

JAN MADEJSKI

DYNAMICZNA TEORIA PLASTYCZNOŚCI JAKO POMOST  
MIĘDZY TEORIĄ SPRĘŻYSTOŚCI A TEORIĄ PLASTYCZNOŚCI

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CVI

## SPIS TREŚCI

	Str
1. Wyznaczenie rozkładu naprężeń w przekroju pręta	469
2. Analiza odkształceń plastycznych i ustalenie chwili pierwszego pęknięcia	475
3. Pełzanie giętne	477
4. Związek między wytrzymałością na pełzanie giętne, a wytrzymałością na zwykłe pełzanie	479
5. Wnioski	480

W pracy niniejszej pragniemy wykazać, że izotermiczne zjawiska należące do dynamicznej teorii plastyczności rozpatrywane być mogą w granicy, gdy zmienna określająca czas dąży do nieskończoności, jako zjawiska teorii plastyczności ciała idealnie plastycznego. Uwagi wyjaśniające zostaną podane razem z wnioskami po rozpatrzeniu przykładu, na który (ze względu na prostotę) wybrany został przypadek przyrządkowanego pręta o przekroju prostokątnym, zginanego czystym momentem  $M$ , działającym w płaszczyźnie równoległej do jednego z boków prostokąta. Bliższe dane o «dynamicznej teorii plastyczności»<sup>1</sup> zawierają prace autora [1]-[5].

#### 1. Wyznaczenie rozkładu naprężeń w przekroju pręta

Oznaczmy wysokość przekroju pręta (w płaszczyźnie działania momentu) przez  $h$ , a jego szerokość przez  $b$ . Załóżmy, że w okresie przed chwilą początkową  $t=0$  pręt obciążono stałym w dalszym ciągu momentem  $M$ , przy czym obciążenie nie wywołało ani efektów dynamicznych, ani odkształceń plastycznych. Zatem w chwili początkowej mamy stan sprężysty odkształceń i naprężeń, scharakteryzowany naprężeniami  $\sigma_x = My/I$ ,  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , zgodnie z teorią sprężystości. Przy tym  $I$  oznacza moment bezwładności,  $I = bh^3/12$ , zaś  $y$  jest odległością włókna od osi obojętnej, będącej osią symetrii przekroju, prostopadłą do płaszczyzny działania momentu.

Opisany stan w chwili  $t=0$  jest stanem sprężystym nietrwałym, jeśli począwszy od pewnego miejsca  $y = y_{E_0}$  naprężenia  $\sigma_x$  przekraczają prawdziwą granicę sprężystości  $\sigma_E$  (rys. 1). Znając liniowy rozkład naprężeń  $\sigma_x$  można określić wartość  $y_{E_0}$ , która wynosi

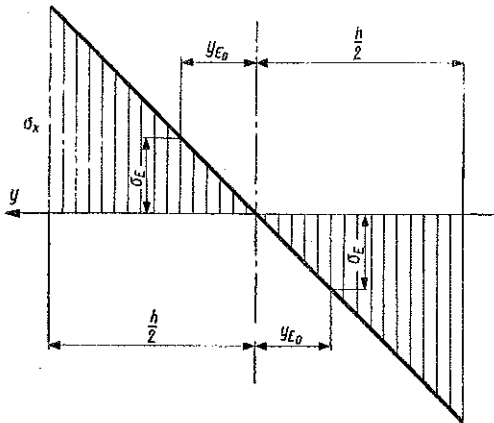
$$(1.1) \quad y_{E_0} = \frac{\sigma_E I}{M}$$

Wprowadzimy bezwymiarową współrzędną  $\eta = y/h$ ; wtedy

$$(1.2) \quad \eta_{E_0} = \frac{y_{E_0}}{h} = \frac{\sigma_E I}{Mh}$$

<sup>1</sup> Termin ten zachowano w niniejszej pracy, gdyż użyty został przez autora w poprzednich pracach. Nie jest on uważany za trafny, wstrzymujemy się jednak ze zmianą wobec braku ustalonej terminologii dla zjawisk termoelastoplastycznych w metalach.

Przystąpmy do analizy zmian rozkładu naprężeń w procesie powstawania odkształceń plastycznych. Analiza zostanie przeprowadzona przy założeniu płaskości przekrojów odkształconych; założenie to zostało sprawdzone doświadczalnie prawie aż do zniszczenia pręta zginanego.



Rys. 1

Mamy zatem  $\varepsilon_x$  odpowiadające  $\sigma_x$ . Podczas zginania mamy stałe w okolicy osi obojętnej warstwę ograniczoną współrzędnymi  $y = \pm y_E$  lub  $\eta = \pm \eta_E$ , w której jest stałe  $|\sigma_x| \leq \sigma_E$ . W tej warstwie «sprężystej» panuje linicwy rozkład naprężeń w myśl wzoru

$$(1.3) \quad \sigma_x = \sigma_E \frac{\eta}{\eta_E} \quad (|\sigma_x| < \sigma_E).$$

Obszar «sprężysty» ulega zmianom w czasie, bowiem granica jego doznaje przesunięć, mamy więc  $\eta_E = \eta_E(t)$ . Odkształcenia w obszarze sprężystym mają charakter czysto sprężysty i w związku z tym wyrażają się wzorem

$$(1.4) \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_E}{E} \frac{\eta}{\eta_E}.$$

Ponieważ jednak przekroje mają być płaskie, więc wzór powyższy stosuje się dla całego przekroju z tym, że dla  $|\eta| \leq \eta_E$  mamy tylko odkształcenia sprężyste, zaś dla  $|\eta| > \eta_E$  także odkształcenia trwałe (plastyczne).

Dla całego przekroju stosuje się warunek znikania siły wypadkowej (spełniany łatwo przez antysymetrię profilu naprężeń) oraz warunek stałości momentu naprężeń, zapisany w formie całki

$$(1.5) \quad M = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy = bh^2 \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_x \eta d\eta.$$

Warunek ten po przekształceniach przybiera postać

$$(1.6) \quad \int_{\eta_E}^{1/2} s \eta d\eta = \frac{\eta_E^2}{6} - \frac{1}{24} \left( 3 - \frac{1}{\eta_E} \right) = \frac{\eta_E^2}{6} - \frac{\kappa}{24},$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(1.7) \quad s = \frac{\sigma_x}{\sigma_E} - 1, \quad \kappa = 3 - \frac{1}{\eta_E}.$$

Rozpatrzmy teraz zmienność w czasie naprężeń w strefie «plastycznej». O ile rozkład naprężeń w strefie sprężystej podlega zmianom wyłącznie wskutek przesuwania się granic tej strefy, związanego z utrzymaniem stałości momentu oporu, o tyle w strefie plastycznej wartość naprężeń zmniejsza się stosownie do równania

$$(1.8) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + \frac{\sigma_x - \sigma_E}{\Theta} = E \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t},$$

które odnosi się do przypadku jednowymiarowego, a przy tym izotermicznego, jeśli  $\Theta = \text{const}$  ( $\Theta$  jest czasem relaksacji). Przy stałości  $\Theta$  wygodnie jest posługiwać się czasem homologicznym  $t_H = t/\Theta$ . Wykorzystując to oznaczenie oraz wstawiając wzory (1.7) i (1.3) do wzoru (1.8) otrzymamy równanie

$$(1.9) \quad \frac{\partial s}{\partial t_H} + s = \eta \frac{\partial}{\partial t_H} \left( \frac{1}{\eta_E} \right) = - \frac{\eta}{\eta_E^2} \frac{d\eta_E}{dt_H}.$$

Równanie to można scałkować w granicach od  $\eta = \eta_E$  do  $\eta = 1/2$  po pomnożeniu stron przez  $\eta d\eta$ ; otrzymamy wówczas

$$(1.10) \quad \int_{\eta_E}^{1/2} \left( \frac{\partial s}{\partial t_H} + s \right) \eta d\eta = - \frac{1}{3\eta_E^2} \frac{d\eta_E}{dt_H} \left( \frac{1}{8} - \eta_E^3 \right).$$

W celu wyrugowania zmiennej  $s$  z równań (1.10) i (1.6) różniczkujemy to ostatnie względem  $t_H$ ; znajdziemy, że

$$\frac{\partial}{\partial t_H} \int_{\eta_E}^{1/2} s \eta d\eta = \frac{\eta_E}{3} \frac{d\eta_E}{dt_H} = \int_{\eta_E}^{1/2} \frac{\partial s}{\partial t_H} \eta d\eta.$$

Dodając stronami to równanie oraz równanie (1.6) otrzymujemy

$$(1.11) \quad \int_{\eta_E}^{1/2} \left( \frac{\partial s}{\partial t_H} + s \right) \eta d\eta = \frac{\eta_E^2}{6} + \frac{d\eta_E}{dt_H} - \frac{\kappa}{24}.$$

Zestawienie prawych stron równań (1.10) i (1.11) prowadzi po uproszczeniach do równania

$$(1.12) \quad \frac{d\eta_E}{dt_H} + 4\eta_E^4 - \kappa\eta_E^2 = 0,$$

które całkuje się łatwo przez rozdzielenie zmiennych:

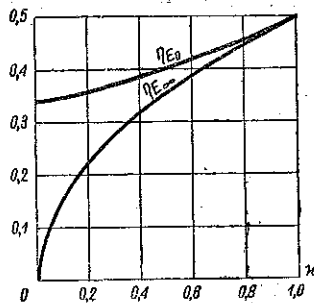
$$(1.13) \quad t_H = \int_{\eta_{E_0}}^{\eta_E} \frac{d\eta_E}{\eta_E^2 (\kappa - 4\eta_E^2)}, \quad \eta_{E_0} = \frac{1}{3 - \kappa}$$

Całka ta zależy od parametru  $\kappa$  charakteryzującego obciążenie. Charakterystyka ta jest następująca. Dla  $\kappa \geq 1$  mamy do czynienia z naprężeniami nie przekraczającymi prawdziwej granicy sprężystości  $\sigma_E$ ; w szczególności dla  $\kappa = 1$  mamy  $\sigma_{x \max} = \sigma_E$ . Dla  $1 > \kappa > 0$  mamy przypadki, w których stan naprężeń w materiale zmierza ze wzrostem czasu do elastoplastycznego rozkładu obciążenia. Dla  $\kappa = 0$  mamy (po nieograniczonym upływie czasu) osiągniętą nośność graniczną. Wreszcie dla  $\kappa < 0$  mamy nieustalone pełzanie gięte (ruch plastyczny niewstrzymany według terminologii W. Olszaka i W. Urbanowskiego, [6]).

Zajmiemy się przede wszystkim przypadkiem  $1 > \kappa > 0$  jako najbardziej interesującym z technicznego punktu widzenia. Całka (1.13) wynosi w tym przypadku

$$(1.14) \quad -\kappa t_H = \frac{1}{\eta_E} - \frac{1}{\eta_{E_0}} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \ln \left( \frac{\frac{\sqrt{\kappa}}{2} - \eta_E}{\frac{\sqrt{\kappa}}{2} + \eta_E} \cdot \frac{\frac{\sqrt{\kappa}}{2} + \eta_{E_0}}{\frac{\sqrt{\kappa}}{2} - \eta_{E_0}} \right)$$

Nie trudno zauważyć, że w miarę upływu czasu  $t_H \rightarrow \infty$  dąży  $\eta_E$  do wartości  $\eta_{E_\infty} = \sqrt{\kappa}/2$ . Na rysunku 2 przedstawiono zależności  $\eta_{E_0}(\kappa)$  i  $\eta_{E_\infty}(\kappa)$  dla rozpatrywanego zakresu  $\kappa$ . Znajomość zależności  $\eta_E(t_H)$  pozwala na wyznaczenie zależności  $s(\eta_E)$  z równania (1.9); równanie to przekształcimy w sposób następujący:



Rys. 2

$$\frac{\partial s}{\partial \eta_E} + s \frac{dt_H}{d\eta_E} = -\frac{\eta}{\eta_E^2}$$

Podstawiając otrzymaną z równania (1.12) wartość

$$\frac{dt_H}{d\eta_E} = \frac{1}{\eta_E^2(\kappa - 4\eta_E^2)}$$

otrzymamy równanie

$$(1.15) \quad \frac{\partial s}{\partial \eta_E} + \frac{s}{\eta_E^2(\kappa - 4\eta_E^2)} = -\frac{\eta}{\eta_E^2}$$

Rozwiązanie tego równania będzie miało zapis podwójny, gdyż odmienne są warunki początkowe dla dwu różnych obszarów; mianowicie rozwiązanie  $s(\eta, \eta_E)$  ma spełniać następujące warunki:

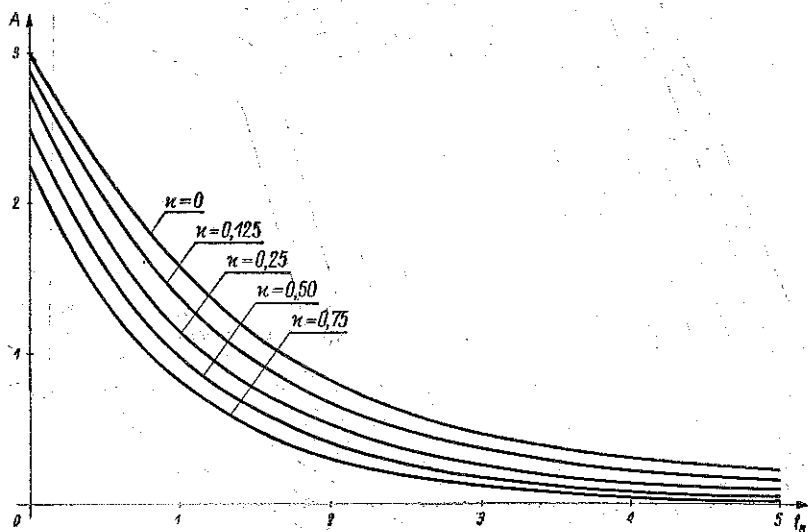
$$\begin{aligned} s(\eta, \eta_{E_0}) &= \frac{\eta}{\eta_{E_0}} - 1 & \text{dla } \eta > \eta_{E_0}, \\ s(\eta_E, \eta_E) &= 0 & \text{dla } \eta_{E_\infty} < \eta < \eta_{E_0}. \end{aligned}$$

Prócz tego pochodna musi spełnić warunek

$$\left[ \frac{\partial s}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_E} = \frac{1}{\eta_E}$$

aby naprężenia  $\sigma_x$  były funkcją ciągłą i posiadającą ciągłą pochodną w całym przekroju. Poszukiwane rozwiązanie równania (1.15) jest następujące:

$$(1.16) \quad s(\eta, \eta_E) = \begin{cases} \left\{ \frac{\eta}{\eta_{E_0}} - 1 - \eta \int_{\eta_{E_0}}^{\eta_E} \exp \left[ \int_{\eta_{E_0}}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi^2(\kappa - 4\xi^2)} \right] \frac{d\xi}{\xi^2} \right\} \times \\ \times \exp \left[ - \int_{\eta_{E_0}}^{\eta_E} \frac{d\xi}{\xi^2(\kappa - 4\xi^2)} \right] & (\eta > \eta_{E_0}), \\ \eta \int_{\eta_E}^{\eta} \exp \left[ \int_{\eta_{E_0}}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi^2(\kappa - 4\xi^2)} \right] \frac{d\xi}{\xi^2} \exp \left[ - \int_{\eta_{E_0}}^{\eta_E} \frac{d\xi}{\xi^2(\kappa - 4\xi^2)} \right] & (\eta_{E_0} > \eta > \eta_{E_{\infty}}). \end{cases}$$



Rys. 3

Można sprawdzić, że istotnie podane rozwiązanie spełnia wymagane warunki.

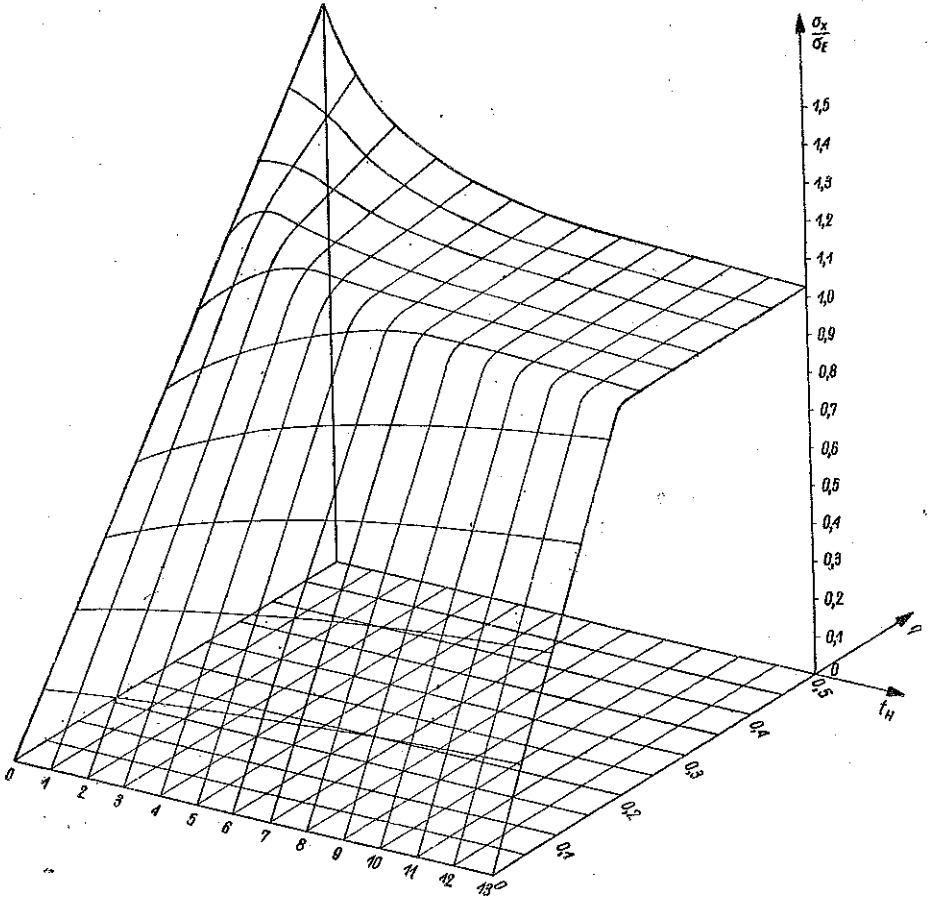
Zauważmy, że w obszarze  $\eta > \eta_{E_0}$  rozkład naprężeń jest liniowy, funkcję  $s$  można dla tego obszaru przedstawić w postaci

$$(1.17) \quad s = A\eta - B$$

przy czym

$$(1.18) \quad A = e^{-t_H} \left\{ \frac{1}{\eta_{E_0}} - \int_{\eta_{E_0}}^{\eta_E} \exp \left[ \int_{\eta_{E_0}}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi^2 (\kappa - 4\xi^2)} \right] d\xi \right\},$$

$$(1.19) \quad B = e^{-t_H}.$$



Rys. 4

Wykres funkcji  $A(t_H, \kappa)$  przedstawiono na rys. 3. Wzory (1.16) umożliwiają wykonanie wykresu obrazującego zmienność rozkładu naprężeń w zależności od czasu. Na rysunku 4 przedstawiony jest przykład powierzchni  $s(\eta, t_H)$  dla  $\kappa = 0,125$ .



## 2. Analiza odkształceń plastycznych i ustalenie chwili pierwszego pęknięcia

Odształcenia plastyczne (trwałe)  $\varepsilon_{px} \equiv \varepsilon_p$  obliczymy zmniejszając wartość odkształceń całkowitych

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_E}{E} \frac{\eta}{\eta_E}$$

o wartość odkształceń sprężystych  $\varepsilon_{Ex} \equiv \varepsilon_E$ , wynikających z chwilowego rozkładu naprężeń  $\sigma_x$ :

$$\varepsilon_E = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x}{\sigma_E} \frac{\sigma_E}{E} = \frac{\sigma_E}{E} (1 + s).$$

Mamy zatem

$$(2.1) \quad \varepsilon_p = \frac{\sigma_E}{E} \left( \frac{\eta}{\eta_E} - 1 - s \right).$$

Interesuje nas przede wszystkim odkształcenie plastyczne w najbardziej obciążonych włóknach skrajnych; w tym zaś obszarze mamy

$$s = A\eta - e^{-tH},$$

skąd

$$(2.2) \quad \varepsilon_p = \frac{\sigma_E}{E} \left[ \left( \frac{1}{\eta_E} - A \right) \eta - (1 - e^{-tH}) \right] \quad (\eta > \eta_E).$$

W szczególności dla  $\eta = 1/2$  mamy ( $\varepsilon_p = \varepsilon_{p \max}$ )

$$(2.3) \quad \varepsilon_{p \max} = \frac{\sigma_E}{E} \left[ \left( \frac{1}{\eta_E} - A \right) \frac{1}{2} - (1 - e^{-tH}) \right].$$

Okres  $T_H$ , po którym nastąpi pierwsze pęknięcie włókien skrajnych, określony jest przez związaną z  $T_H$  wartość odkształcenia plastycznego, równą (zgodnie z używanym w poprzednich pracach kryterium zniszczenia materiału) granicznej drodze poślizgu  $\eta_z$ . Wynika stąd warunek

$$(2.4) \quad \frac{E\eta_z}{\sigma_E} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\eta_E} - A \right]_{t=T_H} - (1 - e^{-T_H}).$$

Oznaczając (zgodnie z [5]) wielkość  $\sigma_E/E\eta_z$  przez symbol  $(Ho)$  (liczba Hooke'a),

$$(2.5) \quad (Ho) = \frac{\sigma_E}{E\eta_z},$$

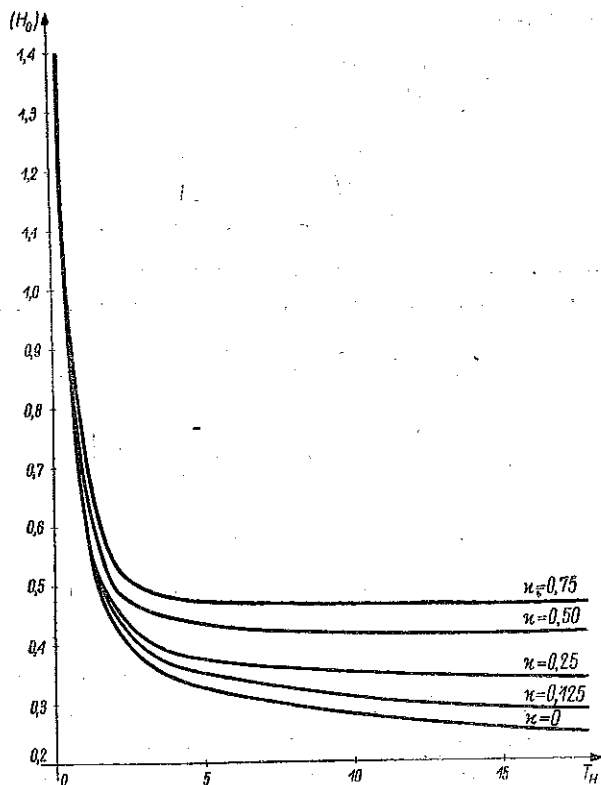
mamy w danym przypadku

$$(2.6) \quad (Ho) = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\eta_E} - A \right]_{t=T_H} - (1 - e^{-T_H}) \right\}^{-1}.$$

Na rysunku 5 przedstawiono zależność  $(Ho) = f(\nu, T_H)$  dla omawianego zakresu liczb  $\nu$ .

Funkcja  $A$  ze wzrostem czasu maleje do zera, stąd dla nieograniczenie długo trwającego obciążenia  $T_H \rightarrow \infty$  otrzymamy

$$\lim_{T_H \rightarrow \infty} (Ho) = \frac{1}{\frac{1}{2\eta_E} - 1} = \frac{1}{\sqrt{\nu} - 1}$$



Rys. 5

Z warunku tego określić można wartość największą funkcji  $\nu$ , jaką można przyjąć przy danym  $(Ho)$ ; wynosi ona

$$(2.7) \quad \nu_{\max} = \left[ \frac{(Ho)}{1 + (Ho)} \right]^2$$

Maksymalny moment  $M_{\max}$  można teraz obliczyć ze wzoru

$$(2.8) \quad \frac{M_{\max} h}{\sigma_E I} = 3 - \left[ \frac{(Ho)}{1 + (Ho)} \right]^2 = (Ti),$$

gdzie  $(Ti)$  oznacza liczbę Timoszenki (por. [5]).

Zauważmy, że moment maksymalny równa się momentowi dla nośności granicznej tylko w takim przypadku, gdy  $(H_0) = 0$ , tj. dla nieograniczenia ciągłego materiału ( $\eta_z \rightarrow \infty$ ). Wynika to z przyjętej płaskości przekrojów (hipotezy sprawdzonej doświadczalnie), która w przypadku nośności granicznej (pełnego uplastycznienia przekroju) prowadzi do nieograniczonego wzrostu odkształceń.

Dla materiału idealnie sprężystego albo całkiem kruchego ( $\sigma_E \rightarrow \infty$  albo  $\eta_z \rightarrow 0$ ) otrzymamy  $(H_0) = \infty$  oraz  $(T_i) = 3$ .

### 3. Pełzanie giętne

Pełzanie giętne zostało określone poprzednio przez ujemną wartość parametru  $\kappa$ . Właściwie należy do pełzania giętnego zaliczyć również przypadek  $\kappa = 0$ , gdyż również wtedy odkształcenia wzrastają nieograniczenie. Wyodrębniliśmy jednak przypadek  $\kappa < 0$ , gdyż w tym przypadku całka (1.13) wyraża się jednym ogólnym wzorem. Mianowicie

$$(3.1) \quad -\kappa t_H = \frac{1}{\eta_E} - \frac{1}{\eta_{E_0}} - \frac{2}{\sqrt{-\kappa}} \arctg \left( \frac{2}{\sqrt{-\kappa}} \frac{\eta_{E_0} - \eta_E}{1 - \frac{4}{\kappa} \eta_{E_0} \eta_E} \right).$$

Dla dużych bezwzględnych wartości  $\kappa$  wypada małe  $\eta_{E_0}$ ; ponieważ zaś  $\eta_E \leq \eta_{E_0}$ , więc z dobrym przybliżeniem można przyjąć  $\arctg x = x$ , tzn. otrzymamy zamiast (3.1) wzór

$$(3.2) \quad t_H = \frac{1}{\kappa \eta_{E_0}} \left( 1 - \frac{\eta_{E_0}}{\eta_E} \right) \frac{1}{1 - \frac{4}{\kappa} \eta_{E_0} \eta_E},$$

z którego wynika

$$(3.3) \quad \eta_E = \frac{1 - \kappa \eta_{E_0} t_H}{8 \eta_{E_0}^2 t_H} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{16 \eta_{E_0}^3 t_H}{(1 - \kappa \eta_{E_0} t_H)^2}} \right].$$

Jak widać, podczas nieograniczonego wzrostu czasu granica strefy sprężystej dąży do zera, tj. zbliża się do osi obojętnej.

Zależność (3.3) umożliwia wyznaczenie rozkładu naprężeń za pomocą formuł (1.16). W szczególności można określić wielkość funkcji  $A$  [wzór (1.18)] metodą całkowania graficznego po uprzednim wyznaczeniu pochodnej  $d(1/\eta_E)/dt_H$  z równania (3.3). Sposób ten jest łatwiejszy, gdyż pochodną tę łatwo się wyznacza. Otrzymamy wtedy

$$A = e^{-t_H} \left[ \frac{1}{\eta_{E_0}} + \int_0^{t_H} e^{t_H} \frac{d\left(\frac{1}{\eta_E}\right)}{dt_H} dt_H \right].$$

W szczególności dla dużych wartości  $t_H$  wyrażenie (3.3) można uprościć, gdyż ułamek

$$\frac{16\eta_{E_0}^3 t_H}{(1 - \kappa\eta_{E_0} t_H)^2}$$

jest wtedy dostatecznie mały. W tych przypadkach wystarcza przybliżenie

$$-1 + \sqrt{1 + \frac{16\eta_{E_0}^3 t_H}{(1 - \kappa\eta_{E_0} t_H)^2}} \approx \frac{8\eta_{E_0}^3 t_H}{(1 - \kappa\eta_{E_0} t_H)^2},$$

w związku z czym

$$(3.4) \quad \eta_E \approx \frac{\eta_{E_0}}{1 - \kappa\eta_{E_0} t_H} \quad (\text{duże } t_H).$$

Wobec

$$\frac{d\left(\frac{1}{\eta_E}\right)}{dt_H} = -\kappa,$$

mamy tu

$$(3.5) \quad A = -\kappa + 3e^{-t_H} \quad (\text{duże } t_H),$$

przy czym wzięto pod uwagę, że

$$\eta_{E_0} = \frac{1}{3 - \kappa}.$$

Naprężenia dla  $\eta > \eta_{E_0}$  wyrażą się zatem wzorem

$$(3.6) \quad \frac{\sigma_x}{\sigma_E} = 1 - \kappa\eta + e^{-t_H}(3\eta - 1) \quad (\text{duże } t_H),$$

odkształcenia plastyczne

$$(3.7) \quad \varepsilon_p = \frac{\sigma_E}{E} \left[ \left( \frac{1 - \kappa\eta_{E_0} t_H}{\eta_{E_0}} - 3e^{-t_H} + \kappa \right) \eta - (1 - e^{-t_H}) \right] \quad (\text{duże } t_H),$$

zaś kryterium zniszczenia skrajnych włókien jest następujące:

$$(3.8) \quad (Ho) = \frac{2}{1 - e^{-T_H} - \kappa T_H} \quad (\text{duże } T_H).$$

Zauważmy, że wraz z nieograniczonym wzrostem czasu holologicznego  $t_H$  naprężenia w skrajnych włóknach ( $\eta = 1/2$ ) nie spadają do granicy sprężystości  $\sigma_E$  jak w przypadku wstrzymanego ruchu plastycznego i nośności granicznej, lecz dążą do wartości

$$\lim_{t_H \rightarrow \infty} \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_E} \right)_{\max} = 1 - \frac{\kappa}{2},$$

przekraczającej jedność, gdy  $\kappa < 0$ . W granicy ( $t_H \rightarrow \infty$ ) uzyskujemy liniowy rozkład naprężeń

$$(3.9) \quad \lim_{t_H \rightarrow \infty} \frac{\sigma_x}{\sigma_E} = 1 - \kappa \eta.$$

#### 4. Związek między wytrzymałością na pełzanie giętne a wytrzymałością na zwykłe pełzanie

Oznaczmy naprężenia wywołujące zniszczenie próbki po czasie  $T_H$  podczas jednowymiarowego pełzania pod wpływem siły rozciągającej («zwykłego» pełzania) przez  $k_r$ . Oznaczmy następnie pozorne naprężenia obliczone według zasad wytrzymałości materiałów, wywołujące pęknięcia skrajnych włókien próbki obciążonej czystym momentem gnącym po czasie  $T_H$  przez  $k_g$ . W pierwszym przypadku dysponujemy wzorem (por. [2])

$$(4.1) \quad \frac{k_r}{\sigma_E} = 1 + \frac{1}{T_H(H_0)}.$$

W drugim zaś mamy

$$(4.2) \quad \frac{k_g}{\sigma_E} = \frac{1}{2} \frac{Mh}{\sigma_E I} = \frac{3 - \kappa}{2},$$

skąd

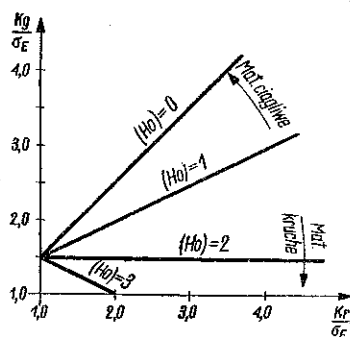
$$(4.3) \quad -\kappa = 2 \frac{k_g}{\sigma_E} - 3.$$

Ograniczmy się do przypadku dużych wartości  $T_H$ , przy których można posłużyć się wzorem (3.8) pomijając w dodatku wyrażenie  $e^{-T_H}$ ; bierzemy zatem pod uwagę dla pełzania giętnego wzór

$$(4.4) \quad (H_0) = \frac{2}{1 - \kappa T_H} = \frac{2}{1 + T_H \left( 2 \frac{k_g}{\sigma_E} - 3 \right)}.$$

Ze wzorów (4.1) i (4.4) wyrugujemy czas zniszczenia  $T_H$ . Otrzymamy związek

$$(4.5) \quad \frac{k_g}{\sigma_E} = \frac{3}{2} + \left[ 1 - \frac{(H_0)}{2} \right] \left( \frac{k_r}{\sigma_E} - 1 \right).$$



Rys. 6

Na podstawie tego równania można wykreślić w układzie  $k_g/\sigma_E$ ,  $k_r/\sigma_E$  linie  $(H_0) = \text{const}$ , przy czym wszystkie te linie przechodzą przez punkt o współrzędnych  $k_r/\sigma_E = 1$ ,  $k_g/\sigma_E = 3/2$ . Dla materiału idealnie ciągliwego  $(H_0) = 0$  otrzy-

maliliśmy linię  $k_g/\sigma_E = 1/2 + k_r/\sigma_E$ , natomiast dla materiału dość kruchego  $(H_0) = 2$  mielibyśmy  $k_g/\sigma_E = 3/2$  niezależnie od wartości  $k_r/\sigma_E$ . Dla  $(H_0) > 2$ , tj. dla materiałów bardziej kruchych, byłoby nawet  $k_g/\sigma_E < k_r/\sigma_E$ . Stosunki te obrazuje wykres na rys. 6.

## 5. Wnioski

Podstawowym wnioskiem, jaki omówimy, jest rola dynamicznej teorii plastyczności jako pomostu pomiędzy teorią sprężystości a teorią plastyczności. Chodzi tu zwłaszcza o zagadnienie izotermiczne oraz przypadki obciążeń przykładanych nagle bez wywoływania efektów dynamicznych i utrzymujących się później na stałym poziomie. Przyjęte w dynamicznej teorii plastyczności równanie stanu, charakteryzujące sposób powstawania odkształceń plastycznych, zawiera w sobie podstawową zasadę teorii: powstawanie odkształceń plastycznych wymaga upływu czasu. Jeśli czas liczymy od chwili przyłożenia opisanego poprzednio obciążenia, to w chwili  $t = 0$  nie może być mowy o odkształceniach trwałych. Jeśli zatem materiał znajdował się w stanie neutralnym, to stan jego jest sprężysty i zależy od obciążenia zewnętrznego. W miarę upływu czasu możliwe jest powstawanie odkształceń plastycznych i zmiana rozkładu naprężeń, jeśli wyteżenie w pewnych miejscach przekroczy pewną maksymalną wartość. Po nieograniczonym upływie czasu wytworzy się elastoplastyczny stan materiału, który może być przepowiedziany z góry na podstawie teorii plastyczności.

W wielu przypadkach materiałów bardziej kruchych  $[(H_0)$  dużej] klasyczna teoria plastyczności nie zdaje egzaminu; próbuje się zatem innych postaci zależności między intensywnościami naprężeń i odkształceń aniżeli przyjęta przez Tresca'ę i Saint-Venanta. Z punktu widzenia dynamicznej teorii plastyczności fakt ten wynika z niemożności osiągnięcia stanu równowagi, stanu elastoplastycznego, wskutek zniszczenia elementu obciążonego w czasie skończonym. Kryterium zniszczenia polega na ograniczeniu drogi poślizgów będącej sumą bezwzględnych wartości odkształceń plastycznych.

## Literatura cytowana w tekście

- [1] J. Madejski, *Pewne podstawowe zagadnienia dynamicznej teorii plastyczności*, ref. na Zjeździe ZMOC IPPT PAN, 1954.
- [2] J. Madejski, *O pelzaniu i pelzarce*, Rozpr. Inż. 1 (1956).
- [3] J. Madejski, *Wyboczenie pręta przyrmatycznego jako zagadnienie dynamicznej teorii plastyczności*, Rozpr. Inż. 3 (1956).
- [4] J. Madejski, *Zaprawa, opóźnienie sprężyste i naprężenia resztkowe w ujęciu dynamicznej teorii plastyczności*, Rozpr. Inż. 4 (1957).

[5] J. Madejski, *Teoria podobieństwa zjawisk termoelastoplastycznych*, Rozpr. Inż. 4 (1957).

[6] W. Olszaki i W. Urbanowski, *Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrzznego i siły podłużnej*, Arch. Mech. Stos. 3 (1955).

#### Резюме

### ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ КАК ВЯЖУЩИЙ ФАКТОР МЕЖДУ ТЕОРИЕЙ УПРУГОСТИ И ТЕОРИЕЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

На примере призматического стержня прямоугольного сечения, изгибаемого чистым моментом доказывается, что при помощи динамической теории пластичности можно проследить деформирование и напряженное состояние во время преобразования напряженного состояния в пластическое. В особенности, в первоначальный момент приложения нагрузки встречаемся с упругим состоянием, а после истечения неограниченного долгого времени — с пластическим (упруго-пластическим). Этот последний случай возможен только при достаточно тягучих материалах; при хрупких материалах возникновение трещин в волокнах наступит раньше, а соответствующее этому явлению распределение напряжений можно определить при помощи динамической теории пластичности. Этот вопрос также проанализирован в настоящей работе.

#### Summary

### THE DYNAMICAL THEORY OF PLASTICITY AS A LINK BETWEEN THE THEORY OF ELASTICITY AND THE THEORY OF PLASTICITY

It is shown on an example of prismatic rod with rectangular cross-section loaded with a simple bending moment, that it is possible to analyze the state of stress and strain by means of the dynamical theory of plasticity proposed by the author, if the state changes from elastic to plastic.

In particular, at the initial moment of applying the load the state is elastic, while after an infinite period of time it becomes plastic (or elasto-plastic). The latter case is possible for sufficiently ductile materials only. For brittle materials, fracture occurs after a finite time and the corresponding stress distribution can be determined by means of the dynamical theory of plasticity. This problem is also treated in this paper.

KATEDRA TEORII MASZYN CIEPLNYCH  
POLITECHNIKI GDANSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 stycznia 1958 r.