

ZDZISŁAW MARCINIAK

WYKREŚLNE WYZNACZANIE ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ
PRZY PLASTYCZNYM ZGINANIU BLACH Z UWZGLĘDNIENIEM
SIŁY OSIOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXI

Wśród procesów kształtowania blach metodami obróbki plastycznej coraz większego znaczenia nabiera metoda gięcia materiału przez owijanie go lub obciążanie na odpowiednio ukształtowanych szablonach. Według tej metody następuje zginanie blachy przy jednoczesnym działaniu osiowej siły rozciągającej.

W niniejszej pracy rozpatrzono najprostszy przypadek walcowego zginania szerokich w porównaniu z grubością pasów blach poddanych działaniu momentu zginającego M i siły rozciągającej P . Podana tu przybliżona metoda wykreślnego wyznaczenia rozkładu naprężeń w przekroju zginanego pasa opiera się na następujących założeniach:

1. Promień krzywizny zginanego pasa jest duży w porównaniu z jego grubością. W związku z tym przyjęto liniowy rozkład odkształceń wzdłuż grubości giętej blachy.

2. Przyjęto, że zmniejszenie szerokości pasa wskutek rozciągania jest stałe dla wszystkich punktów przekroju, a więc $\varepsilon_z = \text{const}$. Założenie to jest ściśle spełnione w środkowej części pasów dostatecznie szerokich w porównaniu z ich grubością.

3. Przyjęto model ciała sztywno-plastycznego, niepodlegającego umocnieniu ($Q = \text{const}$).

4. W czasie procesu gięcia zachodzi w każdym punkcie ciała odkształcenie proporcjonalne (proste). Założenie to jest tym bliższe rzeczywistości, im większy jest promień krzywizny w porównaniu z grubością giętego materiału.

W związku z założeniem wymienionym w p. 1 wartości wydłużeń głównych w warstwie odległej o x od środka grubości blachy można w przybliżeniu wyrazić wzorami

$$(1) \quad \varepsilon_l = \frac{x}{r} + a, \quad \varepsilon_z = b, \quad \varepsilon_r = -\frac{x}{r} - a - b,$$

gdzie ε_l jest wydłużeniem w kierunku osiowym, ε_z w kierunku szerokości, ε_r w kierunku promieniowym, r promieniem krzywizny linii środkowej, a i b są wielkościami stałymi, niezależnymi od x .

Zakładając proporcjonalność wzrostu wszystkich składowych odkształceń można wyrazić związek między wartościami wydłużeń ε_l ,

ε_z i ε_r , a wartościami odpowiednich dewiatorów s_l , s_z i s_r w postaci następującej:

$$(2) \quad s_l = \frac{2}{3} Q \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_H}, \quad s_z = \frac{2}{3} Q \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_H}, \quad s_r = \frac{2}{3} Q \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_H},$$

gdzie Q jest granicą plastyczności przy jednoosiowym stanie naprężeń, a ε_H zastępczym odkształceniem plastycznym:

$$(3) \quad \varepsilon_H = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_l^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_r^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_l^2 + \varepsilon_l \varepsilon_z + \varepsilon_z^2}.$$

Warunek równowagi rozpatrywanej warstwy ma postać

$$(4) \quad \frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_l}{\rho} = 0,$$

gdzie σ_r i σ_l są naprężeniami występującymi w kierunku promieniowym i osiowym. Wobec założenia, że grubość materiału g jest nieznaczna w porównaniu z wielkością promienia r , powyższy warunek można napisać w przybliżonej postaci przyjmując zamiast zmiennego promienia $\rho = r + x$ jego średnią wartość r . Jeżeli ponadto uwzględnić, że

$$(5) \quad \sigma_r - \sigma_l = s_r - s_l = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_l}{\varepsilon_H} \frac{2}{3} Q,$$

to równanie (4) przyjmie postać

$$(6) \quad d\sigma_r = \frac{2}{3} Q \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_r}{\varepsilon_H} \frac{dx}{r}.$$

Uwzględniając we wzorach (3) i (6) związek

$$(7) \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_l - \varepsilon_z,$$

wyrażający warunek nieściśliwości oraz zależność $dx/r = d\varepsilon_l$, wynikającą z równania (1) otrzymamy

$$(8) \quad d\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{3}} Q \frac{(2\varepsilon_l + \varepsilon_z) d\varepsilon_l}{\sqrt{\varepsilon_l^2 + \varepsilon_z \varepsilon_l + \varepsilon_z^2}}.$$

Po scałkowaniu równania (8) otrzymamy w dalszym ciągu

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} Q \sqrt{\varepsilon_l^2 + \varepsilon_z \varepsilon_l + \varepsilon_z^2} + C$$

lub korzystając z zależności (3)

$$\sigma_r = Q \varepsilon_H + C.$$

Stałą C wyznaczymy z warunku, by naprężenie promieniowe σ_r zniknęło na zewnętrznej powierzchni blachy. Otrzymamy wówczas

$$(9) \quad \sigma_r = Q (\varepsilon_H - \varepsilon_H^z).$$

Stąd można już wyznaczyć nacisk p wywierany przez narzędzie na wewnętrzną powierzchnię materiału. Wyniesie on

$$(10) \quad p = Q(\varepsilon_H^z - \varepsilon_H^w),$$

gdzie ε_H^z i ε_H^w oznaczają odpowiednie wartości zastępczego odkształcenia plastycznego dla zewnętrznej ($x = g/2$) i wewnętrznej ($x = -g/2$) warstwy materiału. Wielkość siły osiowej P odpowiadającej naciskowi p wyznaczymy z warunku równowagi elementu wydzielonego dwiema płaszczyznami przechodzącymi przez środek krzywizny i tworzącymi kąt środkowy $d\theta$:

$$p \left(r - \frac{g}{2} \right) d\theta = P d\theta,$$

a stąd

$$(11) \quad P = \frac{p}{r - \frac{g}{2}}.$$

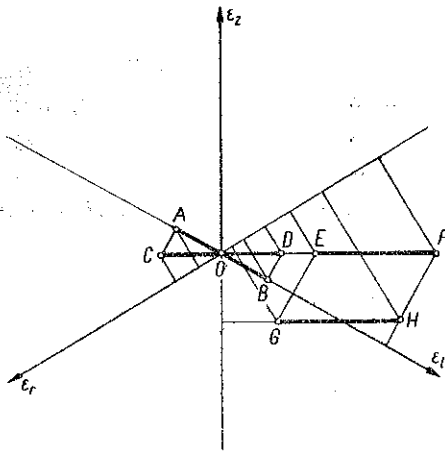
Znając wartości naprężenia promieniowego σ_r w każdym punkcie przekroju można już łatwo wyznaczyć naprężenie średnie $\sigma_m = \sigma_r - s_r$ i pozostałe dwa naprężenia główne σ_z i σ_l korzystając ze związków

$$(12) \quad \sigma_z = s_z + \sigma_m = (s_z - s_r) + \sigma_r, \quad \sigma_l = s_l + \sigma_m = (s_l - s_r) + \sigma_r.$$

Przedstawionym wyżej zależnościom odpowiada prosta interpretacja geometryczna na wykresach sporządzonych w układzie trzech osi odpowiadających kierunkom głównym i tworzących ze sobą kąty 120° . W takim układzie współrzędnych każdy stan odkształcenia określony wartościami trzech wydłużeń głównych $\varepsilon_l, \varepsilon_r, \varepsilon_z$ spełniających warunek $\varepsilon_l + \varepsilon_r + \varepsilon_z = 0$ może być przedstawiony na wykresie przez pewien punkt, którego rzuty prostokątne na każdą z osi współrzędnych odmierzają na nich odcinki proporcjonalne do wartości tych wydłużeń. Ponieważ przy gięciu składowe stanu odkształcenia zmieniają się w sposób liniowy wraz z odległością rozpatrywanej warstwy od linii środkowej, przeto punkty reprezentujące te stany tworzyć będą na wykresie odcinek linii prostej.

Na rysunku 1 przedstawiono odcinki prostych reprezentujące różne rodzaje gięcia; odcinek AB odpowiada gięciu wąskich prętów, przy których można przyjąć schemat odkształcenia $\varepsilon_l = -1/2 \varepsilon_z = -1/2 \varepsilon_r$, odcinek CD reprezentuje gięcie walcowe szerokich pasm o schemacie $s_l = -\varepsilon_r, \varepsilon_z = 0$. Odcinek EF przedstawia gięcie z rozciąganiem, przy którym nie ulega zmianie szerokość odkształcanego pasma ($\varepsilon_z = 0$), a odcinek GH gięcie z rozciąganiem, przy którym następuje zmniejszanie szerokości materiału ($0 > \varepsilon_z = \text{const}$).

W przypadku odkształcenia proporcjonalnego odległość danego punktu od środka układu współrzędnych jest równa wartości zastępczego odkształcenia plastycznego ϵ_H . A zatem

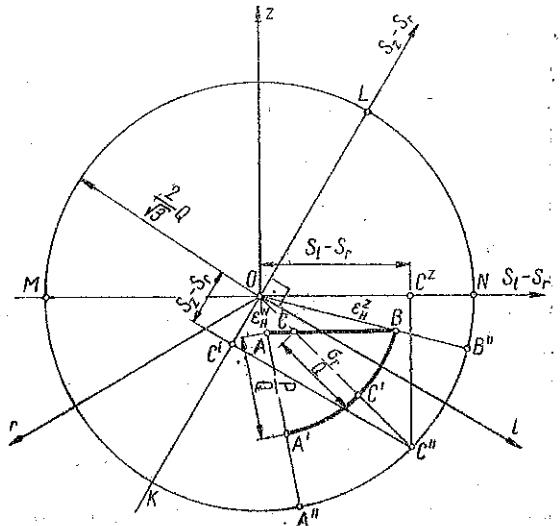


Rys. 1

stosownie do wyrażenia (9) naprężenie promieniowe σ_r w dowolnym punkcie C (rys. 2) jest proporcjonalne do różnicy odległości od środka układu współrzędnych punktu B odpowiadającego zewnętrznej warstwie materiału i rozpatrywanego punktu C. Jeżeli więc przez punkt B poprowadzić ze środka układu łuk koła o promieniu OB, to naprężenie σ_r reprezentować będzie długość odcinka CC' leżącego na promieniu poprowadzonym ze środka układu aż do przecięcia się z łukiem $BC'A'$. Nacisk narzędzia wywierany na wewnętrz-

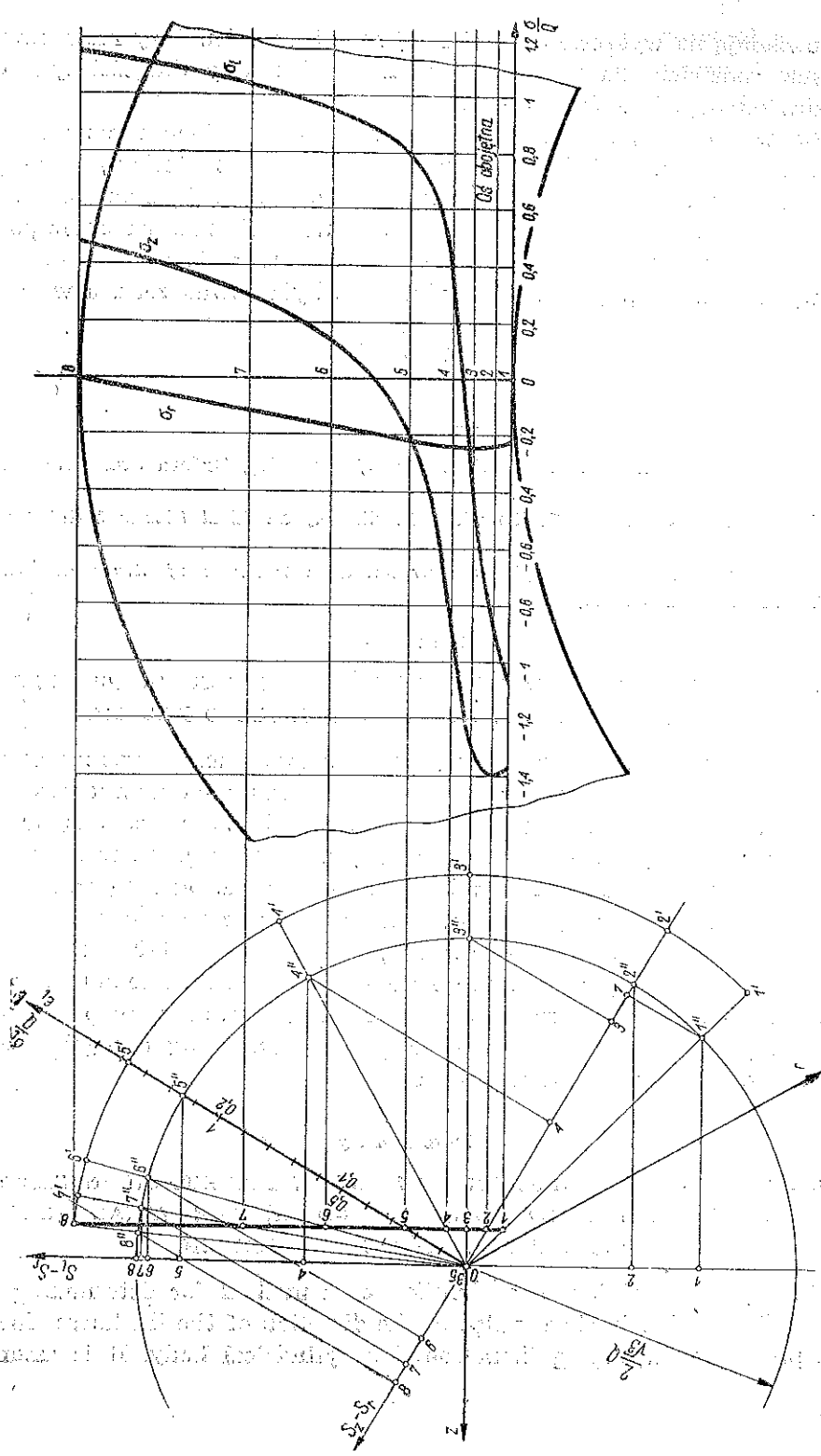
ną powierzchnię materiału jest na tym wykresie przedstawiony długością odcinka AA' .

Dla wyznaczenia wartości pozostałych dwu naprężeń głównych z zależności (12) konieczna jest znajomość różnicy odpowiednich dewiatorów $s_z - s_r$ i $s_t - s_r$. Wartości tych różnic można również wyznaczyć wykreślnie przedłużając promień OCC' do przecięcia się w punkcie C'' z kołem o promieniu $2Q/\sqrt{3}$ poprowadzonym ze środka układu. Łatwo wykazać, że rzut punktu C'' na prostą KL prostopadłą do osi l wyznaczy na niej odcinek OC^l równy różnicy $s_z - s_r$, a rzut tegoż punktu na oś MN prostopadłą do osi z wyznaczy odcinek OC^z równy różnicy $s_t - s_r$. Dla wyznaczenia wartości naprężenia osiowego σ_l należy więc dodać odcinki



Rys. 2

CC' i OC^z , jeżeli podziałki naprężeń i odkształceń są tak dobrane, że naprężeniu odpowiadającemu granicy plastyczności Q i odkształceniu $\epsilon = 1$



Rys. 3

odpowiadają na wykresie odcinki o tej samej długości. Przy zastosowaniu innych podziałek dla naprężeń i odkształceń należy długości tych odcinków odpowiednio skorygować.

Na wykresie rys. 3 po stronie prawej przedstawiono wyznaczony tą metodą rozkład naprężeń wzdłuż grubości zginanego materiału, przy czym różnym punktom przekroju poprzecznego odpowiadają stany odkształcenia reprezentowane przez odcinek 1-8 na wykresie umieszczonym po lewej stronie rysunku. Przyjęto przy tym taką wartość odkształcenia ϵ_z , by wypadkowa naprężeń w kierunku osi z była równa zero, a więc

$$\int_{-g/2}^{g/2} \sigma_z dx = 0.$$

Literatura cytowana w tekście

[1] R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Press, New York 1950.

[2] I. Lubahn and G. Sachs, *Bending of an Ideal Plastic Metal*, Trans. ASME, Vol. 72, 1950.

[3] Z. Marciniak, *Graphical Representation of States of Strain and Stress*, Arch. Mech. Stos., 3 (1957).

Резюме

ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ ЛИСТОВОГО ЖЕЛЕЗА

Дается приближенный метод определения распределения напряжений вдоль толщины листа во время навивки на цилиндрический шаблон. Предполагается при этом, что изгиб листа происходит при одновременном действии осевой силы, которая вызывает уменьшение ширины и толщины изгибаемого материала. Проводится геометрическая интерпретация полученных зависимостей в системе координат, оси которых образуют между собой углы в 120° , что можно использовать для графического определения искомых величин. После выяснения принципов графического метода дается пример его применения, определяя распределение трех главных напряжений в поперечном сечении изгибаемой полосы.

Summary

GRAPHICAL DETERMINATION OF STRESS DISTRIBUTION IN SHEET STRIPS SUBJECTED TO PLASTIC BENDING, THE AXIAL FORCE BEING TAKEN INTO CONSIDERATION

This paper contains a description of a method for determining the stress distribution in sheet strips in the direction of the thickness, during the process of wrapping them round a cylindrical body. It is assumed

that the bending takes place with the simultaneous action of an axial force, causing a reduction in width and thickness of the strip. A geometrical interpretation of the relations obtained is given, using a system of three axes of coordinates, each pair of the coordinate axes comprising an angle of 120° . This method may be used for the graphical determination of the quantities required. Following the description of the principles of the graphical method, an example of application is given, in which the distribution of the three principal stresses in a cross-section of the strip is determined.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 kwietnia 1958 r.