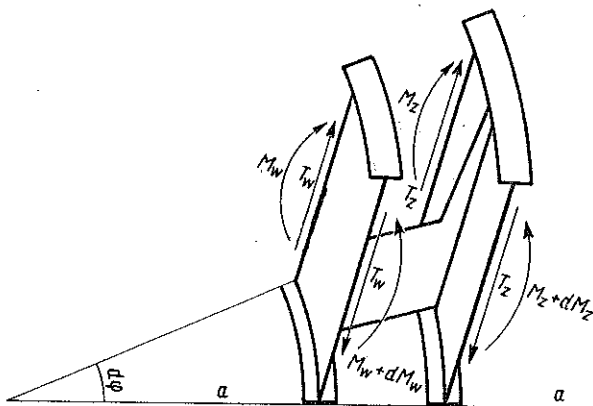


Rys. 10

«bimomentem» w tym przypadku wielkość statyczną określoną wzorem identycznym ze wzorem (2.4):

$$(2.10) \quad B(s_1) = B(0) + \int_0^{s_1} M^S(s) ds,$$

gdzie s należy brać wzdłuż osi mostu. Nie będzie to już jednak para momentów. Dla wyznaczenia momentów w dźwigarze zewnętrznym i wewnętrznym od skręcania należy rozpatrywać równowagę wyciętego elementu (rys. 11). Przyrównanie do zera wszystkich momentów względem promieni (osi $a-a$) nie jest w tym przypadku warunkiem dostatecznym równowagi, gdyż równanie spełnione byłoby dla pary momentów, a przecież element nie posiada żadnej sztywności na skręcanie w tym kierunku. Suma momentów musi być więc równa zero tak w płaszczyźnie dźwigara wewnętrznego, jak i zewnętrznego. Skąd mamy



Rys. 11

Suma momentów musi być więc równa zero tak w płaszczyźnie dźwigara wewnętrznego, jak i zewnętrznego. Skąd mamy

$$(2.11) \quad \frac{dM_w}{r_w d\varphi} = T_w, \quad \frac{dM_z}{r_z d\varphi} = T_z.$$

Po scałkowaniu otrzymamy wzory na momenty w dźwigarze wewnętrznym i zewnętrznym

$$(2.12) \quad \begin{cases} M_w(\varphi) = M_w(0) + \int_0^\varphi T_w r_w d\varphi, \\ M_z(\varphi) = M_z(0) + \int_0^\varphi T_z r_z d\varphi. \end{cases}$$

Siły tnące od skręcania w dźwigarze wewnętrznym i zewnętrznym wynoszą odpowiednio T^S i $-T^S$. Stąd ze wzoru (2.12) wynika, że dla warunku brzegowego $M_w(0) = M_z(0) = 0$ stosunek momentu w dźwigarze zewnętrznym M_z^B do momentu w dźwigarze wewnętrznym M_w^B (towarzyszących siłom tnącym od skręcania) równa się stosunkowi promienia zewnętrznego r_z do promienia wewnętrznego r_w , co można przedstawić wzorem

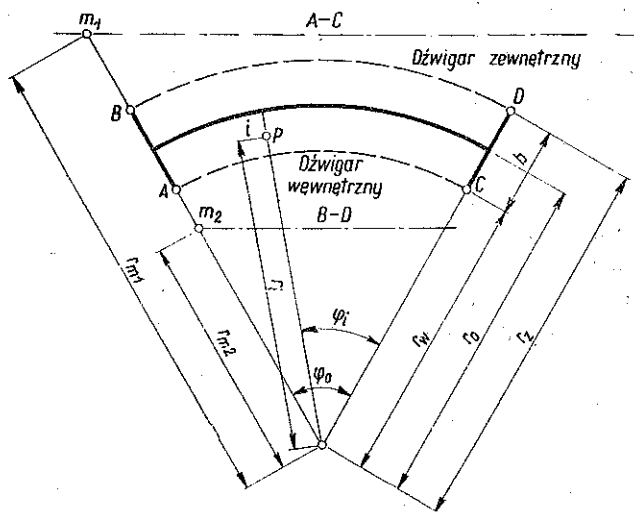
$$(2.13) \quad \frac{M_z^B}{M_w^B} = \frac{r_z}{r_w},$$

gdzie symbol M_z^B oznacza moment w dźwigarze zewnętrznym, towarzyszący siłom tnącym od skręcania, M_w^B to samo dla dźwigara wewnętrznego. Na podstawie wzorów (2.9), (2.10) i (2.12) po uwzględnieniu równania (2.13) możemy napisać

$$(2.14) \quad B = (M_z^B - M_w^B) \frac{b}{2}.$$

Wzór (2.14) odpowiada wzorowi (2.2).

Definicję bimomentu w naszym przypadku przyjęto jako całkę momentu skręcającego (2.10), ażeby zachować wzór (2.5) oraz związane z tym wzorem udogodnienie przy obliczaniu bimomentu (2.5) i pojęcie prostej bimomentu zerowego.



Rys. 12

Most otwarty w łuku jest przedstawiony schematycznie na rys. 12. Należy najpierw wyznaczyć siedem reakcji. Mamy do dyspozycji sześć równań równowagi ciała sztywnego; będą one spełnione, jeżeli nad podporą suma momentów w dźwigarze zewnętrznym i wewnętrznym będzie równa się zero. Tymczasem musi być równy zero moment podporowy w dźwigarze zewnętrznym i wewnętrznym oddzielnie.

Warunek ten będzie spełniony, gdy dodatkowo suma bimomentów względem dowolnego punktu wszystkich sił z reakcjami włącznie będzie równa zero. Słuszność powyższego twierdzenia można wykazać bardzo prosto. Na podstawie wzorów (2.14) oraz (2.12) można wyrazić bimoment w zależności od całkowitych momentów w dźwigarze wewnętrznym i zewnętrznym. Po prostych przekształceniach otrzymamy

$$(2.15) \quad B = \frac{b}{2} \left(M_z \frac{r_0}{r_z} - M_w \frac{r_0}{r_w} \right),$$

gdzie M_z oznacza całkowity moment w dźwigarze zewnętrznym a M_w całkowity moment w dźwigarze wewnętrznym. Warunek momentów daje

$$(2.16) \quad M_z + M_w = 0,$$

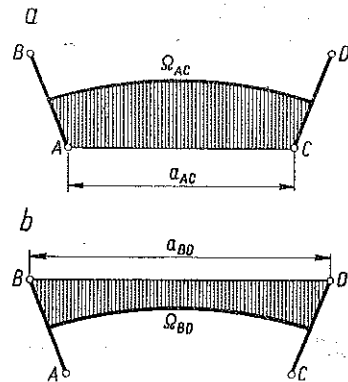
a z warunku bimomentów otrzymujemy na podstawie wzoru (2.15)

$$(2.17) \quad M_z \frac{r_0}{r_z} - M_w \frac{r_0}{r_w} = 0.$$

Równania powyższe będą spełnione, jeżeli M_z i M_w będą równe zero oddzielnie. Stąd widać, że jeśli bimomentów równają się zero, to są spełnione warunki podparcia mostu.

Mając do dyspozycji siedem równań potrafimy wyznaczyć siedem reakcji podporowych. Dla uproszczenia obliczeń biegun, względem którego będziemy wyznaczać sumę bimomentów, obieramy na przecięciu prostych bimomentu zerowego. Obliczmy dla przykładu prostą bimomentu zerowego dla linii AC (rys. 12). Najpierw obliczmy podwójną powierzchnię Ω_{AC} (rys. 13):

$$(2.18) \quad \begin{cases} \Omega_{AC} = r_0^2 \varphi_0 - r_w^2 \sin \varphi_0, \\ a_{AC} = 2 r_w \sin \frac{\varphi_0}{2}. \end{cases}$$



Rys. 13

Odległość prostej bimomentu zerowego A - C od prostej AC obliczymy ze wzoru (2.8):

$$(2.19) \quad e_{AC} = \frac{\Omega_{AC}}{a_{AC}} = \frac{r_0^2 \varphi_0 - r_w^2 \sin \varphi_0}{2 r_w \sin \frac{\varphi_0}{2}}.$$

Promień r_{m_1} (rys. 12) wynosi

$$r_{m_1} = r_w + \frac{e_{AC}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}.$$

Po zastąpieniu e_{AC} na podstawie wzoru (2.19) i po uproszczeniach otrzymamy

$$(2.20) \quad r_{m_1} = \frac{r_0^2}{r_w} \frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0}.$$

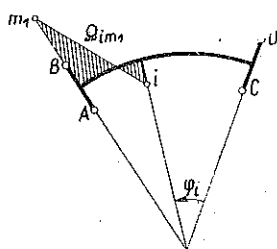
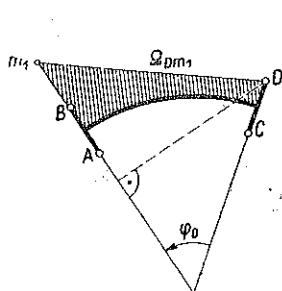
Prosta bimomentu zerowego A - B pokrywa się z prostą AB. Dla każdego punktu leżącego na prostej bimomentu zerowego A - C bimotoent sił działających w punktach A i C jest równy zero. To samo doty-

czy prostej $A-B$. Stąd dla punktu m_1 leżącego na przecięciu prostych bimomentu zerowego $A-C$ i $A-B$ tylko reakcja r_D i siła P_i wpływają na bimoment. Wyznamy bimoment sił V_D i P_i względem punktu m_1 .

Obliczmy najpierw Ω_{Dm_1} i Ω_{im_1} (rys. 14):

$$\Omega_{Dm_1} = r_m r_z \sin \varphi_0 - 2\pi r_0^2 \frac{\varphi_0}{2\pi}.$$

Po podstawieniu r_m , ze wzoru (2.20) i po uproszczeniach otrzymamy



Rys. 14

$$\Omega_{Dm_1} = r_0^2 \varphi_0 \frac{b}{r_w}.$$

Analogicznie znajdziemy

$$\Omega_{im_1} = r_0^2 (\varphi_0 - \varphi_i) - \frac{r_0^2 \varphi_0}{r_w \sin \varphi_0} r_i \sin(\varphi_0 - \varphi_i).$$

Równanie $\sum B_{m_1} = 0$ daje

$$V_D \Omega_{Dm_1} + 1 \Omega_{im_1} = 0.$$

Stąd

$$(2.21) \quad V_D = -\frac{\Omega_{im_1}}{\Omega_{Dm_1}} = -\frac{r_w}{b} \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} + \frac{r_i}{b} \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_i)}{\sin \varphi_0}.$$

Analogicznie można obliczyć reakcję V_C . Ostatecznie otrzymamy

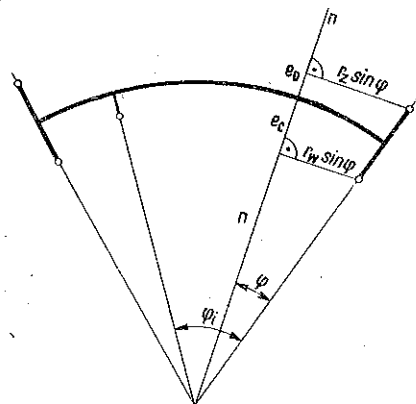
$$(2.22) \quad V_C = \frac{r_z}{b} \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} - \frac{r_i \sin(\varphi_0 - \varphi_i)}{b \sin \varphi_0}.$$

Łatwo zauważyć, że powyższe wzory są identyczne ze wzorami Gottfelda¹.

Po wyznaczeniu linii wpływowych reakcji obliczenie linii wpływowych wielkości statycznych w poszczególnych przekrojach nie napotyka na większe trudności. Obliczmy najpierw wielkość siły tnącej T i momentu skręcającego M^S w przekroju n o współrzędnej φ .

Siła tnąca w przekroju n przy uwzględnieniu V_C i V_D według wzorów (2.21) i (2.22) i po redukcjach wyniesie

$$(2.23) \quad T = V_C + V_D = \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0}.$$



Rys. 15

¹ [3], s. 467, wzór (236).

Moment skrecający w przekroju n (rys. 15) znajdziemy po uwzględnieniu, że

$$e_C = r_0 - r_w \cos \varphi, \quad e_D = r_0 - r_z \cos \varphi$$

i po wykorzystaniu wzorów (2.21) i (2.22). Moment ten jest równy

$$(2.24) \quad M^S = V_C e_C + V_D e_D = r_0 \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} - r_i \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_i)}{\sin \varphi_0} \cos \varphi.$$

Wzory na linie wpływowe sił tnących w dźwigarze zewnętrznym i wewnętrznym otrzymamy dzieląc siłę tnącą obliczoną dla całego przekroju (2.23) przez dwa i odpowiednio dodając lub odejmując od tego ilorazu iloraz momentu skrecającego (2.24) przez rozstaw dźwigarów:

$$(2.25.1) \quad T_z = \frac{T}{2} - \frac{M^S}{b} = -\frac{r_w}{b} \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} + \frac{r_i}{b} \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_i)}{\sin \varphi_0} \cos \varphi.$$

Analogicznie znajdziemy

$$(2.25.2) \quad T_w = \frac{T}{2} + \frac{M^S}{b} = \frac{r_z}{b} \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} - \frac{r_i}{b} \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_i)}{\sin \varphi_0}.$$

Momenty zginające w dowolnym przekroju znajdziemy całkując siły tnące zgodnie ze wzorem (2.12). Otrzymamy mianowicie

$$(2.26.1) \quad M_z = -\frac{r_z r_w}{b} \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} \varphi + \frac{r_i r_z}{b} \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_i)}{\sin \varphi_0} \sin \varphi$$

oraz

$$(2.26.2) \quad M_w = \frac{r_w r_z}{b} \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} \varphi - \frac{r_i r_w}{b} \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_i)}{\sin \varphi_0} \sin \varphi.$$

Wzory Gottfelda wyprowadzone są dla kratownicy poligonalnie łamanej w węzłach. Kiedy przejdziemy do granicy we wzorach Gottfelda na momenty w dźwigarach² (ciągłe zakrzywienie), to otrzymamy odpowiednie wzory (2.26.1) i (2.26.2).

3. Wyprowadzenie wzorów przybliżonych

Wzory (2.25.1) i (2.25.2) na siły tnące w dźwigarach oraz (2.26.1) i (2.26.2) na momenty w praktycznym obliczaniu są niewygodne, ponieważ występują w nich różnice liczb bardzo mało różniących się od siebie. Szczególnie dla małych kątów, dla których $\sin \varphi$ różni się bardzo mało od φ , wymagana jest bardzo duża dokładność obliczania. Przy przyjęciu wartości funkcji trygonometrycznych z pięciocyfrowych tablic

² [3], s. 467, wzór (235).

można często otrzymać bardzo niedokładne wyniki. Wzory wyprowadzone w poprzednim rozdziale można z powodzeniem stosować przy obliczeniu konstrukcji o dużej krzywiznie np. torów wewnętrznych obiektów przemysłowych, bocznic itp.

Jeżeli chodzi o mosty, to w ważnych przypadkach w praktyce promień krzywizny jest duży (300-1000 m), a kąt środkowy mały. Dla małych kątów środkowych można wyprowadzić wzory przybliżone, których dokładność jest duża.

Punktem wyjścia są równania równowagi elementu wyciętego z belki krzywoliniowej. Równania równowagi elementu dotyczą sumy sił pionowych oraz sumy momentów względem promienia i stycznej do elementu, [5]. Są to równania

$$(3.1.1) \quad \frac{dT}{ds} + q = 0,$$

$$(3.1.2) \quad \frac{dM^S}{ds} + \frac{M}{r} = 0,$$

$$(3.1.3) \quad \frac{dM}{ds} - \frac{M^S}{r} - T = 0,$$

gdzie poza znanymi wielkościami występuje symbol q oznaczający obciążenie ciągłe.

Przyjmijmy, że moment skrecający względem promienia nie wpływa na równowagę. Równanie (3.1.3) przejdzie w zwykłe równanie dla pręta prostego:

$$(3.2) \quad \frac{dM}{ds} - T = 0.$$

Uwzględniając ten wynik w równaniu (3.1.2) i jednokrotnie całkując je otrzymamy moment skrecający. Będzie to pierwsze przybliżenie. Drugie przybliżenie uzyskamy wstawiając otrzymaną funkcję dla momentu skrecającego do równania (3.1.3). Otrzymany nowy moment zginający jest podstawą obliczenia drugiego przybliżenia na moment skrecający. Stosując w ten sposób określony proces iteracyjny otrzymujemy ciągi dla momentu skrecającego i zginającego. Dla małych kątów wystarczy w zupełności pierwsze przybliżenie. Powyższe uwagi dotyczą oczywiście i bi-momentu.

Z równań (3.1.1), (3.1.2) i (3.2) możemy wyznaczyć zależność między momentem skrecającym a obciążeniem:

$$(3.3) \quad \frac{d^3 M^S}{ds^3} = \frac{q}{r}.$$

Pochodna bimomentu równa się momentowi skręcającemu, a zatem mamy

$$(3.4) \quad \frac{d^4 B}{ds^4} = \frac{q}{r}.$$

Otrzymany wzór jest podobny do równania różniczkowego odkształconej pręta zginanego

$$(3.5) \quad \frac{d^4 y}{ys^4} = \frac{q}{EJ}.$$

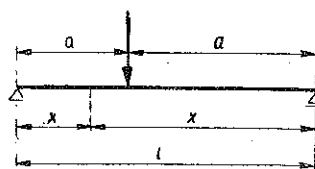
Ponieważ w naszym przypadku warunki brzegowe dla równań (3.4) i (3.5) są identyczne, istnieje zupełna analogia.

Dla wyznaczenia linii wpływowej bimomentu możemy skorzystać z podanego w każdej tablicy równania odkształconej belki wolnopodpartej, obciążonej siłą skupioną, [6],

$$w = \frac{Pl^3}{6EJ} \zeta' \xi (1 - \zeta'^2 - \xi^2),$$

gdzie

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \xi' = \frac{x'}{l}, \quad \zeta = \frac{a}{l}, \quad \zeta' = \frac{a'}{l}.$$



Rys. 16

Podstawiając odpowiednie wartości w oznaczeniach oraz $\xi = \varphi/\varphi_0$ i $\xi' = (\varphi_0 - \varphi)/\varphi_0$ otrzymujemy

$$(3.6) \quad B = \frac{r_0^2 \varphi_0^3}{6} \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} \frac{\varphi}{\varphi_0} \left[\frac{\varphi_i}{\varphi_0} \frac{2\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \right],$$

$$(3.7) \quad M^S = \frac{dB}{r_0 d\varphi} = \frac{r_0 \varphi_0^2}{6} \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} \left[\frac{\varphi_i}{\varphi_0} \frac{2\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} - 3 \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \right],$$

$$(3.8) \quad T = -r_0 \frac{d^2 M^S}{r^2 d\varphi^2} = \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0}.$$

Powyższe wzory dotyczyły przypadku, gdy siła porusza się po osi mostu. Gdy siła działa mimosirowo, to przenosząc ją do środka otrzymujemy dodatkowe obciążenie momentu skręcającego o wielkości Pe (e mierzy się od osi w kierunku dźwigara zewnętrznego). W ramach poczynionych założeń możemy rozwiązać przypadek obciążenia momentem skręcającym zewnętrznym obliczając odpowiednie momenty skręcające i bimomenty metodą stosowaną do obliczenia pręta prostego wolno podpartego zamocowanego na skręcanie:

$$(3.9) \quad M_e^S = e \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0}.$$

Ostatecznie siła tnąca w dźwigarze zewnętrznym równa się

$$T_z = \frac{T}{2} + \frac{M^S}{b} + \frac{M_c^S}{b} = \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{b \varphi_0} \left\{ \frac{b}{2} + e + \frac{r_0 \varphi_0}{6} \varphi_0 \left[\frac{\varphi_i}{\varphi_0} \left(2 - \frac{\varphi_i}{\varphi_0} \right) - 3 \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \right] \right\}.$$

Oznaczmy przez e_w odległość siły od dźwigara wewnętrznego. Po wprowadzeniu tego oznaczenia

$$(3.10) \quad e_w = \frac{b}{2} + e$$

mamy

$$(3.11) \quad T_z = \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{b \varphi_0} \left\{ e_w + \frac{r_0 \varphi_0}{6} \varphi_0 \left[\frac{\varphi_i}{\varphi_0} \left(2 - \frac{\varphi_i}{\varphi_0} \right) - 3 \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \right] \right\}.$$

Siłę tnącą w dźwigarze wewnętrznym znajdujemy się analogicznie:

$$(3.12) \quad T_w = \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{b \varphi_0} \left\{ e_z - \frac{r_0 \varphi_0}{6} \varphi_0 \left[\frac{\varphi_i}{\varphi_0} \left(2 - \frac{\varphi_i}{\varphi_0} \right) - 3 \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \right] \right\},$$

gdzie $e_z = b/2 - e$ oznacza odległość siły od dźwigara zewnętrznego.

Momenty można znaleźć całkując wykresy sił tnących:

$$(3.13) \quad M_z = \frac{r_z \varphi_0}{b} \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} \frac{\varphi}{\varphi_0} \left\{ e_w + \frac{r_0 \varphi_0}{6} \varphi_0 \left[\frac{\varphi_i}{\varphi_0} \left(2 - \frac{\varphi_i}{\varphi_0} \right) - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \right] \right\},$$

$$(3.14) \quad M_w = \frac{r_w \varphi_0}{b} \frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} \frac{\varphi}{\varphi_0} \left\{ e_z - \frac{r_0 \varphi_0}{6} \varphi_0 \left[\frac{\varphi_i}{\varphi_0} \left(2 - \frac{\varphi_i}{\varphi_0} \right) - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \right] \right\}.$$

Wzory powyższe stosuje się, gdy siła znajduje się po prawej stronie przekroju, w którym szukamy momentu czy siły tnącej. W przeciwnym przypadku wystarczy w tych wzorach podstawić $\bar{\varphi}_i = \varphi_0 - \varphi_i$ i $\bar{\varphi} = \varphi_0 - \varphi$.

We wzorach (3.13) i (3.14) można wprowadzić jeszcze jedno uproszczenie. Dla dużych promieni krzywizny, a małych szerokości można przyjąć $r_z \approx r_w \approx r_0$. Wprowadzenie tego uproszczenia daje mały błąd ze względu na to, że r_z i r_w występują w tych wzorach jako mnożniki przed całym wyrażeniem.

Dobrym sprawdzeniem przydatności wzorów do praktycznych obliczeń jest zbadanie ich zachowania się przy przejściu do wypadków prostszych. Zastosujemy wzory do przypadku mostu prostego. Wtedy promienie będą dążyły do nieskończoności, a kąt φ_0 do zera, z tym zastrzeżeniem, że $r\varphi_0$ jako długość mostu oraz stosunki φ/φ_0 , określając położenie punktu, w którym szukamy momentu lub położenie siły, pozostaną stałe. Wzory ściśle (2.25) i (2.26) w tym przypadku będą dążyły do granicy jak wielkości nieoznaczone typu $\infty - \infty$. Granica odpowiada oczywiście belce prostej. Stąd wzory te dla małych krzywizn są bardzo niewygodne.

Natomiast we wzorach przybliżonych w tym przypadku drugie wyrażenie w nawiasach będzie stawać się zerem i otrzymamy wzory dla belki prostej.

Przykład. Wymiary dla przykładu zaczerpnięto z pracy [13]. Dane:

$$\begin{aligned} l_w &= 30 \text{ m}, & l_3 &= 32 \text{ m}, & l_0 &= 31 \text{ m}, \\ r_w &= 75 \text{ m}, & r_z &= 80 \text{ m}, & r_0 &= 77,5 \text{ m}, \\ & & b &= 5 \text{ m}, & \varphi_0 &= 0,4. \end{aligned}$$

Obliczmy rzędne linii wpływowej momentu w dźwigarze wewnętrznym i zewnętrznym dla środka rozpiętości $\varphi = \varphi_0/2$ oraz dla siły wędrującej po osi mostu $r_i = r_0$:

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{r_0 r_z}{b} \frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_0} \sin \frac{\varphi_0}{2} - \frac{r_z r_w}{b} \frac{\varphi_i \varphi_0}{2}, \\ M_w &= \frac{r_z r_w}{b} \frac{\varphi_i \varphi_0}{2} - \frac{r_0 r_w}{b} \frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_0} \sin \frac{\varphi_0}{2}. \end{aligned}$$

Po wstawieniu liczb otrzymujemy

$$M_z = 632,6095 \sin \varphi_i - 600,0000 \varphi_i,$$

$$M_w = 600,0000 \varphi_i - 593,0714 \sin \varphi_i.$$

Obliczamy momenty według wzorów przybliżonych:

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{r_z \varphi_0}{b} \frac{\varphi_i}{\varphi_0} \frac{1}{2} \left\{ \frac{b}{2} + \frac{r_0 \varphi_0}{6} \varphi_0 \left[\frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} \frac{\varphi_0 + \varphi_i}{\varphi_0} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] \right\}, \\ M_w &= \frac{r_w \varphi_0}{b} \frac{\varphi_i}{\varphi_0} \frac{1}{2} \left\{ \frac{b}{2} - \frac{r_0 \varphi_0}{6} \varphi_0 \left[\frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} \frac{\varphi_0 + \varphi_i}{\varphi_0} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

co daje

$$\begin{aligned} M_z &= 3,2 \frac{\varphi_i}{\varphi_0} \left\{ 2,5 + 2,06667 \left[\frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} \frac{\varphi_0 + \varphi_i}{\varphi_0} - 0,25 \right] \right\}, \\ M_w &= 3,0 \frac{\varphi_i}{\varphi_0} \left\{ 2,5 - 2,06667 \left[\frac{\varphi_0 - \varphi_i}{\varphi_0} \frac{\varphi_0 + \varphi_i}{\varphi_0} - 0,25 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Gdybyśmy przyjęli $r_z \approx r_w \approx r_0$, mielibyśmy w obu powyższych wzorach współczynnik liczbowy 3,1 zamiast 3,2 i 3,0.

Zestawiamy rzędne obliczone na podstawie różnych wzorów w tabl. 1 i tabl. 2.

Tablica 1. Wartości M_w

φ_i/φ_0	0,125	0,250	0,375	0,500
Wzory Gottfelda	0,347	0,772	1,338	2,130
Wzory nasze ścisłe	0,358	0,794	1,371	2,174
Wzory nasze przybliżone	0,368	0,809	1,391	2,200
Przy założeniu $r_w \approx r_z \approx r_0$	0,380	0,835	1,439	2,272

Tablica 2. Wartości M_z

φ_i/φ_0	0,125	0,250	0,375	0,500
Wzory Gottfelda	1,630	3,177	4,573	5,728
Wzory nasze ścisłe	1,619	3,153	4,537	5,681
Wzory nasze przybliżone	1,607	3,137	4,511	5,653
Przy założeniu $r_w \approx r_z \approx r_0$	1,557	3,038	4,430	5,480

Różnica pomiędzy rzędnymi wyliczonymi na podstawie wzorów Gottfelda i wzorów naszych wynikają z tego, że Gottfeld oblicza je dla belki poligonalnie łamanej w punktach podziału.

Maksymalny błąd rozwiązania przybliżonego wynosi 1,2%, a przy przyjęciu $r_w \approx r_z \approx r_0$ błąd wzrasta do 4,5%. Orientacyjnie można przyjąć, że błąd nie przekracza stosunku b do r . (W tym wypadku $b/r = 6,45\%$). Jak widać z przykładu, w którym promień jest wyjątkowo mały a szerokość duża, wzory przybliżone dają bardzo dobre wyniki.

Hartman podał w pracy [3], s. 464, wzory przybliżone, których dokładność jest identyczna ze wzorami przybliżonymi podanymi powyżej przy przyjęciu, że $r_w \approx r_z \approx r_0$. Jak widać z obliczonego przykładu, założenie to prowadzi do poważnego wzrostu błędu.

Na zakończenie trzeba wspomnieć o belkach ciągłych. Najprostsze rozwiązanie otrzymamy rozcinając i zakładając nieznanne momenty i bimomenty. Jednak obliczenie współczynników układów równań wymaga obszerniejszego omówienia. Z tego względu belki ciągłe będą tematem osobnej publikacji.

Literatura cytowana w tekście

- [1] H. Gottfed, *Die Berechnung räumlich gekrümmter Stahlbrücken*, Bautechnik 1932.
- [2] H. Gottfeld, *Einflusslinien für räumlich gekrümmter Stahlbrücken*, der Stahlbau 1933, s. 57.
- [3] F. Hartman, *Stahlbrücken*, Franz Deutiche, Wiedeń 1951.
- [4] A. A. Umanski, *Prostranstwiennyje sistemy*, Strojizdat, 1948.
- [5] W. Nowacki, *Mechanika budowli*, cz. 2, PWN, Warszawa-Łódź 1954.
- [6] F. Schleicher, *Taschenbuch für Bauingenieure*, Berlin 1943.

Резюме

СТАТИКА КРИВОЛИНЕЙНОГО МОСТА ОТКРЫТОГО СЕЧЕНИЯ

Темой работы является выведение точных и приближенных формул для статических расчетов моста открытого сечения (рис. 1). Предположено, что полный скручивающий момент уравновешен парой касательных сил в главных балках. Теория двутавров, изогнутых в плоскости полок, для случая, когда можно принять упрощение, что скручивающий момент, переносимый чистым кручением, равен нулю, подробно рассмотрена Уманским, [4]. Автор применяет эту теорию для двутавра, изогнутого в плоскости стенки. Для сохранения упрощений в вычислениях, введенных Уманским, автор определяет в данном случае «бимомент», как интеграл скручивающего момента (2.10). Так определенный бимомент уже не является парой моментов, а формулы для него (2.14) выводятся исходя из уравнений равновесия вырезанного элемента (рис. 11).

При определении реакции, происходящей от сосредоточенной силы, сначала находят точки, для которых соответствующий «бимомент» только одной реакции не равен нулю. Затем, путем приравнения к нулю суммы бимоментов всех сил, совместно с реакциями, по отношению к этим точкам, определены линии влияния реакции (2.21) и (2.22). После определения этих линий, определены линии влияния поперечных сил во внешней и внутренней балках (2.25,2), а также линии влияния изгибающих моментов (2.26.1) и (2.26.2).

Приближенное решение является первым приближением итерационного решения системы соответственных дифференциальных уравнений. Вычисление приближенных формул для линий влияния очень просто, так как приближенное дифференциальное уравнение бимоментов тождественно уравнению линии прогиба балки. Статические приближенные величины, выраженные формулами (3.11), (3.12), (3.13) и (3.14), определены при помощи полиномов. Приводится числовой пример, доказывающий большую точность приближенных формул.

Summary

STRUCTURAL ANALYSIS OF AN OPEN CROSS-SECTION CURVELINEAR BRIDGE

The subject of this paper is the derivation of accurate and approximate equations of structural analysis for an open cross-section bridge (Fig. 1). It is assumed that the total torque is equilibrated by a pair of shearing forces in principal girders. The theory of double-tee beams, curved in the plane of the flanges, in conditions for which it can be assumed that the torque of pure torsion is equal to zero, has been treated in detail by U m a n s k i j, [4]. The present author applies this theory to a double tee-beam curved in the plane of the web. In order to preserve the simplifications introduced by U m a n s k i j, the author defines the bimoment as an integral of the torque (2.10). The bimoment thus defined will not be a pair of moments. Starting from the equations of equilibrium of an element (Fig. 11), formulae for such a bimoment are derived, (2.14).

For the purpose of determining the reaction due to a concentrated force points are first determined for which the corresponding bimoment of only one reaction is different from zero. Next to be determined, setting equal to zero the sum of bimoments of all forces (including the reactions) in relation to these points, is the influence lines for the reactions (2.21) and (2.22). After determining the influence lines for the reactions, next come the influence lines for shear forces in the outer girder (2.25) and the inner girder (2.25.2), and the lines for bending moments (2.26.1) and (2.26.2).

The approximate solution is the first iteration for the solution of the corresponding system of differential equations.

The computation of approximate formulae for the influence lines is very simple, since the approximate differential equation of the bimoment is identical with that of beam deflection. The approximate statical quantities — the approximate equations (3.11) - (3.14) — are determined by means of polynomials. The numerical example discussed shows a high degree of accuracy in the approximate equations.

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 czerwca 1955 r.