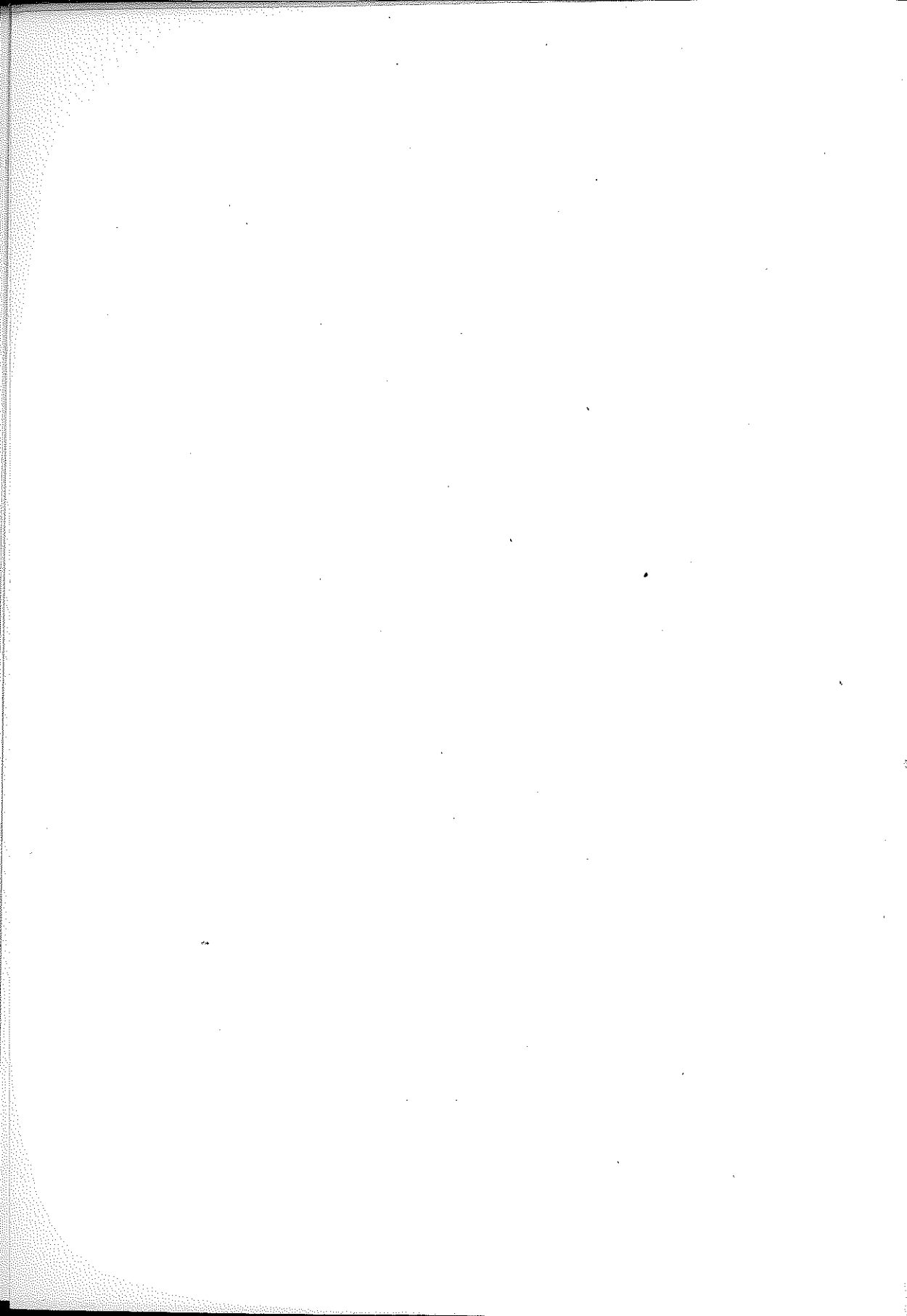


ZENON MRÓZ

NOŚNOŚĆ GRANICZNA I KSZTAŁTOWANIE
WYTRZYMAŁOŚCIOWE PŁYT PIERŚCIENIOWYCH

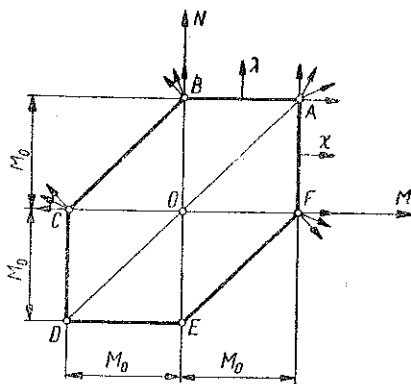
ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXIV



1. Uwagi ogólne

W pierwszej części pracy¹ rozpatrujemy zagadnienie nośności granicznej płyt pierścieniowych przy różnych rodzajach podparcia brzegów i dowolnym kołowo-symetrycznym obciążeniu poprzecznym. W drugiej części omówiono sposób kształtowania płyt o zmiennej grubości; określono optymalne kształty płyt posiadających przy danym obciążeniu najmniejszy ciężar.

W pracy przyjęto założenia teorii płyt o średniej grubości. Pomija się zatem wpływ naprężeń stycznych i normalnych, prostopadłych do środkowej powierzchni płyty, na warunek plastyczności i na stan odkształcenia. Przyjęto model materiału sztywno plastyczny oraz warunek plastyczności Coulomba-Tresca. Oznaczając momenty zginające promieniowy i obwodowy przez M i N możemy warunek plastyczności przedstawić graficznie na płaszczyźnie momentów w postaci sześciokąta (rys. 1), gdzie $M_0 = (1/4)\sigma_0 h^2$ oznacza moment graniczny (h jest grubością płyty).



Rys. 1

Odształcenia mogą występować jedynie w tych obszarach płyty, w których stan naprężenia jest przedstawiony punktami leżącymi na bokach sześciokąta. Równania płynięcia plastycznego formułujemy przyjmując istnienie potencjału plastycznego, przy czym powierzchnia stałego potencjału odpowiada warunkowi plastyczności. Uogólnionymi szybkościami odkształceń dla płyty są szybkości krzywizny²

$$(1.1) \quad \chi = -w_{rr}, \quad \lambda = -\frac{1}{r}w_r,$$

gdzie w oznacza szybkość ugięcia płyty.

¹ Praca była referowana na zebraniu naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN dnia 4.II.1958 r.

² Indeksy umieszczone na dole oznaczają różniczkowanie.

Jeśli pokryjemy osie χ i λ z osiami M i N , to wektory płynięcia będą prostopadłe do odpowiednich boków wieloboku Tresca. Gdy stan naprężenia odpowiada punktowi leżącemu w wierzchołku, to wektor płynięcia ma dowolny kierunek między dwiema zbiegającymi się w tym punkcie normalnymi do boków sześciokąta.

2. Nośność graniczna

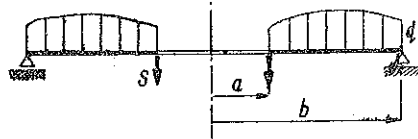
Zagadnienie nośności granicznej płyt kołowych rozpatrywano w pracach H. G. Hopkinsa, [3], [4] i [9], W. Pragera, [3] i [8], W. H. Pella, [8], A. J. Wanga, [4], D. C. Druckera, [9], A. Sawczuka, [7]. Nośność graniczną płyty pierścieniowej swobodnie podpartej oraz utwierdzonej na brzegu zewnętrznym rozpatrywał A. S. Grigoriew, [1]. Obecnie rozważymy taką płytę przy różnych rodzajach podparcia obu brzegów.

Równanie równowagi płyty poddanej działaniu obciążenia poprzecznego q i siły tnącej S na obwodzie wewnętrznym możemy zapisać w postaci

$$(2.1) \quad (rM)_r - N = rQ = -T^{ar} - Sa, \quad \left(T^{ar} = \int_a^r q\eta d\eta \right),$$

gdzie Q jest siłą poprzeczną, a promieniem wewnętrznego otworu (rys. 2) oraz r promieniem bieżącym.

Zadanie polega na określeniu wartości obciążenia poprzecznego, przy którym możliwy jest graniczny stan równowagi, tzn. przy którym pole momentów spełnia równanie (2.1). Jednocześnie wymagamy, aby spełniony był warunek plastyczności w obszarach, gdzie występuje deformacja płyty, oraz aby pole statyczne mogło zostać przedłużone w sposób jednoznaczny na obszary, gdzie płyta zachowuje się jak ciało sztywne i leżące wewnątrz sześcioboku Tresca.



Rys. 2

Pole statycznemu powinno odpowiadać pole szybkości ugięć płyty, określone na podstawie związków fizycznych i w którym są spełnione warunki brzegowe. To pole będzie polem rzeczywistym w przypadku, gdy spełniona będzie równość:

$$(2.2) \quad \int_{A_p} (M\chi + N\lambda) dA = \int_{A_p} qwdA,$$

gdzie dA oznacza element pola powierzchni płyty. W przypadku płyt pierścieniowych, obciążonych kołowo-symetrycznie, możliwe jest określe-

nie pól statycznych i kinematycznych spełniających warunek (2.2), możliwe jest zatem ściśle określenie nośności granicznej płyty przy naszych założeniach.

Rozpatrzmy przypadki różnych rodzajów podparcia obu brzegów płyty.

2.1. Zewnętrzny brzeg płyty jest swobodnie podparty (rys. 3a). Przyjmując, że obciążenia $q(r)$ i S działają na górną powierzchnię płyty, otrzymamy rozwiązanie zakładając, że cała płyta uplastycznia się, przy czym stan naprężeń może reprezentować bok AB sześciokąta $Tresca$. Mamy wtedy $N = M_0$, zaś po scałkowaniu równania równowagi (2.1), i spełnieniu warunków brzegowych $M = 0$, gdy $r = a$ lub gdy $r = b$, otrzymujemy:

$$(2.3) \quad rM = (M_0 - Sa)(r - a) - \int_a^r T^{a\xi} d\xi,$$

$$(2.4) \quad (M_0 - Sa)(b - a) - \int_a^b T^{a\xi} d\xi = 0.$$

Równanie (2.4) określa związek między q i S przy osiągnięciu nośności granicznej. Widzimy, że $M_0 > Sa$, zatem przy $r \geq a$, $M_r \geq 0$ i pole statyczne określone przez (2.3) spełnia warunek $0 \leq M \leq M_0$. W przypadku gdy $q = \text{const}$ otrzymujemy

$$(2.5) \quad M_0 - Sa = \frac{1}{6} q(b - a)(b + 2a).$$

Podanemu rozwiązaniu statycznemu możemy przyporządkować pole kinematyczne o szybkości ugięć w . Mianowicie dla stanu AB mamy

$$(2.6) \quad \chi = -w_{rr} = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{r} w_r > 0,$$

skąd otrzymujemy po spełnieniu warunków brzegowych

$$(2.7) \quad w = W_a \frac{b - r}{b - a}.$$

Płyta zatem w procesie deformacji przyjmuje kształt stożka ściętego.

2.2. Wewnętrzny brzeg płyty jest swobodnie podparty (rys. 3b). Przy obciążeniu działającym na górną powierzchnię płyty stan naprężenia w płycie jest przedstawiony za pomocą boku EF .

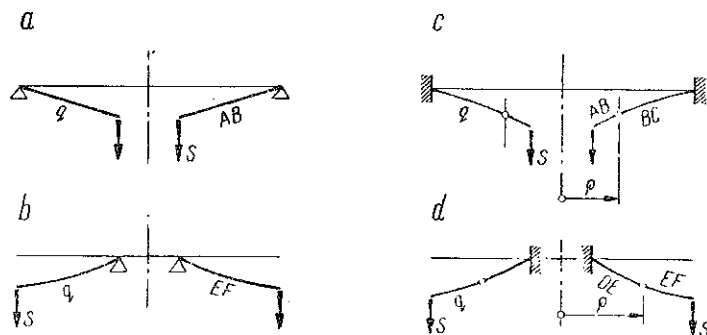
Podstawiając warunek plastyczności $N = M - M_0$ do równania równowagi określamy wielkość momentu promieniowego w obszarze płyty ($M = 0$ dla $r = a$):

$$(2.8) \quad M = -(M_0 - Sb) \ln \frac{r}{a} + \int_a^r \frac{1}{\xi} T^{b\xi} d\xi.$$

Z warunku $M=0$ dla $r=b$ otrzymujemy równanie określające obciążenie graniczne płyty

$$(2.9) \quad -(M_0 - Sb) \ln \frac{b}{a} + \int_a^b \frac{1}{\xi} T^{\xi b} d\xi = 0.$$

Z równań powyższych wynika, że pole statyczne będzie spełniało warunek $0 \leq M \leq M_0$.



Rys. 3

Gdy $q = \text{const}$ i $S = 0$, wielkość obciążenia granicznego wynosi:

$$(2.10) \quad q = \frac{4 M_0 \ln \frac{b}{a}}{2 b^2 \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2}.$$

Dla boku EF wieloboku Tresca mamy $\chi + \lambda = 0$, otrzymamy zatem następującą postać ugięcia płyty:

$$(2.11) \quad w = C \ln \frac{r}{a} = w_b \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}.$$

2.3. Zewnętrzny brzeg płyty jest utwierdzony (rys. 3c). Dla tego przypadku stan naprężenia w płycie będzie przedstawiony za pomocą boków AB i BC sześcioboku Tresca. Mianowicie w przedziale $a \leq r \leq b$ mamy stan AB , tzn. $N = M_0$. Stan naprężeń w tym przedziale wyznaczymy z równania równowagi (2.1); spełniając przy tym warunki brzegowe $M=0$, gdy $r=a$ lub gdy $r=b$, otrzymamy związki analogiczne do (2.3)

i (2.4), gdzie b należy zastąpić przez ϱ . Dla $\varrho \leq r \leq b$ mamy stan BC, tzn. $N = M + M_0$. Po scałkowaniu równania równowagi otrzymamy

$$(2.12) \quad M = (M_0 - Sa) \ln \frac{r}{\varrho} - \int_{\varrho}^r \frac{1}{\xi} T^{a\xi} d\xi,$$

$$(2.13) \quad -M_0 = (M_0 - Sa) \ln \frac{b}{\varrho} - \int_{\varrho}^b \frac{1}{\xi} T^{a\xi} d\xi.$$

Spełniliśmy tutaj warunki brzegowe:

$$M = \begin{cases} 0, & \text{gdy } r = \varrho, \\ -M_0, & \text{gdy } r = b. \end{cases}$$

Z równań (2.4) i (2.13) określamy graniczne obciążenie i promień ϱ . Łatwo możemy udowodnić istnienie rozwiązania spełniającego żądane warunki. Mianowicie równanie (2.4) możemy napisać w postaci:

$$M_0 - Sa = (T^{a\xi}_{sr})_a^{\varrho} > 0,$$

skąd wynika $M_0 \geq Sa$, gdy $\varrho \geq a$. Równanie (2.3) określi zatem moment promieniowy w płycie spełniający nierówność $0 \leq M \leq M_0$ w obszarze $a \leq r \leq \varrho$.

Dla $\varrho \leq r$ mamy z równania (2.12)

$$M_r = (M_0 - Sa - Tar) \frac{1}{r} = [(T^{a\xi}_{sr})_a^{\varrho} - Tar] \frac{1}{r} \leq 0,$$

zatem moment promieniowy stale maleje ($-M_0 \leq M \leq 0$). Z równania (2.13) otrzymamy

$$M_0 = \int_{\varrho}^b \frac{1}{\xi} T^{a\xi} d\xi - (M_0 - Sa) \ln \frac{b}{\varrho} > [(T^{a\xi})_{\xi=\varrho} - (T^{a\xi}_{sr})_a^{\varrho}] \ln \frac{b}{\varrho} \geq 0,$$

skąd wynika, że $\varrho \leq b$.

W szczególnym przypadku, gdy $q = \text{const}$ i $S = 0$ otrzymamy

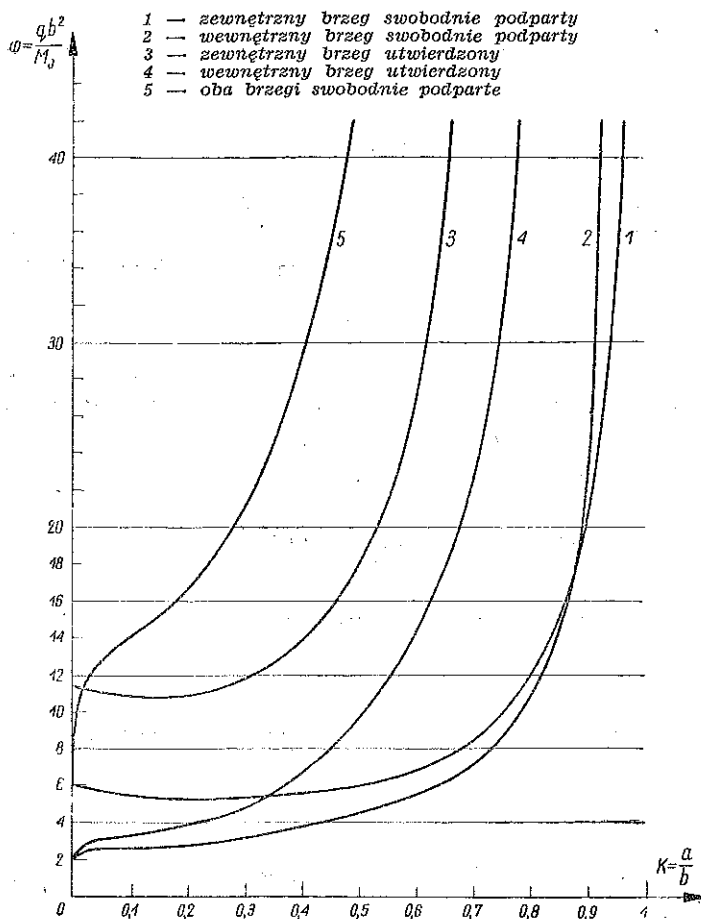
$$(2.14) \quad \begin{cases} M_0 = \frac{1}{6} q(\varrho - a)(\varrho + 2a), \\ 5\varrho^2 + 2\varrho^3 \ln \frac{b}{\varrho} + 2a\varrho \left(1 + \ln \frac{b}{\varrho}\right) + 2a^2 \ln \frac{b}{\varrho} - 3b^2 - 4a^2 = 0. \end{cases}$$

Gdy $q = 0$, $M_0 = Sa$. Stan naprężeń w płycie będzie przedstawiony za pomocą punktu B ($M = 0$).

Szybkość ugięcia płyty możemy przedstawić w następujący sposób:

$$(2.15) \quad \begin{cases} w = C \left(1 + \ln \frac{b}{e} - \frac{r}{e} \right) & \text{dla } a \leq r \leq e, \\ w = C \ln \frac{b}{r} & \text{dla } e \leq r \leq b. \end{cases}$$

Dla $r=e$ zachowana jest ciągłość szybkości kątów ugięcia.



Rys. 4

2.4. Wewnętrzny brzeg płyty jest utwierdzony (rys. 3 d). Dla tego przypadku przy założeniach poprzednich mamy: dla $a \leq r \leq e$ $N = -M_0$ (stan DE), a dla $e \leq r \leq b$ $N = M - M_0$ (stan EF). Otrzymamy zatem dla $a \leq r \leq e$

$$(2.16) \quad rM = -M_0 r + Sb(r-a) + \int_a^r T^{\xi b} d\xi,$$

$$(2.17) \quad -M_0 \varrho + Sb(\varrho - a) + \int_a^{\varrho} T^{\xi b} d\xi = 0.$$

Dla $\varrho \leq r \leq b$ otrzymujemy równania analogiczne do (2.8) i (2.9) przy zamianie w nich a na ϱ . Z równań (2.9) i (2.17) określamy obciążenie graniczne oraz promień ϱ . Analogicznie jak poprzednio możemy udowodnić, że otrzymane pole statyczne odpowiada bokom DE i EF sześcioboku. Dla $S=0$ i $q = \text{const}$ otrzymujemy:

$$(2.18) \quad \begin{cases} q = \frac{6M_0\varrho}{3b^2\varrho - \varrho^3 - 3b^2a + a^3}, \\ 2 \ln \frac{b}{\varrho} (\varrho^3 + 3b^2a - a^3) - 3\varrho(b^2 - \varrho^2) = 0. \end{cases}$$

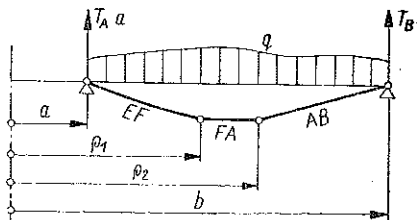
Pole szybkości ugięć przedstawia się następująco:

$$(2.19) \quad \begin{cases} w = A(r-a), & \text{gdy } a \leq r \leq \varrho, \\ w = A \left(\varrho \ln \frac{r}{\varrho} + \varrho - a \right), & \text{gdy } \varrho \leq r \leq b. \end{cases}$$

Wielkości obciążeń granicznych q przy $S=0$ dla różnych rodzajów podparcia płyty przedstawione są graficznie na rys. 4.

Przejdziemy obecnie do rozpatrzenia przypadków, gdy płyta nie posiada brzegu swobodnego.

2.5. Oba brzegi płyty są swobodnie podparte (rys. 5). Z postaci ugięcia płyty widzimy od razu, że krzywizna λ w obszarze płyty zmienia znak, mając zatem warunki na brzegach $M=0$, gdy $r=a$ lub gdy $r=b$ poszukiwać będziemy rozwiązania dla stanów EF - FA - AB lub ED - DC - CB . Okazuje się, że dla obciążeń działających na górnej powierzchni płyty należy przyjąć pierwszą alternatywę, możliwe jest bowiem wtedy określenie pola statycznego spełniającego warunki ciągłości.



Rys. 5

Dla $a \leq r \leq \varrho_1$ mamy stan EF : $N = M - M_0$. Otrzymujemy zatem

$$(2.20) \quad M = (T_A a - M_0) \ln \frac{r}{a} - \int_a^r \frac{1}{\xi} T^{a\xi} d\xi.$$

Dla $r = \varrho_1$ $M = M_0$. Z ciągłości siły poprzecznej wynika, że $[M_r]_{r=\varrho_1} = 0$.

Oba te warunki zapiszemy następująco:

$$(2.21) \quad \begin{cases} M_0 = (T_{Aa} - M_0) \ln \frac{\varrho_1}{a} - \int_a^{\varrho_1} \frac{1}{\xi} T^{a\xi} d\xi, \\ M_0 = T_{Aa} - T^{a\varrho_1}. \end{cases}$$

Gdy w płycie stan naprężenia przedstawiony jest za pomocą boku FA , związki fizyczne określające kierunek płynięcia są następujące:

$$\chi = -w_{rr} \geq 0, \quad \lambda = -\frac{1}{r} w_r = 0.$$

Jedynym rozwiązaniem tych równań jest $\chi = \lambda = 0$, tzn. płyta zachowuje się w tym obszarze jak ciało sztywne. Z drugiej strony stan naprężenia dla obszaru sztywnego może być również przedstawiony za pomocą wnętrza sześcioboku $Tresca$. Dlatego określamy najpierw pole statyczne dla $\varrho_2 \leq r \leq b$, następnie przedłużamy je w sposób ciągły na sztywny obszar $\varrho_1 \leq r \leq \varrho_2$.

Dla $\varrho_2 \leq r \leq b$ mamy stan AB , $N = M_0$. Z równania równowagi łatwo jest stwierdzić, że dla $r = \varrho_2$ $Q = 0$. Możemy więc napisać:

$$(2.22) \quad rM = M_0 r - \int_{\varrho_2}^r T^{e_2 \xi} d\xi$$

oraz po uwzględnieniu warunków brzegowych

$$(2.23) \quad M_0 b - \int_{\varrho_2}^b T^{e_2 \xi} d\xi = 0, \quad T_{Aa} - T^{a\varrho_2} = 0.$$

Z równań (2.21) i (2.23) możemy określić niewiadome $\varrho_1, \varrho_2, T_A$ oraz wielkość obciążenia granicznego. Po przekształceniach otrzymujemy:

$$(2.24) \quad \begin{cases} bT^{e_2 \varrho_2} = \int_{\varrho_2}^b T^{e_2 \xi} d\xi, \\ T^{e_2 \varrho_2} = T^{a\varrho_2} \ln \frac{\varrho_1}{a} - \int_a^{\varrho_1} \frac{1}{\xi} T^{a\xi} d\xi \end{cases}$$

oraz

$$(2.25) \quad M_0 = T^{e_2 \varrho_2}, \quad T_{Aa} = T^{a\varrho_2}.$$

Z równania (2.25) widzimy, że $\varrho_2 > \varrho_1$; z pierwszego równania (2.24) wynika, że $\varrho_2 < b$. Prawa strona drugiego równania (2.24) jest zawsze dodatnia, gdy $\varrho_1 > a$, co jest koniecznym warunkiem istnienia rozwiązania. Ponieważ $T_{Aa} > M_0$, zatem dla $r \geq a$ mamy $M_r > 0$ i pole momentów określone równaniem (2.20) będzie rzeczywiście odpowiadało EF . To samo dotyczy równania (2.22).

Łatwo stwierdzić, że pole statyczne można przedłużyć na obszar $\varrho_1 \leq r \leq \varrho_2$ przyjmując, że odpowiada ono bokowi FA sześcioboku. Mamy bowiem wtedy

$$(2.26) \quad M = M_0, \quad N = M_0 + T^{ar} - T_A a.$$

Ponieważ

$$N = \begin{cases} 0, & \text{gdy } r = \varrho_1, \\ M_0, & \text{gdy } r = \varrho_2, \end{cases}$$

przeto otrzymujemy identyczne związki do (2.21) i (2.23). Określiłiśmy zatem w sposób jednoznaczny stan naprężenia w płycie spełniający żądane warunki. Pole szybkości ugięć jest następujące:

$$(2.27) \quad \begin{cases} w = C \ln \frac{r}{a}, & a \leq r \leq \varrho_1, \\ w = C \ln \frac{\varrho_1}{a}, & \varrho_1 \leq r \leq \varrho_2, \\ w = C \ln \frac{\varrho_1}{a} \frac{b-r}{b-\varrho_2}, & \varrho_2 \leq r \leq b. \end{cases}$$

Rozpatrzmy w szczególnym przypadku $q = \text{const}$. Otrzymamy wtedy z (2.24) i (2.25) dwa równania określające promienie przegubów plastycznych ϱ_1 i ϱ_2 :

$$(2.28) \quad \begin{cases} 2 \varrho_1^2 \ln \frac{\varrho_1}{a} + \varrho_1^2 + a^2 - 2 \varrho_2^2 = 0, \\ 6 b \varrho_2^2 - 2 \varrho_2^3 - b^3 - 3 b \varrho_1^2 = 0 \end{cases}$$

oraz równanie określające obciążenie graniczne

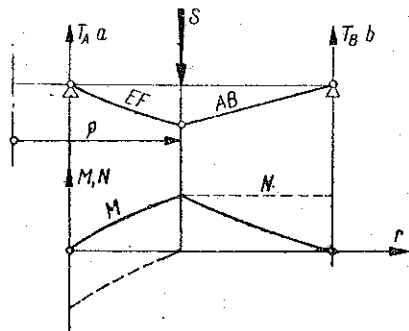
$$(2.29) \quad q = \frac{2 M_0}{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}.$$

Momenty zginające promieniowy i obwodowy są ciągłe w obszarze płyty.

Jeżeli natomiast na płytę działa obciążenie skupione S rozłożone na obwodzie o promieniu $a < \varrho < b$ (rys. 6), otrzymamy nieciągłe pole momentów obwodowych N . Mamy wtedy bowiem

dla $a \leq r \leq b$ (stan EF) $N = M - M_0$,

$$(2.30) \quad M = M_0 \frac{1}{\ln \varrho/a} \ln \frac{r}{a};$$



Rys. 6

dla $e \leq r \leq b$ (stan AB) $N = M_0$,

$$(2.31) \quad M = M_0 \left(1 - \frac{b}{r} \frac{r-e}{b-e} \right),$$

$$(2.32) \quad S_e = M_0 \left(\frac{2b-e}{b-e} + \frac{1}{\ln \frac{e}{a}} \right).$$

Dla $r = e$ N zmienia się skokowo, mamy zatem bezpośrednie przejście ze stanu EF do stanu AB .

Na rysunku 4 są przedstawione wykresy obciążeń granicznych dla różnych warunków brzegowych. Przy $a = 0$ otrzymujemy rozwiązanie dla płyty kołowej bez otworu. Z wykresów widzimy, że dla płyt mających wewnętrzny brzeg swobodny istnieje analityczne minimum $\varphi = qb^2/M_0$ dla $k = a/b > 0$. Przejście do przypadku $a = 0$ dla płyt mających wewnętrzny brzeg podparty jest osobliwe, gdyż prowadzi do siły skupionej działającej w środku. Wywołuje to nieciągłą zmianę momentu promienowego w środku płyty oraz w pewnych przypadkach osobliwe pole szybkości ugięć. Tak np. dla płyty podpartej swobodnie na obu brzegach otrzymujemy:

$$\text{dla } r = 0 \quad M = N = -M_0, \quad (\text{stan } D)$$

$$\text{dla } r > 0 \quad M = M_0 - \frac{qr^2}{6}, \quad N = M_0 \quad (\text{stan } AB).$$

Skokowa zmiana momentów wynosi $|M| = |N| = 2M_0$. Szybkości ugięć dążą do nieskończoności, gdy $a \rightarrow 0$, co wynika ze wzorów (2.27).

W analogiczny sposób można rozpatrzyć inne rodzaje podparcia obu brzegów.

2.6. Metoda układów zastępczych. Zagadnienie wyznaczenia nośności granicznej możemy sprowadzić do dyskusji równania prac wirtualnych dla układu ciał sztywnych o kilku stopniach swobody. Jest to możliwe w przypadku odcinkami liniowego warunku plastyczności, wtedy bowiem pole szybkości ugięć jest określone niezależnie od pola statycznego momentów. W związku z tym moc dyssypowana jest również niezależna od pola statycznego. Jeżeli określimy nośność graniczną płyty dla najprostszego rodzaju obciążenia przy działaniu sił skupionych, możemy porównywać pracę dowolnych obciążeń zewnętrznych z pracą sił w naszym układzie zastępczym przy założeniu, że w obu przypadkach stany naprężenia są przedstawione tymi samymi bokami wieloboku *Tresca*. Przykładając do płyty dane obciążenie i siły z układu zastępczego o kierunku przeciwnym aniżeli rozpatrywane obciążenie, otrzymamy układ ciał sztywnych będący w równowadze, możemy zatem z zasady pracy wirtualnej

określić poszukiwane wielkości. Dla przykładu rozpatrzmy płytę utwierdzoną na brzegu wewnętrznym (rys. 3d). Układ zastępczy otrzymamy obciążając płytę siłami rozmieszczonymi na kole o promieniu ϱ , $P_1\varrho = M_0 a/\varrho - a$, i na brzegu zewnętrznym $P_2 b = M_0$. Pole szybkości ugięć jest przedstawione wzorami (2.19). Jako niezależne współrzędne Lagrange'a obierzmy $q_1 = A$ oraz $q_2 = \varrho$. Otrzymamy

$$\begin{aligned} \delta w_1 &= \delta A (r - a), & a \leq r \leq \varrho, \\ \delta w_2 &= \delta A \left(\varrho \ln \frac{r}{\varrho} + \varrho - a \right) + A d \varrho \ln \frac{r}{\varrho}, & \varrho \leq r \leq b. \end{aligned}$$

Stosując zasadę pracy wirtualnej dla układu o dwóch stopniach swobody,

$$(2.33) \quad \int_a^b q \delta w r dr - P_1 \varrho \delta w_1 - P_2 b \delta w_2 = 0,$$

otrzymamy dwa równania określające wielkość obciążenia granicznego i promień ϱ . Przy $q = \text{const}$ otrzymamy identyczne związki jak (2.18).

Metoda układów zastępczych prowadzi szybciej do wyniku w przypadku, gdy płyta jest obciążona siłami różnej wielkości w sposób nieciągły, co wymaga przy poprzednim sposobie kolejnego całkowania równań równowagi dla poszczególnych obszarów i spełnienia szeregu warunków brzegowych. Istnieje również przy tej metodzie możliwość określenia nośności granicznej wykreślnie w oparciu o określone uprzednio układy zastępcze dla różnych rodzajów podparcia płyty, co ma szczególne znaczenie przy obliczeniach inżynierskich.

3. Kształtowanie wytrzymałościowe

Będziemy obecnie poszukiwali kształtu płyty o zmiennej grubości h , która w stanie równowagi granicznej wymaga przy danym obciążeniu zewnętrznym najmniejszej ilości materiału V_M . Zagadnienie to było rozpatrywane dla płyt przez W. Pragera, [10], [11] i [16], H. G. Hopkinsa [11], W. Freibergera i B. Tekinalpa, [12], oraz E. T. Onata, W. Schumanna i R. T. Shielda, [15]. W pracach [13] i [14] D. C. Drucker i R. T. Shield podali ogólne kryteria kształtowania przy minimum ilości materiału. Kształty płyt o równomiernej wytrzymałości były również badane przez Z. Brzoskę, [17], gdzie punktem wyjścia był stan sprężysty, a warunkiem jednoczesne uplastycznienie zewnętrznej warstwy.

Dla płyt pierścieniowych sformułujemy to zagadnienie jako problem wariacyjny podobnie jak w pracy [12] opierając się przy tym na warunku plastyczności Coulomba-Tresca oraz na pozostałych założeniach

analogicznych do poprzednich. Mianowicie będziemy szukali minimum funkcjonału

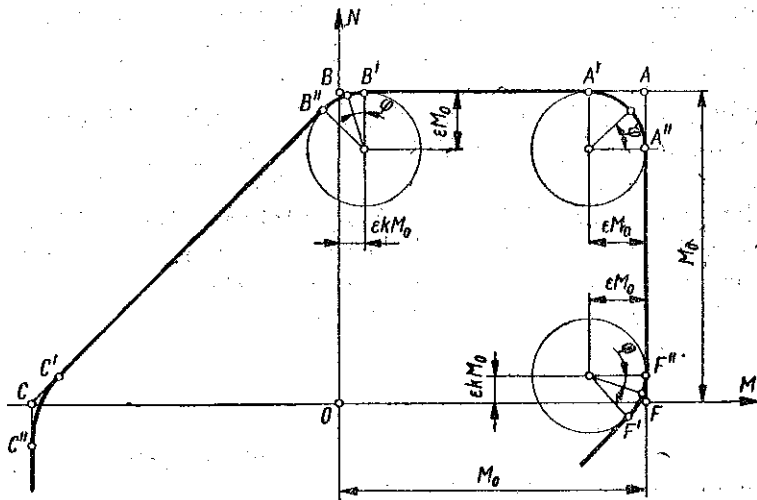
$$(3.1) \quad V = \int_a^b h(r) r dr$$

przy spełnieniu równania równowagi (2.1) oraz warunku plastyczności. Ponieważ $M_0 = (1/4) \sigma_0 h^2$, funkcjonał (3.1) możemy wyrazić w postaci

$$(3.2) \quad V = \int_a^b M_0^{1/2} r dr$$

przy spełnieniu następujących warunków dodatkowych:

$$(3.3) \quad \begin{cases} f_1 = F(M, N) - M_0^{1/2} = 0, \\ f_2 = rM_r + M - N + T^{ar} - Sa = 0. \end{cases}$$



Rys. 7

Przyjmujemy przy tym, że krzywa $f_1 = 0$ jest gładka (rys. 7). Równanie Eule'ra dla funkcjonału (3.2) przy uwzględnieniu (3.3) przyjmuje postać:

$$(3.4) \quad \frac{\partial F}{\partial M} - \left(r \frac{\partial F}{\partial N} \right)_r = 0.$$

Równanie to ma prostą interpretację fizyczną. Mianowicie, wychodząc ze związków fizycznych

$$\alpha = \mu \frac{\partial F}{\partial M}, \quad \lambda = \mu \frac{\partial F}{\partial N}$$

i przedstawiając jednostkową dyssypację energii jako

$$D = M\kappa + N\lambda = \mu \left(M \frac{\partial F}{\partial M} + N \frac{\partial F}{\partial N} \right) = \frac{1}{2} \mu M_0^{1/2},$$

co wynika z jednorodności funkcji $F(M, N)$ stopnia $1/2$, możemy równanie (3.4) napisać w postaci następującej:

$$(3.5) \quad \left(\frac{D}{h} \right)_r = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{D}{h} = \text{const.}$$

A zatem objętość płyty osiąga ekstremum w przypadku, gdy średnia dyssypacja energii D przypadająca na jednostkę grubości jest stała. Warunek (3.5) możemy również wyrazić następująco:

$$(3.6) \quad \frac{D}{h} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p dz = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} D_z \frac{2z}{h} dz = \frac{1}{2} D_z = \text{const.},$$

gdzie $D_z = [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p]_{z=\pm h/2}$ oznacza dyssypację energii w warstwie zewnętrznej płyty.

Zbadamy obecnie, dla jakich punktów krzywej granicznej warunek (3.5) zapewni minimum objętości płyty. Przyjmujemy przy tym kształt krzywej granicznej jak na rys. 7, tzn. złożony z odcinków prostych i łuków kół. Przy przejściu granicznym, gdy promienie tych kół dążą do zera, otrzymujemy sześciobok *Tresca*.

Wykorzystując warunki (3.3) możemy funkcjonal (3.2) napisać w postaci

$$(3.7) \quad V = \int_a^b F[M, N(M, M_r)] dr = \int_a^b \Phi(r, M, M_r) dr$$

przy danych warunkach brzegowych dla momentów M . Warunkiem koniecznym i wystarczającym dla minimum mocnego jest dodatnia wartość funkcji Weierstrassa³ w obszarze własnym ekstremal otaczających rozpatrywaną krzywą γ :

$$(3.8) \quad \Psi(r, M, M_r, M_r^?) \approx \frac{1}{2} (M_r - M_r^?)^2 F_{M_r M_r}(r, M, \bar{M}_r) \geq 0,$$

gdzie M_r jest funkcją nachylenia pola, $M_r^?$ nachyleniem krzywej γ , \bar{M}_r wielkością zawartą między M_r i $M_r^?$. Przyjmując uproszczony warunek Weierstrassa

$$(3.9) \quad F_{M_r M_r}(r, M, \bar{M}_r) \geq 0,$$

³ Ψ oznacza tutaj funkcję Weierstrassa.

rozpatrzmy poszczególne odcinki krzywej i zbadamy znak $F_{M_r M_r}$. Dla prostej $A'B'$ mamy

$$N^{1/2} = M_0^{1/2}, \quad V = \int_a^b r N^{1/2} dr = \int_a^b r (r M_r + M + T a r - S a)^{1/2} dr$$

oraz

$$(3.10) \quad F_{M_r M_r} = -\frac{r^3}{4} \frac{1}{N^{3/2}} < 0,$$

gdyż $N > 0$ dla dowolnych M_r .

Dla stanów naprężenia przedstawionych odcinkiem $A'B'$ mamy zatem maksimum objętości. Z równanie (3.5) wynika, że płyta objętości ekstremalnej w stanie $A'B'$ posiada grubość

$$(3.11) \quad h = Kr.$$

Dla stanu $B''C'$ mamy

$$(3.12) \quad M_0^{1/2} = (N - M)^{1/2} > 0, \quad F_{M_r M_r} = -\frac{r^3}{4} \frac{1}{(N - M)^{3/2}} < 0$$

oraz kształt płyty o ekstremalnej objętości

$$(3.13) \quad h = Kr^2.$$

Stan $A''F''$ nie może przedstawiać rozwiązania równania (3.5), gdyż płyta w tym stanie zachowuje się jak element sztywny. Ponieważ dla pozostałych boków sytuacja będzie analogiczna do rozpatrzonej, możemy stwierdzić ogólnie, że dla odcinków prostoliniowych krzywej granicznej albo otrzymamy rozwiązanie o objętości maksymalnej, albo rozwiązania nie ma.

Zbadamy obecnie części krzywej granicznej w postaci łuków kół. Równanie odcinka $A'A''$ możemy napisać (rys. 7):

$$(3.14) \quad [M - M_0(1 - \varepsilon)]^2 + [N - N_0(1 - \varepsilon)]^2 = \varepsilon^2 M_0^2$$

lub w postaci

$$(3.15) \quad M_0^{1/2} = \left[\frac{(1 - \varepsilon)(M + N) - \sqrt{(1 - \varepsilon)^2 (M + N)^2 - (M^2 + N^2)(2 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon)}}{2 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon} \right]^{1/2}$$

Po zróżniczkowaniu (3.15) i przejściu do granicy otrzymujemy

$$(3.16) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{M_r M_r} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-A_1 + B_1 \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty,$$

gdzie A_1 i B_1 to wielkości ograniczone i dodatnie, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$. Dla łuku FF'' otrzymujemy równanie

$$(3.17) \quad [M - M_0(1 - \varepsilon)]^2 + (N - k\varepsilon M_0)^2 = \varepsilon^2 M_0^2$$

lub w postaci funkcji jednorodnej M i N :

$$(3.18) \quad M_0^{1/2} = \left\{ \frac{(1 - \varepsilon)M + Nk\varepsilon - \sqrt{[(1 - \varepsilon)M + Nk\varepsilon]^2 - (M^2 + N^2)(1 - 2\varepsilon + k^2\varepsilon^2)}}{1 - 2\varepsilon + k^2\varepsilon^2} \right\}^{1/2}$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$(3.19) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{M_r, M_r} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-A_2 + B_2 \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty \quad (A_2 > 0, \quad B_2 > 0)$$

Dla łuku $B'B''$ mamy

$$M_0^{1/2} = \left\{ \frac{(1 - \varepsilon)N + k\varepsilon M - \sqrt{[(1 - \varepsilon)N + k\varepsilon M]^2 - (M^2 + N^2)(1 - 2\varepsilon + k^2\varepsilon^2)}}{1 - 2\varepsilon + k^2\varepsilon^2} \right\}^{1/2}$$

a stąd

$$(3.20) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{M_r, M_r} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-A_3 + B_3\varepsilon) = -A_3 = -\frac{1}{4}r^3 N^{-3/4} < 0.$$

Widzimy zatem, że minimum objętości otrzymujemy jedynie dla stanów naprężenia OA , OF , OC i OD . W konkretnych zagadnieniach zatem nie trzeba stosować metod wariacyjnych, wystarczy określić pole statyczne i kształt płyty całkując równanie równowagi dla podanych wyżej stanów i spełniając warunki brzegowe. Pole kinematyczne zazwyczaj nieokreślone dla wierzchołków sześcioboku w naszym przypadku jest zdefiniowane warunkiem stałości średniej dyssypacji energii; dlatego można je wyznaczyć mając określony kształt płyty.

Ażeby powyższe równania były słuszne, należy jeszcze sprawdzić, czy istnieje pole własne ekstremal. Z obliczeń, których tu nie przytaczamy, wynika, że warunek Jacobiego istnienia pola dla każdego odcinka krzywej granicznej jest spełniony i zachowuje się przy przejściu granicznym.

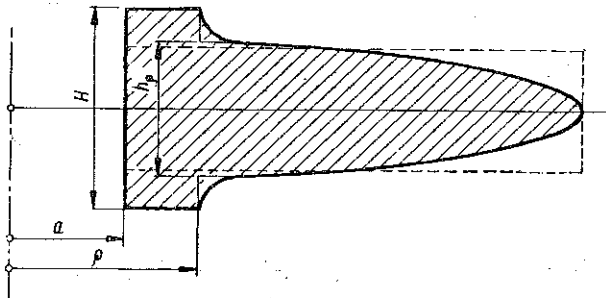
Powyższe wyniki są ciekawe również i dlatego, że w literaturze naukowej można spotkać pogląd, iż warunek stałości średniej dyssypacji energii zapewnia minimum objętości płyty ([14], [15]).

Należy zauważyć, że otrzymane minimum jest ekstremum względnym, występuje zatem w klasie funkcji M i N bliskiej danemu rozwiązaniu; mogą być przypadki, gdy płyta posiadająca kształt inny aniżeli wynikający z rozwiązania minimalnego, posiada mniejszą objętość; na-

leży zatem w poszczególnych przypadkach zbadać, czy minimum jest jednocześnie kresem dolnym objętości dla wszystkich możliwych kształtów płyt.

Obecnie zilustrujemy podane wyżej ogólne zasady kształtowania na przykładach. Przyjmować będziemy przy tym, że $S=0$ i obciążenie poprzeczne $q = \text{const}$.

3.1. Płyta swobodnie podparta na zewnętrznym brzegu (rys. 8). Załóżmy, że na płytę działa równomiernie rozłożone obciążenie poprzeczne q . Z charakteru



Rys. 8

krzywej ugięcia wynika, że $\lambda > 0$. Możemy zatem poszukiwać rozwiązania dla stanów naprężenia przedstawionych punktów A, B lub C. Przyjmijmy, że w płycie mamy stan przedstawiony punktem A, tzn. że $M = N = (1/4) \sigma_0 h^2$. Po scałko-

waniu równania równowagi i spełnieniu warunku brzegowego $M = 0$ dla $r = b$ otrzymamy

$$(3.21) \quad M = N = \frac{q}{4} \left(b^2 - r^2 - 2a^2 \ln \frac{b}{r} \right),$$

a stąd

$$(3.22) \quad h = \sqrt{\frac{q}{\sigma_0} \left(b^2 - r^2 - 2a^2 \ln \frac{b}{r} \right)}.$$

Widzimy, że dla stanu A nie możemy spełnić warunku brzegowego $M = 0$ dla $r = a$. Aby to uzyskać, zakładamy skokową zmianę grubości na obwodzie o promieniu $r = \varrho$ i stałą grubość płyty $H > h_\varrho$ w obszarze $a \leq r \leq \varrho$. Mamy zatem w tym obszarze stan naprężenia AB, tzn. $N = M_0 = (1/4) \sigma_0 H^2$. Z równania równowagi otrzymamy:

$$(3.23) \quad rM = M_0(r - a) - \frac{q}{6} (r^3 - 3a^2r + 2a^3).$$

Z warunku ciągłości momentów promieniowych dla $r = \varrho$ można określić zależność między H i h_ϱ :

$$(3.24) \quad \frac{H^2}{h_\varrho^2} = \delta = \frac{1}{3} \frac{3b^2\varrho - \varrho^3 + 4a^3 - 6a^2\varrho \left(1 + \ln \frac{b}{\varrho} \right)}{\left(b^2 - \varrho^2 - 2a^2 \ln \frac{b}{\varrho} \right) (\varrho - a)}.$$

Kształt płyty przy danym q/σ_0 jest więc określony.

Zbadamy obecnie pole szybkości ugięć. Dla $a \leq r \leq b$ musi być spełniony warunek stałości średniej dyssypacji energii, który można wyrazić następująco dla stanu A:

$$(3.25) \quad w_{rr} + \frac{1}{r} w_r = -\frac{\alpha}{h(r)}.$$

Całkując to równanie otrzymamy

$$(3.26) \quad w = a \int_r^b \frac{1}{\xi} d\xi \int_b^\xi \frac{\eta d\eta}{h(\eta)} - C_1 \ln \frac{b}{r}.$$

Dla $a \leq r \leq a$ szybkości ugięcia są określone wzorem

$$(3.27) \quad w = C_2 r + C_3.$$

Dla $r = a$ w i w_r muszą być ciągłe, jak również powinien być spełniony warunek ciągłości dyssypacji energii

$$(3.28) \quad \frac{N_l \lambda_l}{h_l} - \frac{M_p \kappa_p + N_p \lambda_p}{h_p} = 0,$$

gdzie wskaźniki l i p oznaczają prawą i lewą stronę okręgu $r = a$. Ponieważ $\lambda_p = \lambda_l$ warunek powyższy można zapisać następująco:

$$(3.29) \quad \kappa_p = \lambda_p (\sqrt{\delta} - 1).$$

Wielkości stałych całkowania określone z powyższych warunków wynoszą:

$$(3.30) \quad \begin{cases} C_1 = -a \left(\int_a^b \frac{r dr}{h(r)} + \frac{a^2}{H} \right), \\ C_2 = -a \frac{a}{H}, \\ C_3 = a \left[- \int_a^b \frac{1}{\xi} d\xi \int_b^\xi \frac{\eta d\eta}{h(\eta)} + \ln \frac{b}{a} \int_a^b \frac{r dr}{h(r)} + \frac{a^2}{H} \left(\ln \frac{b}{a} + 1 \right) \right]. \end{cases}$$

Łatwo jest stwierdzić, że warunek $\lambda \geq 0$ i $\kappa \geq 0$ jest spełniony w całym obszarze płyty. Zatem znalezione pole kinematyczne jest polem rzeczywistym, związanym z określonym poprzednio stanem momentów.

Rozpatrzmy w szczególnym przypadku płytę mającą $a/b = 0,2$. Przyjmując $a/b = 0,3$ określimy kształt płyty z równania (3.22) i (3.24). W po-

równaniu z płytą o stałej grubości obciążoną analogicznie zysk materiału wynosi

$$\beta_p = \frac{[V]_{h=\text{const}} - V_M}{[V]_{h=\text{const}}} \approx 26\%.$$

Należy jeszcze rozpatrzyć rozwiązania dla stanów B lub C. Jakkolwiek pole statyczne spełniające warunki brzegowe i równanie równowagi da się określić, to jednak nie możemy przyporządkować mu pola kinematycznego spełniającego warunek stałości średniej dyssypacji energii oraz warunki ciągłości. Zatem podane wyżej rozwiązanie jest jedynym rozwiązaniem optymalnym.

3.2. Płyta swobodnie podparta na wewnętrznym brzegu (rys. 9). Ponieważ w obszarze płyty $\lambda < 0$, rozwiązania możemy poszukiwać dla punktów D, E lub F. Przyjmując stan D otrzymujemy po scałkowaniu równania równowagi

$$(3.31) \quad M = N = -\frac{q}{4} \left(2b^2 \ln \frac{b}{r} - b^2 + r^2 \right), \quad (M = 0 \text{ dla } r = b)$$

oraz

$$(3.32) \quad h = \sqrt{\frac{q}{\sigma_0} \left(2b^2 \ln \frac{b}{r} - b^2 + r^2 \right)}.$$

Analogicznie do poprzedniego chcąc spełnić warunek brzegowy $M = 0$ dla $r = b$ zakładamy skokową zmianę grubości dla $r = e$ i stałą grubość płyty $H > h_e$ dla $a \leq r \leq e$. W obszarze tym mamy stan DE i równanie równowagi określa pole momentów gnących:

$$(3.33) \quad N = -M_0, \quad rM = -M_0(r - a) + \frac{q}{6} (3b^2r - r^3 - 3b^2a + a^3).$$

Z warunku ciągłości momentów M dla $r = e$ wynika, że

$$(3.34) \quad \frac{H^2}{h_e^2} = \delta = \frac{1}{e - a} \left(e + \frac{2}{3} \frac{3b^2e - e^3 - 3b^2a + a^3}{2b^2 \ln \frac{b}{e} - b^2 + e^2} \right).$$

Pole kinematyczne określamy jak poprzednio. Warunek stałości dyssypacji dla stanu D wyraża się następująco:

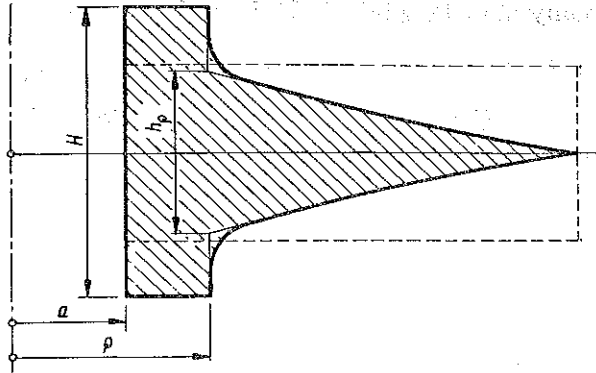
$$(3.35) \quad w_{rr} + \frac{1}{r} w_r = \frac{a}{h(r)}.$$

zaś dla stanu AD mechanizm płynięcia jest określony ($\chi = 0$). Po przeprowadzeniu obliczeń otrzymujemy:

$$(3.36) \quad \begin{cases} w = a \frac{\rho}{H} (r - a), & a \leq r \leq \rho, \\ w = a \left[\frac{\rho}{H} (\rho - a) + \int_{\rho}^r \frac{1}{\xi} d\xi \int_{\rho}^{\xi} \frac{\eta d\eta}{h(\eta)} + \frac{\rho^2}{H} \ln \frac{r}{\rho} \right], & \rho \leq r \leq b. \end{cases}$$

Otrzymane pole kinetyczne spełnia dla $r = \rho$ warunki ciągłości; łatwo również sprawdzić przez różniczkowanie powyższych równań, że w obszarze płyty $\chi \leq 0$ i $\lambda \leq 0$, zatem pole to przedstawia rzeczywisty mechanizm płynięcia.

Płyta o wymiarach $a/b = 0,2$ oraz $\rho/b = 0,3$ da zysk materiału w porównaniu z płytą o stałej grubości $\beta_v \approx 52\%$, a więc znacznie większy niż w poprzednim przypadku.



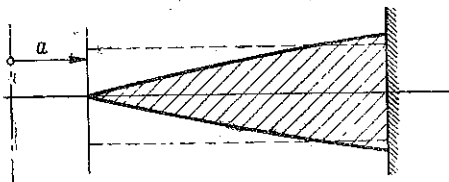
Rys. 9

3.3. Płyta utwierdzona na zewnętrznym brzegu (rys. 10). Rozwiązania będziemy poszukiwali dla stanu C. Przyjmując $N = 0$ otrzymujemy z równania równowagi

$$(3.37) \quad M = -\frac{q}{6} \frac{(r-a)^2 (r+2a)}{r}$$

oraz grubość płyty

$$(3.38) \quad h = \sqrt{\frac{q}{\sigma_0}} \sqrt{\frac{2}{3}} (r-a) \sqrt{\frac{r+2a}{r}}$$



Rys. 10

Pole kinematyczne określone jest przez równanie

$$(3.39) \quad w_{rr} = \frac{a}{h(r)},$$

skąd po scałkowaniu i spełnieniu warunków brzegowych $w = w_r = 0$ dla $r = b$ otrzymujemy

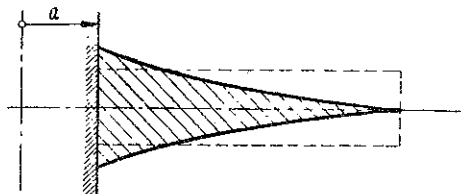
$$(3.40) \quad w = a \int_b^r d\xi \int_b^{\xi} \frac{d\eta}{h(\eta)}.$$

W obszarze płyty mamy spełniony warunek $\chi \leq 0$, $\lambda \geq 0$ i $\lambda/\chi \geq -1$, co istotnie odpowiada punktowi C.

W rozpatrywanym przypadku można by poszukiwać rozwiązania dla stanów D oraz A i AB , prowadziłoby to jednak do płyty mającej zerową grubość wzdłuż okręgu $r = \rho$ we wnętrzu obszaru i rozwiązanie takie nie miałyby wartości praktycznej.

W przypadku $a/b = 0,2$ zysk na materiale $\beta_v \approx 18\%$.

3.4. Płyta mająca brzeg wewnętrzny utwierdzony (rys. 11). W obszarze płyty mamy stan D , gdyż $\lambda \leq 0$ i $\chi \leq 0$, zatem stan momentów i grubość płyty są określone wzorami (3.31) i (3.32). Ugięcie płyty przedstawić można wzorem



Rys. 11

$$(3.41) \quad w = a \int_a^r \frac{1}{\xi} d\xi \int_a^\xi \frac{\eta d\eta}{h(\eta)},$$

który otrzymaliśmy po scałkowaniu równania (3.35) i spełnieniu warunków brzegowych $w = w_r = 0$ dla $r = a$. W obszarze płyty mamy $\lambda < 0$ i $\chi < 0$.

Dla $a/b = 0,2$ po przeprowadzeniu obliczeń otrzymamy $\beta_v = 51\%$.

Przytoczone wyżej przykłady wykazują, że sposób określenia optymalnych kształtów płyty jest bardzo prosty. Wyniki uzyskane wskazują na możliwość dużych oszczędności materiału. Należy również zwrócić uwagę na fakt, że o ile przy rozpatrywaniu nośności granicznej rozwiązanie dla płyt bez otworu otrzymać można było przez podstawienie $a = 0$, o tyle przy kształtowaniu oba te rodzaje płyt powinny być rozpatrzone oddzielnie.

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. С. Григорьев, *О несущей способности кольцевых пластин*, Инж. Сборник, т. 16, 1953, 177-182.
- [2] А. А. Гвоздев, *Расчет несущей способности по методу предельного равновесия*, Стройиздат, Москва 1949.
- [3] H. G. Hopkins and W. Prager, *The Load Carrying Capacities of Circular Plates*, Journ. Mech. Phys. of Solids 2, 1, 1953, 1-13.
- [4] H. G. Hopkins and A. J. Wang, *Load-Carrying Capacities for Circular Plates of Perfectly-Plastic Material with Arbitrary Yield Condition*, Journ. Mech. Phys. of Solids 3,2 1954, 117-129.
- [5] W. Olszak, *Z zagadnień podstawowych teorii nośności granicznej płyt*, Rozpr. Inż., 6 (1954).
- [6] W. Olszak and A. Sawczuk, *Experimental Verification of the Theory of Limit Design of Plates*, Bull. Acad. Pol. Sci., 4 (1955).
- [7] A. Sawczuk, *Some Problems of Load Carrying Capacities of Orthotropic and Non-Homogeneous Plates*, Arch. Mech. Stos. 4 (1958).
- [8] W. H. Pell and W. Prager, *Limit Design of Plates*, Proc. First Amer. Congr. Appl. Mech., Chicago 1951.

[9] D. C. Drucker and H. G. Hopkins, *Combined Concentrated and Distributed Load on Ideally-Plastic Circular Plates*, Proc. 2nd U. S. Nat. Cong. Appl. Mech. ASME, 1954.

[10] W. Prager, *Singular Yield Conditions and Associated Flow Rules*, Journ. Appl. Mech. 3 (1953).

[11] H. G. Hopkins and W. Prager, *Limits of Economy of Material in Plates*, Journ. Appl. Mech. 22, 3, 372 (1955).

[12] W. Freiberger and B. Tekinalp, *Minimum Weight Design of Circular Plates*, Journ. Mech. Phys. of Solids 4 (1956), 294-299.

[13] D. C. Drucker and R. T. Shield, *Design for Minimum Weight*, Proc. 9th Intern. Congr. Appl. Mech., Brussels, 1956.

[14] D. C. Drucker and R. T. Shield, *Bounds on Minimum Weight*, Quart. Appl. Math., Vol. 16, 3 (1957).

[15] E. T. Onat, W. Shumann, and R. T. Shield, *Design of Circular Plates for Minimum Weight*, Z. A. M. P., 1957.

[16] W. Prager, *Minimum Weight Design of Plates*, De Ing. 67, 1955, 0.141-0.142.

[17] Z. Brzowska, *Płyty kołowe o równomiernej wytrzymałości przy obciążeniu osiowo-symetrycznym*, Arch. Bud. Masz. 1, 1954, 251-272.

[18] А. А. Ильюшин, *Пластичность*, Гостехиздат, 1948.

[19] В. В. Соколовский, *Теория пластичности*, Гостехиздат, 1950.

Резюме

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ И ПРОЧНОСТНОЕ ОФОРМЛЕНИЕ КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ ПЛАСТИНОК

В первой части работы рассматривается несущая способность при произвольной поперечной нагрузке q действующей в одном направлении и при различных видах опор обоих краев. Обсуждаются такие случаи, как: наружный или внутренний край свободно опертый или защемленный и оба края свободно опертые. Принимается условие пластичности Кулона - Трески, а также жестко-пластическая модель материала. Для $q = \text{const}$ результаты даются в графической форме.

Во второй части обсуждается прочностное оформление с точки зрения минимума веса пластинки. Вопрос сформулирован как вариационная задача; принимается предельную кривую в форме многоугольника с закруглениями и исследуются условия для минимума функционала. Оказывается, что условие постоянства средней диссипации энергии ведет для сторон и вершин B и E к максимуму веса, для вершин A , F , C , D к минимуму. Общие рассуждения иллюстрируются на примерах пластинок находящихся под действием нагрузки $q = \text{const}$ и при различных видах опор.

Summary

THE LOAD CARRYING CAPACITY AND MINIMUM WEIGHT DESIGN OF ANNULAR PLATES

In the first part of this paper, the limit load of annular plates is analysed for any transverse load q acting in one direction and for various edge supports. The cases treated are those of outer or inner edge simply supported or clamped or having both edges simply supported. The Coulomb-Tresca yield condition and the rigid-plastic model are assumed for $q = \text{const}$. The results are represented in graphical form.

The second part of the paper is devoted to the minimum weight design. The problem is stated as a variational problem. The limit curve is assumed in the form of a polygon with rounded corners. The conditions for (strong) minimum value of the functional expression obtained are examined. It is seen that the condition of constant mean energy dissipation leads to a minimum for the corners A, F, C, D . The general considerations are illustrated by examples of plates subjected to the action of a load $q = \text{const}$ and for various types of support.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 lipca 1958 r.