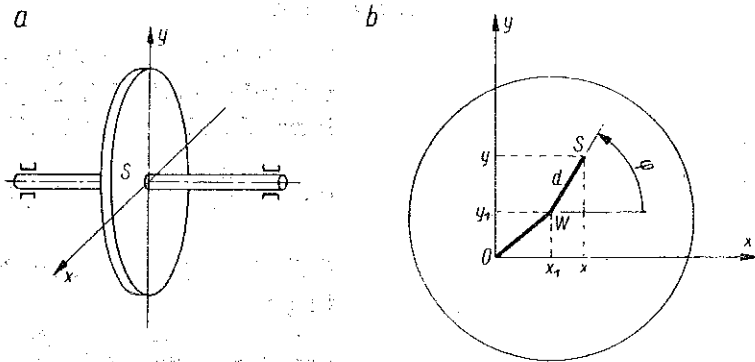


WŁADYSŁAW BOGUSZ

STATECZNOŚĆ RUCHU PRĘTÓW WIRUJĄCYCH  
ZE ZMIENNĄ PRĘDKOŚCIĄ

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CXII

Stateczność ruchu wałów wirujących zależy od prędkości kątowej wirowania i przy prędkości różnej od prędkości krytycznej ruch jest stateczny. Przy prędkości większej od krytycznej występuje zjawisko samo-centrowania się wału. Zjawisko ma taki przebieg przy założeniu stałej prędkości kątowej. W praktyce utrzymanie stałej prędkości szczególnie przy zmiennym momencie obciążenia jest połączone z trudnościami technicznymi i z tego względu często dopuszcza się pewne wahania prędkości.



Rys. 1

Niniejsza praca podaje analizę ruchu pręta wirującego o małym niewyważeniu przy sinusoidalnym wahanii prędkości. Jak wynika z przeprowadzonej analizy, nawet małe wahania prędkości mogą powodować niestateczność ruchu i wywołać niebezpieczne amplitudy drgań poprzecznych pręta.

W pracy rozpatrywany jest pręt wirujący w dwóch łożyskach (rys. 1a). Na pręcie osadzona jest tarcza, której środek masy  $S$  nie leży na osi pręta i powoduje małe niewyważenie układu. Pomijamy masę pręta i moment bezwładności tarczy względem średnicy tarczy i osi obrotu pręta. Obieramy nieruchomy układ współrzędnych  $x, y$  w płaszczyźnie tarczy (rys. 1b). Środek masy tarczy  $S$  ma współrzędne  $(x, y)$ , zaś środek tarczy  $W$  współrzędne  $(x_1, y_1)$  i znajduje się na osi odkształconej pręta. Początek układu  $O$  obieramy na nieodkształconej osi pręta.

Odcinek  $d$  jest małym mimośrodem, zaś  $\varphi$  kątem obrotu tarczy. W układzie  $x, y$  równanie ruchu można napisać w postaci

$$(1) \quad m\ddot{x} + cx_1 = 0, \quad m\ddot{y} + cy_1 = 0,$$

gdzie  $m$  jest masą tarczy,  $c$  współczynnikiem sprężystości pręta przy zgięciu.

Między współrzędnymi punktu  $W$  i  $S$  zachodzi związek

$$(2) \quad x_1 = x - d \cos \varphi, \quad y_1 = y - d \sin \varphi.$$

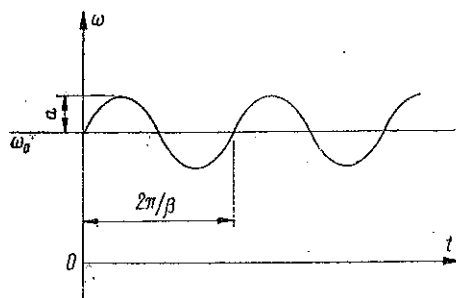
Po wstawieniu (2) do (1) i podzieleniu przez  $m$  otrzymamy

$$(3) \quad \ddot{x} + k^2 x = A \cos \varphi, \quad \ddot{y} + k^2 y = A \sin \varphi,$$

gdzie  $k^2 = c/m$ ,  $A = cd/m$ .

Układ (3) można napisać w postaci jednego równania podstawiając  $z = x + iy$ :

$$(4) \quad \ddot{z} + k^2 z = Ae^{i\varphi}.$$



Rys. 2

Przyjmijmy sinusoidalne (rys. 2) wahanie prędkości. Prędkość kątowa da się przedstawić wzorem

$$(5) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + a \sin \beta t.$$

Całkując (5) otrzymamy kąt obrotu  $\varphi$ :

$$(6) \quad \varphi(t) = \omega_0 t + \frac{a}{\beta} - \frac{a}{\beta} \cos \beta t.$$

Funkcję tę należy podstawić do równania (4). Rozwiązania równania (4) szukamy w postaci

$$(7) \quad z = z_1 e^{i(\omega_0 t + \frac{a}{\beta})}.$$

Na  $z_1$  otrzymamy równanie

$$(8) \quad \ddot{z}_1 + 2i\omega_0 \dot{z}_1 + z_1(k^2 - \omega_0^2) = Ae^{-i\frac{a}{\beta} \cos \beta t}.$$

Korzystając z własności funkcji Bessela możemy zastosować rozwinięcie na szereg

$$(9) \quad e^{-i\frac{a}{\beta} \cos \beta t} = I_0\left(\frac{a}{\beta}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n I_n\left(\frac{a}{\beta}\right) \cos n\beta t,$$

gdzie  $I_0$  i  $I_n$  oznaczają funkcje Bessela.

Rozwiązania na  $z_1$  szukamy w postaci szeregu trygonometrycznego

$$(10) \quad z_1 = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\beta t + b_n \sin n\beta t).$$

Po wstawieniu (9) i (10) do (8) i po porównaniu współczynników przy  $\cos n\beta t$  i  $\sin n\beta t$  otrzymamy następujące wartości na  $C_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ :

$$(11) \quad \begin{cases} C_0 = A \frac{I_0\left(\frac{a}{\beta}\right)}{k^2 - \omega_0^2}, \\ a_n = 2A (-i)^n I_n\left(\frac{a}{\beta}\right) \frac{k^2 - \omega_0^2 - n^2 \beta^2}{(k^2 - \omega_0^2 - n^2 \beta^2)^2 - 4\omega_0^2 n^2 \beta^2}, \\ b_n = 2A (-i)^n I_n\left(\frac{a}{\beta}\right) \frac{2i\omega_0 n\beta}{(k^2 - \omega_0^2 - n^2 \beta^2)^2 - 4\omega_0^2 n^2 \beta^2}. \end{cases}$$

Współczynniki  $a_n$  i  $b_n$  należy rozdzielić na części, rzeczywistą i urojoną i funkcję  $z_1$  przedstawić w postaci  $z_1 = u + iv$ . Funkcje  $u$  i  $v$  wyrażają się wzorami:

$$(12) \quad \begin{cases} u = A \frac{I_0\left(\frac{a}{\beta}\right)}{k^2 - \omega_0^2} + 2A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{I_{2n}\left(\frac{a}{\beta}\right) (k^2 - \omega_0^2 - 4n^2 \beta^2) \cos 2n\beta t}{(k^2 - \omega_0^2 - 4n^2 \beta^2)^2 - 16n^2 \omega_0^2 \beta^2} \right. \\ \left. - \frac{I_{2n-1}\left(\frac{a}{\beta}\right) 2(2n-1)\omega_0 \beta \sin(2n-1)\beta t}{[k^2 - \omega_0^2 - (2n-1)^2 \beta^2]^2 - 4(2n-1)^2 \omega_0^2 \beta^2} \right\}, \\ v = 2A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{I_{2n-1}\left(\frac{a}{\beta}\right) [k^2 - \omega_0^2 - (2n-1)^2 \beta^2] \cos(2n-1)\beta t}{[k^2 - \omega_0^2 - (2n-1)^2 \beta^2]^2 - 4(2n-1)^2 \omega_0^2 \beta^2} + \right. \\ \left. + \frac{I_{2n}\left(\frac{a}{\beta}\right) 4n\omega_0 \beta \sin 2n\beta t}{(k^2 - \omega_0^2 - 4n^2 \beta^2)^2 - 16n^2 \omega_0^2 \beta^2} \right\}. \end{cases}$$

Po określeniu funkcji  $u$  i  $v$  możemy wyznaczyć funkcje  $z$  z równania (7), a następnie znaleźć funkcje  $x$  i  $y$ :

$$(13) \quad \begin{cases} x = u \cos\left(\omega_0 t + \frac{a}{\beta}\right) - v \sin\left(\omega_0 t + \frac{a}{\beta}\right), \\ y = u \sin\left(\omega_0 t + \frac{a}{\beta}\right) + v \cos\left(\omega_0 t + \frac{a}{\beta}\right). \end{cases}$$

Podstawiając (13) do (2) otrzymamy współrzędne  $x_1$  i  $y_1$  punktu W. Ze wzorów (11) wynika, że gdy mianowniki znikają, następuje wzrost amplitudy drgań tak jak przy rezonansie.

Porównując mianowniki do zera otrzymamy

$$(14) \quad k^2 = \omega_0^2,$$

$$(15) \quad \beta = \frac{\omega_0 - k}{n}, \quad \beta = \frac{\omega_0 + k}{n}.$$

Równanie (14) nie jest spełnione, gdyż rozpatrujemy ruch pręta przy prędkości  $\omega_0$  różnej od prędkości krytycznej.

Równanie (15) określa wartości krytyczne  $\beta$ , przy których ruch pręta staje się niestateczny. Jak wynika z otrzymanego rozwiązania (12), zmienna prędkość kątowa wywołuje drgania pręta, które są drganiami wymuszonymi z częstością  $\beta$ . Jeżeli częstość  $\beta$  jest równa jednej z częstości określonej wzorem (15), następuje rezonans. Stąd wniosek, że pręt wirujący z prędkością kątową  $\omega_0$  i posiadający prędkość krytyczną  $k$  może być wprowadzony w drgania rezonansowe z drganiami o częstości  $(\omega_0 - k)/n$  lub  $(\omega_0 + k)/n$ .

Jeżeli prędkość krytyczną  $k$  nazwiemy prędkością krytyczną statyczną, wówczas prędkości  $(\omega_0 - k)/n$  i  $(\omega_0 + k)/n$  należy nazwać krytycznymi prędkościami dynamicznymi. Ruch pręta wirującego ze zmienną prędkością jest niestateczny nie tylko przy prędkościach równych prędkościom krytycznym, lecz również przy wahaniach prędkości z częstością krytyczną dynamiczną.

Może się zdarzyć, że prędkość krytyczna dynamiczna jest równa prędkości krytycznej statycznej. Ze wzoru (15) po podstawieniu  $\beta = \omega_0$  otrzymamy

$$(16) \quad \omega_n = \frac{k}{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

W tym przypadku mamy do czynienia z subrezonansem o prędkościach  $k/2, k/3, k/4, \dots$ .

Warunki niestateczności ruchu pręta wirującego nie zależą od amplitudy wahań prędkości (wielkość  $a$ ). Przypuśćmy, że wahania prędkości są małe, tj. przyjmiemy, że  $a$  jest małe, zaś  $\beta$  zmienne, lecz różne od prędkości krytycznej dynamicznej. Rozważymy dwa przypadki: stosunek  $a/\beta$  jest mały w porównaniu z jednością, stosunek  $a/\beta$  jest duży w porównaniu z jednością.

W przypadku pierwszym możemy podstawić  $I_0(a/\beta) \approx 1$  oraz  $I_n(a/\beta) \approx 0$ . Ze wzorów (12) wynika

$$(17) \quad u = \frac{A}{k^2 - \omega_0^2}, \quad v = 0.$$

Współrzędne środka masy  $S$  według wzoru (13) wynoszą

$$(18) \quad x = \frac{A}{k^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 t, \quad y = \frac{A}{k^2 - \omega_0^2} \sin \omega_0 t.$$

Współrzędne środka tarczy  $W$  według (2) wynoszą

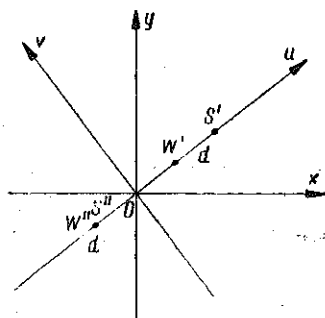
$$(19) \quad x_1 = \left( \frac{A}{k^2 - \omega_0^2} - d \right) \cos \omega_0 t, \quad y_1 = \left( \frac{A}{k^2 - \omega_0^2} \right) \sin \omega_0 t.$$

Ze wzorów (18) i (19) wynika, że środek masy  $S$  i punkt  $W$  mogą mieć dwojake położenie względem siebie zależnie od znaku różnicy  $k^2 - \omega^2$ . Przy  $k^2 > \omega_0^2$  położenia środka masy  $S$  i punktu  $W$  pokrywają się z położeniem punktów  $S'$  i  $W'$ ,

a przy  $k^2 < \omega_0^2$  z  $S''$  i  $W''$

(rys. 3). Ruch w obu przypadkach jest stacyczny.

W drugim przypadku, gdy  $a/\beta$  jest duże w porównaniu z jednością, możemy zastosować wzory asymptotyczne dla funkcji Bessela:



Rys. 3

$$(20) \quad I_{2n} \left( \frac{a}{\beta} \right) = (-1)^n I_0 \left( \frac{a}{\beta} \right), \quad I_{2n-1} \left( \frac{a}{\beta} \right) = (-1)^n I_1 \left( \frac{a}{\beta} \right).$$

Wzory na  $u$  i  $v$  według (12) mają postać:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{I_0 A}{k^2 - \omega_0^2} + 2A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{I_0 (k^2 - \omega_0^2 - 4n^2 \beta^2) \cos 2n\beta t}{(k^2 - \omega_0^2 - 4n^2 \beta^2)^2 - 16n^2 \beta^2 \omega_0^2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{I_1 2(2n-1) \omega_0 \beta \sin (2n-1)\beta t}{[k^2 - \omega_0^2 - (2n-1)^2 \beta^2]^2 - 4(2n-1)^2 \omega_0^2 \beta^2} \right\} \\ v &= 2A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{I_1 [k^2 - \omega_0^2 - (2n-1)^2 \beta^2] \cos (2n-1)\beta t}{[k^2 - \omega_0^2 - (2n-1)^2 \beta^2]^2 - 4(2n-1)^2 \omega_0^2 \beta^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{I_0 4n\omega_0 \beta \sin 2n\beta t}{[k^2 - \omega_0^2 - 4n^2 \beta^2]^2 - 16n^2 \omega_0^2 \beta^2} \right\} \end{aligned} \right.$$

W układzie nieruchomym  $x, y$  przyjmijmy układ ruchomy  $u, v$ , którego oś  $u$  tworzy z osią  $x$  kąt  $\omega_0 t + a/\beta$ . W tym układzie współrzędne środka masy  $S$  i punktu  $W$  oznaczmy odpowiednio  $(u_s, v_s)$  i  $(u_w, v_w)$ .

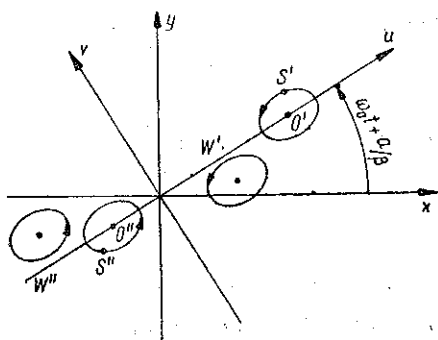
Oznaczmy szeregi występujące we wzorach (21) przez  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$ . Współrzędne  $S$  i  $W$  można napisać w postaci:

$$(22) \quad \begin{cases} u_s = \frac{I_0 A}{k^2 - \omega_0^2} + \Phi_1, & v_s = \Phi_2, \\ u_w = \frac{I_0 A}{k^2 - \omega_0^2} - d + \Phi_1, & v_w = -d + \Phi_2. \end{cases}$$

Zbadamy ruch środka masy  $S$  i punktu  $W$  biorąc pod uwagę tylko pierwsze harmoniczne z szeregów  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$ . Współrzędne  $u_s$  i  $v_s$  określone wzorem (22) przyjmą postać:

$$(23) \quad \begin{cases} u_s = \frac{I_0 A}{k^2 - \omega_0^2} - \frac{4 A I_1 \omega_0 \beta}{(k^2 - \omega_0^2 - \beta^2)^2 - 4 \omega_0^2 \beta^2} \sin \beta t, \\ v_s = \frac{2 A I_1 (k^2 - \omega_0^2 - \beta^2)}{(k^2 - \omega_0^2 - \beta^2)^2 - 4 \omega_0^2 \beta^2} \cos \beta t. \end{cases}$$

Współrzędne  $u_w$  i  $v_w$  otrzymamy odejmując od  $u_s$  i  $v_s$  wartość  $d$ . Równania (23) są równaniami elipsy o środku w  $O'$  lub  $O''$  zależnie od tego czy  $k^2 - \omega_0^2$  jest dodatnie, czy ujemne (rys. 4). Środek masy  $S$  porusza



Rys. 4

się po obwodzie elipsy i kierunek ruchu zależy od znaków przy  $I_0$  i  $I_1$ . Na rysunku 4 zaznaczony jest kierunek przy  $I_0 > 0$  i  $I_1 > 0$ .

Analogiczny ruch wykonuje punkt  $W$ .

Jeżeli wartość stosunku  $a/\beta$  rośnie, to  $I_0(a/\beta)$  i  $I_1(a/\beta)$  dążą do zera, a stąd funkcje  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  dążą również do zera. Środek masy dąży do początku układu, zaś środek tarczy  $W$  wiruje w odległości  $d$  od środka masy  $S$ . Następuje samocentrowanie się wału.

Z przeprowadzonej powyżej analizy wynika, że badanie stateczności ruchu wałów wirujących przy ograniczeniu się do stałych prędkości wirowania jest tylko częścią problemu. Zastosowana metoda prędkości zmiennej sinusoidalnie przy użyciu funkcji Bessela pozwala nie tylko ustalić prędkości krytyczne statyczne i dynamiczne, lecz również w sposób prosty wykazuje stateczność ruchu wału wirującego z prędkością ponad krytyczną oraz ilustruje zjawisko samocentrowania się wału. W pracy nie przedstawiono wpływu momentu żyroskopowego na stateczność ruchu. Rozważania na ten temat przy uwzględnieniu prędkości zmiennej prowadzą do znanych wniosków, jakie otrzymuje się przy założeniu prędkości stałej.

## Literatura cytowana w tekście

- [1] R. Grammel, *Kritische Drehzahlen und Kreiselwirkung*, Zeitschr. VDJ, 1920.
- [2] А. В. Светлов, *О поперечных колебаниях вращающегося стержня*, Прикл. Матем. Мех., 1938.
- [3] *Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении*, под ред. С. Д. Пономарева, 1952.

## Резюме

### УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ, ВРАЩАЮЩИХСЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

В работе решается случай колебаний стержня, вращающегося с угловой синусоидально переменной скоростью.

Решение уравнения движения получается при помощи бесселевой функции. Из анализа этого уравнения вытекает, что в случае колебаний скоростей существуют также и другие скорости, при которых движение стержня неустойчиво. В работе эти скорости названы: динамическими, критическими скоростями.

Из этого же уравнения движения следует также, что устойчивость движения стержня, вращающегося с переменной скоростью, зависит от частоты колебаний скорости, но не зависит от амплитуды колебаний.

## Summary

### THE STABILITY OF MOTION OF BARS ROTATING WITH VARIABLE ANGULAR VELOCITY

The problem considered is that of a bar rotating with sinusoidally variable angular velocity.

The solution of the equation of motion is obtained by means of Bessel functions. From an analysis of this solution it follows that for a fluctuating velocity there exist, besides the critical velocities, other velocities, for which the motion is not stable. The term «dynamic critical velocities» is in this paper, used for these velocities.

From the solution of the equation of motion it follows also that the stability of motion of a bar rotating with variable angular velocity depends on the frequency of velocity fluctuations and not on their amplitude.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 czerwca 1958 r.