

WŁADYSŁAW PIECHOCKI

STAN NAPRĘŻENIA W TARCZY KOLISTEJ
WYWOŁANY DZIAŁANIEM ŹRÓDŁA CIEPŁA

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXVI

1. Niech źródło ciepła działa w dowolnym punkcie tarczy o współrzędnych (a, ϑ) . Nie zmniejszając ogólności przyjmijmy $\vartheta = 0$. Pole temperatury opisane jest równaniem różniczkowym

$$(1.1) \quad \Delta T(r, \varphi) = -\frac{W}{\kappa h} \frac{\delta(r-a)}{r} \delta(\varphi),$$

gdzie $T(r, \varphi)$ oznacza temperaturę, W intensywność źródła ciepła, κ współczynnik przewodnictwa cieplnego, h grubość tarczy oraz

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Równanie przemieszczeniowe teorii sprężystości dla płaskiego stanu naprężenia i ustalonego pola temperatury można przedstawić następującym równaniem różniczkowym:

$$(1.2) \quad \Delta \Phi = (1 + \nu) \alpha T,$$

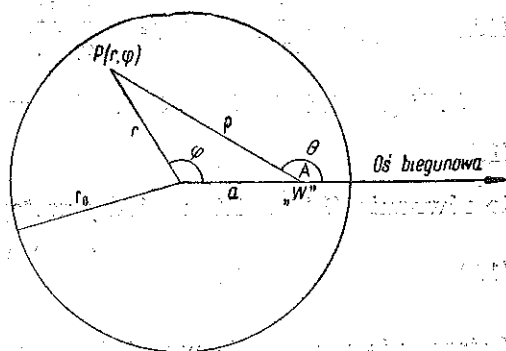
gdzie $\Phi(r, \varphi)$ oznacza potencjał termosprężystego przemieszczenia, ν współczynnik Poissona, α współczynnik rozszerzalności liniowej.

Zależności (1.1) i (1.2) możemy zastąpić równaniem

$$(1.3) \quad \Delta \Delta \Phi = -\frac{(1 + \nu) \alpha W}{\kappa h} \frac{\delta(r-a)}{r} \delta(\varphi).$$

Ponieważ rozpatrujemy tarczę swobodną, zatem na brzegu jej znikają naprężenia $\bar{\sigma}_{rr}$ i $\bar{\sigma}_{r\varphi}$. Natomiast temperatura na brzegu może przybierać dowolną wartość. Korzystamy tutaj z następującego twierdzenia:

W obszarze jednorodnym, nie zawierającym źródeł ciepła, ustalony rozkład temperatury nie wywołuje stanu naprężenia σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$ i $\sigma_{\varphi\varphi}$. Skła-



Rys. 1

dowe stanu naprężenia $\bar{\sigma}_{ik}$ wywołane działaniem źródła ciepła wyrażają się zależnościami

$$(1.4) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \bar{\sigma}_{rr} = -2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right), \quad \bar{\sigma}_{r\varphi} = 2G \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right). \end{cases}$$

W ogólnym przypadku naprężenia $\bar{\sigma}_{rr}$ i $\bar{\sigma}_{r\varphi}$ nie znikają na brzegu tarczy. Należy więc nałożyć drugi stan naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ik}$ taki, że suma

$$(1.5) \quad \sigma_{ik} = \bar{\sigma}_{ik} + \bar{\bar{\sigma}}_{ik}$$

uczyni zadość wymaganym warunkom.

Naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ik}$ obliczamy z funkcji Airy'ego:

$$(1.6) \quad \Delta \Delta F = 0.$$

Jak wiadomo, mamy

$$(1.7) \quad \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{rr} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right), \quad \bar{\bar{\sigma}}_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right).$$

Jeśli przyjąć, że $F = 2G\chi(r, \varphi)$ oraz

$$(1.8) \quad \Psi = \Phi - \chi,$$

to równania (1.2) i (1.7) możemy zastąpić jednym równaniem

$$(1.9) \quad \Delta \Delta \Psi = -\frac{(1+\nu)\alpha W}{\kappa h} \frac{\delta(r-a)}{r} \delta(\varphi).$$

Ostatecznie naprężenia wyrażają się przez funkcję Ψ wzorami

$$(1.10) \quad \begin{cases} \sigma_{\varphi\varphi} = -2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \\ \sigma_{rr} = -2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right), \quad \sigma_{r\varphi} = 2G \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right). \end{cases}$$

Stan naprężenia (1.10) spełnia wszystkie warunki brzegowe.

2. Niech źródło ciepła znajduje się w punkcie A. Rozwiązania równania (1.9) poszukujemy w postaci

$$(2.1) \quad \Psi = \Psi^0 + \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(r) \cos n\varphi,$$

gdzie Ψ^0 jest całką szczególną równania (1.9), a $\Psi_n(r)$ spełnia zwyczajne równanie różniczkowe jednorodne rzędu czwartego. Zastosowanie funkcji

$\Psi_n(r)$ jest możliwe tylko wtedy, jeśli funkcja Ψ^0 daje się przedstawić w postaci szeregu Fouriera:

$$(2.2) \quad \Psi^0(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^0(r) \cos n\varphi.$$

W rozważanym przypadku można znaleźć proste rozwiązanie szczególnych równań (1.9) w postaci znanej funkcji. Jeśli przesuniemy układ współrzędnych do punktu A , to poszukiwaną funkcję Ψ^0 możemy napisać w postaci

$$(2.3) \quad \Psi^0 = C \varrho^3 \ln \frac{\varrho}{a},$$

gdzie

$$C = \frac{(1+\nu)\alpha W}{8\pi\kappa h}, \quad \varrho^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi.$$

Zatem mamy

$$(2.4) \quad \Psi^0(r, \varphi) = \frac{(1+\nu)\alpha W}{16\pi\kappa h} (r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi) \ln \frac{r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi}{a^2}.$$

Natomiast całką ogólną równania jednorodnego będzie funkcja

$$(2.5) \quad \Psi_n(r) = A_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n + B_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n+2} + C_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n} + D_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n+2}.$$

Ponieważ przy $r=0$ naprężenia nie mogą być nieskończenie wielkie, wyrazy $(r/r_0)^{-n}$ i $(r/r_0)^{-n+2}$ odpadają, czyli $C_n \equiv 0$ i $D_n \equiv 0$. Pozostaje więc

$$(2.5.1) \quad \Psi_n(r) = A_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n + B_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n+2}.$$

Nieskończenie wiele stałych A_n i B_n wyznaczamy z warunków brzegowych

$$(2.6) \quad [\sigma_{rr}]_{r=r_0} = 0, \quad [\sigma_{r\varphi}]_{r=r_0} = 0.$$

Najpierw jednak musimy przedstawić funkcję (2.4) w postaci szeregu Fouriera w przedziale $(0, 2\pi)$.

Po obliczeniu odpowiednich współczynników rozwinięcia Fouriera mamy

$$\Psi^0(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^0(r) \cos n\varphi,$$

gdzie

$$\Psi_0^0 = \frac{(1+\nu) \alpha W a^2}{8\pi \kappa h} \left[\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) \ln \frac{r}{a} + 1 \right],$$

$$\Psi_1^0 = \frac{-(1+\nu) \alpha W a^2}{8\pi \kappa h} \left[\left(\frac{r}{a}\right) \left(\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{r}{a}\right) + \left(\frac{a}{r}\right) \right],$$

$$\Psi_n^0 = \frac{(1+\nu) \alpha W a^2}{8\pi \kappa h} \left[\frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-n+2} - \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-n} \right] \quad (r \geq a, n \geq 2)$$

oraz

$$\Psi_0^0 = \frac{(1+\nu) \alpha W a^2}{8\pi \kappa h} r^2,$$

$$\Psi_1^0 = \frac{-(1+\nu) \alpha W a^2}{8\pi \kappa h} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^3 + \left(\frac{r}{a}\right) \right],$$

$$\Psi_n^0 = \frac{(1+\nu) \alpha W a^2}{8\pi \kappa h} \left[\frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{r}{a}\right)^n - \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+2} \right] \quad (a \geq r, n \geq 2).$$

Możemy zatem napisać

$$(2.7) \quad \Psi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi_n^0 + \Psi_n) \cos n\varphi.$$

Podstawiając zależność (2.7) do związków (2.6) otrzymamy

$$(2.8) \quad \begin{cases} \Psi_n^0 + \Psi_n - \frac{n^2}{r_0} (\Psi_n^0 + \Psi_n) = 0, \\ -\Psi_n^0 + \Psi_n + \frac{1}{r_0} (\Psi_n^0 + \Psi_n) = 0, \end{cases}$$

czyli

$$(2.9) \quad \begin{cases} [r_0 \Psi_n^0 + n A_n + (n+2) B_n] - n^2 (\Psi_n^0 + A_n + B_n) = 0, \\ -[r_0 \Psi_n^0 + n A_n + (n+2) B_n] + \Psi_n^0 + A_n + B_n = 0. \end{cases}$$

Skąd

$$A_n = \frac{r_0 \Psi_n^0 - (n+2) \Psi_n^0}{2}, \quad B_n = \frac{n \Psi_n^0 - r_0 \Psi_n^0}{2}, \quad (n \geq 2).$$

W przypadku $n=0$ i $n=1$ należy liczyć A_0, B_0 i A_1, B_1 oddzielnie, wstawiając do równań (2.9) odpowiednie funkcje Ψ_0^0 i Ψ_1^0 . Ostatecznie mamy więc

$$A_0 = \frac{-(1+\nu) \alpha W a^2}{8\pi \kappa h} \left[\ln \frac{r_0}{a} + 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{a^2}\right) \right],$$

$$B_0 = \frac{-(1+\nu) \alpha W a^2}{8\pi \kappa h} \left[\frac{r_0^2}{a^2} \ln \frac{r_0}{a} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{a^2}\right) \right],$$

$$A_1 = \frac{(1+\nu)\alpha W a^2}{8\pi\kappa h} \left[2 \left(\frac{a}{r_0} \right) + 2 \frac{r_0}{a} \ln \frac{r_0}{a} - \frac{1}{2} \frac{r_0}{a} \right],$$

$$B_1 = \frac{(1+\nu)\alpha W a^2}{8\pi\kappa h} \left[\frac{r_0}{a} - \frac{a}{r_0} \right]$$

oraz

$$A_n = \frac{(1+\nu)\alpha W a^2}{8\pi\kappa h} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{a}{r_0} \right)^n - \frac{1}{n-1} \left(\frac{a}{r_0} \right)^{n-2} \right],$$

$$B_n = \frac{(1+\nu)\alpha W a^2}{8\pi\kappa h} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{a}{r_0} \right)^{n-2} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{a}{r_0} \right)^n \right], \quad (n \geq 2).$$

Uwzględniając powyższe zależności otrzymamy

$$(2.10) \quad \Psi(r, \varphi) = -\frac{(1+\nu)\alpha W}{16\pi\kappa h} \left[(r^2 - r_0^2) \left(1 - \frac{a^2}{r_0^2} \right) + \right. \\ \left. + (r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi) \ln \frac{r_0^2(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi)}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi} \right]$$

Obliczone stąd naprężenia przyjmują postać

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{G(1+\nu)\alpha W}{4\pi\kappa h} \left[\frac{a^2}{r_0^2} + \ln \frac{r_0^2(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi)}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi} + \right. \\ &\quad + \frac{2(r - a \cos \varphi)^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi} - \frac{4(r - a \cos \varphi)(a^2 r - ar_0^2 \cos \varphi)}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi} \\ &\quad \left. + a^2(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi) - \frac{2(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi)(a^2 r - ar_0^2 \cos \varphi)}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi} \right], \\ \sigma_{rr} &= \frac{G(1+\nu)\alpha W}{4\pi\kappa h} \left[\frac{a^2}{r_0^2} + \ln \frac{r_0^2(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi)}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi} - \right. \\ &\quad - a^2 \frac{r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi} - \frac{2a^2 r_0^2 \sin^2 \varphi}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi} \times \\ &\quad \times \left(1 - \frac{r_0^2(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi)}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi} \right) + \frac{2a^2 \sin^2 \varphi}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi} \times \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi} - \frac{r_0^2}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi} \right) \right], \\ \sigma_{r\varphi} &= -\frac{G(1+\nu)\alpha W a}{2\pi\kappa h} \left[\sin \varphi \left(\frac{r - a \cos \varphi}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi} - \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2 r - ar_0^2 \cos \varphi}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi} \right) + r_0^2 \sin \varphi \left(\frac{r - a \cos \varphi}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(a^2 r - ar_0^2 \cos \varphi)(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi)}{(r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi)^2} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Jeżeli ze źródłem W będziemy zbliżać się do początku układu współrzędnych (środek tarczy), to

$$(2.12) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \Psi(r, \varphi; a, r_0) = \Gamma(r, \varphi; r_0) = -\frac{(1+\nu)\alpha W}{16\pi\kappa h} \left[(r_0^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r^2}{r_0^2} \right].$$

Obliczone stąd naprężenia równają się

$$(2.13) \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{G(1+\nu)\alpha W}{2\pi\kappa h} \left(1 + \ln \frac{r}{r_0} \right), \quad \sigma_{rr} = \frac{G(1+\nu)\alpha W}{2\pi\kappa h} \ln \frac{r}{r_0} \quad \sigma_{r\varphi} = 0.$$

Te same wartości otrzymamy, jeśli zrobić przejście graniczne we wzorach (2.11). Tak więc otrzymaliśmy, jako przypadek szczególny, rozwiązanie podane przez Melana i Parkusa, [1].

3. W przypadku gdy w tarczy działa kilka źródeł ciepła o jednakowej intensywności W rozmieszczonych na okręgu o promieniu a w równych od siebie odstępach, to również można podać rozwiązanie za pomocą znanych funkcji. Część osobliwa rozwiązania ma postać

$$(3.1) \quad \Psi^0 = \frac{(1+\nu)\alpha W}{16\pi\kappa h} \sum_{i=0}^k \varrho_i^2 \ln \frac{\varrho_i^2}{a^2},$$

gdzie

$$\varrho_i^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi_i, \quad \varphi_i = \varphi - \frac{2\pi}{k}i.$$

Natomiast część regularna

$$(3.2) \quad \Psi_n = A_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^n + B_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n+2}.$$

Pomijając rachunki, które są analogiczne do poprzednich, otrzymamy

$$(3.3) \quad \Psi(r, \varphi) = \frac{(1+\nu)\alpha W}{16\pi\kappa h} \sum_{i=0}^k \left[k(r_0^2 - r^2) \left(1 - \frac{a^2}{r_0^2} \right) + (r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi) \ln \frac{r_0^2(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi_i)}{r_0^4 + a^2 r^2 - 2ar r_0^2 \cos \varphi_i} \right].$$

Stąd można już bezpośrednio obliczyć składowe stanu naprężenia. Otrzymane rozwiązanie dla skupionego źródła ciepła można wykorzystać do wyznaczenia naprężeń w przypadku źródła ciepła rozłożonego wzdłuż linii L lub na obszarze S tarczy.

Jeśli przez

$$\sigma_{ik} = \bar{\sigma}_{ik} + \bar{\bar{\sigma}}_{ik}$$

oznaczyć naprężenie wywołane w punkcie (r, φ) działaniem skupionego źródła ciepła $W=1$, to odpowiednie naprężenie wywołane działaniem

źródła ciepła o intensywności $w(\varrho, \Theta)$ rozłożonym na linii L lub obszarze S wyrazi się całką

$$\sigma_{ik}^* = \int_L w(l) \sigma_{ik}(r, \varphi; \varrho, \Theta) dl$$

lub

$$\sigma_{ik}^* = \int_S \int w(\varrho, \Theta) \sigma_{ik}(r, \varphi; \varrho, \Theta) d\varrho d\Theta.$$

Literatura cytowana w tekście

- [1] E. Melan i H. Parkus, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Wiedeń 1953.
- [2] K. Girkman, *Dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1958.
- [3] E. Melan, *Temperaturverteilungen ohne Wärmespannungen*, Öster. Ing. Arch., 6, 1 (1951).
- [4] H. Bateman, *Tables of Integral Transforms*, New York-Toronto-Londyn 1955.
- [5] Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Moskwa 1949.
- [6] К. А. Китовер, *Тонкие круглые плиты*, Leningrad 1953.
- [7] Рыжик и Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Moskwa 1951.

Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В КРУГОВОМ ДИСКЕ ВЫЗВАННОЕ ДЕЙСТВИЕМ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Целью работы является определить напряженное состояние в круговом диске, вызванное действием источника тепла, расположенного в произвольной точке. Решение этой задачи, состоящее в определении функции Грина, дает возможность определить путем интегрирования напряженное состояние, вызванное действием источника тепла, распределенного вдоль линии L , или в зоне диска. В работе был использован т. н. потенциал упругого перемещения. Уравнение перемещения теории упругости для плоского напряженного состояния (1.2) и стационарного температурного поля заменяется одним уравнением (1.3). Краевые условия выражаются следующим образом: напряжения σ_{rr} и $\sigma_{r\varphi}$ для $r=r_0$ равняются нулю. Дополнительное напряженное состояние $\bar{\sigma}_{ik}$ определяется при помощи функции Эри. Суперпозиция состояний $\bar{\sigma}_{ik}$ и $\bar{\sigma}'_{ik}$ дается в замкнутом виде. Кроме того дается решение для k одинаковых источников. Показано, что в особом случае, когда $a \rightarrow 0$ получается решение данное Меланом и Паркусом.

Summary

THE STATE OF STRESS IN A CIRCULAR DISC DUE TO THE ACTION
OF A SOURCE OF HEAT

The aim of this paper is to determine the stress galvanised in a circular isotropic disc by the action of a heat source W located at an arbitrarily chosen point. The solution of the problem (the determination of the Green's function) enables us to determine, by means of integration, the state of stress due to heat source distributed along the line L , or over the region S of the plate. The so-called potential of thermoelastic displacement is used. The displacement equation of the theory of elasticity for plane stress (1.2), and that for steady temperature field (1.1), are replaced by the unique equation (1.3). The boundary conditions are those of the stresses σ_{rr} and $\sigma_{r\varphi}$, becoming zero for $r = r_0$. The temperature may take any value on the boundary. The additional state of stress $\bar{\sigma}_{ik}$ is determined by means of the Airy function. The result of superposition of $\bar{\sigma}_{ik}$ and $\bar{\sigma}_{ik}$ is obtained in a closed form. In addition, the solution is obtained for k identical sources. It is shown that in the particular case where $a \rightarrow 0$, the solution of Melan and Parkus is obtained.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 października 1958 r.